

第一章 緒論

本書共分三章，第一章簡要介紹幾何的意義、學童幾何知識的學習理論以及八十二年國小幾何教材的課程標準；第二章討論八十二年部編國小幾何教材的數學與認知結構；最後一章則嘗試從課程的理論架構來分析八十二年部編國小教材的規劃。

因為國小的幾何教材內容可以區分成討論幾何形體的「圖形與空間」，與討論如長度、角度、面積、體積與容量等的幾何量。而「圖形與空間」是本冊的討論重點；幾何量的內容僅討論與其學習有關的前置經驗，較完整的討論，請讀者參考本叢書規劃在「量與實測」領域的《長度》、《面積》、《體積和角度》以及《重量與容量》等四冊。

第一節 何謂幾何

Geometry(幾何學)一詞的拉丁文是 *geometein*，*geo* 是土地的意思，*metrein* 則是測量的意思，所以它的原意就是土地測量，研究物體形狀、大小、位置以及它們相互關係的學科，包括點、直線、圓、曲線、平面與立體等，以前也稱之為「形學」。

一般在歷史上，我們將幾何學的起源歸功於埃及人與尼羅河的長期互動，例如：古希臘歷史學家 **Herodotus**(希羅多德，約 485~430B.C.)在其書中的說法，認為尼羅河的氾濫，帶來了肥沃的土壤，但是也同時淹沒了河畔上的田地，為了解決疆界劃分的問題，需要每次重新丈量土地，負責測量土地的操繩師 (**rope-stretchers**)於是可以累積豐富的幾何知識，例如：他們以打結或作上記號的方式在繩子上作出等間距，再作為測量的標準。

而本節主要在簡介幾何知識的來源、性質與發展，並討論幾何圖形在數學各領域的重要性，最後提出在國小幾何教材領域裡新的可能性。

一、幾何是應用科學

幾何原屬於應用科學，並可回溯至新石器時代。仔細考察新石器時期的器具，即可發現，可就其形狀加以分類，例如：矛頭、割刀，刮刀與斧頭等；也可以看出形狀與功能有關，例如：將皮與肉分離，將皮下脂肪自皮上刮除等；也與原料，如燧石，以及加工方式，如捶打及磨有關。不同文化的石器也有些許風格上的差異，例如：農業文化居室取材於泥土，以版築或泥磚疊層方式建造，故形狀以方形為主；而游牧文化取材於獸皮、莖幹，以莖幹支撐覆於其上的獸皮建造，故形狀以圓形為主。由此汎例觀之，器物居室之形狀與功能，影響各民族對於方和圓的印象極大，更進而影響其審美觀與宇宙觀。

第一個獨一無二的人造物被創造時，也許來自靈感，並非來自一個慎密的計畫。但是當同類型的人造物陸續製造出來時，則產生修飾、調整與技法之傳習乃至技法之保存與傳播的現象。配合圖形之描繪，即美術的發展，以及語言與文字的使用，某種類似我們現今使用的垂直、平行、直角、直線、平面與等長等的語詞必定陸續出現。

除了人造物的製作外，天空的日月星辰的觀測紀錄，以及農業開始，人口增加之後的土地經營，乃至收成稅制的建立，又增添了人們對平面與立體圖形的知識，例如：當計物數發展出高階單位，如十、百、千、萬、…時，透過單位的制定與測量，現在中年級兒童也具有的长度、面積、體積與角度等的完整概念也跟著出現了；最後，當人類開始長距離旅行，需常與遠方的人來往時，除了指北針的使用，地圖的繪製與使用，也會變得愈來愈精確。

二、幾何是理想化的概念

圓規和矩尺必定是人類在製作宮室器物時，很早發明的工具。圓盒與圓蓋做得不準確，一定蓋得不好，但是如果做得準確，一定蓋得很好，且密閉性能佳。這種準確的標準，就形成垂直、平行、直線與平面等是什麼的理想化的概念。理想化概念使得任何人造物與標準之間產生差距，但是類似的人造物與標準符合的狀態又可以加以比較。

最早而比較重要的幾何知識一定就是與尺規運用的相關的知識。這些知識與理想化的圖形概念有密切的關係，它們形成一種存在於腦袋中的心智事物，但有明確的外顯表徵方式，足以引導人們把幾何裡心智物件之間的關係作推理。而數學中更抽象的幾何物件，則無明確的外顯表徵方式。

三、幾何知識的發展

與裡外、上下、左右、前後、相交、相離或阻擋等有關的知識，它的特徵是與長度的變化無關，稱為拓樸(或位相)幾何學。**Piaget(皮亞傑)**指出，它是兒童最早形成的幾何知識。而與剛性運動，或物體作不變形的平移、旋轉、翻轉有關的知識，它的特徵則與長度有很密切的關係，稱為歐幾里得(或度量)幾何學，自有公立教育制度以來，歐幾里得幾何學就是中學幾何教材內容的主體。

由於人類視覺的物理原理，主要是將空間中物體所反射的光，射入視網膜，再予以分析而感知，因此錐狀投影的分析配合此種觀點繪成的透視畫法形成的美術作品，刺激了射影幾何的發展。射影幾何中有許多直線共點與多點共直線，以及它們與具比例關係的諸線段長的關係，例如下圖 1-1-1，在三角形 **ABC** 中，做角 **A** 的內分角線 **AE**，與其外角的分角線 **AF**，則 **B、E、C、F** 四點在線 **BC** 上形成調和點列，且具有 $BE : EC = BF : FC$ 的關係*，而任何與 **AB、AE、AC、AF** 或其延長線相交的直線，其交點亦成調和點列。

在紙上畫出互相垂直的一對直線後，即可建立紙上任何一點與一數對 $(x,y) = (a,b)$ 的對應，在此關係下，方程式 $f(x,y) = 0$ 的解，即可以表現在平面上為曲線圖形，例如： $x^2 + y^2 = 25$ 表示圓心在 **x** 軸和 **y** 軸的交點，半徑為 5 的圓，而過圓上一點 $(3,4)$ 的切線為 $3x + 4y = 25$ ，用這種方式研究平面圖形，叫做平面解析幾何學。

自從微積分發明後，解析幾何學更進而分化為微分幾何學以及代數幾何學，前者專門討論面積、體積與曲線或曲面的曲率等；後者則專門討論多個曲線與曲

*若在邊 **AB** 上取一點 **G**，讓 $\angle AEG = \angle AEC$ ；在射線 **BA** 上取一點 **H**，讓 $\angle AFH = \angle AFC$ 。則由三角形全等的性質，可以推得 $EG = EC$ ， $FH = FC$ ，且 $EG // FH$ ，所以 $BE : EG = BF : FH$ ，故得 $BE : EC = BF : FC$ 。

面，如何透過多項式方程式的構成要素，例如：用次數、係數等表現出來。

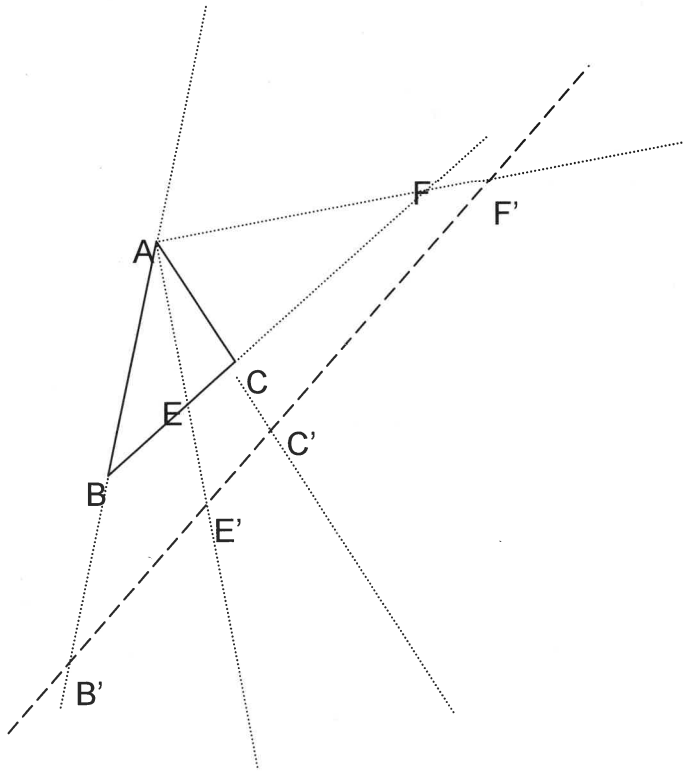


圖 1-1-1 點 B、E、C、F 形成調和點列；點 B'、E'、C'、F' 亦為調和點列。

四、歐幾里得的《幾何原本》

古希臘人係印歐語系亞利安人的一支。亞利安人爲求種族強大，制止內鬥，規定臣下若有爭端，則在酋長面前辯論，辯論結束由酋長宣判，之後就執行宣判的結果，並不得再有爭議。由此，發展出雄辯術及邏輯學。當他們的人旅行至巴比倫及埃及等地時，發現他們雖有豐富的幾何知識，這些知識主要來自天文觀測、宏偉的宗教建築與整理氾濫後的耕地等經驗，但是缺乏有系統的整理。而古希臘人經過不斷的努力，至亞歷山大時期，希臘幾何學家 **Euclid**(歐幾里得)有系統的整理了當時的幾何學知識寫成了 **Element**，中譯爲《幾何原本》，成爲了知識的典範，採用公理化方法，將平面幾何的知識，由顯而易見的事實，逐步推演至複雜的事實。我國有譯本是在明萬曆三十五年(1607年)徐光啓與義大利人利瑪竇合譯前六卷，清咸豐(1856年)李善蘭與英國人 Alexander Wylie 合譯後九卷。

歐洲文藝復興後，自阿拉伯人手中繼承了希臘的幾何傳統，基督教會更將幾何學當成教士的必修科目。後來公共學校系統建立後，平面幾何學成為中學的必修科目。雖然內容相較於《幾何原本》有改進，但系統上，精神上，則與《幾何原本》並無差別。而目前傳統小學的幾何教材，當然順理成章地成為國中幾何的先備經驗，因此《幾何原本》中一些較基本的圖形的名稱，其構成要素的名稱，以及頂點與邊的個數就成為教學內容。另外，全等、相似、線對稱與點對稱等也都成為小學的教材。其實，這些教材選擇的正當性應當詳加檢討。

五、幾何圖形作為數學解題的表徵工具

范氏圖（Venn diagram）是用以解釋集合的聯集與交集的關係，流程圖用以解釋函數的運算，微積分學的許多基本觀念也都有藉助函數圖形曲線來闡釋，這些都是使用圖形來表徵待解的問題。

兒童在未知數概念的發展時，使用線段圖表徵問題，從而建立未知量與已知量關係的經驗，這也是幾何圖形的重要用途之一。

六、小學新的幾何教材的可能性

社會資源增加後，會豐富幾何教材的範圍，例如：會使用地圖，一個人便可在野外與城市中自在地活動，但野外的地圖與城市的地圖有著極大差異。此外，木板、紙張、包心菜都有所謂生成方式，適當地辨識後，若順從其特性去處理，便能善用其利，這是從生活需求來看教材的可能內容。此外，許多 DIY 的方法都應該學習，例如：兒童可以從事勞作或工藝，如陶藝、折紙、插花、雕刻、剪貼、編織等，這些技術都是幾何的知識。這樣，幾何便是器物的製作和設計的基礎，也是利用資訊使自己能夠自由活動的基本知識所在。

曾經一個有趣的教學案例觀察是，當初 LOGO 這種簡單畫出平面圖形的程式語言，配合馬達驅動的水針筆，拿來教低、中年級的小孩使用時，趣味盎然的小孩斷然對參觀者否認她在做數學。這個實在的故事顯示了幾何教學活動廣大的可能性，朝此方向發展的幾何課程也會非常豐富，這也是社會資源增加後，可以考慮的幾何教材發展的方向。

第二節 兒童幾何概念的發展

一、Van Hiele 夫婦的幾何發展理論

依據荷蘭數學教育家 Van Hiele 夫婦對兒童幾何思考的研究指出，低年級學童能辨識出正方形或長方形，也能使用數學上的標準名稱來稱呼這些圖形，但是不知道如何給正方形或長方形下定義。中年級的學童雖然能透過幾何圖形的構成要素來檢驗一個圖形是否為正方形或長方形，例如：四個角都是直角的四邊形是長方形；四個角都是直角，而且四個邊也相等的四邊形是正方形，但是學童不見得理解「正方形一定是長方形」的集合包含關係。

Van Hiele 夫婦認為學童會有這些認知上的差異，主要的原因是兒童對幾何知識的掌握方式不同所致，他們將幾何思考的模式區分成五個發展的層次，每一個層次都有其發展的特徵，八十二年部編本國小數學教材(本書中簡稱本教材)幾何課程的設計即以此理念為根據，其概略特徵敘述如下：

(一) 視覺期(Visualization)—第零層次

此層次的學童是透過視覺觀察實物，由實物的輪廓來辨識形體或圖形，而經常接觸討論某類的圖形，其形狀差異不大，例如：三角形、正方形、長方形與圓等，學童可以透過移動、旋轉與翻轉等方式，直觀地辨識某類圖形。

此時學童可以使用非標準的數學語言，例如：學童稱呼某一個長方形，是瘦瘦的、長長的或是像門的樣子；稱呼某一個正方形，是方方正正的樣子。也可以使用標準的數學語言來描述圖形的形狀，例如：使用「正方形」、「長方形」、「圓形」與「三角形」等標準的數學語言指稱圖形的形狀，但是並不理解這些數學語言的定義，例如：用正方形的構成要素來定義一個正方形，是有四個邊與四個角及其關係是四個邊等長與四個角都是直角。

針對本層次的學童，本教材安排許多透過感官的操作活動，讓學童進行分類、造形、滾動、堆疊、描繪、著色、觸摸與複製等活動，幫助學童注意到圖形的構成要素。

(二) 分析期(Analysis)—第一層次

此層次的學童應該具有豐富的視覺辨識經驗，能進一步觀察圖形構成要素與圖形之間的關係，可以開始尋找出某一類圖形的共同性質，例如：以圖形組成要素來說，當注意到長方形的邊長時，學童可以發現長方形都有四個邊，這四個邊剛好分成兩組，一組是兩個長邊，一組是兩個短邊，而且兩個長邊等長，兩個短邊也等長。當注意到長方形的角時，學童可以發現長方形都有四個角，這四個角都相等，而且每一個角都是直角。而若以圖形之間的關係來說，例如：「長方形」與「此長方形對角線相交的圖形」，此為兩個圖形，當注意到長方形的對角線時，學童也可以發現長方形都有兩條對角線，而這兩條對角線等長且互相平分。

雖然此時學童可以發現長方形的四個角都是直角、對角線等長、對角線互相平分、兩雙對邊分別相等或兩雙對邊互相平行，但是學童無法解釋這些幾何性質間的關係，例如：無法透過推理，理解為什麼四個角都是直角的四邊形，它們的對角線一定會等長且互相平分。

針對本層次的學童，本教材安排許多圖形的製作活動、組合分割活動以及檢驗活動，幫助學童觀察製作後的圖形構成要素與原圖形構成要素間的關係，觀察原圖形與組合、分割後圖形構成要素間的關係，以及熟悉各種圖形的性質，幫助學童探索圖形與圖形之間的關係。

(三) 關係期(Relation)或非形式演繹期(Informal Deduction)—第二層次

此層次的學童已經能掌握各種圖形的構成要素，可以進一步探索圖形內在屬性關係，以及不同類圖形之間的包含關係，例如：兩雙對邊相等的四邊形一定是平行四邊形；對角線等長且互相平分的四邊形一定是長方形。此時期的學童不必將所有的屬性都描述出來之後，才能確認某一類圖形。

此層次的學童也能夠理解長方形一定是平行四邊形的意義，也能夠推論當平行四邊形有一個角是直角時，該平行四邊形一定是長方形。學童也能夠掌握三角形的外角等於對應的二個內角和， n 多邊形的內角和為 $(n-2) \times 180^\circ$ 的意義，這些都是此層次學童能透過理解其內在關係後建立的概念，而不只是公式的記憶。

(四) 形式演繹期(Formal Deduction)—第三層次

這裡演繹的意義是指在一個公設系統中去建立幾何理論，故此層次的人們

能用演繹邏輯證明定理，並建立相關定理的網脈結構關係。他們可以在一個公設系統中建立理論，他們不只是記憶圖形之間的各種性質，並且能夠證明與理解一個定理可以有很多不同證明的方法；他們也能理解一個定理的充份或必要條件的內在關係，並發現正逆命題間的差異性，國小學童絕少能達到此層次。

(五) 嚴密性(Rigor)或公理性(Axiomatic)—第四層次

達到這個層次的人們，可以在不同的公設系統中建立定理，並分析或比較這些定理的特性，例如：能區分歐氏幾何與非歐幾何系統間的差異，也可以理解抽象的幾何推理，甚至可以自創一套幾何公設系統。一般的人很難達到這個層次，即使是以數學為專業者也不易達成。

根據 Van Hiele 夫婦研究顯示，上述五個層次都有其序性，學習者必須擁有前一個層次的概念與策略，才能有效地進行下一個層次的學習活動。同時，由於教材內容屬性的差異，也會影響學習者落入不同的層次之中，例如：學童對平面上兩直線平行或垂直的概念已經進入第一層次的分析期，但是對空間中兩平面、兩直線或平面與直線平行或垂直的概念，可能還停留在第零層次的視覺期。

本教材預估大部分的國小低年級學童大多數都在第零層次的視覺期；中年級學童大約可以達到第一層次的分析期；高年級的學童大約在第一層次分析期到第二層次關係期的過渡時期。

二、幾何圖形的分類活動發展

Piaget(皮亞傑)曾以部分與全體的關係來研究類別組成的問題，皮亞傑將分類能力的發展區分成三個階段，分別是形象聚集階段、非形象聚集階段與分類獲得階段。

第一階段是形象聚集的階段，學童透過視覺將物體的形狀分類，例如：將形狀不同的長方形與正方形歸成不同的種類。

第二階段是非形象聚集的階段，此時學童已經掌握物體的某些屬性，能從功能性的觀點來分類，將同一屬性的物體歸成一類，視為同一個集合，但是無法掌握這些集合間的包含關係，例如：學童尚不能透過邊、角的關係區分長方形、菱

形與正方形；或透過平行的關係區分梯形與平行四邊形，雖然知道這些四邊形都有四個邊，所以也都是四邊形，但是無法理解這些集合間的包含關係，例如：不知道正方形是否也是長方形，長方形或菱形是否也是平行四邊形。

第三階段為分類能力獲得的階段，此時學童已經掌握部分與全體的關係，能夠處理物體種類間的包含關係，例如：知道正方形一定是長方形，正方形也一定是菱形，而長方形不一定是菱形等的包含關係。

本教材將幾何圖形的分類活動區分成三個階段來考量，第一階段以視覺性的觀點看問題時，學童透過視覺將幾何圖形的形狀歸類；第二階段以功能性的觀點看問題時，學童透過圖形的構成要素將幾何圖形分類，但是不理解這些幾何圖形所成的集合與集合間的包含關係；第三階段以關係性的觀點看問題時，學童掌握全體與部分的關係，能理解幾何圖形所成集合之間的包含關係，可以從不同的觀點進行分類。其中視覺性的觀點大約是 **Van Hiele** 夫婦幾何發展理論的第零層次，功能性的觀點大約是第一層次，關係性的觀點大約在第一層次到第二層次之間。

例如：圖 1-2-1 像一個臉部，其輪廓是圓型，兩個眼睛，一個鼻子，一個嘴巴都是三角形，耳朵部分也是三角形，但是和臉連接的那一部分是曲線的人頭圖像，當要求學童回答圖像中有多少個三角形時，不同層次的學童可能產生不同的答案。

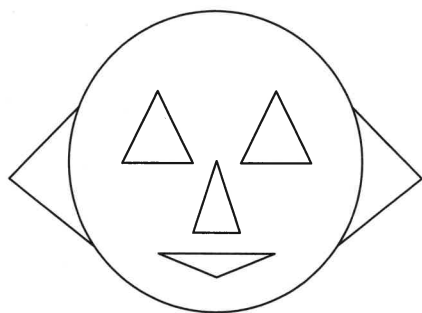


圖 1-2-1

透過視覺性觀點解決問題的學童，若將耳朵部分視為三角形，學童可能回答有 6 個三角形，因為視覺性觀點的學童易容忽略三角形三個邊的構成要素是直線段。

透過功能性觀點解決問題的學童注意到三角形的構成要素，知道耳朵不是三

角形，因為其中有一個邊不是直線段，所以只有 4 個三角形。

又如：圖 1-2-2 也像一個臉部，其輪廓是圓型，兩個眼睛是正方形，一個鼻子，一個嘴巴都是長方形，耳朵部分是三角形，但是和臉連接的那一部分是曲線的人頭圖像，當要求學童回答圖像中有幾個長方形，不同層次的學童也可能產生不同的答案。

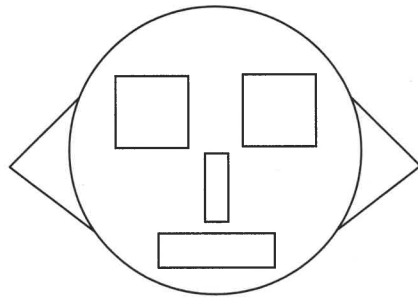


圖 1-2-2

透過視覺性觀點解決問題的學童只有一種答案，因為正方形不像長方形，因為圖中長方形長邊和寬邊長度的差異很大，因此回答有 2 個長方形。

透過功能性觀點解決問題的學童可能有兩種不同的答案。第一種答案是有 4 個長方形，第二種答案是有 2 個長方形。第一種答案的學童注意到四邊形的構成要素，知道四個角都是直角的四邊形是長方形，而正方形的四個角也都是直角，因此圖中有 4 個長方形。第二種答案的學童也注意到四邊形的構成要素，但只注意到四邊等長的正方形與有兩雙對邊等長的長方形，因此圖中有 2 個長方形。

透過關係性觀點解決問題的學童和透過功能性觀點解決問題的學童一樣，也可能有兩種不同的答案，只是他們判斷正方形是否也是長方形的想法不同，一是透過正方形是否也滿足長方形定義的方式解決問題，因為正方形所成的集合包含於長方形所成的集合中，因此所有的正方形一定也是長方形，所以是 4 個長方形。另一是透過集合的包含關係解決問題，知道正方形是長方形的一種，但是受到「一定要回答限制條件最嚴格的答案」這個約定俗成的影響，例如：畫出一個正方形，學童回答它是四邊形，它是平行四邊形，它是長方形都不會得到分數，只有回答正方形時才能得到分數，雖然正方形也是長方形，但是正方形的條件限制比長方形嚴格，因此判定圖中有 2 個正方形，2 個長方形，所以得到有 2 個長方形的答案。本教材建議教師在評量時，題意一定要明確，如果題意不明確，上述兩個答案都應該給分。

第三節 八十二年國民小學數學課程標準圖形與空間教材綱要

本教材是依據八十二年教育部修正發布的國民小學數學課程標準所編寫的國民小學數學教科書，因此本文先呈現八十二年國民小學數學課程標準中「圖形與空間」的教材綱要，以及「術語與符號」中屬於圖形與空間的相關名詞，因為它們是編寫教科書的依據。

在圖形與空間教材綱要中，又將圖形與空間區分成「平面圖形」與「立體圖形」兩部分，而術語與符號教材綱要中，則區分成數與計算、量與實測、圖形與空間、統計圖表以及數量關係五個部分。以下羅列八十二年版國民小學數學課程標準中平面圖形教材綱要、立體圖形教材綱要以及術語與符號中關於圖形與空間教材綱要的內容。

一、平面圖形教材綱要

一年級

- 複製實物的面，分辨出類似三角形、四邊形及圓形等圖形板的圖形。
- 觀察實物與圖形，辨別直線與曲線。
- 利用竹籤、釘板等構成簡單的平面圖形。

二年級

- 利用圖形板，拼排圖形，數出各圖形的數量。
- 利用相同的數量，全等的圖形板，拼排不同形狀的圖形。
- 利用不同的數量，全等的圖形板，比較圖形的大小。
- 透過摺紙、剪紙、鏡射等活動，觀察線對稱的現象。
- 利用以公分為刻度單位的直尺，畫出指定長度的線段。

三年級

- 透過製作的活動，了解三角形，四邊形的構成要素：角、邊、頂點及其個數；

並認識周界及周長。

- 做出或畫出滿足部分條件(指定一邊或二邊的長度，周長或一些頂點)的三角形或四邊形。
- 透過摺紙製作直角，並在生活情境或圖形中辨認直角。
- 利用直角，了解長方形、正方形、直角三角形的特性。
- 角的初步概念。

四年級

- 使用量角器量角度及畫角。
- 透過製作的活動，了解等腰三角形、正三角形的特性，並作圖。
- 透過製作的活動，了解圓心、半徑、直徑、圓周。
- 透過直角認識直線的垂直與平行。
- 由邊長的相等或垂直與平行的觀點，把四邊形分類並命名。
- 由此認識長方形、正方形、平行四邊形、菱形、梯形、箏形。
- 圓規的使用。

五年級

- 透過圖形的疊合，認識全等的多邊形。
- 透過實測活動，認識圓周率。

六年級

- 透過操作活動，認識線對稱圖形。
- 透過操作活動，了解縮圖與擴大圖的關係。
- 了解比例尺的意義及表示方法，並應用於地圖的閱讀。

二、立體圖形教材綱要

一年級

- 從實物中，分辨出類似長方體、圓柱體、球體、角錐等模型的形體，並觀察

實物的面，分辨平面與非平面，進而認識三角形、四邊形與圓形。

二年級

- 利用各種積木，堆積造形並數出各積木的數量。
- 利用相同數量，全等的積木，堆積不同的形體。
- 利用不同數量，全等的積木，比較形體的大小。

三年級

- 透過製作盒子及其骨架的活動，了解長方體和正方體的構成要素：面、邊、頂點及其個數；並認識其透視圖和展開圖。

四年級

- 球的初步概念。

五年級

- 觀察長方體、正方體中，邊與面的垂直與平行關係。

六年級

- 透過實物與圖片，辨認柱體與錐體。

三、圖形與空間的術語與符號

一年級

- 直線、曲線、面、平面。
- 三角形、正方形、長方形、圓形。

二年級

- 全等、對稱。

三年級

- 角、邊、頂點、周界、周長、直角。
- 直角三角形、四邊形。
- 正方體、長方體。
- 透視圖、展開圖。

四年級

- 圓心、半徑、直徑、圓周。
- 等腰三角形、正三角形、平行四邊形、菱形、梯形、箏形。
- 球。
- 垂直、平行。

五年級

- 多邊形、扇形。
- 圓周率。

六年級

- 角柱、角錐、圓柱、圓錐。
- 側面、底面。
- 縮圖、擴大圖、比例尺。
- 線對稱圖形。