

「包裝」、「展開」數學素養

古欣怡* 苗栗縣信德國民中學教師

林美曲** 苗栗縣信德國民中學教師



說於教學之前：

十二年國民基本教育課程綱要總綱已於103年公布，預計從107年起開始逐年實施。該課綱以發展學習者的素養為導向，教育部提升國民素養專案辦公室提出數學素養的定義與內涵為：個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。以此為據，該如何設計課程？該從哪個角度切入？才能在建立數學概念的同時，提升孩子的數學素養；該選擇什麼樣的主題？採用什麼樣的教學策略？如何提問？才能完成此次任務……。橫亙在我們面前的是洶湧而至的疑問與不確定，心中的恐懼可想而知。經過數個月的掙扎，終於產出教學雛形——「正方體與長方體」教學模組。



「正方體與長方體」在十二年國教數學領域課程綱要草案中為五年級課程，根據學習表現與學習內容，我們設定此教學模組之單元教學目標為：

- 1、認識正方體與長方體的構成要素。
- 2、認識正方體與長方體中面與面的垂直、平行關係，邊與邊的垂直、平行關係。
- 3、認識正方體與長方體的展開圖。
- 4、認識正方體與長方體的視圖。

為提供有感學習的機會，本模組嘗試設計實作活動，並利用競賽情境包裝，逐步引導孩子在探討與修正過程中，察覺、認識進而理解長方體與正方體的相關數學概念。根據教學想法，我們設計三大活動：紙盒製作、展開圖與視圖。在紙盒製作活動中，透過引導讓孩子認識長方體與正方體的構成要素及面與邊的關係。接著，從方便性與檢驗的角度切入展開圖的認識，並實際測量物品設計適當的包裝盒，最後，為了方便溝通與呈現，引出視圖的使用需求。考量孩子先備經驗及教具操作的順暢性，活動安排順序如下：

►活動一：紙盒製作

為了讓孩子對「正方體」和「長方體」有進一步的認識，活動採取預測、實作、修正預測的模式進行。有別於二年級的教具使用，改提供一張張的圖卡供他們黏貼組合，組合過程中，孩子需考量面的大小、面的形狀、不同大小的面所需的個數……等。嘗試錯誤的過程提供後續討論的養分與素材。有了製作體驗後，接著觀察比較形體的異同，並歸納正方體與長方體的特徵。為了更加凸顯正方體與長方體面與面、邊與邊的垂直平行關係，教材引入梯形柱做比對。

►活動二：展開圖

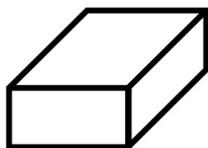
以「利用形體特性辨識長方體展開圖」為主要活動，同時加入「繪製展開圖」的設計。展開圖的教學從製作的便利性切入，回顧先前製作紙盒的過程，引出使用展開圖的需求。認識展開圖後，逐步引导孩子利用習得的形體知識進行判斷，如：由三組全等的面組成的長方體，其全等的面互為對面、六個全等的長方形無法組成長方體、組合時相鄰兩個面的邊必須等長……等。孩子能成功利用圖卡拼排展開圖後，再根據教學者提供的物品量身製作包裝盒，此時，他們需對實物進行測量，並決定每一個面的大小，以及它在展開圖中的位置方能完成任務。

►活動三：視圖

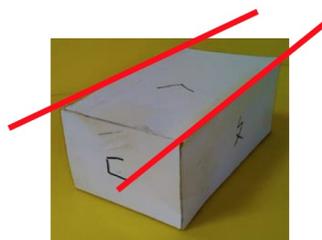
如何將立體形體平面化？一個包裝盒設計完成了，如何告訴他人這個盒子的大小、形狀？透過不同角度描繪，引出數學對視圖的詮釋，而後藉溝通的需求，引出標註長、寬、高的數據，完成包裝盒視圖的繪製。

事實上，「視圖」的教學並不在此階段學習內容中，但在多場研發會議裡，各階段老師及教授互相核對發現，國小課程大量使用「視圖」呈現立體形體，卻沒有針對視圖做相關介紹。曾經，為了向孩子介紹立體形體平面化後的樣貌，我們嘗試採用拍照的方式進行，但是，不管從哪個角度拍攝，都拍不出課本呈現的樣子，經過研究討論才發現，數學上的視圖與美術課的透視圖看似相近，實則不同，數學上的視圖（也稱為示意圖）保留對邊的平行等長關係，但美術課繪製長方體時，因為消失點的呈現，邊與邊並不會呈現平行關係，這個現象在拍照的時候就看得出來（如下圖1）。

圖1 長方體視圖與照片



長方體視圖（示意圖）



長方體紙盒照片

此外，探討長方體正方體構成要素及關係時，我們指出長方體與正方體的鄰邊會互相垂直，但在視圖上卻沒有辦法呈現邊與邊的垂直關係，關於這點孩子知道嗎？還有，視圖與原形體大小的關係是什麼？標示哪些數據就可以代表這個形體的大小？林林總總的問題在對話過程中一一浮現無法漠視，儘管教學時數受限，我們仍決定保留視圖教學於模組中。

思慮再三，反覆修正後的教學模組是否真的能培養孩子的數學素養？數學素養內涵甚豐，難以在一個教學模組中完整呈現，本模組著重的方向為：讓孩子知其然，也知其所以然。故，進行構成要素之探討時，透過實作活動之觀察體驗，抓出相關迷思並進行討論歸納；進行面與面的關係教學時，利用它例的比對，察覺正方體與長方體的特性，進而統整相關概念；進行展開圖與視圖討論時，透過功能與便利性連結數學與實際生活。除此之外，我們試圖在教學過程中，培養孩子「根據數學知識描述、模擬、解釋與預測各種數學現象，發揮數學思維特長，作出理性反思與判斷以達與他人的有效溝通」的能力，同時，為檢驗孩子能否利用數學基本概念來解決真實生活中的問題，模組中設計了「根據物品大小量身製作正方體或長方體包裝盒」的活動。

儘管教學前細細思量，對於模組與學生相遇後會如何產生變化還無法確認，於是，帶著滿滿的期待我們進入課室。

教學發現：

這個教學模組經過一整週的教學、討論與修正才畫下句點。回頭整理教學相關資料，我們發現：

壹、任務取向，孩子更清楚學習的路

以「任務」的模式進行教學設計，對我來說是新的嘗試，一開始很擔心過於坦率的呈現方式會讓孩子失去好奇心，實則不然。此活動以參加包裝設計大賽為題，事先說明需完成的學習內容，讓孩子對接下來的活動有初步概念，而後的討論歸納反而容易聚焦，實作過程中發生了問題，也能根據目標做修正與再次嘗試。

圖2 教材頁面

創意包裝設計大賽

衛志登公司最近開發了新產品，為了替新產品找尋適當的包裝盒，該公司舉辦了「創意包裝設計大賽」，包裝盒的設計需為長方體或正方體，同時具創意及實用性。

包裝盒設計大賽

一、競賽主題：
長方體與正方體包裝盒創作

二、參賽資格：
不限國籍，不限年紀。

三、作品繳交規定
繳交設計圖二張；所需內容如下
(1) 作品名稱。
(2) 作品展開圖及視圖。
(3) 設計說明：創作特點。
(4) 作品規格標示。

四、評審標準

1. 產品實用性	70%
2. 創意	30%

主辦單位：衛志登公司行銷部

小朋友，準備好大顯身手了嗎？以下活動將帶領各位逐步完成包裝盒的設計。

貳、實作活動讓描述、解釋的內容更具體

挑選圖卡黏貼紙盒、用圖卡拼貼展開圖、繪製展開圖、繪製視圖、根據物品量身製作包裝盒……模組中大量的操作活動，提供嘗試錯誤與累積經驗的機會，後續進行相關討論時，孩子能提出操作過程中成敗的經驗與修正建議，讓學習更具體且多元。以紙盒製作活動為例，以往操作的物件是半成品，組合過程不需思考，此次提供圖卡供學生選擇，邊長與面的關係就在操作中被看見了。

為了避免盲目操作，活動一開始透過布題：「**想一想，製作一個正方體需要什麼形狀的圖卡？需要幾張？**」讓孩子先有想法，再根據想法實作與修正。孩子雖然很快說出6張正方形圖卡就可以製作一個正方體紙盒，拼組時卻發生問題，顯然「6張正方形圖卡就可以製作一個正方體紙盒」這樣的說法不夠明確，根據實作經驗我們修正為「**正方體需由6個全等（一樣大）的正方形的面組成**」。利用圖卡拼組正方體的策略有哪些呢？活動中出現的策略有三種：

圖3 學生操作策略

兩兩合作直接組合



立起確認位置後攤開黏貼再組合



黏貼成展開圖再組合



哪種策略既方便又省時？經過數個紙盒的製作，孩子心裡已有定數。完成正方體與長方體紙盒製作後，我們將做好的形體進行分類與觀察，並寫下該類形體的特徵。孩子的發現如下：

圖4 觀察紀錄——正方體的特徵

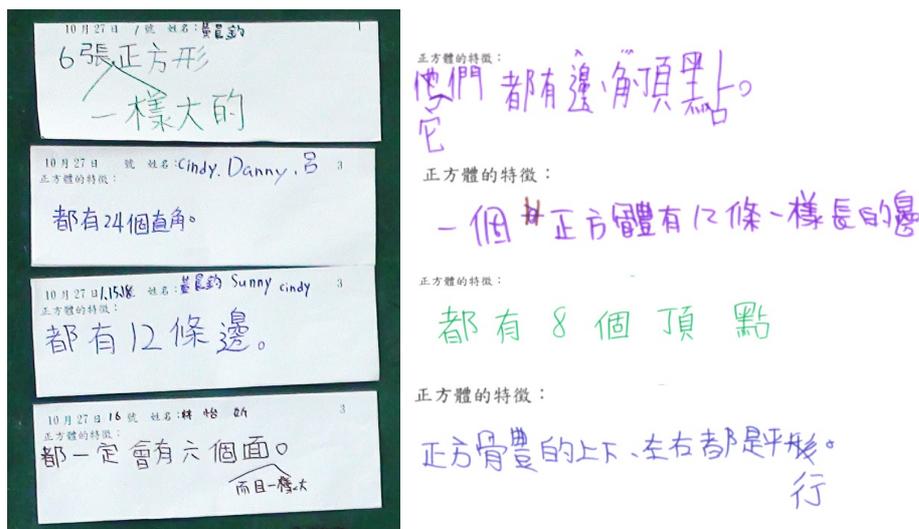
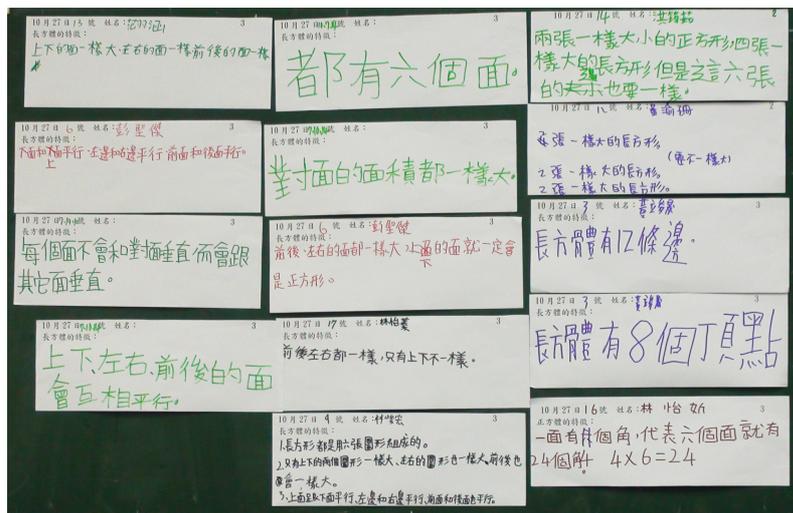
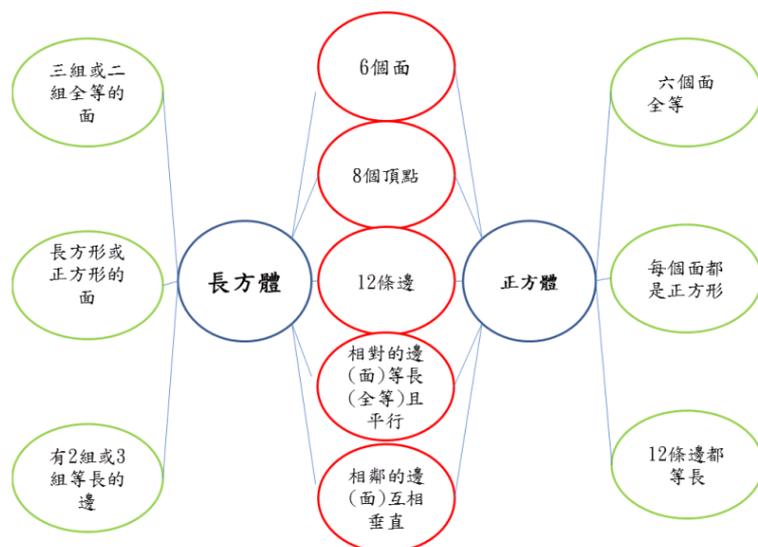


圖5 觀察紀錄——長方體的特徵



充足的體驗活動，增進孩子觀察的敏銳度，面對排山倒海而來的想法，除了進一步的澄清與確認（如：24個直角）外，也需帶領孩子進行歸納與統整，整理訊息的工具在此時顯得格外重要，The Double Bubble Map是很好的選擇，先抽取長方體與正方體的共同特徵，再分別探討相異之處。討論相異處時，透過交叉比對，逐一檢視是否有遺漏，如：在正方體的特徵中，孩子提到正方體的12條邊都一樣長，「長方體的邊長呢？12條邊都不一樣長嗎？」我們追問。在長方體的特徵中，孩子發現長方體上相鄰的面會互相垂直，於是我們再問「正方體也有一樣的現象嗎？」……透過提問討論補足原先未被察覺的特徵。在這個活動中，「一張紙條寫一個發現」這種蒐集訊息的方式發揮具體效用：觀察與記錄時，孩子可根據自己的觀察速度記錄1-5個不等的發現，不會出現等待或者彼此干擾的狀況；討論時，這些發現可以被移動、修正、整合，讓思考的過程看得見。經過一節課的討論，我們歸納正方體與長方體的特徵如圖6：

圖6 用Double Bubble Map彙整長方體與正方體的異同



前述活動中，透過觀察比較及視覺直觀認識形體的構成要素與關係，已達到國小階段學生學習目標。為了更進一步探索孩子對於相關概念的想法，我們額外設計四個提問，孩子想法如下：

「說說看，你怎麼知道鄰邊會互相垂直呢？」

◆學生想法一：因為正方體與長方體的面都是正方形或長方形，這兩種形狀都有四個直角，表示相鄰兩個邊的夾角是直角，因此，相鄰的邊互相垂直。

◆學生想法二：用量角器（三角板）量，相鄰兩邊的夾角都是90度。

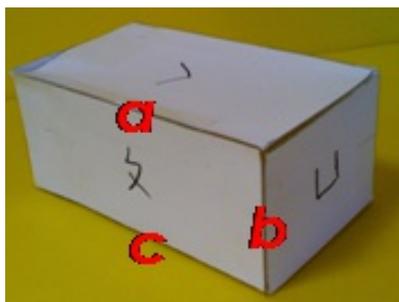
「說說看，你怎麼知道對邊會互相平行呢？」

◆學生想法一：因為各面為長方形，所以a邊垂直於b邊，c邊也垂直於b邊，引此a邊與c邊互相平行（如圖7）。

◆學生想法二：把a邊與c邊延長，不會有交點（如圖7）。

◆學生想法三：拿尺量，a邊與c邊間的距離都一樣長（如圖7）。

圖7 對邊互相平行說明示例



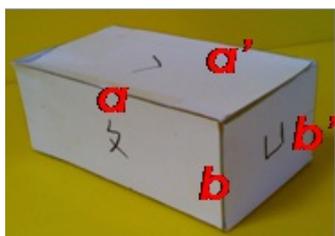
「說說看，你怎麼知道鄰面會互相垂直呢？」

◆學生想法一：因為 a 邊垂直 b 邊； a' 邊垂直 b' 邊，而且 \square 面與 \square 面均為平面，沒有彎曲或凹凸問題（如圖8）。

◆學生想法二：製作一個水平的面與鉛垂的面，使兩面互相垂直如書擋（簡易書架，兩面互相垂直），再利用此工具做兩面貼合的檢驗。

◆學生想法三：使用量角器檢驗兩個面是否成 90° ，檢查時眼睛需平視量角器確認這兩個面的交界處處皆是 90° 。

圖8 鄰面互相垂直說明示例



「說說看，你怎麼知道對面會互相平行呢？」

◆學生想法一：因為撐起 \square 面與其對面的四條邊（ a 邊、 b 邊、 c 邊及看不到的 d 邊）互相平行且等長，而且 \square 面及它的對面都是平面沒有凹陷或突起，所以 \square 面與它的對面間的距離都一樣長，不會碰在一起（如圖9）。

◆學生想法二：因為 a 邊與 b 邊互相平行，所以 \square 面與其對面平行（如圖9）。【針對此解釋，可舉梯形柱（如圖10）為反例，梯形柱中， A 、 B 兩面有互相平行的邊，但兩個面並不互相平行。同時，另行準備紙片延長 A 、 B 兩面使之相交，供學生判別】

圖9 對面互相平行說明示例一

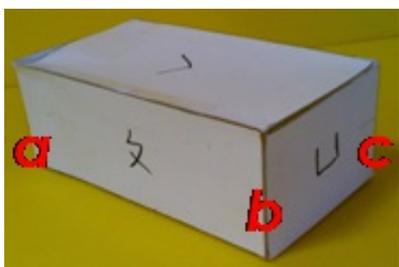
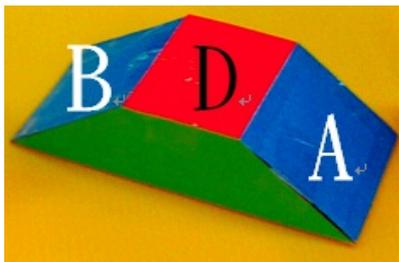
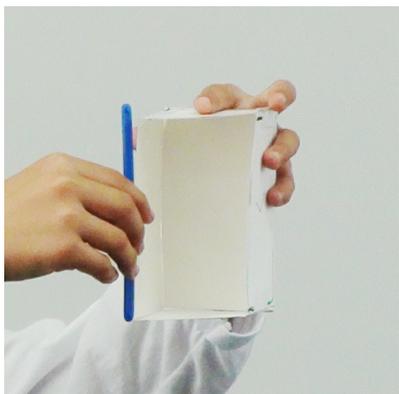


圖10 對面互相平行說明示例二



◆學生想法三：如圖11，找一根與邊（高）一樣長的棒子，移到盒子內部檢查，檢查時棒子要與上下的面垂直，若在盒子內移動時發現上下兩面間的距離都一樣長，就表示這兩個面互相平行。

圖11 對面互相平行說明示例三



為了說服他人相信自己的論點，孩子使出渾身解數，利用邊與邊的垂直平行關係、水平面的概念，以及各種工具的使用試圖說明與解釋，想法雖不盡完整，但透過再次的討論澄清，邊、面的垂直平行關係更加清晰了。

「紙盒拼組」的實作經驗除了為構成要素及關係的討論提供豐厚的內容外，也遷移至展開圖的探討活動中。「**要如何才能將圖卡正確拼排成長方體展開圖？除了嘗試錯誤外，還有別的策略嗎？**」針對此問題，孩子的回答是：

◆如果是「**有兩個正方形**」的長方體，要先找出四張全等的長方形圖卡，再找符合邊長大小的兩片全等正方形圖卡。黏貼時，一樣長的邊貼在一起，先將四張全等的長方形圖卡貼成一個大長方形，然後再分別將正方形圖卡接上去。因為這兩個正方形是對面不是鄰面，所以不會接在一起，另外，與長方形接合的邊要一樣長。

◆如果是由「**三組長方形**」構成的長方體，要先分別找出兩兩全等的長方形圖卡三組，這三組長方形圖卡的邊要彼此吻合，不能太長也不能太短。然後，全等的面不能貼在一起，因為全等的面是對面不是鄰面。

仔細比對孩子的操作歷程與說明發現，具體經驗讓孩子在陳述策略時有「**步驟性**」，他們較能明確地說出先如何，再怎樣……，這與過去教學相比有明顯的不同。

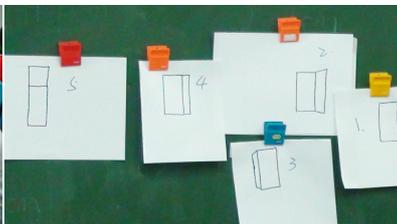
「**繪製視圖**」是模組中最後一個實作活動。首先，請孩子「**觀察四張同一個長方體的照片，並說說看這四張照片有何異同**」。根據此布題，孩子發現：同一物體，觀察的角度不一樣，可以看到的面

不同，拍出來的樣子就不同。順著此想法，我們討論：「從什麼樣的角度拍攝，才能讓大家清楚這是一個長方體？」孩子提出的看法是：不能只拍一個面、拍三個面比較有立體感，繪製時也相同，需繪出三個面。

圖12 孩子觀察形體，繪製視圖



圖13 孩子首次嘗試繪製視圖



原以為繪製視圖對五年級的孩子來說並不困難，實際操作發現，孩子需克服的地方不少，四年級繪製互相平行、互相垂直的線是此部分最重要的先備經驗。此外，立體形體平面化後呈現的樣貌已失去鄰邊互相垂直的特性，這對孩子來說也是難關。經過一連串的探討，我們確認「立體平面化」是非常關鍵的學習。至於，怎麼設計教學可以讓孩子學得更好？是未來將持續關注的問題。

教學發現，明亮清晰的思路需要具體經驗的支撐，過程中，孩子不斷使用「因為…所以…」的句式解釋想法；我不斷地問：「有沒有不同的想法？有沒更好的方法？」這是一趟互學之旅，師生共創別開生面的學習之路。

參、從「需求」出發，學習更有需求

「欣怡老師，正方體與長方體展開圖的樣式都有很多種，你為什麼不介紹？」教學結束後，觀課夥伴這樣問。其實展開圖的「實用性」與「多樣性」之爭在活動設計之初即展開，經過來回思辯發現，展開圖的多樣性與後續數學學習較無直接聯繫，而形體特性與展開圖息息相關。於是，我們設定「展開圖使用的便利性」、「利用形體特性辨識展開圖」、「繪製展開圖」為教學重點。

為了讓展開圖的使用有需求，教學時從製作紙盒的便利性切入，首先，讓孩子回顧先前製作紙盒經驗，透過問話：「包裝產品時，一片一片黏貼的方式既費時又不方便，針對這個問題，你有更好的策略嗎？請說說看。」先前的實作經驗發揮具體效用，孩子提出「將圖卡攤平盡量將六個面貼好，再立起來黏貼其他的邊」的想法，為了方便後續溝通，我們於此時介紹「展開圖」的名稱。

引出使用展開圖的需求——一體成形，方便組合，且孩子能成功利用圖卡拼排展開圖後，我們請孩子根據提供的物品量身製作包裝盒，此時，孩子需對實物進行測量，並決定每一個面的大小以及它在展開圖中的位置。而後，孩子根據節省材料、產品是否方便拿取，產品在盒子中是否會因為空隙過大晃動造成損壞等原則進行審核與修正。

經過分類比較，孩子繪製展開圖的策略主要有兩種：

- ◆先選定一個「底面」，底面的四條邊各連接一個側面，而後再畫上「蓋子」（另一個底面）。
- ◆先畫出四個連在一起的側面，再畫「底面」跟「蓋子」。

能根據物品大小繪製展開圖並完成紙盒設計後，如何將成品平面化，方便他人評閱呢？拍照、繪製視圖就成了下一個討論主軸。

「為什麼作業簿上畫幾條線就能代表一個長方體？」、「為什麼標上幾個數字就能代表該形體的大小？……孩子若不清楚，後續計算形體體積與表面積時問題就一一浮現。因此，踩在「溝通的需求」上，我們設計了視圖教學。此次教學礙於時間，採用說明的方式帶領孩子認識視圖，接著，利用布題與孩子探討視圖與實際形體大小的關係。一開始，孩子最直接的反應就是畫一個和形體一樣大的視圖，而後才陸陸續續提出將形體的樣貌畫下來，用標示長度的方式處理，唯有如此，才有辦法呈現大型物體的視圖。那麼，**到底要標示哪些邊呢？每條邊都標示嗎？**透過追問，孩子回扣先前長方體與正方體的長短特性，歸納出長方體需標示三條邊（長、寬、高），而正方體的部分出現分歧的意見，有孩子認為，只要註明正方體，標示一邊即可（因為正方體的12條邊都一樣長）；也有孩子認為標示三條邊不但能確認紙盒有多寬，有多深，有多高（長、寬、高），還能省下標註中文的過程。此布題主要用意在連結後續長方體正方體體積、表面積的學習。**為什麼視圖上要標示邊的長度？邊的長度跟盒子的大小有關嗎？視圖上需要標示哪些長度我們才能知道盒子的大小？而知道了某些長度，我們可以再推測出哪些邊的長度呢？**透過此部分的實作與討論，為後續相關教學做墊步活動。

完成討論後，我請孩子繪製邊長5公分的正方體，此題除了讓孩子有再次練習的機會外，也用於檢驗孩子是否了解：只要標示長度，視圖上的邊長可自行設定。所有練習都完成後，即請孩子為自己製作的形體繪製視圖，完成競賽的第二項作業：視圖繪製，並回頭想想展開圖的繪製中，哪些邊的長度需要標示，並嘗試標註。

「怎麼樣才方便使用？」、「怎麼做才能讓他人清楚我們的設計？」從這兩個問題出發設計的展開圖與視圖教學活動，讓師生在更自然的情境下來回修正思維與呈現方式，達成教學目標。

肆、因為學習深刻，所以學習成果令人印象深刻

「孩子能繪製展開圖與視圖後，是不是該教他們在哪些位置加黏貼需要的面？」、「孩子會不會混淆原本的六個面及後來增加的黏貼面？」、「要不要教孩子『最少』須設計幾個黏貼面才能將紙盒貼牢？」……為了讓教學更完善，我們再次迎向鋪天蓋地而來的疑問。我們相信，經過先前深入的操作與討論，孩子一定有辦法。於是，簡單的任務分派後，創作活動開鑼了。

「想一想，如何修正會更好？還可以做什麼樣的改變展現創意？」指令下達，孩子開始尋找工具測量禮品各向度的大小，仔細討論每個面的位置以及美化方式，一張張紙開始變身為各式各樣有趣且實用的禮物盒來。

圖14 作品一



圖15 作品二



有的孩子用緞帶固定側面，並增加一個面貼上魔鬼氈，完成開闔容易的作品（圖14）；有的孩子採鏤空設計，讓包裝盒兼具燈罩功能（圖15）；也有孩子用緞帶取代黏貼面的功能，將禮物盒包裝完整，為了方便顧客取物，選用魔鬼氈做活動裝置（圖16）；甚至有孩子製作造型狗禮物盒，十分有意思

(圖17)。

圖16 作品三



圖17 作品四



圖18 作品五



成品琳琅滿目(圖18)令人目不暇給。看著提供的各項物品適恰地擺放在孩子們設計的包裝盒中,我知道在這次課程中,他們不但認識了正方體與長方體,也學會針對各項物品設計專屬包裝盒的技能,將所學應用於日常生活中。

寫於教學之後

改變教學策略對一個老師來說是很大的挑戰,在嘗試將緊握的雙手鬆開之際,我們有許多的質疑與掙扎,但是,看著孩子蹣跚起步,從挫折與失敗中不斷的尋找出路,儘管彼此間意見不盡相同,也能想方設法說服彼此,當知識與技能習得時,他們眼角的欣喜與止不住的笑,是給予教學者最珍貴的饋贈。這個過程當然曲折,為了讓教學順暢,我們擷取多方建議,屢次修正教具的使用與教學脈絡的安排,精心設計的活動仍在教學中不斷遇見困難,於是一修再修,這段期間,非常感謝「教材與教學模式研發團隊」夥伴們從不同角度給予相關修正建議。完成教學後,我們不斷被問:以後的課本就長這樣嗎?以後的教學一定要實作嗎?時間怎麼夠?在這個過程中,我們努力給孩子更充裕的學習內容與時間,試圖轉化素養內涵於教學中,但對素養的定義,素養教案的樣貌我們仍在探索與修正,這裡頭一定還有許多有待精進之處,我們想呈現的不是典範,只是盡力為孩子未來的學習畫一個藍圖,最希望的,就是發揮拋磚引玉之效,讓更多教育先進加入,這樣一來,孩子未來的學習就更令人期待了。

參考文獻

黃敏晃、謝堅、朱建正、魯炳寰、廖淑麗(2006)。國小數學教材分析—幾何。臺北:國立教育研究院籌備處。

* 古欣怡，苗栗縣信德國民中學教師

** 林美曲，苗栗縣信德國民中學教師

電子郵件：rabbitsj@gmail.com；t362093@gmail.com