

建構主義在國小數學科教學試煉

討論人：鄔瑞香

台北市東園國小輔導主任

討論人：林文生

台北縣永和國小總務主任

本篇文章最主要的目的，不是在分析建構主義的意義和不同學者的主張，而是在於詮釋建構主義的主張，對於現場的教學工作者產生了哪些啟發，這些啟發性的概念，在教學的現場又產生了那些行動，這些行動對於學生的解題活動又產生了那些影響？因此本文論述的焦點在於「描述並探討教師佈題的設計、學生合作解題的歷程、師生或同儕的交互辯證、兒童解題歷程的分析、以及數學解題類型內蘊化的歷程的描述。」

壹、數學教室當中的發動機：談教學佈題

建構主義學者 von Glasersfeld (1991) 認為，知識不可能是預先準備好等著從老師或父母的手中，傳遞給學生；而是學習者主動地建立在他們的心靈。知識既然是學習者所自行建構，兒童必然成為教學活動的主角，教師只是學習活動的引發者，而非教學活動的主導者。所以數學教師從傳統「解題者」(problemsolver) 的角色，成為佈題者 (problem poser) (甯自強，民82)。

從教學的現場來看，精彩的問題是引發學生解題最主要的動力 (林文生，民85)。根據鄔瑞香主任現場教學的經驗，認為教師的佈題活動要有下列三項特質：

- 一、銜接學生的舊經驗 (包括學習經驗或生活經驗)，並引發學生解題的需要感 (透過數學問題解決的學習，可以幫助學生解決生活上所面臨的問題)。
- 二、決定適當的內容及範圍 (例如：被減數100以內，減數50以內的解題活動)。
- 三、師生共同合作來設計數學問題，增加解題的自發性及挑戰性 (例如設計一道購買文具的題目，文具的價錢和文具的種類可以由學生參與來決定) 現在以二年級上學期的數學課程：二位數以內的減法做案例，來說明教師佈題與學生解題活動的歷程：

(師生共同建構問題情境)：教學佈題

師：你們到文具商店，最常買的是什麼東西？

生：鉛筆啦！貼紙啦！飛機模型啦……

師：請小朋友幫忙畫在黑板上，並且定個價 (學生在黑板上畫上鉛筆、貼紙、飛機等圖案並標上價錢)，不要超過50元，現在鄔主任給每一組55元，買一種

黑板上有的東西，請問還可以找回多少錢？（如照片一）

讓學生參與問題的設計有許多好處，首先是學生會將他們的生活經驗融入到問題的情境當中來，其次，是學生有被尊重的感覺，不會等待老師給題目，然後猜測老師所想要的答案。最重要的是師生共構的題目，都是非例行性的問題，不是學生已經具有的解題類型可以回答，因此學生必須要發揮他解題的創造思考，才能解決非例行性的問題。佈題完成之後，緊接著是學生的解題活動。

貳、吵雜之中進行有意義的溝通：談同儕的合作解題

建構式的教學，經常是透過小組討論，藉由同儕團體的互動，以協助他們對於數學的瞭解（Susan, P. & Thomas, K., 1992）。在小組排列的方式下，兒童非常方便和隔鄰或對面的小朋友說話，而且兒童的自我意識又很強烈，會很喜歡去發表自己的想法，……在共同討論，除了師生間互動外，更要有組間的互動（鍾靜，民84）。

本研究現場所進行的合作解題的模式，是以5~6人為一組，問題確定後，通常低年級的孩子，合作解題的歷程是：先發表各人的意見，再決定由一個人先在小黑板畫、或大家一起畫（如照片二），將問題的意思用圖畫表徵出來（如照片三），再將解題歷程用算式記錄方式呈現：55元先付10元，剩下45元，45元再付10元，剩下35元。……（如照片四），最後小組的成員說明解題過程及結果的記錄給全班聽「我們畫5個10元和1個5元來表示55元，把三個10和一個5畫掉，表示給老闆35元」（如照片五）。

在這裡我們必須特別說明，學生小組討論是在吵雜當中進行有意義的溝通。所以進行小組討論的教室是熱鬧的，甚至於有點吵雜，但是仔細一聽學生與學生的對話是有意義的，他們正在針對問題做辯證、協商、並取得解題的共識。所以老師要注意的是每位學生是否參與小組的對話，而不是學生是否守規矩。

參、激盪智慧的火花：談解題歷程的交互辯證

學生討論之後，要將他們的「共識」發表出來，發表的人，必須將他的解題歷程，釐清整理一次。在釐清整理的同時，他的概念就自我辯證一次，如果這時的觀念還有問題，自己會馬上發現，並加以修正。等到發表出來，聽的人會加以「質疑」，對發表的人的意見加以修正，一直到全班取得共識為止。所以這個階段，可以說是辯證建構的階段。

Yackel, Cobb, Wood, Wheatley, 和Merkel（引自Mary & Douglas, 1992）等人指出，提供問題讓學生解決，許多的學習和知識的建構是透過社會互動，老師和同儕共同參與解題。當學生有機會和老師及同儕產生互動的時候，他們會說出他們的想法（*verbalize their thinking*）為他們的解題解釋或辯護（*justify their solutions*）。因為要解決衝突，所以，學生有機會重新建立對問題的概念，擴展他們的觀念結構，吸收（*incorporate*）不同的解題方式。

從照片五到照片七，我們要呈現的是學生質疑辯證的歷程。「兒童建構的知識，如果缺乏同儕交互辯證的歷程，這時候的知識還是主觀的知識，等到和團體的辯證之後，這時候的知識才能具有客觀的特質。這時所稱的客觀是相對於前面的主觀而言，是相對的客觀，而非絕對的客觀。」

從照片五我們發現小組討論後，學生將他們的解題歷程說給全班聽：

「我們畫5個10元和1個5元來表示55元，把三個10和一個5畫掉，表示給老闆35元」

接下來照片六呈現的是學生提出質疑：

「請問這個10是什麼意思？是從哪裡來的？」

組員回答：「要買飛模型裏面的錢。」

學生：「還是聽不懂。」

組員補充說：「就是35元裏面的10元，滿意嗎？」

學生：「不滿意！」

組員再說明：「 $45 - 10 = 35$ ，是表示我們拿第二個10元給老闆，剩下35元，再拿第三個10元給老闆，剩下25元，還少了5元，再給老闆，就剩下20元。」

其它組員協助澄清補充說明：

「這裏有3個10和1個5，是買飛機（模型）的錢，第三組這樣紀錄是讓我們看清楚他們付錢的方法。」

學生的解題活動經過師生或同儕的交互辯證，這時候課堂當中的解題活動暫時告一段落。雖然學生有參與相同的解題活動，但是學生所建構的解題類型卻有很大的差異。以下筆者就從奇妙的發現之旅這個觀點，來分析學生解題的路徑差。

肆、奇妙的發現之旅：學生解題歷程的分析

皮亞傑認為教育是讓兒童主動去發明（to invent）或去發現（to discover）的歷程（Sinclair, 1990），因為學生對於學習的發展經常充滿新鮮感。這些兒童的發明或創造，從成人的觀點來看，卻是學習的活動被學習者所重新創造的歷程（因為這些歷程可能別人已經經歷或使用過，但是對兒童來說卻是全新的經驗）。因此數學解題是學生的發現之旅，也可以說是知識再創造的活動。而這些活動經常是學生憑藉著教師所提供的真實物件（real objects）（如小黑板、粉筆或實物模型等）和思考物件（objects of thought）（數字、符號或文字）作為媒介，進行解題活動，重新組合、重新建構新的解題活動類型。現在筆者就以學生反省日記當中的實例來說明學生解題的發現與發明：

一、學生解題方法的發現

（資料引自東園國小二年級，85、10、26反省日記）

題目：一顆蘋果賣3元，請問買12顆要付多少錢？

做法：

$(3 + 3 = 6)$, $(6 + 3 = 9)$, $(9 + 3 = 12)$, $(12 + 3 = 15)$, $(15 + 3 = 18)$,
 $(18 + 3 = 21)$, $(21 + 3 = 24)$, $(24 + 3 = 27)$, $(27 + 3 = 30)$, $(30 + 3 = 33)$,
 $(30 + 3 = 36)$ 。

個數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
價錢元	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36

發現：買12顆蘋果就是要付36元。

二、學生解題方法的發明

（資料引自東園國小二年級85、09、27反省日記）

問題：（學生自己出題目）

一隻瓢蟲5條腿，那6隻瓢蟲就有30條腿。其實瓢蟲有6條腿，再加上少算的6條腿，就等於36條腿。

這兩個題目都是學生有趣的解題歷程，前者是教師命題，學生解題，最後學生發現了使用表格來歸納解題的歷程，讓解題的歷程更加清楚明白。後面的題目是學生自己命題，自己解題，整個歷程對學生來說，是一個發明。不管是發明或發現，學生的解題歷程對老師而言都是解題類型的再創造。

伍、打開學生數學解題的黑盒子：談學生數學概念的建構歷程

在本學年度所實施的數學新課程，所指的數學概念，專指內蘊化的（interiorized）解題活動類型而言。解題活動類型的內蘊化，是指學習者透過數學解題活動的經驗、察覺到瞭解的歷程。實施某具體解題活動以解決特定問題，進而建構數學概念，稱之為「經驗」，經驗：數學概念（例如學生知道55元花掉了35元，是花掉了五個10元和一個5元當中的三個10元和一個5元，最後剩下兩個10元，就是20元。當該具體解題活動一再被重覆實施，並達到沒有感覺活動材料（sensori-motor materials）解題者仍能以自行提供的感覺活動材料進行特定類型問題的解題時，稱該解題者已達「察覺」某數學概念的階段。此時解題者可以成功的解題，但仍說不出「所以然」來。如若解題者不但可以直接透過心智解決問題，並進一步的說明何以「解題的活動類型」為有效，此時稱該解題者已達「瞭解」的階段（甯自強，民82）。（例如上述的解題活動，學生不但知道花掉35元，是花掉3個10元和一個5元，而且知道這三個10元和一個5元是0代表購買飛機模型的錢，所拆開的結果。所以這樣的解題類型可以有效地解決問題。）

建構主義的教學模式其實是不存在的，最好的教學模式是教師自我建構的結果。本教學個案的分析，是希望引發數學教育現場教師的一些對話，引發老師對於自我教學模式的一些省思，進而站在兒童主動建構數學概念的觀點，和學生共同建構美好的學習活動。

參考書目

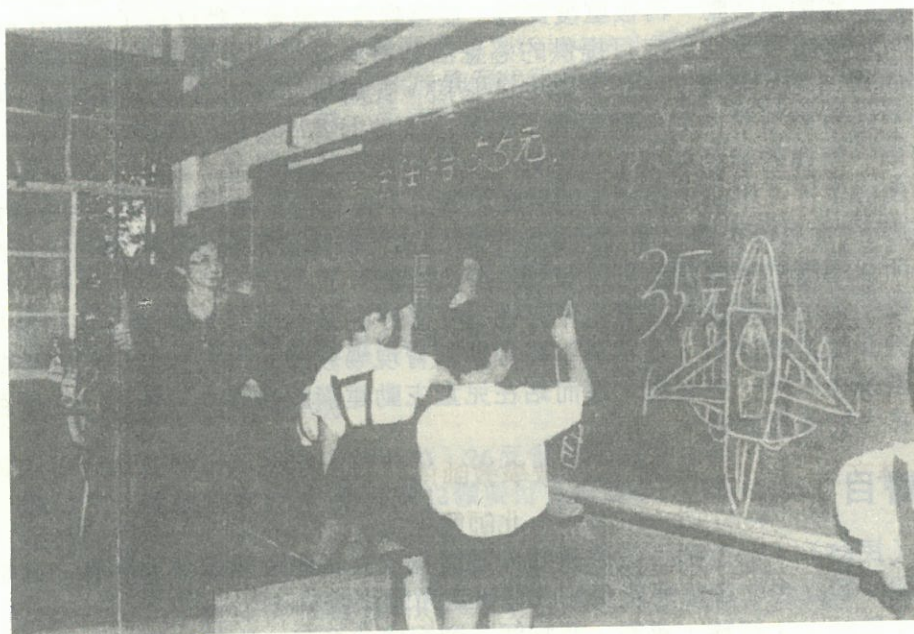
林文生（民85）：一位國小數學教師佈題情境及其對學生解題交互影響之分析研究。國立台北師範學院國民教育研究所碩士論文。

甯自強（民82）：經驗、覺察、及瞭解在課程中的意義～由根本建構主義的觀點來看～。論文發表於國小數理科教育學術研討會。台東市台東師範學院六月五日。

鍾靜（民84）：小學低年級數學新課程之實施現況。論文發表於八十三年度國小學新課程數學教研研討會，台灣省國民學校教師研習會二月十四日。

von Glasersfeld, E.(1991). Radical constructioism in mathematics education. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

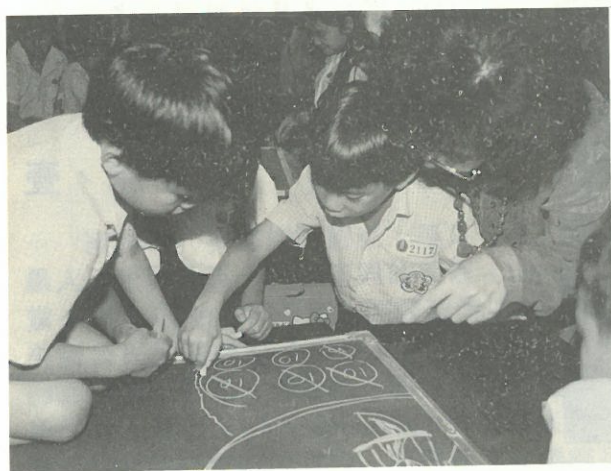
- Mary, K. & Douglas, D.A.(1992). Mathematics teaching practices and their effects. In D.A. Grouws(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp.115-126). New York: Macmillan Pub.
- Sicclair, H.(1990). Learning: The interactive recreation of knowledge. In L. P. Steffe & T. Wood(Eds.), *Transforming children's mathematics education*(pp.19-30). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Susan, P., & Thomas, K.(1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 23. 505-528.



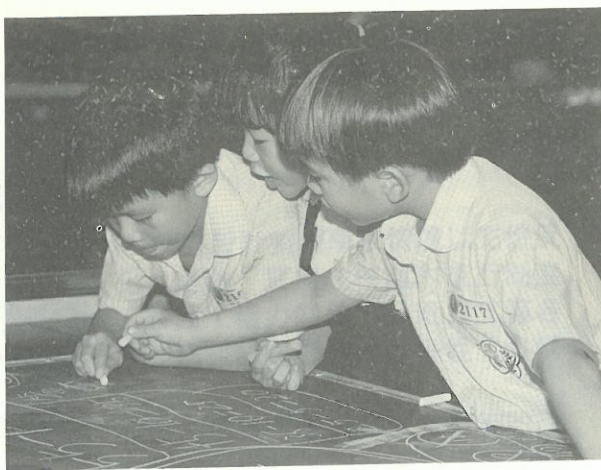
照片(一)：師生共同佈題
(學生將問題轉化成圖形表徵)



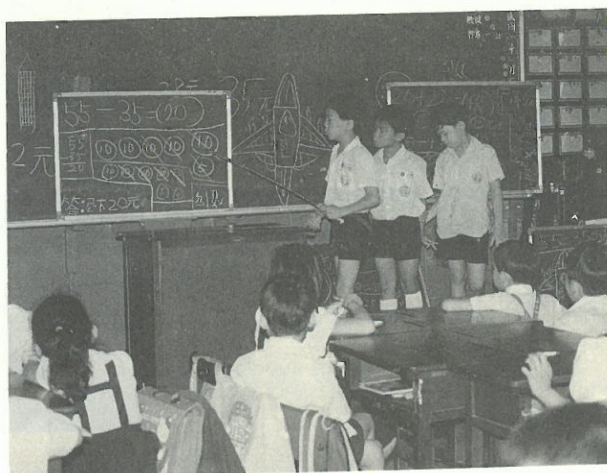
照片(二)：合作解題
(小組討論如何把想法記錄下來)



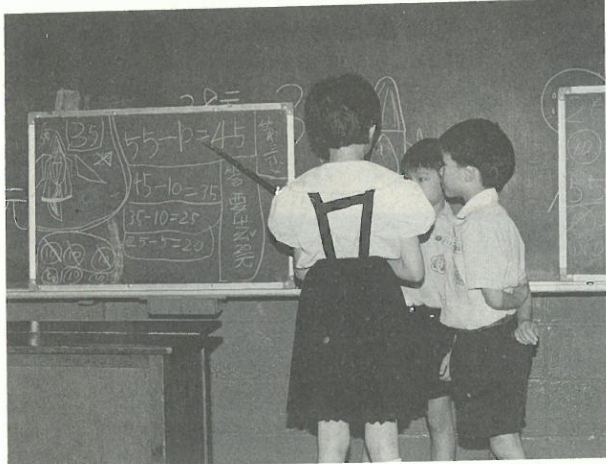
照片(三)：利用圖象說明題意



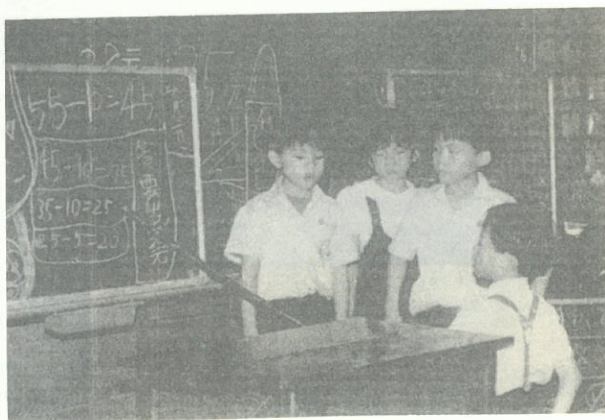
照片(四)：把解題歷程用算式方式呈現



照片(五)：小組成員說明解題過程及結果的記錄給全班同學聽



照片(六)：質疑辯證（組員答詢）



照片(七)：質疑辯證（其它組員補充說明）