

第四章 角度的數學與認知結構


一. 前言

角度和長度距離一樣，屬於生活中極易聽聞到的語詞，例如「這個角度很好」、「請把嘴巴張開」、「桌角」、「牛角」等。在第一個例子中，話題是旋轉角，接著下來依次是張開角，圖形角（平面），和立體角。立體角描述一個錐的頂點附近尖銳的程度，不在中小學範圍。我們將按圖形角、張開角和旋轉角的順序來說。因為張開角才容易有量或程度的概念，而圖形角不易溝通量的概念，卻是旋轉程度（角）的紀錄。

二. 圖形角

數學上的圖形角由相交且止於一點的兩線段所構成。此二線段長短不拘，其夾角大於0度小於180度。此二線段稱為角的邊，交點稱為頂點。

兩圖形角可以藉著「先疊合頂點，再疊合其中一邊，並將另一邊均置於疊合邊的同側」的方式，檢驗另一邊是否也能疊合。若能疊合則稱兩圖形角相等，否則兩圖形角不相等。按此方式，可以複製圖形角。

觀察由連續的折線段組成的平面圖形，可以複製許多圖形角。多邊形是封閉的折線段組成的圖形，是一般教科書引入圖形角最常用的方式。例如取一三角形圖形板，要求學童將頂點的局部描下來，並由學童交換疊合檢查描的結果是否正確。最常見的兩種解題記錄，是 \angle 和。前者的特徵是兩邊約略相等，而且相當短。後者是角的兩邊約等於三角形中該指定角的兩鄰邊的長。教師應與學生溝通，角的兩邊的長度並無限制。

由於圖形角變大變小的機制不明，進一步做合成分解時也極易與兩邊所夾區域混淆不清，同時區域範圍亦不易明確規範，除非採用半徑均相等的扇形。因扇形的面積與圓心角的大小成正比。但是把角概念的啓蒙與扇形的構成要素結合在一起，畢竟不太妥當。因此在開始引入圖形角時，不要把它當做一種像長度的量，這種考慮是合理的。而且為了避免往後發展的困擾，宜與凸多邊形，特別是三角形和凸四邊形掛鉤即可。

三. 張開角

像蚌蛤，高等脊椎動物的嘴巴，是一種兩片的一端固定在一個可轉動的關節上，兩片或其中一片可以旋轉的裝置。人類利用這種裝置可以做成夾子或摺扇。雖然將一隻吸管切開，但不使它完全切斷，即可以展示開合，但最好的效果還是摺扇。將一張長方形紙先折成波浪狀（ \sim ）後，再從中對折、黏合，外側可用兩條竹片黏合加強，用以展示開合。首先可以展示愈開愈大及愈合愈小的現象。其次可以要求學生記錄其張開的程度。在經過發表討論後，教師可以引導學生將張開程度的紀錄和圖形角做比較。

透過張開程度的想法，兩個小於 180° 的圖形角可以比較大小了。但是合成、分解還是很不自然。

四. 旋轉角

將車輪的軸心固定，再讓車輪旋轉。這時可以選擇一條車輪的半徑，以此半徑的轉動來描述車輪的轉動。此一半徑可以先規定一個起始方向，例如以水平向右做開始，然後向上、向左、向下。這叫做逆時針向的轉動。如果以水平向右做開始，先向下，再向左，然後向上，這叫做順時針向的轉動。

鐘面上的時針、分針或秒針可做為引入旋轉角概念的原型。我們很難從物體旋轉的描述進入，雖然它比較合理，但也比較複雜。秒針用以代表一條射線，固定的一端叫做支點，像秒針的動法就叫做旋轉。手臂可以用肩關節為支點旋轉。音樂鐘的發條的旋轉方式，某種水龍頭開關的使用方式也是旋轉。有些旋轉的程度有限制，其運動方式變成順時、逆時針方向的旋轉交互進行，如機械手錶的擺輪，比較合適的名詞叫擺動。

透過展開張開程度的道具、摺扇，可以連結圖形角，使圖形角成為旋轉程度的紀錄。其方法是把摺扇的一邊固定，使得打開摺扇時僅旋轉另一邊。透過這種連結後，可以把硬紙條或鐵絲的一端固定在A4大小紙板的中央，讓學生當做旋轉現象的觀察與記錄。若是當做旋轉臂的鐵絲可以方便學童取下，則可在旋轉臂下襯一張可替換的紙，即可當做旋轉記錄之用。

就像記錄質點在直線運動的位移（例如學童的百米賽跑）必須標明起點一樣，要記錄鐵絲的旋轉應該標明起始方向，這起始方向叫做始邊，旋轉停止的方向叫做終邊，旋轉應有快慢，但啓蒙教學不可考慮這個問題。含有旋轉的始邊、終邊及支點的記錄，就和圖形角一模一樣。但爲了明確標示旋轉方向以及超過 180 度以上的旋轉，所以一般多加上自始邊終於終邊的螺旋線標示之。

五. 角的合成與分解

將旋轉臂以一定方向旋轉到一個程度停止，再旋轉後再停止。其結果與將旋轉臂一次旋轉至第二次停止的方向相當，我們溝通此爲旋轉角的合成。

反之，本來預備以一定方向旋轉到某一定程度，但是還沒有轉到就停下來了。問還要再轉多少程度？可以溝通此爲旋轉角的分解。

以上的旋轉角的合成與分解，如果配合圖形角的卡片會比較具體，效果比較好。同時藉此機會得以使圖形角具備合成與分解的意義。張開角的合成與分解意義會有問題，不可將順時針向旋轉與逆時針向旋轉的合成和此處旋轉角的合成混爲一談，因爲在小學不宜談正負角。

六. 角的度量單位

透過旋轉程度與圖形角紀錄的連絡，使得圖形角的疊合具備了量的大小比較的意義。將圖形角的一邊與頂點疊合，觀察另一邊的狀態，可以說哪一個圖形角比較大。圖形角的大小比較是角的度量的基礎。

雖然常用的角的度量共有三種，即 360 度制，軍事用的 4000 密位制以及弧度制，但 4000 密位制太精細，弧度制的概念太難，所以小學只教常用的 360 度制即可。

360 度制係將旋轉一周分割成 360 等分，旋轉一等分即爲 1 度。介紹 1 度和介紹 1 厘米（公分）一樣，無法向普通學生說出 1 度的來歷，只能指出每

個1度的圖形角都是一樣的大小。旋轉10度是旋轉10個1度合起來的，旋轉28度是旋轉28個1度合起來的，等等。旋轉一直角、一平角、一周角、乃至數個直角、數個平角或數個周角都是可以和學童溝通的，其中旋轉一周角俗稱轉一圈。

七.量角器

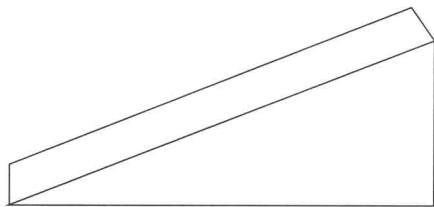
一般文具行販售的量角器，係一個半圓盤。圓盤的外弧上有最小刻度為1度的線，通常只有0、90，和180刻度線才會連到中心點。爲了度量的方便，一般都有順時針和逆時針兩種度數的排列，導致學童將一個銳角，例如30度角讀成150度，反之亦然。

如果學童能夠把每條刻度線都想成和中心點連結的話，則量角或畫出指定度數的角就和量線段長或畫出指定長度的線段的方式類似，都是運用疊合的方法。

學童量角的誤差大，常差個兩度，不可避免。由於它也和一個人操作儀器的謹慎態度和程序是否恰當有關，因此教師適當的操作程序的指導以及臨場的示範都可以做，不致於和「自發解題」的原則抵觸。

八.直接比較、間接比較、個別單位比較、普遍單位比較

角度和長度有非常相似的地方。因此我們也可以模仿長度概念的發展，依序提供學童上述四種比較的活動。如果要這樣做，則勢必要在圖形角上安排此類活動，但要透過張開角或旋轉程度的記錄。圖形角的量的意義，現代教材設計多由旋轉程度的記錄而來，年級均在四、五年級之後，是否一定要留意張開角或旋轉角的保留概念是否已存在？如果可以藉由描繪加以複製，那麼用量角器即可測量，是否要多此一舉？至於非360度的個別單位，一定要日常生活常見的物件，那有這種角楔的東西？（我在日本京都會看過，可能是爲編織或其他民俗工藝的製作道具。）



角楔

九. 角度的估測

估測原有實用的目的。角度的估測在從前國中教授許多平面幾何的時代相當重要。例如證明時，常需要畫一個一般的銳角三角形。所謂一般，即非直角三角形，非等腰三角形。爲了突顯證明中提到的線段，頂點或角，課本常選擇45、60、75度的三角形來畫。這時最大角離90度還差15度，兩角之間都差15度，可說是最佳選擇。又如遇到角平分線的問題，學生常以目視決定角平分線的位置。

像樓梯、直梯或山坡的角度，正確地說是它與水平線的夾角，或稱傾角。傾角的估測是重要的，因爲它與安全有關。有時它是本能或習慣，也不一定用度數表示。

要兒童以目視判斷一圖形角爲銳角，接近直角或鈍角，可以視爲角度的估測的一種。

十. 方位與仰角、俯角

在地理測量時，正式表示方位的方法爲東南西北乃至於北北東等。至於正前方偏左幾度或偏右幾度也可以。英美人常用的時鐘方位值得採用，但限以常使用旋轉鐘者。他們對鐘面可形成心像。使用時鐘方位溝通的人，可想像眼前水平置放一個旋轉鐘。12點方向在正前方，因此藉著心像，這人可以相當準確地判斷出11點鐘方向，即正前方偏左30度的方向。戰鬥機飛行員之間若以目視進行任務，亦會使用時鐘方位。測樹高或塔高時，會使用視線與水平線的夾角，稱爲仰角。若由上俯看下方，則視線與水平線的夾角，稱爲俯角。

十一. 使用方位距離標定位置

生物在求生存的奮鬥中使用方位距離來標定位置。例如一隻蛙若想捕食一隻飛蟲，必先調整身體使嘴巴轉向獵物，再估計獵物與口的距離，以免伸出舌頭徒勞無功。一個打拳的人也是有類似的運作系統。

把學童的這種生物本能，用數學語言加以外顯化，即可得到以方位距離標定位置的概念。最初是以自己的身體為準，所站點距離為 0，正前方為角度基準。然後是以標的物為準，如在地圖上說，颱風在恆春東南方 200 公里處。最後是能告知附近一同賞鳥的朋友，望遠鏡對目標在 2 點鐘方向 2 公里處的相對方位。

十二. 三角形內角和

使用量角器去量三角形的三內角，由於不可避免的誤差，很少能夠剛好得到和數是 180 度的結果。有人提議把三個角剪下來拼湊，則大致可以見到兩邊成一直線。

不過，倒底學童認識這個事實有何目的？我認為，讓兒童發現，繞一個凸四邊形或凸五邊形一圈，在轉角處所轉過的角度都一定是 360 度反而更有意義。

問學童，有沒有恰好三個直角的四邊形，有沒有三個鈍角的四邊形，也會是較佳的挑戰。