

一百年來我國小學數學之幾何與測量 教科書發展之教育心理學理論 基礎與演進

黃幸美

臺北市立教育大學課程與教學研究所教授

摘要

本研究回顧百年來的小學數學課程標準及其幾何與測量教材綱要、教學實施要則、教科書及相關的文件資料，探索其所反映的教育與心理學理論脈絡。同時，分析依據不同時期課程標準（課綱）編製之教科書幾何與測量單元，其文本所呈現的圖示表徵方式與問題解決說明模式之變化，提供教育心理學理論潛在影響教科書表徵之輔證。研究結果發現，不同時期的課程標準所訂定的課程目標、教材綱要與教學要點，其內容隨著年代的演進而改變，幾何與測量教材地位的轉變尤為顯著。在幾何方面，於民國64年以前之課程標準，乃附屬於算術或測量教材，於92年九年一貫課程綱要方以「幾何」名稱列為數學課程的重要主題之一。在測量方面，於51年課程標準以「實測」含括測量教材，從原附屬於筆算教材獨立成為一個主題；但是於92年的九年一貫課程綱要，則將測量教材融入「數與量」及「幾何」主題。晚近時期的教科書幾何與測量文本，提供實景／物的插圖、操作歷程展示圖及操作動作要求的問題，其數量比先前時期豐富且多元，此現象呼應教育心理學者的表徵學習觀點。在問題解決說明模式方面，幾何文本與測量文本略存差異，幾何教科書較多呈現非直接說明模式，此符合數學教育學者強調幾何探索對於概念建構的教學意義；但是不同時期的測量教科書，其文本所呈現的直接與非直接說明模式則差異互見，但是可能由於測量與數量運算關係密切，綜觀一百年來的測量單元文本，傾向提供「問題陳述—算式與計算—解答」的直接說明模式。問題解決的直接說明模式，其與當前數學教育學者強調透過充分的測量實作與解決問題經驗，培養量

感與概念理解之建議，存有差距。統整研究結果，本文並對課程標準與教科書編製研究者、未來的幾何與測量的課程發展與教學實務工作者努力的方向，提出建議。

關鍵字 幾何、測量、教科書、圖示表徵、問題解決說明模式

壹、緒論

學校課程為學校教育的計畫，教育理論與課程設計取向影響課程應包含什麼內容、以何種因素為核心作設計、師生的角色與關係（教與學的互動）等考量，在在反映教育哲學思潮與心理學研究觀點（黃政傑，1991；李子建、黃顯華，1996）。數學知識因其主題內容具有特殊性，學習過程因內容性質不同而具有差異，雖然有學者認為一般教育思潮與心理學理念，不能完全解釋數學課程設計與教學（鄭毓信、梁貫成，2002），但是數學教育為學校教育重要的一環，數學課程的研發與教材編制，猶如一個問題解決的歷程，一方面因應社會政治變革，進行教育改革；另一方面順應教育思潮，解決數學教育問題（蔣治邦，1998，p. 167; Fey & Graeber, 2003; Garrett & Davis, Jr., 2003）。再則教科書的編製常配合教育部頒佈的課程標準或綱要，因此，有學者認為不同時代的教育思潮與心理學理論，可能影響當時期的課程標準，且成為教材與教法及教科書表徵模式設計之基礎（例如：徐斌豔，2001；王鳳喈，1977；司琦，1981；Antonovskii, Boltyanskii, Volovich, Krass, & Levitas, 1990）。因此，近百年來我國小學數學課程標準（簡稱課標）的教材綱要與教學法及教科書的表徵模式轉變的情形為何，是否能從其轉變的軌跡與內涵，檢視影響此改變的教育思潮與心理學理論之潛在動力，上述問題之探討有助於數學教育及課程研究者瞭解數學課程發展沿革，並從檢視過去發展脈動，結合當前之教育目標及實務之洞察，展望未來的課程與教學。

幾何知識緣起於計算長度、面積與一般物件的體積（National Assessment Governing Board, NAGB, 2009, p. 17）；而測量概念兼含數與運算及幾何概念（Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2008），由此可見，幾何與測量知識技能的學習，關係密切。但是幾何概念在傳統的小學數學教育，屬於測量課程的附屬內容，重要性遠不及數與計算領域（林秀瑾、張英傑，2005；Garrett & Davis, Jr., 2003）。測量問題具有生活實用功能，長期以來被列屬於數學課程內容之一；但是在數與運算及測量連結設計，與強化算術運算技能的課程目標下，測量猶如算術運算的另一種問題情境。二十世紀中期以來，在數學課程發展歷程中，幾何與測量課程雖然非單一受關注的焦點，但是教科書內容與教學方法，受社會政治因素、行為學派心理學、認知心理學、幾何思考與發展研究及相關之教學理論之應用，使教科書之設計與編製產生改變，亦為顯見之事實（黃幸美，2010；Antonovskii et al., 1990）。探討幾何與測量主題在小學數學課程地位轉變的同時，除了瞭解不同時期的數學教育改革行動下所潛藏的政治社會推動力以外，剖析數學、心理與教育學者的認知與學習理論的潛在影響，將裨益教育研究者對小學階段的幾何與測量課程發展，建構完整的瞭解（Fey & Graeber, 2003; Garrett & Davis, Jr., 2003）。因此，本研究

將以幾何與測量課程為核心，分析我國一百年來此兩個主題在數學課標所訂定的教材內容與教學要點之變動情形。

此外，數學概念結構抽象，需藉助各種圖示、符號、觀察、操作與口說方式來傳達（許國輝譯，1995），教科書的內容，包含問題解決解說模式、插圖（illustrations）與圖表（diagrams, graphs, charts）等圖示表徵方式，更為傳達知識概念的重要途徑（單文經，1996）。數學教科書的圖示表徵與其所展示的問題解決說明模式，可因其是否真實具體、切合學習者的經驗，影響學習者對知識訊息的學習，而且圖示表徵呈現的模式，也反映心理學研究對於視覺、心像建構與學習之理論觀點（Pyke, 2003）。由於視覺觀察、真實形體物件的觸摸與操作體驗，皆為建構幾何與測量概念的重要途徑，教科書文本所提供的插圖是否表徵實際物件的形或體的特性，以及操／製作的歷程，皆可能影響學習者的視覺觀察、形體概念及測量量感之建構。因此，教科書所提供的圖示表徵與問題解決說明模式，是否利於學習者建構幾何與測量知識與技能，值得關注。

一般課程研究者認為數學課程編製理念的分野，於二十世紀中期代逐漸形成，1960年代之前的課程編製理念，強調以學科為本位與知識能力（王克蒂、譚克平，1997；鍾靜，2005；李子建、黃顯華，1996；黃毅英、鄧國俊、霍秉坤、顏明仁、黃家樂，2007）；1960年代之後，以兒童為本位與學習過程為取向的課程設計理念愈受重視（鍾靜，2005；黃毅英等，2007），強調學習者的認知發展、心智與環境互動的運作歷程，以及觀察、操作、製作與解題溝通（Clements, 2003; Lehrer, 2003; Clements & Bright, 2003）。繼而，1990年來我國的教育改革，重視以學生為主體、生活經驗為中心的跨學科、議題、事件或問題的統整課程（陳伯璋，1999；Jacobs, 1989），學生的需要、興趣、技能為課程調整之考量，並以學生的生活經驗為中心，連結數學學科主題（鍾靜，2003，2005）。上述不同教育思潮與數學學習心理學理論，是否可從教科書的圖示表徵方式與問題解決說明模式之分析比較，窺探其差異，值得進一步探討。因此，分析一百年來我國數學教科書的幾何與測量單元文本之圖示表徵方式與問題解決說明模式的變化情形，試以瞭解教材表徵變化背後，所反映的教育心理學理論之應用差異情形，期以從一段長期的教材回顧與檢視中，勾勒此幾何與測量課程與教學的發展脈絡，並藉此探索結果，激發數學教育及課程與教學研究與實務工作者投入更多的關注，在結合本國文化與社會民情下合作研討，開展未來更優質的數學教育。

綜合上述，幾何與測量教材在不同時期所訂定的課程標準文件，其教材內容與教學取向呈現差異。但是「每一個新課程的研發，都是站在舊有課程的肩膀上，繼續地往前走……」（蔣治邦，1998，p. 180）。近百年來，我國的小學課程標準幾經修訂，欲探討不同年代的課程標準下的幾何與測量教材與教學實施方法的發展沿革與轉變，需兼用歷史分析及內容分析方法。因此，本研究首先使用文獻與歷史分析，回顧百年來不同數學

課程標準施行的時期，幾何與測量教材綱要與教學要點，期以從課程標準、教科書及相關的文件資料，探索其所反映的教育與心理學理論。繼而，使用內容分析法，提供量化資料，探討依據不同時期課標（課綱）而發行實施之教科書幾何與測量單元，其文本所呈現的圖示表徵方式與問題解決說明模式之變化。本研究探討的兩個問題如下：

- 一、民國元年～100年（1912～2011）小學數學課程標準之幾何與測量教材教法及其所反映的教育心理學理論為何？
- 二、民國元年～100年（1912～2011）幾何與測量教科書文本之圖示表徵與問題解決解說模式所呈現的變化為何？

在時間向度的時期劃分方面，民國元年～38年間（1912～1949），因戰爭與戡亂因素，可蒐集之教科書及相關資料難以完整齊全。研究者考量人力、物力與時間因素之限制，將此時段劃分為一期。1949年後續的年代分期考量，主要包含兩方面：一、重要的教育事件肇始年代並導致小學教育學制改變者，以該年代為切分點，例如：民國57年（1968）施行九年國民義務教育，此後的小學教育制度與57年之前的初等與高等小學，前後的學制差異顯著，故以57年（1968）作為一個時期的劃分點。二、分析各年代教育部所頒定的課程標準（綱要），若後來（新）頒訂的課標內容能力指標與前時期課標具有顯著差異，則以新課標（課綱）頒訂年代為分期點，例如：82年課標與89年的九年一貫暫時綱要（簡稱暫綱）內容，教材內容從六個年級之分段，變成1～9年級四個學習階段之分段，不同階段能力指標的表示方式，在82年課標與89年的九年一貫暫綱，兩者具有顯著差異，故將自民國89年（2000）施行的九年一貫課程暫綱（教育部，2000）至92年（2003）、97年（2008）施行九年一貫課程正式綱要（正綱）（教育部，2010）期間，歸屬為一個時期。相對地，82年的課標乃依據64年課標而修訂，故將施行64年與82年課標的期間，歸屬同一時期。

根據上述分期原則，本研究在時間向度上，包含五個時期：第一期（1949年以前），此時期小學包含初等與高等小學，包含18年（1929）、21年（1932）、31年（1942）及37年（1948）的課標；第二期（1949～1967），此時期亦包含初等與高等小學，包含41年（1952）與51年（1962）的課標；第三期（1968～1974），開始施行九年國民教育，國民小學為國民教育之第一階段，數學課程標準乃依據57年的課標；第四期（1975～1999），數學課程標準包含64年的課標及82年修訂的課標；第五期（2000～2011），教育部將國民中小學的課程因學科性質不同而區分學習領域，分別於民國89年、92年、97年公告數學學習領域的國民中小學九年一貫課程暫時綱要與正式綱要，成為小學數學課程與教學之重要依據。此階段的教材綱要則以九年一貫課程暫時綱要（與正式）綱要（教育部，2000，2003，2010）為主要參考文件。

此外，在課程標準與教科書文本表徵分析方面，除了幾何教材以外，測量教材乃以

長度、面積與體積三種測量為探討焦點，不包含其他測量內容。

貳、文獻探討

一、小學數學之幾何與測量的數學概念結構與教學

(一)幾何的數學概念與教材內容

幾何知識從土地測量而發展出探討點、線、面、體，及其在空間運動與關係的學問（張平東，1989；左台益，2002），其概念包含：視覺的觀察與圖形的建構、物理空間的理解（認識形狀、位置、方向、形式秩序、以及形體經轉換以後不變的性質）、使用幾何知識表徵非視覺性的數學概念與關係，以及邏輯推理與幾何定理的證明（Clements & Battista, 1992）。

二十世紀後期以來，中外數學教育學者對小學階段幾何課程所需包含的內容，逐漸形成共識（例如：臺灣省國民學校教師研習會，1994，1997，1998；林秀瑾、張英傑，2005；莊月嬌、張英傑，2006；National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000; Nunes, Bryant, & Watson, 2009），幾何課程應發展小學生的空間感與幾何推理，從辨識簡單的形體，透過具體的幾何探索活動，進而探討形體的關係與性質，培養推理思考。因此，幾何主題的教材內容可歸納為五大類項：形體外觀之辨識、平面圖形與立體圖形的建製與轉換、形體構成要素及其關係之探究、形體性質之探究並運用推理解題、空間概念（林秀瑾、張英傑，2005；莊月嬌、張英傑，2006）。茲將上述各類目及所其包含的概念，簡要描述如下。

1. 形體外觀之辨識：核心概念為辨認、分類、描述與命名平面與立體形體。此類目包含兩個次類目：(1)辨識平面圖形；(2)辨識立體圖形。
2. 平面圖形與立體形體之建製與轉換：主要概念與技能為建造、製作與轉換平面與立體之表徵，以及使用工具製圖與造型。此類目包含兩個次類目：(1)建置平面圖形與立體形體，包含：描繪、仿製、建造形體及其模型，或將形體經由分解、合成轉換成另一形體，了解與利用工具特性（尺、圓規、三角板、量角器等）測量或作圖等知識技能；(2)轉換平面與立體之表徵，包含辨識、轉換立體形體在平面上之表徵方式（正/長方體的二維展開圖、視圖等）並理解其關係。
3. 形體性質之探究並運用其性質解題：核心概念為辨認、理解形體的組成要素與關係，並應用於解決問題，進而從解題過程與經驗，察覺形體性質。此類目包含兩個次類目：(1)辨認、理解形體的組成要素及關係，並據以解決相關問題；(2)透過實測、實作，察覺形體性質並運用其性質解題。

4. 形體特質之探究並運用推理：主要概念為理解垂直、平行、對角線、相似、全等、對稱關係等性質。此類目包含三個次類目：(1)理解垂直、平行及對角線性質，並運用其解決問題；(2)察覺、理解相似、全等性質，並運用其解決問題；(3)理解對稱關係，並運用其性質解決問題。
5. 空間概念：主要概念包含使用適當方位語詞或座標系統，描述物體在空間的位置及關係，並依其位置關係，描述物體移動路徑及方向、判別及計算距離。空間概念類目包含三個次類目：(1)位置：指使用適當方位語詞或座標系統描述物體在空間中的位置及關係。(2)方向：依空間中物體的位置關係，描述物體移動路徑及方向。(3)距離：依物體在空間之位置，判別、計算距離。

從附件的表A可見前文所述之五項主類目與十一項次類目。表A所呈現的類目，亦為現今小學幾何教材的重要內容。

(二)測量的數學概念與教材內容

測量知識與人類生活息息相關。由於人類生活於數量的情境，任何生活物件皆有其數量，因此從自然現象與從事生產性的活動時，皆需認明具體物的性質，並使用數量來描述其性質，因此，測量的過程則包含根據物件屬性選擇適當的單位，繼而報告所測量的單位數量（NAGB, 2009）。

根據國內外學者對於測量教材的探討（例如：譚寧君，1995，1997，1998；鍾靜，2003；Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2008）及美國數學教師協會（NCTM）之文件《學校數學課程與評量標準》（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, NCTM, 1989）與《學校數學原則與標準》（Principles and Standards for School Mathematics, NCTM, 2000）對於學校數學發展測量概念與技能的課程內容之闡述，測量主題包含長度、重量、容量、時間、角度、溫度、面積與體積等八種常見測量的量。測量知能包含三方面的知識技能：1.瞭解各種不同測量物件的屬性；2.認識測量單位、系統與測量過程；3.應用適當的技術、工具與公式做測量。例如：在長度量的知識技能包含：長度的基本性質與特性、長度單位、認識量尺及其使用方法、理解各階單位之間的關係與其換算、建立長度量感、瞭解長度計算方法，以解決生活上的各種問題。在二維的面積與三維的體積之知識技能，各包含：面／體積的直接比較、應用遞移律（做面／體積的間接比較）、介紹長寬各為1公分的正方形面積為1平方公分／正方體體積為1立方公分、面／體積是以長度為基礎而發展的二／三次元量、等積異形（面／體積的不變性）、面／體積分割的不變性、面／體積的加法性（楊永耀，1965, p. 198；朱建正，2000；鍾靜，2003）。

統整朱建正（2000）、鍾靜（2003）、Clements與Bright（2003）、Lehrer（2003）

及NCTM（2000）對於K-12發展測量概念與技能的建議課程內容，針對長度、面積與體積測量之概念與技能，歸納為五項類目及11項次類目，並呈如附件表B。各項測量類目與次類目之概念，分別陳述如下。

1. 測量之初步認識與直接比較。此類目之主要概念與技能，包含瞭解各種不同測量物件的屬性、單位、系統與測量過程，次類目包含認識長度、面積、體積等等量之屬性與直接比較。
2. 測量之間接比較與實際操作。主要概念與技能為個別單位的合成、複製、描述與間接比較。當兩個量無法直接比較時，透過複製一個量，並使用此複製出來的量與另一個量進行直接比較，繼而使用遞移律推論兩個量的比較結果。
3. 測量工具與普遍單位的認識、實測、計算與估測。核心概念包含：認識普遍單位的意義、比較與估測，以及利用測量工具實測與製作圖形，後者亦具有幾何製圖的概念。亦即利用等量的合成、複製的結果，來描述一個量與進行比較。
4. 測量單位制度的認識與換算。主要知識技能為將小／大單位描述的量，轉化成為大／小單位的量，亦簡稱為單位量的轉換或化聚運算。次類目包含長度、面積與體積等測量的單位認識與換算。
5. 公式化的概念及量與量、量與數之間的關係。前者的公式化的概念，乃以面積與體積為主，重點在於使用公式來描述一個特定幾何圖形面積與立方體體積的量，因此，有部分內容與幾何概念重疊。後者的量與量、量與數之間的關係，則在於探討不同測量的量之間的關係（例如：容量與體積、重量與體積及長度、面積、體積之間的關係），數與長度量、面積量和體積量之間的關係。此類目之次類目包含：(1)面積與體積公式的概念；(2)量與量、量與數之間的關係。

從附件的表B可見前文所述之五大類目及十一項次類目。表B的內容，亦為現今小學有關長度、面積與體積測量教材的重要內容。

二、二十世紀的幾何與測量概念認知之心理學研究及其對課程與教學的啟示

課程與教學改革除了受社會政治因素推動以外，歷年來課程標準之訂定、修訂及教科書的編製，學術社群與教育學者的研究理論，也深具影響力（司琦，1981；陳進金、董群廉，2000）。在幾何與測量課程與教學方面，二十世紀以來，國內外諸多教育與心理學者提出貢獻非凡的研究理論，於探討課程改變歷程時，針對不同理論的重要觀點提出評述，為不容忽視的一環。本節將根據國內外學者在幾何與測量主題之研究文獻，並檢視各時期課程標準之目標、教材綱要及教學實施要則及其所反映的教學導向，簡要闡述具代表性的教育心理學者的理論及其對課程與教學的啟發，包含：1910～1950年代的行為學習理論，1950～1980年代，Piaget的空間思考發展研究、van Hiele的幾何思考發展理論，以及荷蘭現實數學理論（Realistic Mathematics Education, RME）之幾何教育觀

點，上述理論亦對美國NCTM的學校數學課程規準文件（NCTM, 1989, 2000）產生啟發意義（黃幸美，2010）。此外，美國學者J. S. Bruner根據其認知心理學研究基礎，提出表徵方式（modes of representation）及螺旋式課程結構理論（Bruner, 1960, 1966），其理論雖非針對幾何與測量做探討，但卻廣泛影響課程編製與學校教育（黃光雄、楊龍立，2004）。因此，本文亦將簡評其理念。

（一）行為學習理論

行為學習理論具代表性的學者包含I. P. Pavlov、B. F. Skinner、J. B. Watson、E. L. Thorndike及A. Bandura的社會學習觀等。此理論強調學習歷程乃由某些條件限制下，所產生的行為反應，即刺激——反應連結。而且，原來不會引發個體某種特定反應的某種刺激，經過安排設定以後，個體可以產出該特定反應行為，上述的刺激—反應連結，可因練習頻率愈高、學習者獲得正向回饋而強化學習效果（張春興，1996，Leahey & Harris, 1997）。

行為學派學習理論雖然非直接針對幾何與測量教學提出論述，其編序教學（programmed instruction）卻廣泛應用在課程與教學。編序教材乃依據心理學的學習原則作教材編序，其原則為：1.先確定學習者的先備知識與起點行為，然後訂定終點行為目標；2.將教材依其知識內容與概念的難易、簡繁程度，區分先後次序，然後先易而難、由簡而繁的次序編排教材；3.應用連續漸進的原理，後一個概念問題的學習乃植基於前一個概念問題的認識；4.編序教學的教材可以個別化學習，學習者從編序的問題與答案，核對自己的學習。此外，在行為學習論的練習律、編序教學及精熟學習觀點下，學生可在教師所提供的編序良好之教材，依個人程度與所需時間，使自己的學習達到精熟（張春興，1996）。

行為學習理論重視刺激與反應的連結及可觀察的行為，重視使用編製良好的教材，讓學生透過練習以使知識技能達到精熟，此理念對於學校數學教育產生影響。縱然如此，此理論忽略學習者的思考與認知內涵（Leahey & Harris, 1997），數學教學偏重練習與精熟，導致學生的學習淪於記憶、模仿教師解題與機械式地練習，數學概念理解及「知其所以然」的解題思考亦被忽視（楊永耀，1965；許國輝 譯，1995）。此種學習與認知取向教育理念強調探索解題，及討論溝通以求概念理解的理念（Hibert & Carpenter, 1992），大相逕庭。

（二）J. Piaget的空間認知發展階段論與J. S. Bruner之學習理論

Piaget與Inheld（1967）認為兒童對空間的理解，需透過感覺—動作之種種操作活動，認識所觀察與操作的圖形與物體，以形成心理表徵。而且，感覺—動作等操作活動、觀察與建構心像為幾何直覺發展之基礎，其非等同於物件的命名或指認能力。對此

空間理解的認知心理功能，Ginsburg 與Opper（1988）進一步闡釋，圖像的（figurative）表徵處理為發展空間概念的基礎，即兒童使用三種方式產出象徵實物的處理，其包含三種處理：1.知覺（perception）：使用感官對所呈現的物件做運作處理，兒童以知覺紀錄（record）從該物件與其所處的環境，此紀錄來自視覺的幻覺，因此常是不確實的。2.模仿（imitation）：藉模仿複製人或事物的表現。3.心像（mental imagery）：意識中呈現的一個人或事物，心像中的人或事物可以是不存在的（Ginsburg與Opper, 1988, p. 162）。圖像表徵模式（figurative mode）也是記憶對於知識保留的重要處理。因此，激發空間思考能力的發展，將物件於腦海裡作旋轉、平移、反射的處理經驗，方能將視覺觀察到的物件建構心像（Antonovskii et al., 1990）。而且，上述的圖像表徵處理，尤其是心像與記憶功能，也是學習幾何與測量概念的基礎。

在概念認知發展方面，Piaget提出三向度的認知螺旋（the spiral of knowing）來說明認知探索、尋求平衡及認知發展階段的關係，第一向度為知識認知的進步歷程：包含五個具階層性的認知發展基模，起始於反射，建構感官動作基模，進而建構前運思（preoperational structure）的基模，繼而具體操作（concrete operations）的認知，最後達到命題式地思考（形式運思）；第二向度為個體與環境互動過程中所產生的平衡與不平衡之認知調適；第三向度為個體從探索環境過程，將認知結構做局部或全部修正（Piaget, 1974，引自Ginsburg與Opper, 1988, p. 232）。Ginsburg與Opper（1988）評論Piaget所提出的認知平衡與不平衡之歷程，乃指個體與環境事物互動的歷程中，透過抽象化知識的反思、將觀念不斷地具體化與重構，將知識適當地執行以解決問題。

二十世紀中期，與Piaget同具代表性的認知發展理論學者— J. S. Bruner也提出兒童的認知思考發展乃由具體而抽象，先以動作認識世界，繼而能運用感官與對事物建立心像，並藉著記憶的輔助思考，進而使用語言與文字與圖形，學習數學與邏輯（Bruner, 1960, 1966）。Bruner強調語言與符號對兒童心智發展的重要性，另一方面，也受Piaget的認知發展階段理論影響，認為心智與生活環境互動而產生思考的再建構，其發展乃循序漸進（張春興、林清山，1988, p. 43），而且學習者的主動探索動機需受重視，使用啟發式教學，可以鼓勵學習者根據既有的知識與經驗，探索解決問題的方法。此外，Bruner根據其知識結構論，建議螺旋式課程的設計，即課程內容必需結構相關連的知識，根據學習者的認知需求與層次，隨年級的遞增逐漸提升教材的難度與廣度（Bruner, 1966）。

雖然Piaget以心理學的發展觀點提出「拓樸為先」（topological primacy theory）之理論，受部分學者之批判（Clements & Battista, 1992），但是其對於兒童空間概念思考的研究與Bruner的認知發展與表徵學習的探討，對於教科書問題的陳述、圖文表徵等方面的設計，以導向知識記憶與概念理解，具有啟發意義（黃光雄、楊龍立，2004）。

(三) Van Hiele的幾何思考發展與教學理論之重要論述

Van Hiele夫婦有視於長期傳統歐氏幾何教育在荷蘭施行的困境（Gravemeijer, 1998），以格式塔心理學式（Gestalt-like）的視覺層次認知、Piaget的建構論與發展層次理論為基礎，結合他們對於幾何思考發展層次的觀點，投注心力探討符號與幾何表徵的教學意義，以及幾何教學當如何與學生的幾何思考發展連結（Van Hiele, 1986; Pegg & Davey, 1989, 1998）。

統整Van Hiele（1986, 1999）及其他學者的相關研究（例如：Fuys, Geddes, & Tischler, 1988; Pegg & Davey, 1989, 1998）之理論，主張小學幾何教育旨在發展學生的幾何思考與空間能力，初始階段需植基於視覺觀察，認識物件的外表特徵與圖形輪廓，學習使用幾何語言來命名與稱呼物件，繼而認識與分析圖形的特徵與組成要素，討論不同形體的定義與性質及不同圖形之間的關係。在發展學生幾何思考的教學方面，學校的幾何課程與教學具有關鍵性的影響。教學者需提供結構化的教材，透過詢問、引導探索、解釋說明、自由探索，以及整合等五個教學階段，以發展學生的幾何思考（Van Hiele-Geldof, 1984; Van Hiele, 1986）。

Van Hiele的幾何思考發展理論，對中小學階段學生的幾何思考特性描述較多，但是對此年齡階段學生如何從較低層次的幾何思考，發展到最高層次的幾何假設與演繹思考，研究論述尚不充足。縱然如此，Van Hiele的理論架構，尤其在發展學生的形體認識與組成要素的發現、關係性質之理解與推理思考方面，仍受幾何教育學者重視（劉好，1994, 1998；莊月嬌，張英傑，2006；Clements & Battista, 1992）。

(四) 荷蘭現實數學（RME）的幾何課程與教學理論的重要論述

RME的教育哲學乃植基於1970年代的荷蘭數學家H. Freudenthal的哲學觀—數學活動是人類解決問題、尋找問題與數學化的活動，數學教育應從對兒童具有真實意義的問題著手，進行數學化活動（Freudenthal, 1971, 1973）。而「數學是人類的生活活動」的觀點，亦呼應Van Hiele的幾何教學理論（Gravemeijer, 1990, 1994, 1998）。

現實數學的幾何教育核心理念—「以幾何的觀點看世界」，重視幾何學習需從統合真實生活經驗與可經驗地真實情境著手（Gravemeijer, 1998, p. 53）。幾何教學需以真實生活問題讓學生數學化，以激發學生的幾何發展層次，而且，學生的非形式性的知識或策略，可以成為其幾何學習與空間推理的基礎（Gravemeijer, 1990, 1994, 1998）。同時，幾何感（geometric sense）的發展源自於理解，而理解乃築構在日常生活事物的觀察與經驗，例如：視線、影子、心理影像、側視、俯視與地圖的解圖等形體與空間關係之探索，幾何教學需與日常生活情境問題密切關連（Gravemeijer, 1998; Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2008）。

RME的幾何教學觀強調兒童具有主動建構空間概念的能力，幾何教學需考量兒童的幾何認知與思考，從生活具體事物的觀察操作，著手認識空間與形體，提供具結構性且符合兒童幾何思考層次的教材（Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2008），此理論對我國幾何課程安排與教學設計之啟迪，將於後文闡述。

(五)測量概念認知研究及其對我國測量課程與教學的啟示

在測量概念發展方面，Piaget與Inhelder（1967），Piaget, Inhelder與Szeminska（1960）認為瞭解測量的概念，需要知覺對空間不斷地作心理建構，進而能瞭解測量物件作單位分割與再組合成一個測量的量。因此，測量的學習包含四項活動（Wilson & Rowland, 1993; Clements & Bright, 2003）：（一）知覺與表徵；（二）根據對物件屬性的認識，使用單位作具體實測以建構、反思物件測量的歷程與結果，以能推理。例如：量的保留概念非單純依賴知覺而得，尚需統整直觀、與思考物件的同一性、可逆性與補償性，將測量與比較的行動(或經驗)抽象化；（三）單位量的計數；（四）保留性、遞移性與單位的關係。測量時常將一個物體或媒介物移動到另一地方，與另一物件比較。保留性與遞移性的概念，為進行間接比較的基礎，對於量的保留性之瞭解，兒童需瞭解一個物件經移動或變形之後，其原有的量仍保持不變；遞移性為比較的概念，即瞭解甲比乙大，乙比丙大，則能推論甲比丙大。後來的學者Inskip, Jr.（1976）、Wilson與Osborne（1988）、Clements與Bright（2003）、Lehrer（2003）根據認知發展心理學觀點，強調測量概念的學習，必需統合知覺、動作操作，並結合對一維、二維、三維空間物體的概念，使用單位複製與數的運算，產出測量的結果。

上述強調兒童認知發展、測量的心理運作歷程的理論，也對於我國小學測量課程所重視的以下三個目標，具有啟發的意義。（一）透過使用教具（以及習作附件）的觀察、實測操作，認識與使用測量工具，例如：尺、秤等等；（陳梅生等，1987；陳進金，董群廉，2000）（二）了解測量的單位和制度（例如：公分、公尺等公制單位）；（三）在測量時用公式或定理求算答案，例如：利用「長×寬」來求算長方形的面積。同時，進行測量活動時，提供兒童先估後測，以培養學生的估測能力與量感（康軒文教，1997，p. 59）。

三、教科書的圖示表徵與問題解決說明模式

表徵是用一種物理或心理的形式，表達某種事、物或想法，以傳達訊息，達成溝通目的（蔣治邦，1994）。數學概念的學習，常需要透過真實情境、具體教具的操作、圖畫、口語符號與書寫符號，透過轉譯以瞭解概念（Lesh, Post, & Behr, 1987）。根據Lesh, Post與Behr（1987）的觀點，以下五種表徵方式為數學學習與問題解決常見的方式：

一、文字問題的情境。此為使用一般的真實世界的事件或情境，提供問題與知識的脈絡。二、類似於可操作的數學教具。常用的古氏積木、百格板、一平方公分的瓦片、數棒、數線等等，可因賦予的數學意義與關係，而可利用來解說數學概念。三、靜態的圖片、照片或是可操作教具的圖像等具象徵性的插圖。四、口語及與邏輯相關的特殊化次語言。五、書寫的符號，例如：算式紀錄。上述五種形式，也普遍可見之於當前教科書之表徵。針對靜態的插圖，本研究將探討實景/物相片與操／製作歷程展示插圖。就前者而言，因為針對同一事物的展示，實景/事物的相片插圖比手繪圖，提供閱讀者具體訊息的程度較高。提供事物具象化程度愈高的插圖，對學齡階段兒童的學習助益程度也愈高。就操／製作歷程展示圖而言，其乃使用靜態圖來展示操／製作的歷程，亦即透過一個或數個連續圖，展示一個從起點到完成後的動作或工具操作過程，此種操作程序圖的表徵，讓學習者可藉由讀圖而仿做，從操作中學習。操／製作在學習幾何與測量具有重要意義（Clments, 2003; Clements & Bright, 2003; Lehrer, 2003），但是此種操／製作展示圖的提供數量，可能受當時期之教育心理學理論思潮及課程編製理念（學習者的操作與製作學習是否受重視），而呈差異。

根據課程分析研究（例如：王克蒂、譚克平，1997；鍾靜，2005；李子建、黃顯華，1996），1960年代以前，強調以學科為本位與學習結果為取向設計的課程，其教科書內容重視數學概念結構、基本原理與規律，將所需學習的知識按照邏輯順序安排，使用行為名詞具體明確地陳述教學目標，教學者重視將數學知識傳遞給學生，但忽視學生學習的過程（李子建、黃顯華，1996；黃毅英等，2007）。此種強調知識能力的培養理念，重視數學知識的邏輯順序、嚴謹性與精準性，輕忽學習者溝通解決問題的歷程，其反映於教科書的問題解決說明模式，隱約可見：使用文字或圖陳述一個數學問題後，隨即呈現解題方法、算式、演算程序說明及答案，亦即「數學問題—單一解答—練習例題」的樣式。此模式反映著學習者直接且單向地從教師或學科領域專家接受結構化的知識（或原理原則），然後重複練習，以達熟練。換句話說，此種教科書有條理地呈現知識內容與原理原則，學習者被期待直接依循學科專家所提供的解題程序與方式進行學習；但是學習者的探索與解決問題的思考歷程，則非教材設計者之重要考量。此種模式，本研究稱之為「問題陳述—算式與計算—解答」直接說明模式。此種模式直接展示課程編製者提供的解題方法，但是解題的思考方式是否反映學童的數學想法，圖示表徵是否貼近學習者認知特性、生活經驗，以及提供要求操作與討論溝通的問題，可能被忽視。

相對地，1960年代之後，以兒童為本位與學習過程為取向設計的課程（鍾靜，2005；黃毅英等，2007），包含當前九年一貫課程所強調的—以學生生活經驗為中心的跨學科統整課程（鍾靜，2003，2005），學生乃為學習的主體（陳伯樟，1999；Jacobs,

1989)。在此理念下，強調學習者的認知發展、心智與環境互動的運作歷程，教材呈現切合學習者認知特性且能傳達概念意義的圖示表徵，要求觀察、操作、製作、解題溝通的問題，被認為是導向概念理解的重要媒介（Flevaris & Perry, 2001）。上述的教材教法理念，也與認知心理學的教學導向相呼應—提供多元化的問題與圖示表徵，導引學習者透過感官經驗、製作及語言討論，投入問題解決思考（Antonovskii et al., 1990; Flevaris & Perry, 2001; Pyke, 2003）。因此，重視學習歷程的課程，乃以學生為主體，考量學生需要、興趣、技能而調整課程，數學教科書文本的問題與圖示表徵將較多元（Antonovskii et al., 1990; Pyke, 2003）。此種重視兒童思考特質與知識形成的歷程，教科書文本隱約可見「數學問題—多元解題想法—說或做出解題方法」的樣式，反映數學問題解決可透過討論、溝通與批判而形成合理的共識。因此，以導向問題解決探索歷程的觀察與操作—「找一找」、「做做看」、「想想看」等動作指示要求的問題陳述，也將是教科書文本重要的問題類型。上述模式，本研究稱之為非直接說明模式。

教科書的設計與編製，乃經歷不同學科學者專家之群體論辯後的共創產品。編製課程的學科專家，對於課程發展所持的理念與領域專業知識，皆可能反映於教科書的文本內容、圖示表徵、與問題解決說明模式。因此，「以學科為本位」與「以兒童為本位」之不同理念取向設計的教科書圖示表徵方式（例如：提供真實的景物相片、操／製做展示圖）、是否要求學生觀察、操／製做等等探索解題歷程來學習幾何與測量概念，上述圖示表徵的數量是否因不同時期的教育心理學理論影響而呈改變，為本研究探討的問題之一。

參、1912～2011年小學幾何與測量教材教法之教育與心理學理論基礎與演進

我國傳統教育崇尚尊古，課程以讀經作文習字為尚，忽視數理科學；及至清末新學制「癸卯學制」之頒佈（1902）、中華民國建國並頒佈壬子學制（1912），創設新學校，開始注重科學與現代生活，接納西洋重經驗與科學的理念，在「科學救國」的呼聲下，算術科目在小學教育目的、教材與教法皆產生鉅大改變（盛朗西，1934）。二十世紀初期幾何為中學及以上的教材，偏重形體的性質與定義、歐基理得幾何學（the postulates of Euclidean geometry）（簡稱歐氏幾何），例如：基本圖形（平行四邊形、圓）公理、直線、角、垂線、平行線、多邊形、弦切、作圖、面積、比例、相似形等；小學階段則以算術為主，幾何不受重視，充其量為與測量教材結合（喻平，2010）。

民國11年（1922）的「壬戌學制」制訂小學教育修業為六年，算術為小學數學之課目（王鳳喈，1977），繼而於民國18年（1929）教育部頒佈《小學課程暫行標準》（教育

部，1993）。為使課程順應世界潮流與時代需要、切合兒童身心發展之需要，小學數學課程標準分別於民國21年（1932）、25年（1936）、31年（1942）、37年（1948）【41年（1952）所修訂的課標不包含算術科】、51年（1962）、57年（1968）、64年（1975）、82年（1993）、89年（2000）、92年（2003）及97年（2008）作修訂。以下針對五個時期，分別闡述課程標準之幾何與測量教材綱要、教科書單元及教育心理學理論潛在的影響。

一、第一期（1949年以前）

小學科目中的「算學」改稱為「算術」之名，始於光緒29年（1903），此時期小學包含初等與高等小學，此時期算術教育目的在於使兒童熟習日用之計算，以使思慮精確，此教育目標可見之於1903年、民國元年（1912）與5年（1916）之國民學校令施行細則及高等小學算術要旨（盛朗西，1934，p. 100-102）。自我國最初的小學課程標準—民國18年（1929）的小學暫行課程標準（司琦，1981，p. 264）至民國37年（1948），算術課程目標—增進兒童日常生活中的數與量常識與觀念，解決計算問題，及精確敏速的計算能力，持續受重視約三十年（教育部，1929，1932，1942，1948）。我國此時接受西方文化，教育重視民主與科學精神，算術教育以實用為目的（司琦，1981；馬忠林、王鴻鈞、孫宏安、王玉閣，2001）。

在教材內容方面，在18年（1929）的小學暫行課標、21年（1932）、31年（1942）及37年（1948）的小學課標，算術教材內容以數法、加減乘除運算與本國度量衡幣制為主，幾何乃附屬於測量教材。幾何教材乃以形體外觀之辨識為主（例如：正方形、長方形、三角形、圓與橢圓、梯形、平行四邊形性質），教學問題雖包含觀察與辨識形體，但是對於理解、察覺、與應用解決問題，而且形體的建置與轉換、形體性質的探究與運用解題、透過實作察覺形體性質、垂直、平行、全等之概念及空間概念之理解，則未明訂於教材綱要。值得一提的是，此時期未呈現於課程標準教材綱要條目之幾何內容，卻可能被包含於教科書單元，例如：1932年前期小學使用的新主義算術課本第八冊，包含三角錐、圓錐、方柱與圓柱的命名，以及繪圖要求的問題（世界書局，1932，p. 9）。

在測量教材綱要方面，18年的課標將數學教材統稱數量常識（教育部，1929，p. 141），21年及31年的課標羅列的主題為筆算、珠算與心算，測量教材亦附屬於筆算主題，及至37年的課標，將測量教材稱為「測量」，列屬於筆算類目。從民國初年以度量衡幣制之要略，至民國18年擴增長度（尺寸、丈和尺）、面積（方尺、方寸、方分、方丈）、體積（立方、立方寸、立方尺、立方丈）的認識和應用，以及重量、容量與時間等量之介紹。此時期依課標編製的測量教科書，包含初步認識、直接比較、測量工具的使用、測量單位的換算（教育部，1929，1932，1942，1948），但是檢視此時期課標的

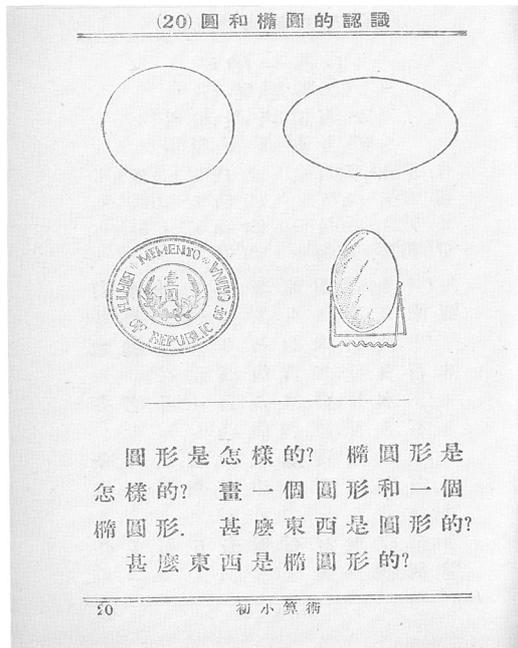
測量教材綱要，並未明訂測量的間接比較、估測、利用工具製作、實際測量操作。在量與量之間的關係方面，包含面積與地積的關係、體積和容量的關係之教材，且偏重不同單位的換算。

我國傳統的教學偏重記憶、模仿與體悟（司琦，1981；毛禮銳等），而且在強調計算精熟的課程目標下（教育部，1929, p. 142；教育部，1932, p. 124, 1942, p. 185），教學法雖建議依兒童興趣以遊戲與表演方式進行，但是「注入法」一以教師為中心地灌輸知識給學生，學生勤練習計算，仍為主要教學取向。此種教學取向也呼應西方教育哲學的形式訓練與官能心理學之觀點，主張人的心靈是由許多官能所組成，如：推理、思考、記憶、想像等官能，皆可用透過鍛鍊而強化其功能，因此記憶、背誦與抽象思考則為重要訓練方法（伍振鷺，1992）。而且，在重視生活實用導向，算術被視為具有強化社會現代化之效益，此科目即被視為一種訓練思考的科目（楊永耀，1965, p. 3）。相對地，西方學者認為幾何學習猶如一種大腦的訓練，藉著邏輯推理與論證能力訓練，其能力可遷移於幾何證明解題（Donoghue, 2003），此與我國重視計算的算術教育觀點迥異。

此時期的小學教育受實用取向影響，幾何學在基礎教育階段的意義，並未受重視。課程隱約反應形式訓練理念，教科書內容重視計算演練與記憶。幾何教材內容，也僅選擇與生活應用相關的測量問題，介紹日常生活可接觸的基本圖形與立方體的命名，比較以及使用簡單的工具與公式作圖。教科書的測量問題，呈現諸多不同測量單位之間的轉換運算，且直接介紹面積測量公式。例如：圖一與圖二分別為根據18年（1929）課程暫行標準編製的初小算術教科書的幾何與測量單元，圖一為21年（1932）新課程算術教科書之三四學年「圓和橢圓的認識」教材（世界書局，1932）；圖二為依18年（1929）課程暫行標準編製之22年（1933）的初等小學三年級下學期（第六冊）算術教科書之面積教材「方寸的認識和應用」例隅（世界書局，1933）。

從圖一可見幾何圖形命名、辨認與繪製的問題，但是缺乏強調觀察、拓印物件，以及從製作過程中導引觀察、討論要求之問題。從圖二可見，結合文字、數字與數學符號，直接傳達面積公式與算式記錄「每邊長2寸的正方形，面積是4方寸，就是 $2 \times 2 = 4$ （方寸）」，以及提供兩個附有格子的正方形插圖，並給定邊長的長/正方形，企圖表徵「使用邊長為1方寸的單位面積，覆蓋正方形後所形成的矩陣結果」，也要求「說出」圖形面積與「畫圖證明」。使用語言說明與繪圖活動，符合當前導向學習者學習面積概念的部分教學建議（Battista, 2003）；但是，操作歷程的導引說明，未見之於文本，例如：「使用面積單位作正方形區域的覆蓋」或「觀察覆蓋後的正方形區域被小正方形單位切分，及其所形成的行列矩陣結構」或「討論此行列結構所包含的乘法性質」等表徵。此種缺乏，可能導致學童對面積測量與公式意義的理解不足。此外，從圖一與圖二的圖示例隅，可見教科書表徵提供的插圖為手繪圖，非具體的實物相片；在問題解決說明模式

方面，圖二的例隅可見，於問題陳述後即呈現運算與解答的直接解題方法說明，展示套用公式而且解法單一。



圖一 依18年課標編製之1932年前期小學算術第三四學年的幾何教材例隅



圖二 依18年課標編製之1933年初等小學算術第6冊面積教材例隅

此時期的學校數學教育雖瀰漫記憶式的教學，但亦有不少學者提出數學科學實驗與重視兒童身心發展的教學。例如：俞子夷於1909年於上海建立中國最早的數學實驗研究所一單級（複式）教授講習所，此實驗打破學科界線但保留課程，並推行對低年級兒童進行隨機教學，隨機引入大小、長短、共多少等數量語詞，展開設計教學法及珠算、筆算混合教學的實驗（代欽、松公哲夫，2011，p. 281）。此外，學者蔡元培批評以教師為中心的注入式教學，提倡自動學習與研究教育科學，推動教育實驗，強調學生主動學習的國外學者之「以兒童為中心」的教育理念，例如：J. H. Pestalozzi之直觀教學與從具體實驗的步驟漸進到抽象的原理原之瞭解；M. Montessori將活動與材料應用於教導兒童學習數學；J. Dewey的「做中學」、「教育即生活」、「學校即社會」、「思維術」等科學理念（司琦，1981；毛禮銳、邵鶴亭、瞿菊農，1989；黃毅英等，2007）。其中，Dewey（1956）的《兒童與課程》（*The child and the curriculum and the school and society*）特別強調兒童從現實經驗中所獲得的事實和真理，必需與學科知識相互印證。當時的啟發教學法與問題教學法（problem method），皆受上述學者理念影響，將教學焦點從教材轉移至學生，依兒童心理發展之順序與興趣而教學（司琦，1981；毛禮銳等，1989）。

上述教育與心理學之影響，可從民國18年（1929）、21年（1932）、31年（1942）的小學算術課程綱要（或標準）之教學原則窺知。例如：利用學生生活、上課時或休息時，幫他們解決數量問題，培養數量的基本觀念與工具使用；問題要具體而有趣，讓兒童直觀，利用遊戲或競賽方法，使兒童因興趣而努力（盛朗西，1934；教育部，1929，1932，1942）。而且於21年（1932）與31年（1942）的小學算術課程標準，再度闡明利用實物或隨機教學（教育部，1932, p. 122, 1942, p. 184），從實在的需要出發，先使兒童從觀察、實測具體的事實以後，再作歸納，建議度量衡的教學工具，可由兒童自製，以引起其學習興趣（教育部，1942, p. 184-185）。而且，此時期的課程標準中明述利用實物觀察與直觀，利於幾何概念之發展，以及心像之建構，前者與Clements 與 Battista（1992）、Van Hiele（1986）的觀點不謀而合；後者亦呼應Ginsberg與Opper（1998）的認知心理觀點，而且讓兒童自製度量衡的工具，以引起學習興趣，亦呼應「觀察動手製作的具體活動與測量經驗，助益兒童建構測量技能」的教學建議（Clements & Bright, 2003）。然而，值得一提的是，數學隨機教學實則受Dewey的教育理念影響，但是我國於民國37年才開始實施（陳秉筠，2008）。由此可見，教育心理學理論與課程標準的教學原則訂定，以至學校實務的實施之間，存有時間延宕之現象。

二、第二期（1949~1967）

國民政府於民國34年（1945）抗戰勝利，並於民國38年（1949）遷台，此時期的教育包含初等與高等小學，數學課程標準包含民國41年（1952）及51年（1963）修正公布的國民學校課程標準，其中41年（1952）的課標乃局部修正自37年（1948）的課標，且以國語科和社會科為主，算術科未有修訂；而民國51年的課標，廢除初級小學與高級小學的兩重圓周制（司琦，1981, p. 464），採六年一貫的課程編制，同時取消隨機教學，將低年級的算術改為定時教學（陳進金、董群廉，2000）。

此時期的算術課程目標與前一時期的教育目標相似（參見教育部，1952, p. 106, 1962, p. 223），但是於51年（1962）課標的各年段目標，闡明「從實測具體數量問題的經驗中……」（p. 223）、「從實物測定的經驗中……」（p. 224），養成兒童明瞭量的概念及實際測量的基本能力，發展兒童對於角度、平面圖形、及基本立體圖形等有效測定及估量的能力。此時期的幾何主題仍附屬於實測主題，但是教材內容比前一時期豐富，增加的內容包含：圖形的繪法、垂直、水平和直角（教育部，1962, p. 229）等平面與立體形體的建置內容，以及圓柱體、辨認與瞭解遠近的概念、辨認方向、八方位、十六方位與位置等內容之認識（p. 226）。

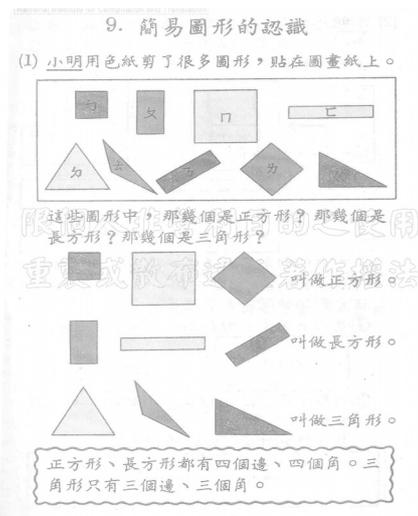
在測量教材方面，此時期的41年課標之測量教材地位，類似於37年的課標，於51年課標則將認數、計算、實測、應用並列，以「實測」為名稱來含括測量教材，測量成為

一個獨立的主題。教科書文本的問題形式與上一時期的教材相似，但是強調操作的動作指示問題，例如：利用公分實測簡單事物、利用具體事物對建議面積的計算等實測活動要求（教育部，1962），其數量比前一時期增加。

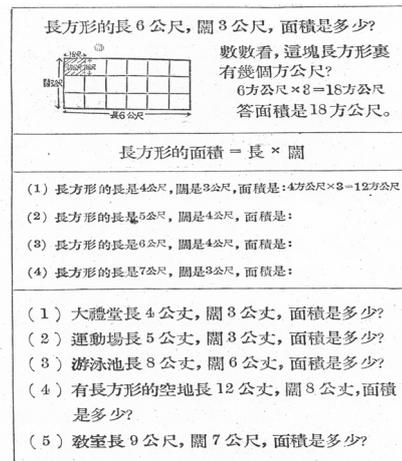
在教材組織方面，此時期課程標準明訂教材組織「應採心理學系統編制方式，將容易學的教材，排在前面；較困難的教材，排在後面」、「凡可以聯絡的教材，應聯絡編排」、「根據分佈練習原則」（教育部，1962，p. 137）。在教學方法上，41年（1952）的課標指出採隨機教學，教材的編選重視與常識、社會、自然、勞作等聯繫；數學教材與教學需依本地情形與兒童興趣選材，充分使用表演的方法，把問題演成事實，讓兒童直觀，使問題生活化；酌量增加外國度量衡單位與貨幣認識。上述教學建議反應教育心理學的理念。針對幾何與測量教學，此時期的課程標準指出：為使兒童對時間與空間觀念清楚，隨年齡程度重複訓練長度、時間、面積、重量等測量問題（教育部，1952，p. 121），以及充分利用兒童的課業用品做教學工具，讓兒童從觀察實測具體事實，歸納與演繹推求解答。在實測方面，闡明估量的技能，如目測、手測、步測，但是教應從實測及計算過程中，隨時提出比較，養成估量的能力（教育部，1962，p. 238）。由此可見，觀察與實際操作、製作活動是受重視的，此也符應Piaget與Bruner的認知發展階段理論，以及Wilson與Osborne（1988）、Clements與Bright（2003）等學者之觀點，強調因應兒童認知特質，教學提供從具體進而半具體與形式概念的教學。

在教科書的圖示表徵方面，文本提供的插圖仍以手繪圖為主，少有操／製作程序展示圖，而且使用數字解題計算與直接提供解題說明的模式，呈如圖三與圖四例隅所示。圖三為依51年（1962）課標編製的算術第六冊之幾何單元（國立編譯館，1967），圖四為依37年（1948）課標編製的初小算術之長方形面積的算法例隅（國立編譯館，1950）。在問題解決說明模式方面，圖三與圖四亦可見直接說明模式。

由此可見，此時期及其之前的小學數學課程，雖作修訂但是變動不顯著，在幾何與測量教材方面，雖然內容增加，實作與實測逐漸受重視，教科書文本在提供實景／物插圖或要求學生進行實際操作與測量的問題與表徵，仍嫌不足。數學課程呈現較大改變，乃在第三期受美國學校數學研究小組（School Mathematics Study Group, MSG）MSG課程的影響之後，變動才較顯著（科學月刊編輯部，1985）。



圖三 依51年課標編製之1967年算術第六冊之幾何教材例隅



圖四 依37年課標編製之1950年初小算術之長方形面積的算法例隅

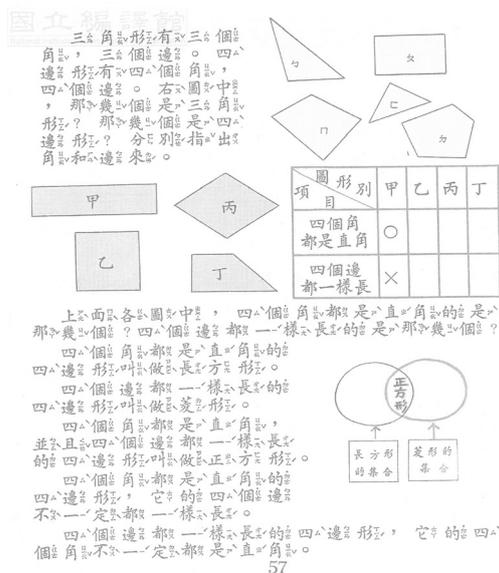
三、第三期（1968~1974）

民國57年（1968）開始施行九年國民教育，國民小學為國民教育之第一階段，數學教科書乃依據57年（1968）的課標而發展。此時期的中小學課程歷經兩次改革，第一次的小學數學課程改革始於民國57年（1968），第二次改革於民國61年（1972），乃以中學課程為主，小學課程則逐年修改（科學月刊編輯部，1985）。但是此兩次的數學課程改革，皆純以教材內容為中心且由上而下改革（從高中課程開始改革，繼而國中課程，再而小學課程）（科學月刊編輯部，1985）。而且，此時期的課程也多受美國 SMSG課程影響（科學月刊編輯部，1985；陳進金、董群廉，2000）。

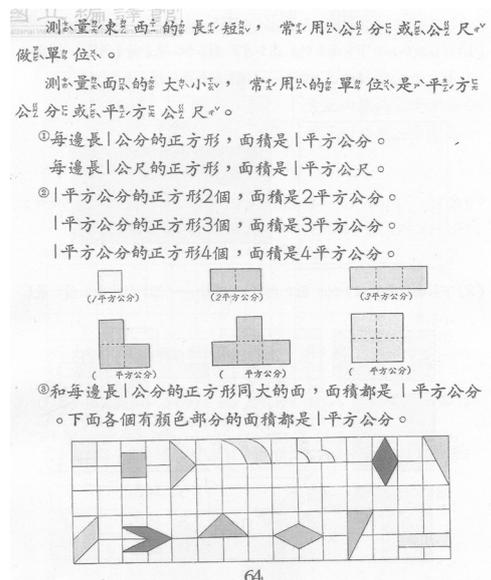
民國57年（1968）的課程標準，一方面注重使用數學原則思考問題與計算熟練，但是幾何仍屬於實測主題的教材，綱要內容與上一時期相似，但增加了以下內容：（一）認識五邊形與六邊形；（二）辨認位置上下、前後、左右（教育部，1968，p. 120-123）。整體而言，此時期的課標偏重空間方位的概念與平面圖形之探討，但是立體形體要素與關係之探討較少（林秀瑾、張英傑，2005）。在實測的教材綱要方面，57年課標沿用51年課標的「實測」主題名稱，教材內容包含前一時期的內容【例如：闡明估量的技能，建議目測、手測、步測應從實測及計算過程中，隨時提出比較養成估量的能力（教育部，1968，p. 134）】，使用工具與實測活動亦被闡明於教學法，例如：(1)「從實測具體數量問題的經驗中……」、(2)「從實際測量的具體經驗中……」、(3)「從實物測定的經驗中……」培養測量能力，以及使用教學輔助工具、測量工具、兒童自製度量衡教具。但是，此時期課標的測量教材綱要，有關量與量、量與數之間關係的探討，並不多見。

此時期的算術課程標準強調兩項重要原則：(1)運用兒童實際生活動境，作為教學起點，先使兒童從觀察實測具體事實，明白方法的功用，先用歸納法進行，然後用演繹法去推求（教育部，1968, p. 133）。(2)在教材的組織方面，更強調心理學的教與學的原則，強調「應採心理學系統編制方式，將容易學的教材，排在前面；較困難的教材，排在後面」、「凡可以聯絡的教材，應聯絡編排」、「根據分佈練習原則」，而且教材應適合兒童學習程度、顧及兒童的個別差異，建議「從實際的需要出發，先使兒童從觀察實測具體事實，明白方法的功用……」（教育部，1968, p. 133）。上述原則反映出行為學習理論的編序教學、認知發展與學習的觀點。

教科書的幾何與測量教材之圖示表徵與問題解決說明模式，與上一時期的教材相似，但是操作的動作指示問題的數量較前一時期多。在教科書的圖示表徵方面，文本提供的插圖多為手繪圖，而且使用數字解題計算與直接提供解題說明的模式，呈如圖五與圖六例隅所示。圖四為依57年（1968）課標編製的算術第六冊之幾何單元例隅（國立編譯館，1971a），由此例隅可見以圖形及文字描述基本圖形的構成要素與性質，而且所呈現的「集合的概念圖」，亦可見SMMSG課程的特性。相似地，圖五為算術第八冊之測量單元例隅（國立編譯館，1971b），從圖五可見，直接宣告1平方公分的文字陳述，以及使用文字陳述面積單位量的可加性。由此可見，此時期教科書文本呈現的圖示表徵數量，略有增加之現象，但在實景／物插圖或要求學生進行實際操作與測量的問題提供數量，尚嫌不足。



圖五 依57年課標編製之1971年國編版
初小算術第八冊之幾何例隅



圖六 依57年課標編製之1971年國編版
算術第八冊之測量例隅

相較於前一時期的課程，此套以美國SMSG課程為藍本發展的57年版課標之數學課程，對測量學習所需的觀察與實際測量操作，被重視的程度也提升。在實測課程目標方面，重視觀念與意義、從瞭解數量關係解決問題，以及發展實際測量的基本能力，而且計算正確迅速的能力和習慣，亦為總目標之一（教育部，1962，1968）。但是此套課程因教材結構艱深，內容過度抽象，其在教學實務上的窒礙難行，亦產生類似於美國SMSG教學實務之困難。此外，加上行為主義思潮影響，輕忽兒童的概念理解，導致數學課程與教學仍偏重數學本體知識，計算原則的熟練，教學重視運用法則求算結果，輕忽推理與思考過程（王克蒂、譚克平，1997；董群廉、陳進金，2000）。有視於上述困境，Piaget強調的兒童認知發展階段論、Bruner強調的符號認知發展階段特性與螺旋似的課程結構，兒童的理解與發現學習的課程與教學，漸受課程與教學學者重視（李子建、黃顯華，1996）。

四、第四期（1975～1999）

此時期的數學課程乃依據民國64年的小學數學課程標準（教育部，1975a），以及民國82年修訂的課程標準而編製（教育部，1993）。值得重視的是，64年的課標，首次闡明將數、量、形同列為數學教育目標，以「圖形與空間」作為幾何主題，將幾何教材與「實測與計算」並列為主題，強調「從具體事物的觀察、比較、辨別、繪製及操作等活動，獲得有關圖形與空間的基本概念與知識」（教育部，1975a，p. 130）。在測量方面，64課標以「實測與計算」名稱取代「實測」，但是測量教材內容則分別包含於「數與量」及「實測與計算」主題，而且此「量與實測」主題亦沿用於82年課標。此外，82年課標的「數量關係」主題亦包含測量教材的數與量的比例、比值關係。

依據民國64年的課標編製的課程，乃由板橋的台灣省國民學校教師研習會成立課程研究單位，根據課程編製理論問題並以學科中心的理論模式，研訂學科知識、技能與理念（徐偉民、張敬苓，2008；陳進金、董群廉，2000），試編、試教完成的教材，並設計教具與作業，並進行教學實驗。此套課程的編製，大量地依照心理學編製原則—先具體後抽象、由易而難【例如：「教材的編列，應由近及遠，由易而難，由簡單到複雜，由具體至抽象的原則，以便於兒童學習」（教育部，1975b，p. 10）】，且考量兒童的認知能力發展【例如：「教科書內容能適合兒童之能力與興趣」（教育部，1975b；p. 1）】，教材編選強調「應富有彈性，以便適應學生個別差異及地方需要」、「適合兒童學習能力，而且是生活中常見常用的」（教育部，1975a；p. 9）。而且，在教學方法與原則方面，所闡述之要點亦呼應教育心理學者之理論，例如：（一）「在知識概念、思想原則的學習，宜用啟發教學法」（教育部，1975a，p. 11），此外，相機採用個別化教學法、自學輔導法、編序教學法、社會化教學法及協同教學法（p. 12）。上述原則，

部分呼應行為學習理論。(二)「教師教學要對教材教具、教學情境與教學活動等，……，還要引起兒童的學習興趣與需要，激發強烈的學習動機……」、「新的學習，要以舊經驗作基礎，教師在教學時，需喚起兒童舊經驗，並以舊經驗解釋新教材」(教育部，1975a, p. 12)等，上述原則呼應認知發展心理學論…藉由教具的具體操作，並立基於學習者的舊經驗，逐步導引兒童從具體表徵進而半具體表徵之認識，以建立數學的形式性知識。

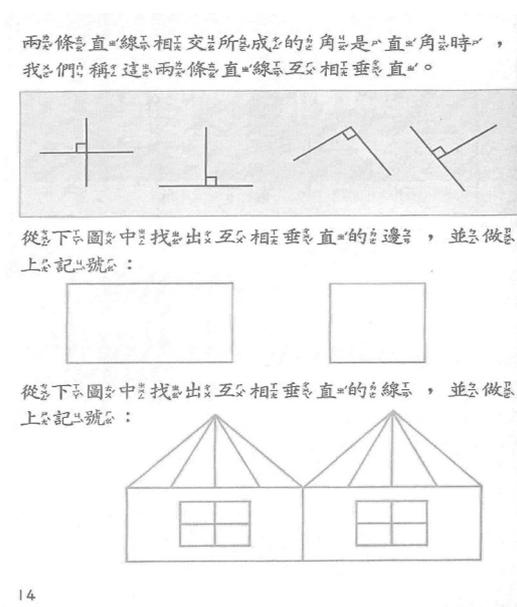
在幾何教材方面，依據64年課標(教育部，1975a)編製的課程，除了基本形體的認識以外，平面與立體圖形的建置與轉換、性質之探究與應用解題、推理，以及位置概念，皆納為教材內容，舉凡投影、曲線、曲面、方向位置與座標、平移、旋轉、反轉等操作、旋轉體、垂直、平行、全等、對稱(線對稱與點對稱)(國立編譯館，第九冊，1993b, p. 316)，以及繪製簡易圖形等等概念，皆為教材內容。此外，在空間概念的內容方面，64年課標的內容則比51年課標的內容少。在測量的教材綱要方面，64年課標除了包含前一時期的內容以外，在測量工具的使用則較前一時期重視，明訂「捲尺的用法」與「圓規的使用」，也增加量與量、量與數的關係之探討，例如：用比例關係實測長度；討論長度、面積與體積的關係、水的重量和體積的關係(教育部，1975a)。

在教科書的表徵方面，文本提供的插圖則包含實物／景相片與手繪圖，以及展示教具操作或圖形製作的程序圖，比前時期的插圖方式多樣且數量較多。提供實景／物相片，具有連結真實情境事物的意義；呈現操／製作的程序圖，意圖表明事物(或形體)透過操／製作而改變以產出產品(結果)的歷程，也潛存觀察與體驗學習的意義。此外，數學問題也包含要求觀察、操作或製作的陳述，例如：「想一想」、「說說看」、「找一找」、「畫出來」、「做上記號」等等要求具體動作之指示。在解決問題說明模式方面，相較於幾何單元，測量教材多呈現使用數字解題計算與直接提供解題說明的模式。圖六與圖七分別為依64年(1975)課標編製的算術教科書(第六冊)之幾何與測量單元之例隅(國立編譯館，1989)。

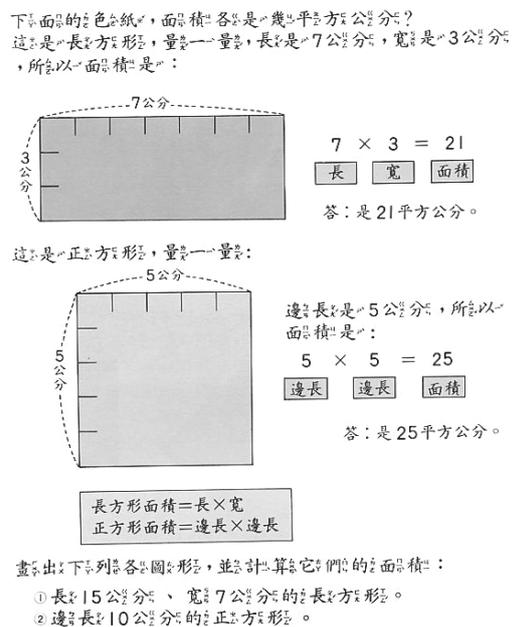
從圖六可見，教科書文本提供多個非實景／物的插圖，但是皆為表徵垂直的性質，期以導引學生從不同垂直的樣式、長方形、正方形與複合圖形，找出相互垂直的邊(線)並做記號。上述具有動作指示的問題，並未直接提供解答，隱含要求學生需投入觀察、辨認與做註記的解題思考活動。圖七為長／正方形面積測量的單元，插圖為提供彩色且未附格子的長/正方形、未給定長邊與寬邊的長度，提問其圖形內部區域的面積，文本表徵類似前一時期的表徵方式，亦可見「問題陳述—算式與計算—解答」直接說明的模式，以及提供文字描述長/正方形的面積公式。

依64年(1975)課標編製的教科書，其課程結構仍偏重數學的抽象結構(陳秉筠，2008)，學生對於具體操作與數學的形式性知識，仍難以產生連結，導致「知其然，而

非知其所以然」數學學習困難。而且，計算仍佔有相當大的比例（34.1%），測量只佔11.6%，而且，多數教師反應此套教材過多，部分教材偏難與生活情境脫節，運算技能的熟練仍為數學教學之重心（陳梅生等，1987）。此外，根據王鴻年等（1983）調查北台灣縣市275位小學教師對此套課程與教學之意見，發現三分之一以上的教師未曾使用教具教學，而且「答案正確及計算迅速」仍被認為是數學學習重要的標準之一。由此可見，課程標準在課程編製與教學理念呼應當時期的心理學思潮，但是教師的教學執行是否切合課程與教學的理念，卻是能否確實達成課程目標的重要變項之一。



圖六 依64年課標編製之1989年國編版數學修訂初版第八冊幾何單元例隅



圖七 依64年課標編製之1989年國編版改編初版數學第七冊面積單元例隅

依據64年課標編製的課程，於67學年度施行，至民國82年教育部修訂課程標準之前，此課程在十五年間雖然經過小幅改編修訂，但是相當穩定。此段期間受社會解嚴、電腦科技的發達、以兒童為本位的理念、重視問題解決歷程的知識建構理論，以及美國NCTM的學校數學課程原則與標準之文件影響（NCTM, 1989, 2000），加上改善依64年課標編製的課程所產生的上述數學教育問題之需求強烈，觸發民國82年的課程標準（教育部，1993）之修訂。

依據82年課標而編製的課程，乃植基於「以兒童為本位」理念（鍾靜，2005），強調直觀、經驗與察覺，建構與理解數學概念，使用數學語言溝通、討論、講道理和批判事物的精神（教育部，1993；鍾靜，2005）。此課程所反映的數學心理學理論思潮如下：（一）認知心理學所強調的知覺（perceptions）與行動（actions）的訊息，建構心理

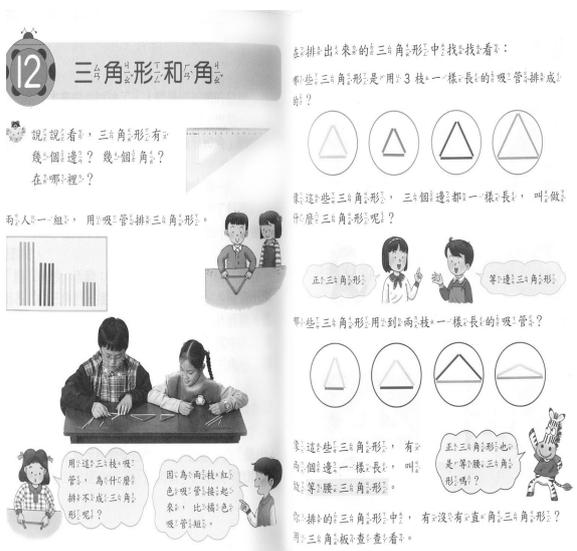
意象 (mental images)，此心理意象伴隨思考活動，共同影響人類重要的智能—空間察覺 (spatial insight)；(二) Van Hiele (1986, 1999) 重視直覺的知識與幾何思考發展層次；(三) Fischbein (1999) 所討論的知覺脈絡對數學幾何思考的影響，提醒教學者需注意直覺與脈絡對兒童學習數學概念與解決問題的影響。另一方面，此套課程強調使用數學語言作解題溝通，亦呼應 Vygotsky (1978) 強調的語言互動對思考的調整與再結構，進而注意心智發展的理論，以及 Cobb (1991, 1996) 與 Von Glasersfeld (1996) 等學者對數學討論所產生的社會性互動與知識建構的關係，主張數學並非是絕對客觀的思考結構，是可以討論與磋商改變的，藉著問題解決討論、批判與辯證，助益形成有意義的思考結果。上述觀點，重視提供問題解決情境與數學討論解題文化的養成，亦可見之於教師指引與教學文件 (康軒文教, 2007, p. 5；臺灣省國民學校教師研習會, 1995a, 1995b, 1997, 1998)。

82年課標的幾何教材綱要，亦延續64年課標之「圖形與空間」主題，包含平面與立體圖形之建置，透過實測、實作察覺形體性質、形體性質之探究與運用推理 (例如：全等、相似、線對稱性質等等)，但是刪除點對稱的教材。相較於64年課標的幾何教材綱要，82年課標增加了立體形體教材；但整體而言，有關空間方位的教材，64年與82年課標之教材，皆少於57年課標之教材 (林秀瑾、張英傑, 2005)。對小學低年級兒童的幾何學習，強調需透過視覺與感官，認識基本圖形與立體物之特性，因此教學上提供圖形、圖卡與長方形的符號，以指認圖形；在釘板上圍出長方形、描繪與拼排圖形等實際操作活動，皆是視覺期重要的教學 (國立編譯館, 1996, p. 105-106)。而且，分類活動包含視覺性、功能性與關係性，能幫助兒童掌握物體的屬性，組成集合，進而了解物體種類的包含關係。上述幾何教學理念，可見 Van Hiele 及認知心理學理論之應用。此外，也呼應 Clements 與 Battista (1992) 的建議：感官知覺、觸摸物件到繪製圖形等行動，皆是助益兒童發展對幾何與空間的直覺，認識幾何圖形的特性，以進一步察覺形體關係與建構推理邏輯之重要活動。

82年的課標明確闡述量與實測的理論架構，建議測量概念與技能的學習需經歷初步概念、間接比較、直接比較、個別單位的描述、公制單位系統中常見單位的認識與化聚，以及測量公式概念的發展 (教育部, 1993)。面積概念屬於量與實測主題，且從二年級即引入面積初步概念的預備學習活動，四年級介紹長方形與正方形的面積公式 (教育部, 1993)。根據朱建正 (2000) 比較依64年與82年課標編製的面積課程差異，指出兩份課程標準下的測量課程，皆建議測量概念與技能的學習需經歷一直觀比較、直接比較、間接比較、個別單位比較與普遍單位的教學順序 (例如：國立編譯館, 1993)，但是依64年課標的課程未真正掌握兒童認知發展的原則，忽略數學概念的學習需經歷經驗、察覺、瞭解與內化的階段。

在教科書的表徵與問題解決說明模式方面，依82年課標編製的教科書問題，具有要求學生投入解題探索與討論的引導與要求（例如：呈現不同解題方法的對話），附註配合使用的附件，其強調觀察、操作與討論解題的導向明顯可見。此外，問題陳述後提供不同數學想法的對談或部分解題想法的插圖，傾向非直接提供答案，學習者需透過思考、操作與討論，探索答案。例如：圖七與圖八分別為民國88年（1999）依82年課標編製的數學第七冊之幾何與面積教材例隅（康軒文教，1999）。從兩個圖可見，其皆為實景／物插圖及手繪的彩色插圖，呈現操作、製作與實測的動作插圖，及問題要求「說說看」與討論的對談。此外，所呈現的問題為要求投入學生操作以後，使用語言說出解題結果，而非直接呈現解題說明或解答。上述的非直接說明模式及其特點，與先前時期的教科書表徵方式存有差異。

除了上述的表徵分析，在教科書的插圖方面，值得一提的有趣發現為依82年課標發展的國立編譯館版本教科書之動物插圖，於1997年版配合生肖的年序，呈現主題為「鼠」的插圖（國立編譯館，第三冊，1997），於2000年版則呈現以「兔」為主題的插圖（國立編譯館，第八、九冊，1997），其將中國文化中的生肖年序，融入其動物插圖，文化融入的意味隱約可見。



圖七 依82課標編製之1999年康軒版數學第七冊第12單元三角形和角例隅



圖八 依82課標編製之1999年康軒版數學第七冊第9單元面積例隅

五、第五期（2000~2011）

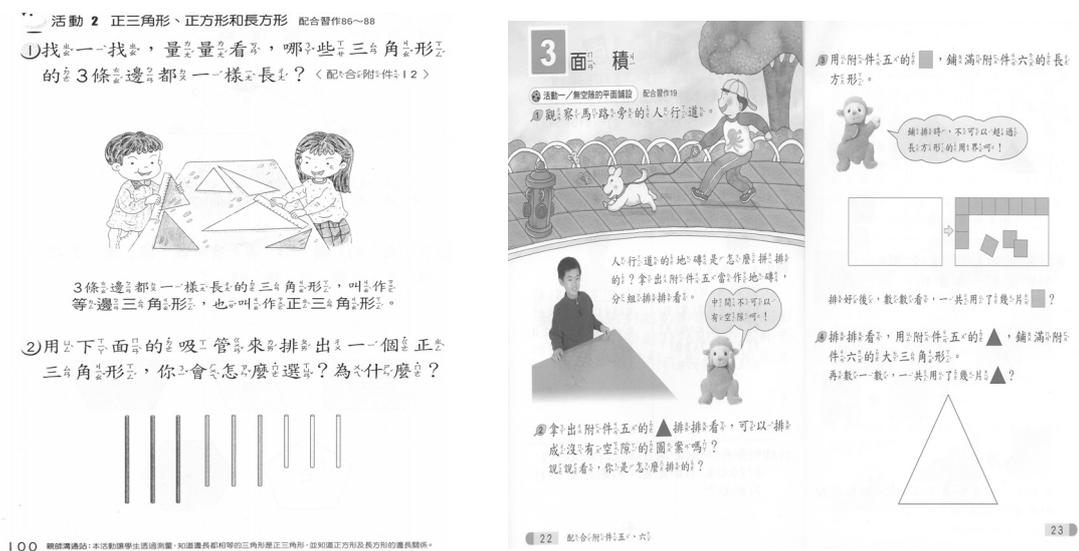
1990年代初期民間四一〇團體發起教育改革，繼而朝野紛紛提出教改建言與方案（周祝瑛，2003），教育部也成立國民中小學九年一貫課程發展委員會，根據學科性質

不同而區分學習領域，於民國89年（2000）、92年（2003）、97年（2008）分別公告《國民中小學九年一貫課程暫時綱要》（簡稱暫綱）（教育部，2000）及《國民中小學九年一貫課程綱要——數學學習領域》（簡稱課綱）（教育部，2003，2010），成為小學數學課程與教學之重要依據。

在數學領域方面，89年的暫綱與82年課標的課程內容與教學目的，差異不大（鍾靜，2004），但是前者強調培養學生統整的能力、帶著走的能力，及由自身建構的能力，強調80%的學生能夠學會等等能力（教育部，2000）。於92年（2003）與97年（2008）的九年一貫課綱，考量課程銜接、國際比較及分段能力指標，雖然在教材上再修訂，回歸數學本質，彰顯數學的概念、定義與解題（教育部，2003，2010）。雖然92課綱與89年的暫綱在能力指標上的敘寫與主張略有差異，但是仍具有延續性（徐偉民、張敬苓，2008）。整體而言，在課程與教學的理念，仍以學習者為主體，著重配合學生不同階段的需求，協助發展數學智能（教育部，2010，p. 21）。在課程與教學方面，則將小學階段分為三個學習階段，發展「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」、「連結」主題教材，透過數學解題思考、連結、溝通與評析，培養學生能力。此時期的課綱對於幾何與測量主題的訂定，與前四期呈現差異，幾何主題成為一個獨立主題，測量則分別歸屬於「數與量」、「幾何」主題。此種分法也與美國NCTM（2000）將「幾何」、「測量」區分為兩個不同主題，呈現差異。

在教材主題方面，89年的暫綱沿用82年課標的「圖形與空間」為幾何教材的主題名稱，則於92年課綱以「幾何」取代「圖形與空間」，成為主題名稱。此時期的幾何教材，包含形體外觀之辨識、建置與轉換、以實作探究形體性質並應用推理（教育部，2000，2003，2010）。教材內容包含：（一）認識幾何圖形的術語，使用術語描述所對應的形狀；（二）瞭解各種幾何圖形的構成要素與結構，例如：長方形包含兩組等長的邊和四個直角；（三）瞭解各種幾何圖形的屬性，例如：長方形是平行四邊形的一種；直角三角形是三角形的一種；（四）認識幾何定理與推理。上述的幾何課程與教學注重具體物的觀察、操作、製作（描繪圖形）或使用語言、符號做描述，並進而察覺樣式，呼應了Van Hiele的幾何教學理論。此外，此時期的教材編製，強調連結學生生活經驗的情境，例如：「文化及社會情境下，明瞭學生的思考特徵和學習方式，讓學生進行有感覺、有思考且有意義的學習」（南一書局，2010）亦呼應Freudenthal（1973）的觀點——「幾何為空間的瞭解……即兒童所居住、呼吸及移動的空間。為了能在此空間居住、呼吸及移動得更好，兒童需學習去認識、探索與征服它」（引自Gavin et al., 2001, p. vii）與幾何與測量概念認知的理念（例如：Clements & Battista, 1992; Clemets, 2003; Clemets & Bright, 2003）。值得一提的是，此時期的課綱所包含的空間概念內容，比51年課標之內容少（林秀瑾、張英傑，2005）。

在測量的教材方面，各種測量概念在各學習階段課程的分佈，與依82年課標編製之課程相似（朱建正，2000；鍾靜，2003），也與美國 NCTM（2000）的測量主題內容相近。低、中、高年級的測量教材內容，包含：1.低年級著重認識長度、體積、重量、面積與時間的特性，並做直接與間接比較；知道如何使用非標準化單位與標準化單位做測量；選用適當的單位與工具測量物件。2.中年級著重瞭解長度、體積、重量、面積、角度與時間的性質，並選用適當的單位測量物件，瞭解使用標準單位的必要性，熟悉公制測量系統與測量單位的化聚運算。3.高年級著重認識與發展大數量的測量，瞭解不同單位之間的關係，以及特定測量系統內不同單位之間的化聚轉換，瞭解與選用適當的單位大小與物類，測量周長、面積、表面積與體積，瞭解不同測量量之間的關係，例如當一個圖形改變，其周長與面積之間的關係為何。



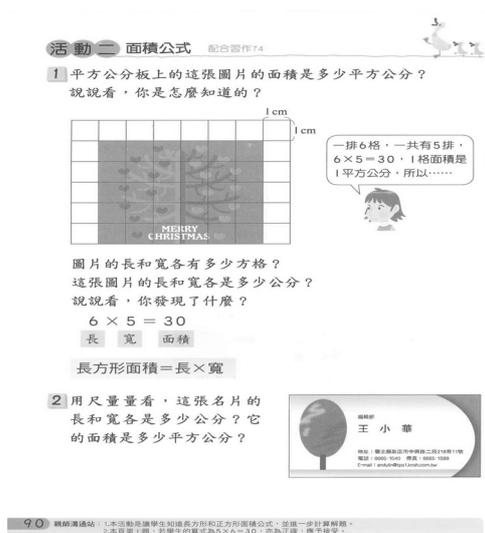
圖九 依92課綱編製之2008年康軒版數學第四冊平面圖形與立體形體單元例隅 圖十 依89暫綱編製之2007年康軒版數學第六冊面積單元例隅

在教科書的圖示表徵方面，依九年一貫課程暫綱或正綱編製的教科書圖示，與依82年（1993）課標編製的教科書表徵相似，文本提供的插圖則包含實物／景相片與手繪的彩色插圖，以及展示教具操作或圖形製作的程序圖；值得一提的是，此時期的插圖可見仿故事繪本或漫畫式對話的插圖【例如：康軒版數學第六冊的「認識淨重」（康軒文教，2007，p. 35）】，此為先前時期教科書插圖少有的表徵方式。在要求觀察、操作或製作等動作指示的問題方面，此時期與第四期的教科書相似，註明配合習做與使用附件，要求「想一想」、「說說看」、「找一找」等等要求具體操作之解題指示。在解決問題說明模式方面，幾何單元較多要求製作與探索活動；但是在測量教材方面，相較於依82年課標編製的教科書之面積測量單元（長／正方形面積公式的介紹），依97年課綱

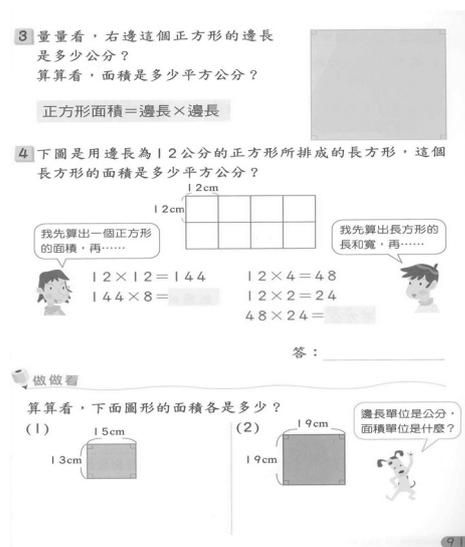
編製的教科書的面積測量問題解決說明模式，略呈轉變現象，略呈返回類似第三、四期的模式。亦即，82年課標編製的教科書提供部分未附格子或未給定邊長的圖形，學習者需先實測後求算面積；但是依97課綱編製的教科書則呈現問題「陳述—算式與計算—解答」的直接說明模式。換句話說，在依82年課標編製之教科書的測量問題解決說明模式，傾向非直接提供解題、算式與解答說明；但是於依92與97九年一貫課程綱要（教育部，2003，2010）編製的教科書，其使用數字解題計算與直接提供解題說明的模式，略有增加的傾向。上述之差異，可從圖九、圖十、圖十一與圖十二例隅窺知。圖九為依92年（2000）課綱編製的數學教科書之幾何單元例隅（圖片引自康軒文教，第四冊，2008，p. 100）；圖十為依89年（2000）暫綱編製的數學教科書測量單元之例隅（圖片引自康軒文教，第六冊，2007，p. 22-23）；圖十一與圖十二為依92課綱編製的2010年康軒版數學第八冊面積教材（圖片引自康軒文教，第八冊，2010，p. 90，p. 91）。

從圖九可見，教科書文本提供非實物相片的插圖，配合問題的文字陳述，要求學習者找一找、量量看，三角形的三邊是否一樣長，以及要求使用吸管排出一個正三角形，然後說明如何製作的過程。上述具有動作指示的問題，並未直接提供解答，但要求學生投入觀察、測量、比較與圖形製作，以及說明製作過程的解題活動。圖十為面積測量的單元，插圖為提供實景／物與手繪彩色插圖，解題想法的對話，以及未附格子與邊長的長/三角形圖，從使用小正方形面積單位的插圖，以及要求使用附件的三角形圖片，鋪排並測量長方形與三角形的內部區域是由多少小面積組成。此例隅並未直接提供解答說明，而要求學習者透過使用附件的圖形卡，作為面積單位進行鋪排。此種要求使用單位面積在一個圖形區域內做鋪排的活動，符合面積測量概念學習之建議（譚寧君，1995，1997；Clements & Bright, 2003）。

圖十一提供未附邊長與格子的圖形，隱含要求學習者需先實測後求算面積，符合面積測量的性質及公式意義探索歷程；但是，於第一個問題陳述後，隨即提供算式與計算，而且從圖十二，亦可見「問題陳述—算式與計算—解答」的直接說明模式，以及提供附邊長的長方形與正方形圖形，要求計算面積，此種表徵與問題解決模式，似乎與64年課標編製之教科書及以前的教科書表徵方式相似。



圖十一 依92課綱編製之2010年康軒版數學第八冊面積教材例隅



圖十二 依92課綱編製之2010年康軒版數學第八冊面積教材例隅

第五期的課程與教學理念，除了受美國NCTM的課程文件影響以外，認知心理學者（例如：Piaget的認知結構發展理論、Bruner的學科組織結構觀、Van Hiele的幾何思考發展理論）、Freudenthal與Von Glassersfeld等學者數學心理理論，亦可從教師指引、備課用書等教材教法相關的文件窺知。例如：1.教科書設計採螺旋式的安排，即可見之於數學教科書設計「以活動為單位，進行螺旋式安排，亦即同類問題情境，在活動序列中逐漸加廣加深」（國立編譯館，1996，p. 3）；2.重視兒童幾何學習需循著由具體到半具體，進而形式抽象，以及由簡單而複雜的順序進行教學設計「特別注意兒童的認知發展程序，……，採用製作、描繪及觀察，自實際生活現象中抽離出概念的原則……」（劉好，1997，p. 213）；3.一～三年級的幾何學習強調視覺觀察與具體操作；四～五年級的學習則重視具體表徵的察覺，透過主動操作具體表徵以察覺組型模式（pattern）；六～七年級的學習則重視類化具體表徵，建立組型模式的關係學習（康軒文教，2011，p. 7）；4.在社會文化脈絡與學習情境下，藉著問題解決討論、批判與辯證，形成有意義的思考結果（康軒文教，2007，p. 5），此教科書的教學建議，乃Freudenthal與Von Glassersfeld所主張——數學並非是絕對客觀的思考結構，是可以討論與戳商改變的觀點之應用。

統整我國一百年來的課程標準之幾何與測量教材綱要內容，發現不同時期教科書內容，可能超乎當時課標的教材綱要所明訂的條目內容。為利於瞭解五個時期的課標（課綱），其在幾何與測量教材綱要所訂定內容的差異情形，將各時期課標之測量與幾何教材綱要內容，分別於表A與表B的五大類目與十一次類目的分佈情形，整理如附件一之表D與表E所示。從附件的表D及表E可見，兩種主題的教材綱要，皆隨著年代的演進而內

容愈趨豐富，惟空間概念，則仍需再予以加強。

參、教科書圖示表徵及問題解決說明模式分析方法

在檢視教科書的圖示表徵與問題解決說明模式方面，本研究採內容分析方法（王石番，1991；歐用生，1991），針對五個時期的教科書幾何與測量單元，進行文本分析。在教科書文本的圖示表徵分析方面，主要分析文本單元其配合教學問題而提供的實景/物插圖數量、操/製作的歷程。在問題陳述與解決問題說明模式方面，主要分析文本是否使用文字陳述，提供具有操/製作的動作指示要求的問題，以及問題解決說明是否直接提供算式與解答，或混合模式。研究方法與過程說明如下。

一、研究對象

(一)不同時期的幾何與測量教科書單元之取樣

在教科書的幾何與測量單元取樣方面，乃從五個時期依不同年代訂定的課標而編製且施行於學校數學之教科書（國立編譯館所收藏的數學教科書），選取幾何與測量單元文本為研究對象。於第四期與第五期期間，教科書開放民間編製，第四期針對82年課標編製的教科書版本，除了國立編譯館版本，並選取當時市佔率最高之康軒版數學教科書（何宏儒，2007），做為樣本選取之版本；第五期則以康軒版本為單元選取對象。

由於百年來的教科書數量龐大，本研究依上述五個時期而抽取的教科書幾何與測量單元進行分析的原則說明如下。

1. 教科書單元之選取：為完整地分析依不同時期課標而編製的教科書圖示表徵與問題解決說明模式，所選取的單元宜跨五個時期皆存在的單元。由於基本圖形的辨識為幾何學習的基礎，且跨五個時期的教科書皆包含此教材單元，因此，幾何教材樣本單元，乃以基本圖形的介紹為主。測量教材的樣本單元，乃以長度測量和面積公式介紹為主。
2. 教科書單元選取的所在年級與冊數：主要以每時期的二年級（第3和4冊）和四年級（第7和8冊）有關圖形的介紹（幾何）與長度測量與面積公式介紹（測量）為主要選取來源。若二年級（第3和4冊）與四年級（第7和8冊）無上述概念之單元，則選取該教科書冊數之上一冊或下一冊，有關圖形的認識或長度測量與面積公式介紹的單元。
3. 民國37~51年之間，因低年級施行數學隨機教學，二年級（第3和4冊）無算術教科書。因此，選取三、四年級算術教科書有關圖形、長度和面積公式介紹的單元為樣本，而且每冊以一個單元為主。此外，於民國52年出版的數學教科書，將正

方形公式與長方形公式分為兩個單元，因此，兩個測量單元皆納為分析樣本。

4. 所分析的單元樣本之問題數量計數，僅包含該單元教學過程之練習例題，例如：「做做看」之例題，但不包含該單元結束後的練習題。

根據上述選取原則，各時期及各年級所分析教科書的版本、出版年代及冊次，呈如附件一表C所示。各時期及各年級的幾何與測量單元數量，呈如表一所示。從表一可見，五個時期的教科書幾何與測量單元數量，幾何部分總共選取16個單元，測量部分總共選取17個單元，且除了第四期包含一個五年級上學期的單元以外，其他單元多分佈在二、三及四年級。

表一 五個時期所選取的不同年級教科書之幾何與測量單元數量

時期／年級	幾何單元			測量單元		
	二年級	三年級	四年級	二年級	三年級	四年級
第一期 民國元～38年（1912～1949）	1*	1	2	1	2	-
第二期 民國39～56年（1949～1967）	1	1	-		1	2
第三期 民國57～63年（1968～1974）	1	-	1	1	-	1
第四期 民國64～88年（1975～1999）	3	-	3	3	-	4**
第五期 民國89～100年（2000～2011）	1	-	1	1	-	1
各年級樣本單元數	7	2	7	6	3	8
總計	16			17		

註：* 包含一個單元取自一年級下學期的教科書。

** 包含一個單元取自五年級上學期的教科書。

二、資料分析

(一)分類編碼

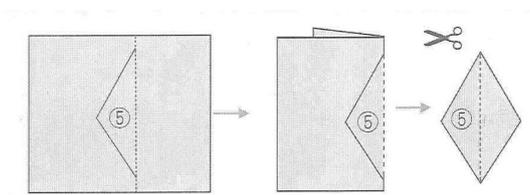
在幾何與測量教科書問題解決說明表徵模式分析方面，首先區分幾何與測量兩類主題，並以「單元」作為單位，再以「頁」作為最小紀錄單位，其編碼方式為：「出版年—教科書版本—冊數—單元序數—頁碼」。每個編碼的訊息包含：1.課程標準的年代：使用阿拉伯數字表示，例如：「18」指民國18年的小學課程暫行標準。2.教科書版本：包含國立編譯館或康軒出版社發行之教科書，前者以「國」表示；後者以「康」表示。3.單元所在之冊數。4.單元的序數。5.頁碼：表示單元的頁碼。例如：「21-新課程5-20-20」表示民國21年（1932）發行之新課程初等小學算術第5冊第20單元第20頁（該單元所在頁碼）；「86-康3-9-66」表示民國86年（1997）發行之康軒文教數學第3冊第9

單元第66頁（該單元所在頁碼）。

(二)圖示表徵的分析項目

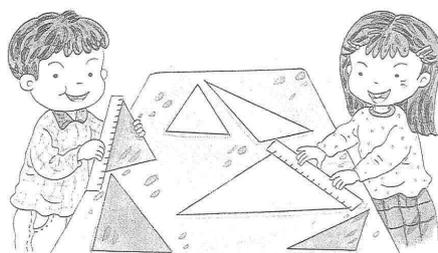
圖示表徵的分析，主要分析文本單元配合教學問題而提供的插圖，確認是否為實景/物圖及操作程序的展示插圖，兩類圖分別予以次數與百分比統計。

1. 實景／物插圖：配合教學問題所提供的插圖，以真實相片呈現靜態的景物或教具、物件。
2. 操作程序插圖：配合教學問題，呈現一個或以上連續插圖以展示製作程序，或操作動作的先後步驟。操作程序的插圖，可包含三種類型。甲、圖十三展示一張紙對折，並使用剪刀剪下一個四邊形的動作程序圖（引自國立編譯館，1999，第七冊，p. 85）。圖十三雖以三個連續圖展示製作一個四邊形的歷程，但計數插圖數量時，乃以其所欲執行完成一個完整的動作程序為單位計數，將三個連續圖示計數成為一個插圖。乙、插圖呈現「測量工具」之使用動作或操作動作繪圖，例如：圖十四（引自康軒文教，第四冊，2008，p. 100）展示兩位學生使用尺測量三角形圖形邊長之動作。丙、以真實景物相片展示操作程序之展示圖，例如：圖十五展示學生使用面積單位方格子做平面的覆蓋之實景照片（引自國立編譯館，1999，第七冊，p. 89）。此類展示操作程序的實景相片為實景插圖，亦屬實物插圖，因此於計數實物插圖時，亦為計數對象。



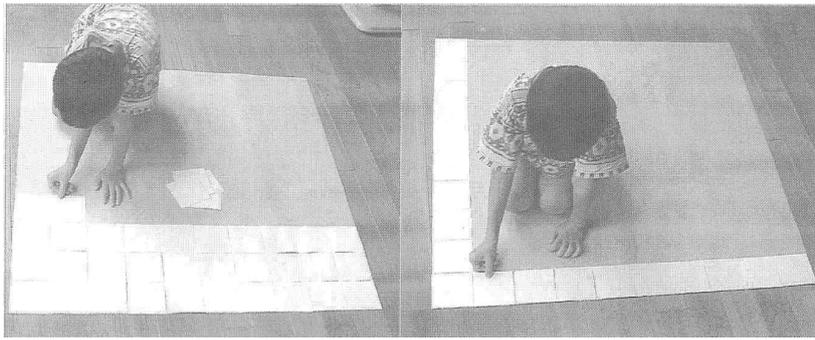
圖十三 操作程序插圖例隅

資料來源：圖片引自國立編譯館，1999，第七冊，p. 85



圖十四 使用工具的繪圖插圖例隅

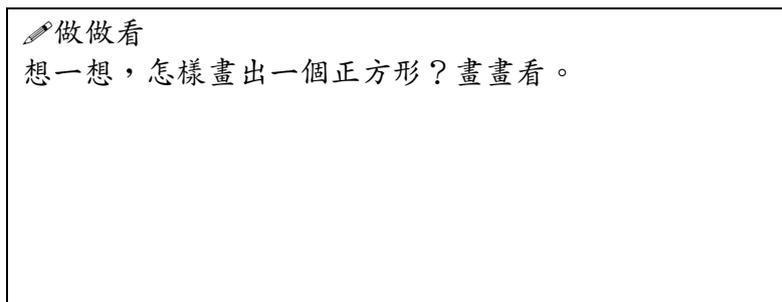
資料來源：圖片引自康軒文教，2008，第四冊，p. 100



圖十五 展示操作的實物插圖例隅

資料來源：圖片引自國立編譯館，1999，第七冊，p. 89

動作指示要求的問題：文字陳述要求學生進行操作動作，以解決問題。動作指示的問題包含：觀察、分類、說出、製作（畫、拼組、堆疊、描繪）、操作等。例如：圖十六（引自康軒文教，2010，第八冊，p. 37）即要求學生想一想並畫做一個正方形。



圖十六 動作指示要求的問題例隅

資料來源：圖片引自康軒文教，2010，第八冊，p. 37

(三)問題解決說明模式

教學問題呈現之後，說明如何解題的模式，包含兩種：甲、直接說明模式：問題陳述後，直接提供解題方法的文字說明或算式步驟及解答，並給予明確解答。例如：前文的圖三、圖四與圖七。乙、非直接說明模式：提供問題陳述或插圖後，僅提供問題和插圖，不直接提供解題方法與算式步驟或解答，但給予解題的部份程序或提示（或無提示）。此種模式，兒童需探索與思考可能的解題方法，例如：前文的圖十。丙、混合模式：即一個單元的問題解決說明方式，兼具上述兩種模式。

三、信度與效度

本研究採用編碼者間信度與研究者信度，檢定信度。在評分員一致性的分析上，由

研究者及兩位具課程與教學研究背景的助理，分別對教科書的幾何與測量單元之圖示表徵方式（實景/物與操作程序插圖）、動作指示要求的問題、問題解決說明模式等四種類項，進行相互同意度檢驗。信度分析步驟為先由研究者與評分員討論分析類目表、定義及計數原則，並針對樣本範例進行深入討論，建立分類規則，然後分別獨立歸類樣本。在信度計算方面，根據歐用生（1991）的評分者信度與研究者信度之計算公式，計算信度。

在效度方面，本研究採評審團法，透過邀請對教科書研究主題有興趣的專家學者，討論變項定義、資料搜尋等方式（王石番，1991），發展內容分析類目。

肆、研究結果

在教科書表徵與問題解決說明模式模式之分類信度分析方面，有關實景／物插圖、操作程序插圖、動作指示要求的問題陳述、問題解決說明模式之評分員一致性分析結果，幾何與測量單元的各別分析結果皆達 .90以上；研究者信度皆達 .91以上。

二、民國元年～100年（1912～2011）之五個時期，幾何與測量教科書之問題解決解說表徵模式的差異比較

（一）五個時期的教科書幾何單元之表徵模式分析

針對五個時期所分析的教科書幾何單元樣本之表徵模式分析，提供實景/物插圖與操作程序插圖的數量、是否提供文字陳述定義、動作指示要求的問題數量，以及問題解決說明模式之分析結果，呈如表二所示。1.在圖示表徵方面，從表二可見，依據本研究所分析的幾何單元樣本，在第一～三期的單元文本，無實景/物插圖；於第四與第五期的單元文本，方提供實景／物之插圖。亦即，64年課標之前的教科書幾何單元，僅提供手繪圖之插圖；但依64年課標發展的教科書幾何單元，文本提供手繪圖之外，也提供實景／物之插圖。2.在操作程序插圖的提供方面，第一期的單元文本，無提供此方面的插圖，自第二期及其後，每時期的單元文本皆提供操作程序插圖。整體而言，第四期的單元文本所提供的插圖數量，略多於其他時期之教科書。

在具有動作指示要求的問題方面，表二呈現五個時期的幾何單元皆有要求操／製作的問題，而且此種問題的數量隨著時期呈遞增之趨勢。此亦顯示：要求學生投入觀察、操作、製作與解題討論之要求，其在幾何教材的重要性愈受重視。

在問題解決說明模式方面，表二顯示第一與第四時期的幾何單元，乃為非直接說明的模式，亦即問題陳述之後，並未直接提供解決問題的答案；於第二與第三時期的教科書幾何單元，則呈現包含非直接說明與混合（兼含直接與非直接說明）模式，亦即有的

單元於問題陳述之後，直接提供解決問題的答案，有的單元則未直接提供解題的答案。值得注意的是，於第五時期的單元，呈現直接說明的模式，而無非直接說明模式。

表二 民國元年~100年各時期教科書的幾何單元之表徵模式

冊別與單元	圖示表徵方式		動作指示要求的問題	問題解決說明模式			
	單元數	實物插圖/ 問題題數	操作程序 插圖	題數	非直接 說明	直接說明	混合
第一期 民國元~38年 (1912~1949)	4	0	0	4	4	0	0
第二期 民國39~56年 (1949~1967)	2	0	10	16	1	0	1
第三期 民國57~63年 (1968~1974)	2	0	7	31	1	0	1
第四期 民國64~88年[含 兩種版本](1975 ~1999)	6	70	59	147	6	0	0
第五期 民國89~100年 (2000~2011)	2	21	11	78	0	2	0
總和	16	91	87	276	12	2	2

(二)五個時期的教科書測量單元的圖示表徵與問題解決模式分析

針對五個時期所分析的教科書測量單元樣本之圖示表徵分析，提供實景/物插圖與操作程序插圖的數量、動作指示要求的問題數量，以及問題解決說明模式之分析結果，呈如表三所示。1.在圖示表徵方面，從表三可見，在第一~三期的測量單元文本，無提供實景/物之插圖；於第四與第五期的幾何單元，呈現實景/物之插圖。亦即，64年課標之前的教科書測量單元文本，僅提供手繪之插圖；但依64年課標及後期的教科書測量單元，文本除了提供手繪圖以外，也提供實景/物之插圖。2.在操作程序插圖的提供方面，第一期的測量單元，文本無提供此方面的插圖，自第二期之後，每時期的單元皆提供操作程序插圖。上述現象，與幾何單元的情形相似。整體而言，第四與五期的教科書所提供的插圖數量相近，略多於其他時期教科書所提供的數量。

在具有動作指示要求的問題方面，表三呈現第一、三、四及五時期的單元文本，皆有動作指示要求的問題，而且此種問題的數量呈遞增之趨勢；惟第二時期之單元文本未發現有此種問題。此現象與幾何單元之分析結果相似，即從64年課標以來所發展的測量

教材，重視要求學生投入觀察與測量操作。

在問題解決說明模式方面，表三顯示第一、二時期的測量單元文本，乃提供直接說明模式；第三時期的單元文本，則呈現混合模式；第四時期的單元文本，則呈現非直接說明模式及混合模式，而且非直接說明模式略多；但是第五時期的單元，於低年級的單元提供非直接說明模式，但是在中年級的單元則呈現直接說明模式。

綜合五個時期的教科書幾何與測量單元文本的分析，自64年課標以來所發展的教科書單元，實景／物與操作程序插圖的提供，其數量皆呈增加之趨勢。而且，第四期以後，教科書亦提供彩色插圖，此種改變可能與晚近印刷技術的進步有關。此外，展示操作程序的插圖及具有動作指示要求的問題陳述，其提供的數量亦隨年代遞增而呈增加之現象。從近期教科書文本所提供的兩種插圖及具動作指示要求的問題數量增加的現象，可見教科書編製者愈來愈重視兒童的認知學習特性—提供具體物件（具體）之觀察與操作，進而以半具體（物件的實景／物相片）表徵，輔助兒童學習數學概念。另一方面，提供兒童熟悉的物件之實景／物相片，亦具有連結兒童生活經驗的意義，提供熟悉的情境脈絡，也將助益新事物的學習（Mayer, 2008）。上述教育心理學理念愈受重視的現象，可從近三十年來教科書的插圖提供較多的真實景物相片、操作程序展示，以及動作指示問題的數量增加之趨勢，獲得輔證。

在問題解決說明模式方面，比較幾何與測量單元所呈現的數量，五個時期的幾何單元文本，提供非直接說明模式的數量較多，直接說明的模式的數量較少。由此可見，我國教科書的幾何單元所提供的問題解決模式，重視要求學生觀察與探索形體事物，從感官與製作歷程，發現形體的幾何性質（朱建正，1997；劉好，1994）。此現象亦呼應二十世紀中期以來，數學與教育心理學者皆強調幾何學習需輔以觀察與製作活動之建議。

相對地，測量教材因其數學性質包含數的運算，在第一～三期重視算術與運算技能的課程目標下，教科書單元強調算術的計算技能導向，此導向似乎也反映在教科書的問題解決說明模式。三個時期教科書測量單元的問題解決說明，呈現直接說明解題的模式，此種模式及至第四期依82年課標編製的教科書，方呈轉變。例如：在依82年課標編製的教科書之長方形面積公式介紹單元，所提供的插圖，部分圖形未附格子且未給定邊長，學習者需先實測後求算面積；問題多有「說說看」、「猜猜看」、「你是怎麼作的」、「量量看」等要求測量操作及使用單位面積「覆蓋」的操作導向，以及使用語言溝通數學想法，插圖雖呈現不同數學想法的對談，亦非直接提供答案，學習者需透過思考、操作與討論，探索答案。此種隱含要求學生學從覆蓋單位面積、觀察與討論所覆蓋出的單位面積的行列矩陣關係，以建構長方形面積公式的意義，以及解決面積問題時，先測量圖形的邊長，然後求算其面積，亦符合當前面積較學的建議（Battista, 2003; Lehrer, 2003; Huang & Witz, 2011）。

同時，從表二的測量單元之問題解決說明模式分析，可見對於問題解決的導引，乃從直接說明模式（第一～二期），進而直接說明模式與混合模式（第三期），進而非直接說明模式與混合模式（第四期），第五時期略呈改變，呈現直接說明模式及非直接說明模式。此種轉變，可能由於九年一貫課程綱要（教育部，2003，2010）比82年課標，強調能力指標及演算能力，數學知識與計算技能藉課綱之調整被強化（毛炳楠，2006；徐偉民、張敬苓，2008）。呈如九年一貫課程綱要（教育部，2010）闡述，課程目標可以達成培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力；學習應用問題的解題方法（p. 24），若教科書多呈現「問題陳述—算式與計算—解答」的直接解題說明模式，學習者是否因缺乏解題探索之需求，而直接模仿解題的學習，導致概念理解與量感培養不足，值得後續研究進一步探討。

在圖示表徵方面，教科書插圖常提供附有格子或給定邊長的圖形，而非先測量圖形邊長後計算面積。前述的表徵方式，亦有學者質疑可能潛存暗示—「面積測量乃使用邊長數字，套用公式計算解題」之意涵（Carpenter, Coburn, Reys, & Wilson, 1975）。再則，兒童需要充分的「使用單位面積作鋪蓋操作活動與測量討論」，以及瞭解各操作歷程所潛存的單位面積切分概念、行/列矩陣的乘法性質，否則無法瞭解「長×寬」的意義（Battista, 2003）。而且，教師若忽視操作、解題與討論的歷程，有的學生可能習得計數格子，但未必真正瞭解面積公式的意義（Bell, Costello, & Küchemann, 1983），面積測量容易流於計數方格與公式記憶。

表三 民國元年～100年各時期教科書的測量單元之表徵模式

冊別與單元	單元數	圖示表徵方式		動作指示要求的問題 題數	問題解決說明模式		
		實物 插圖	操作程 序插圖		非直接 說明	直接 說明	混合
第一期 民國元～38年 (1912～1949)	3	0	0	2	0	3	0
第二期 民國39～56年 (1949～1967)	3	0	1	0	0	3	0
第三期 民國57～63年 (1968～1974)	2	0	12	17	0	1	1
第四期 民國64～88年[含 兩種版本](1975 ～1999)	7	36	59	248	6	0	1
第五期 民國89～100年 (2000～2011)	2	22	16	45	1	1	0

冊別與單元		圖示表徵方式		動作指示要求的問題	問題解決說明模式		
	單元數	實物插圖	操作程序插圖	題數	非直接說明	直接說明	混合
總和	17	58	88	312	7	8	2

綜觀不同時期的教科書之幾何與測量單元之文本圖示表徵與問題解決說明模式之分析結果，可發現晚近時期的教科書文本提供實景／物的插圖、操作歷程展示圖及操作動作要求的問題，其數量比先前時期多且多元，此現象呼應心理學者的表徵學習觀點與建議（例如：Antonovskii et al., 1990; Flevares & Perry, 2001）。同時，此現象亦顯示提供不同的圖示表徵，讓兒童藉助插圖之觀察與仿做，配合附件之使用，投入操作學習，從具體操作解題經驗建構心像與概念，於愈受晚近時期教科書編製者重視。在問題解決說明模式方面，呈現在幾何文本與測量文本略存差異，幾何教科書較多呈現非直接說明模式，此符合數學教育學者強調幾何探索對於概念建構的教學意義（Clements, 2003）；但是測量教科書於不同時期其文本所呈現的直接與非直接說明模式數量呈現變動，但是綜觀上述兩種模式於五個時期的單元文本分佈數量，直接說明模式多於非直接說明模式。兒童的測量知能培養，主要來自於學校教育。欲培養學生對各種測量的知識與技能，充分的實際測量活動與經驗為必要之基礎，此種操作經驗也是助益發展量感的基礎。

伍、結論與對未來課程與教學之展望

一、結論

綜觀百年來不同時期的課程標準所訂定的課程目標、教材綱要與教學要點，可發現其內容也隨著時間的演進而改變，幾何與測量教材地位的轉變尤為顯著。幾何教材於第四期之前（民國64年之前），乃屬於筆算或測量主題之附屬教材，於64年課標明訂「圖形與空間」主題，以含括形的教材，並與數及量主題並列，於92年九年一貫課程正綱以「幾何」取代「圖形與空間」名稱，「幾何」主題成為數學課程的重要主題之一。在測量教材方面，根據第一期的課標（18年、21年及31年的課標），測量教材附屬於筆算主題，及至37年的課標定名「測量」含括測量教材，並列屬於筆算類目。由此可見，測量教材於第一期的教材地位變化，從被融合於筆算的部分教材，逐漸被區分為附屬於筆算類目的次主題。於第二期的41年課標之測量教材，其地位類似於37年的課標，但是於51年課標則以「實測」含括測量教材，測量成為一個獨立的主題，其與認數、計算、實測、應用並列為算術主題。此實測主題亦沿用於第三期的57年課標。第四期的於64年的課標，測量教材分別包含於「數與量」與「實測與計算」兩主題，於82年所修訂的課標

則分別屬於「量與實測」與「數量關係」。此時期的測量教材雖然名稱有所更動，或為跨主題之教材，但是其乃為數學的主題之一。第五期的89年九年一貫暫綱沿用82年課標之名稱「量與實測」表徵測量主題，但是於92年及97年的正綱，則將測量教材融入「數與量」及「幾何」主題。當前的課綱將測量主題融入其他主題的現象，則與美國NCTM（2000）的文件將測量主題獨立的情形不同。綜而言之，幾何教材日益受重視，且其內容日漸豐富；測量教材雖然被融入「數與量」與「幾何」主題，但是教材內容並未因此而刪減。

從檢視不同時期課標（課綱）的幾何與測量教材綱要內容，兩個主題的教材內容亦呈現改變。在幾何方面，五個時期的課標（課綱）皆包含形體外觀之辨識之類項，但是有關轉換平面與立體之表徵、形體性質之探究並運用其性質解題之類項，以及察覺、理解相似、全等、對稱等特質以運用解題，則為第四、五時期方受重視。此外，第四期之前的幾何教材以形體外觀的辨識為主，雖包含垂直、平行、對角線之介紹，但是透過實測、實作，進而察覺上述幾何性質的教材，猶相當匱乏。第四期以來，形體的建置、形體性質之探究並運用其性質解題，逐漸受重視，從幾何教材教法之相關文獻、教科書之教師手冊與備課用書之文件，可發現受認知心理學者及Freudenthal, Van Hiele等學者之幾何教育觀點影響（例如：臺灣省國民學校教師研習會，1994，1997，1998，康軒文教，2007，2011）。在測量方面，可發現晚近時期的教材比先前時期豐富，主要差異在於第四及其以後，增加測量工具的使用、估測等內容；而不同量的直接與間接比較、測量單位制度的認識與換算及公式，則為一百年來的教材內容。如上文所述，透過測量工具的操作與實測，以及先估後測等活動，為數學教育學者建議培養學生測量知能的重要途徑（例如：Clements & Bright, 2003; Lehrer, 2003）。

在教育與心理學理論對教科書編製與圖示表徵影響方面，本研究發現二十世紀中期以前（第三期以前），因應時代思潮與社會變遷而推動教育改革，進而訂定（或修訂）課程標準，部分中西教育心理學者的理論觀點，也被採擷與應用於課標的教材綱要與教學原則。課程發展的沿革，也可從新舊課程標準對教學要點及其所反映的教育心理學理念之差異，進而洞察其發展脈絡。另一方面，教科書雖然傾向配合課程標準而編製，但是其文本的圖文表徵與問題解決模式，未必隨即顯著地反映當時期課標訂定的教學原則。當教科書的編製與表徵方式改變明顯，且反映教育心理學理論的時間，其與教育心理學學者之理論著作發表年代，兩者之間呈現時間的延宕落差。就此時間的延宕落差而言，二十世紀初期我國數學課程結合本國之教育哲學觀，傾向以學科中心編製教科書，且以教學者為中心進行教學（盛朗西，1934；司琦，1981；馬忠林等，2001），當時雖有歐美數學教育及心理學學者提出重視學習者之學習興趣與思考之呼籲，但是上述理念並未明訂於課程標準，及至1950年代之後，學習者的心理發展、興趣等心理學原則，可

見之於課程標準的教學要點，但是教科書的編製與圖示表徵模式，變化仍不顯著。1960～1980年代，教育心理學與教材編製的理論愈多見之於課程標準，教科書編製與圖示表徵模式的改變，愈趨明顯，強調兒童的觀察與操作之表徵與問題數量，呈增加之趨勢。自1990年代以來，數學教育長期以來的困境問題引發教育改革，教育心理及認知發展心理學理論廣泛闡揚，課程標準再經修訂，學習者的認知特性與知識理解等心理學原則愈受重視，原「以學科中心」的課程編製理念，轉變為「以兒童為中心」，此種轉變亦可從教科書表徵與問題解決說明模式的改變，得到輔證。

二、對未來課程發展的展望與建議

課程改革首重回顧過去的發展軌跡、檢視現在的課程目標、內容與施行問題，方能規劃與展望未來的課程（林秀瑾、張英傑，2005）。從研閱文獻，可發現小學的幾何與測量課程目標，因社會發展所需及學術研究對社會文化價值的轉變，其主題名稱、教材內容與教學原則，以及教科書的表徵方式，皆呈現變動。雖然政治與社會變動為影響數學教育改革的重要因素，但是數學、心理與教育研究者所提供的實證研究成果與理論訊息，卻是政治與社會團體據以辯證討論的參考依據（McDonnell, 1995），也是研訂課程標準及課程編製的重要來源。學術社群的根據實證研究所提供的明確、精細的資料訊息，可以澄清政治與社會團體的認知。因此，數學、心理與教育學者需致力於有系統的研究，尤其針對以下三方面議題提供精確的研究成果與建議，將可助益政治與社會團體確實瞭解教育實況問題，發展有效改善的政策（McDonnell, 1995）：（一）課程標準與教材綱要內容變動的原因與依據，是否確實針對當時期的學校教育問題而酌量改善規劃；（二）新課程標準與課程方案之提出，是否皆經過課程研究與教學試驗之評估；（三）實施新課程方案之前，是否提供充分的師資培育與進修管道，讓課程實施者確實瞭解教育目標與教學原則等等問題。上述議題，皆值得研訂課程標準與課程發展的學者專家深思，為課程改革肩負落實之責任。

另一方面，我國的教育學制與課程理念，多受西方學者之思潮與文獻影響。時值無國界的地球村世代，學術社群的國際交流與比較，有助於檢視當前的課程政策與實施情形，進而推動社會的改造與進步，例如：透過教科書的國際比較，可發現當前九年一貫課程綱要，幾何教材的空間概念略少於西方國家的教材，而且測量主題為融入「數與量」與「幾何」，此種規畫對數學教育的影響為何、學生的學習成果與教師教學的意見反應為何，皆值得數學教育與課程與教學研究者進一步探討。另一方面，不同時期的課標與課程之實施，皆應追蹤評核其施行效果，以供後續修訂之參考，同時，裨益發展出具本國文化特質的課程研究模式，例如：第四期的板橋教師研習會課程研發模式，及對依64年課標編製的課程實施情況進行課程評核（陳進金，董群廉，2000），對我國未來

課程綱要之訂定與課程發展研究，皆具重要意義。

教師是課程的執行者，數學課程能否有效地轉化並施行於數學課室，讓學生習得知識與技能，教師的教學知能與課程轉化乃為關鍵要素（Brousseau, 1997; Reys, Reys, & Chávez, 2004）。例如：有經驗的專家教師可以瞭解學生測量概念的學習困難，進而因應課室教學對學生的形成性評量情形，於教學歷程中提供更多元的教學問題、操作教具與製作、解題討論機會，幫助學生澄清概念（黃幸美，2010）。但是，也有研究發現，教師傾向依循教科書所呈顯的單元目標、既定問題與考試取向而教學（Ball & Feiman-Nemser, 1988），認為複習定義與計算熟練是重要的目標（Freeman & Porter, 1989）。當教師偏重定義記憶與計算熟練的學習時，教科書的問題設計又潛含「公式記憶」「套用公式解題」之表徵模式時，更容易導向記憶與運算解題教學，輕忽概念理解地教學。因此，避免發生類似美國MSG課程失敗的經驗，一方面藉助有效的師資培育與在職訓練，發展以研究與教學實務結合為基礎課程（Clements, 2007），提升教師的數學教學與課程轉化知能，將裨益教師克服教學困難與發展兒童發展數學問題解決能力。另一方面，透過教育學術與實務社群建構多元對談之平台，讓數學教育學者、課程與教科書設計者與教學實務工作者溝通與對談，以使課程與教學之研究與實施更貼近教學實務情境，教學實務問題與成效亦需反饋課程研究。當課程研發與實施者的溝通互動、反思檢校機制運作良好時，課程與教學目標即能落實。

誌謝：

本研究感謝研究助理林婉婷與陳藝文在資料收集及整理上，所提供的協助。

參考文獻

- 王鴻年、夏起普、伊文柱、陳壽航、柯維俊等（1983）。國民小學新課程實施之調查研究。台北：國立教育資料館。
- 王石番（1991）。傳播內容分析法——理論與實證。台北：幼獅文化。
- 王鳳喈（1977）。中國教育史（臺十五版）。台北：正中。
- 王克蒂、譚克平（1997）。國小數學課程發展回顧。輯於國立台灣師範大學科學教育研究所主編，趙教授金祈榮退學術研討會論文集：我國科學教育的回顧與前瞻（451-472頁）。台北：臺灣師範大學科學教育研究所。
- 毛禮銳、邵鶴亭、瞿菊農（1989）。中國教育史。台北：五南。
- 毛炳楠（2006）。九年一貫課程數學領域正式綱要實施與教師之因應策略。南投文教，25，100-103。
- 司琦（1981）。中國國民教育發展史。台北：三民書局。
- 左台益（2002）。Van Hiele模式之國中幾何教材設計。中等教育，53，3，44-53。
- 世界書局（1932）。初級小學新主義算術課本，第八冊。62版。上海：世界出版社。
- 世界書局（1932）。初級小學新課程算術課本，第五冊。12版。上海：世界書局。
- 世界書局（1932）。初級小學新主義算術課本，第六冊。37版。上海：世界書局。
- 世界書局（1932）。初級小學新課程算術課本，第七冊。12版。上海：世界書局。
- 世界書局（1932）。初級小學新主義算術課本，第八冊。62版。上海：世界書局。
- 世界書局（1933）。初級小學世界第一種算術課本，第二冊。9版。上海：世界書局。
- 世界出版社（1933）。初級小學新課程算術課本，第五冊。3版。上海：世界出版社。
- 代欽、松公哲夫（2011）。數學教育史—文化視野下的中國數學教育。北京：北京師範大學出版社。
- 朱建正（1997）。造形活動在國小幾何教學中的地位。國民小學數學科新課程概說（中年級）~協助兒童認知發展的數學課程，（pp. 193-201）。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。
- 朱建正（1998）。立體圖形的教材處理。輯於台灣省國民學校教師研習會編印，國民小學數學科新課程概說【高年級】~協助兒童認知發展的數學課程，（pp. 184-193）。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。
- 朱建正（2000）。小學量與實測教材課程解讀——從八十二年課程標準到九年一貫課程綱要。翰林文教雜誌，16，6-19。
- 伍振鶯（1992）。教育哲學，四版。台北：師大書苑。
- 何宏儒（2007）。5年營業額25億！教科書市場大，康軒後來居上市佔率近4成。
http://enews.tp.edu.tw/paper_show.aspx?EDM=EPS20070427055620ZIM
- 李子建、黃顯華（1996）。課程：範式、取向和設計。台北：五南。
- 吳德邦、馬秀蘭（2001）。使用van Hiele 五階段學習模式開發九年一貫一貫制課程圖形與空間教材教法之研究。行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告。NSC90-2521-S-142-001。未出版：國立台中師範學院。
- 林秀瑾、張英傑（2005）。台灣地區三十年來國編版小學幾何教材內容範圍分析研究。國立台北教育大學學報，18(2)，65-92。
- 周祝瑛（2003）。誰捉弄了台灣教改。台北：心理。
- 康軒文教（1997）。國民小學數學，第三冊。初版。臺北縣：康軒文教事業。
- 康軒文教（1999）。國民小學數學，第七冊。初版。臺北縣：康軒文教事業。
- 康軒文教（2000）。國民小學數學，第八冊。初版。臺北縣：康軒文教事業。
- 康軒文教（2007）。數學教學別冊3下。台北縣：康軒文教事業。

- 康軒文教（2008）。國民小學數學，第四冊。2版。臺北縣：康軒文教事業。
- 康軒文教（2009）。國民小學數學，第三冊。3版。臺北縣：康軒文教事業。
- 康軒文教（2010）。國民小學數學，第八冊。2版。臺北縣：康軒文教事業。
- 康軒文教（2011）。國民小學數學6下教師手冊。2版。臺北縣：康軒文教事業。
- 許國禪 譯（1995）。小學數學教育-智性學習。原著R. R. Skemp，1989，Mathematics in the primary school. 香港：香港公開進修學院出版社。
- 科學月刊編輯部（1985）。數學課程的過去、現在與未來。科學月刊，16(2)，86-94。
- 南一書局（2010）。國民小學數學備課指引學篇，二上（第三冊）。台南：作者。
- 馬忠林、王鴻鈞、孫宏安、王玉閣（2001）。數學教育史。南寧：廣西教育。
- 徐斌艷主編（2001）。數學教育展望。上海：華東師範大學出版社。
- 徐偉民、張敬苓（2008）。台灣不同時期國小數學課程能力指標之比較分析。台灣數學教師電子期刊，14，27-47。
- 莊月嬌、張英傑（2006）。九年一貫課程小學幾何教材內容與份量之分析。國立台北教育大學學報，19(1)，33-66。
- 教育部（1929）。小學課程暫行標準：小學算術。教育雜誌，21(12)，141-143。
- 教育部（1932）。國民學校課程標準。台北：商務印書館。
- 教育部（1942）。國民學校課程標準。台北：商務印書館。
- 教育部（1948）。國民學校課程標準。台北：商務印書館。
- 教育部（1952）。國民學校課程標準。台北：商務印書館。
- 教育部（1962）。國民學校課程標準。台北：商務印書館。
- 教育部（1968）。國民學校課程標準。台北：商務印書館。
- 教育部（1975a）。國民小學課程標準。台北：正中書局。
- 教育部（1975b）。國民小學課程標準實施要點。台北：正中書局。
- 教育部（1993）。國民小學課程標準。台北：教育部。
- 教育部（2000）。國民中小學九年一貫課程暫時綱要。台北：教育部。
- 教育部（2003）。國民中小學九年一貫課程綱要。數學學習領域。台北：教育部。
- 教育部（2010）。國民中小學九年一貫課程綱要。數學學習領域。台北：教育部。
- 盛朗西編（1934）。小學課程沿革。上海：中華書局。
- 黃政傑（1991）。課程設計。台北：東華。
- 黃光雄、楊龍立（2004）。課程發展與設計：理念與實作。台北：師大書苑。
- 黃毅英、鄧國俊、霍秉坤、顏明仁、黃家樂（2007）。「以兒童為中心」數學教育再思：半世紀香港小學數學課程發展的啓示。台灣數學教師（電子）期刊，9，3-25。
- 黃幸美（2010）。美國當代小學幾何課程發展及其對台灣幾何教學之啓示。教育資料研究集刊，45，233-269。
- 張春興、林清山（1988）。教育心理學。18版。台北：東華。
- 張春興（1996）。教育心理學。台北：東華。
- 張平東（1989）。國小數學教材教法新論。台北：五南。
- 喻平 編著（2010）。數學教學心理學。北京：北京師範大學出版集團。
- 國立編譯館（1950）。初級小學算術，第六冊。臺中縣：臺灣省政府教育廳。
- 國立編譯館（1950）。初級小學算術，第四冊。臺中縣：臺灣省政府教育廳。
- 國立編譯館（1960）。初級小學算術，第一冊。修訂暫用本。臺中縣：臺灣省政府教育廳。
- 國立編譯館（1963）。國民學校算術初級，第四冊。修訂暫用本。臺中縣：臺灣省政府教育廳。
- 國立編譯館（1966）。國民學校算術課本，第三冊。修訂暫用本。臺中縣：臺灣省政府教育廳。
- 國立編譯館（1967）。國民學校算術課本，第六冊。修訂暫用本。臺中縣：臺灣省政府教育廳。

- 國立編譯館 (1969)。國民小學數學課本，第三冊。初版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1970)。國民小學數學課本，第四冊。初版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1971a)。初級小學算術，第六冊。初版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1971a)。初級小學算術，第六冊。初版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1972)。國民小學數學，第八冊。初版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1972)。國民小學數學，第八冊。初版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1989)。國民小學數學，第八冊。修訂初版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1992)。國民小學數學，第三冊。改編三版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1993a)。國民小學數學，第七冊。改編初版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1993b)。國民小學數學教學指引，第九冊。改編初版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1996)。國民小學數學教學指引試用本，第二冊。台北：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1997)。國民小學數學，第三冊。初版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1999)。國民小學數學，第七冊。初版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (2000)。國民小學數學，第八冊。初版。臺北市：國立編譯館。
- 國立編譯館 (2000)。國民小學數學，第九冊。初版。臺北市：國立編譯館。
- 陳梅生、吳德邦、李源順 (1987)。中美國民中小學數學課程比較。台北縣：台灣生國民學校教師研習會。
- 陳進金、董群廉 (2000)。陳梅生先生訪談錄。台北：國史館。
- 陳秉筠 (2008)。台灣小學數學課程標準的沿革：以數與計算為初探。中山大學教育所碩士論文。高雄市：未出版。
- 陳伯樟 (1999)。九年一貫課程的理念與理論分析。國立台北師範學院與中華民國教材研究發展學會「九年一貫課程研討會」論文集，10-18。
- 許國輝 譯 (1995)。小學數學教育——智性學習。原著R. R. Skempt, Mathematics in the primary school, 1989, London: Routledge.
- 單文經 (1996)。插圖的種類與設計原則。教學科技與媒體，28，30-37。
- 歐用生 (1991)。內容分析法。輯於黃光雄、簡茂發 主編，教育研究法，229-254。台北：師大書苑。
- 楊永耀 (1965)。算術教學研究。台南：三星堂。
- 蔣治邦 (1998)。對「數與計算」教材編制的反思。輯於臺灣省國民學校教師研習會編印，國民小學數學科新課程概說（高年級）～協助兒童認知發展的數學課程，(pp. 166-183)。台北縣：臺灣省國民學校教師研習會。
- 劉好 (1994)。國民小學數學科新課程中幾何教材的設計。輯於臺灣省國民學校教師研習會編印，國民小學數學科新課程概說（低年級），(pp. 98-108)。台北縣：臺灣省國民學校教師研習會。
- 劉好 (1997)。角的課程設計理念。輯於臺灣省國民學校教師研習會編印。國民小學數學科新課程概說（中年級）～協助兒童認知發展的數學課程，(pp. 202-214)。台北縣：臺灣省國民學校教師研習會。
- 劉好 (1998)。平面圖形教材的處理。輯於臺灣省國民學校教師研習會編印，國民小學數學科新課程概說（高年級）～協助兒童認知發展的數學課程，(pp. 194-213)。台北縣：臺灣省國民學校教師研習會。
- 臺灣省國民學校教師研習會 (1994)。國民小學數學科新課程概說（低年級）。台北縣：臺灣省國民學校教師研習會。
- 臺灣省國民學校教師研習會 (1997)。國民小學數學科新課程概說（中年級）～協助兒童認知發展的數學課程。台北縣：臺灣省國民學校教師研習會。
- 臺灣省國民學校教師研習會 (1998)。國民小學數學科新課程概說（高年級）～協助兒童認知發展的

- 數學課程。台北縣：臺灣省國民學校教師研習會。
- 鄭毓信、梁貫成（2002）。*認知科學、建構主義與數學教育：數學學習心理學的現代研究*，2版。上海：上海教育出版社。
- 譚寧君（1995）。面積概念探討。*國民教育*，35，1-21。
- 譚寧君（1997）。面積與體積的教材分析。輯於臺灣省國民學校教師研習會編印，*國民小學數學科新課程概說（中年級）～協助兒童認知發展的數學課程*，（pp.175-192）。台北縣：臺灣省國民學校教師研習會。
- 譚寧君（1998）。高年級面積教材分析。輯於臺灣省國民學校教師研習會編印，*國民小學數學科新課程概說（高年級）～協助兒童認知發展的數學課程*，（pp. 214-229）。台北縣：臺灣省國民學校教師研習會。
- 鍾靜（2003）。九年一貫數學領域課程設計。載於教育部主編，*國民中小學九年一貫課程數學學習領域基礎研習手冊*（pp. 89-103），臺北：教育部。
- 鍾靜（2004）。論九年一貫課程數學領域之暫行綱要。載於高新建編著，*課程綱要實施檢討與展望*（下冊，pp. 523-551）。台北：師大書苑。
- 鍾靜（2005）。論數學課程近十年之變革。*教育研究月刊*，133，124-134。
- Antonovskii, M. Y., Boltvanskii, V. G., Volovich, M. B., Krass, E. Y., & Levitas, G. G. (1990). *Soviet studies in mathematics education: Sets of mathematics teaching aids*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ball, D. L., & Feiman-Nemser, S. (1988). Using textbooks and teachers' guides: A dilemma for beginning teachers and teacher educators. *Curriculum Inquiry*, 18, 401-423.
- Battista, M. T. (2003). Understanding students' thinking about area and volume measurement. In D. H. Clements & G. Bright (2003). *Learning and teaching measurement. 2003 year book* (pp. 122-142). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Bell, A. W., Costello, J., & Küchemann, D. (1983). *A review of research in mathematical education. Part A. Research on learning and teaching*. Windsor, England: NFER-Nelson Publishing Company.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des Mathematiques 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds., & Trans.). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Carpenter, T. P., Coburn, T. G., Reys, R. E., & Wilson, J. W. (1975). Notes from national assessment: Perimeter and area. *The Arithmetic Teacher*, 22, 586-590.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.
- Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, D. H., & Bright, G. (2003). *Learning and teaching measurement. 2003 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Clements, D. H. (2007). Curriculum research: Toward a framework for "Research-based curricula". *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(1), 35-70.
- Cobb, P. (1991). Reconstructing elementary school mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 13(2), 3-22.
- Cobb, P. (1996). Where is the mind? A coordination of Sociocultural and cognitive constructivist perspectives.

- In C. T. Fosnot (Ed.), *Constructivism: Theory, perspectives, and practice* (pp. 34-52). Columbia University, NY: Teachers College Press.
- Dewey, J. (1956). *The child and the curriculum and the school and society*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Donoghue, E. F. (2003). Algebra and geometry textbooks in twentieth-century America. In Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (Eds.), *A history of school mathematics* (Vol. 1, pp.329-398). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fey, J. T., & Graeber, A. O. (2003). From the New Math to the agenda for action. In Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (Eds.), *A history of school mathematics* (Vol. 1, pp. 521-558). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fischbein, E. (1999). Intutions and schemata in mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 11-50.
- Fleverages, L. M., & Perry, M. (2001). How many do you see? The use of nonspoken representations in first-grade mathematics lesson. *Journal for Research in Mathematical Education*, 93(2), 330-345.
- Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do Textbooks Dictate the Content of Mathematics Instruction in Elementary Schools? *American Educational Research Journal*, 26, 403-421.
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413- 435.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, the Netherlands: Riedel.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, 3, 1-195.
- Garrett, A. W., & Davis, Jr, O. L. (2003). A time of uncertainty and change: School mathematics from World War II until the New Math. In Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (Eds.), *A history of school mathematics* (Vol. 1, pp. 493-519). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ginsburg, H. P., & Opper, S. (1988). *Piaget's theory of intellectual development*. (3rd Eds.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A., & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp.3-44). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Gravemeijer, K. P. E. (1990). Realistic geometry instruction. In K. P. E. Gravemeijer, M. van den Heuvel, & L. Streefland (Eds.), *Contexts free productions tests and geometry in realistic mathematics education*. Utrecht, the Netherlands: Researchgroup for Mathematical Educational Education and Educational Computer Centre, State University of Utrecht.
- Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, the Netherlands: CD β Press.
- Gravemeijer, K. P. E. (1998). From a different perspectives: Building on students' informal knowledge. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp.45-66). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Jacobs, H. H. (1989). *Interdisciplinary curriculum: Design and implementation*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.
- Huang, H.-M. E. & Witz, K. G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment. *Learning and Instruction*, 21 (1), 1-13.

- Inskeep, Jr., J. E. (1976). Teaching measurement to elementary school children. In D. Nelson (Ed.), *Measurement in school mathematics* (pp. 60-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Leahey, T. H., & Harris, R. J. (1997). *Learning and cognition*. (4th Ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice.
- Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (2003). *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179-192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Mayer, R. E. (2008). *Learning and Instruction*. (2nd Ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.
- McDonnell, L. M. (1995). Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 17, 305-322.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Assessment Governing Board (2009). *Mathematics Framework for the 2009 National Assessment of Educational Progress*. Washington, DC: National Assessment Governing Board. Retrieved from <http://nces.ed.gov/pubsearch/pubsinfo.asp?pubid=1999074>
- Nunes, T., Bryant, P., & Watson, A. (2009). *Key understanding in mathematics learning. Summary papers*. London, England: The Nuffield Foundation.
- Pegg, J., & Davey, G. (1989). Clarifying level descriptors for children's understanding of some basic 2-D geometric shapes. *Mathematics Educational Research Journal*, 1, 16-27.
- Pegg, J., & Davey, G. (1998). Interpreting students understanding in geometry: A synthesis of two models. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp.109-135). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). *The child's conceptions of space*. (F. J. Langdon & J. L. Lunzer, Trans.) New York: Norton.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. (E. A. Lunzer, Trans.) Oxon, Great Britain: Routledge.
- Pyke, C. L. (2003). The use of symbols, words, and diagrams as indicators of mathematical cognition: A causal model. *Journal of Research for Mathematics Education*, 34(5), 406-432.
- Reys, B. J., Reys, R. E., & Chávez, O. (2004). Why Mathematics Textbooks Matter. *Educational Leadership*, 61(5), 61-66.
- Van Hiele-Geldof, D. (1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. In D. Fuys, D., Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele. Prepared as part of the research project: An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. Brooklyn, NY: Brooklyn College. (ERIC Document Reproduction Service No. ED287697)
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
- Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play (Geometry and geometric thinking). *Teaching Children Mathematics*, 5, 310-317.

- Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Buys, K. (2008). *Young children learn measurement and geometry-A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. . Rotterdam: The Netherlands: Sense Publishers.
- Von Glasersfeld, E. (1996). Introduction: Aspects of Constructivism. . In C. T. Fosnot (Ed.), *Constructivism* (pp. 3-7). Columbia University, NY: Teachers College Press.
- Vygotsky, L. S. (Ed.). (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Wilson, P. S., & Osborne, A. O. (1988). Foundational ideas in teaching about measure. In T. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grade K-8. Research based methods* (2nd Ed.), (pp. 89-121). Newton, MA: Allyn & Bacon.
- Wilson, P. S., & Rowland, R. (1993). Teaching measurement. In R. J. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classroom early childhood mathematics*. (pp. 171-194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

附件一

表A 小學幾何教材內容分析類目及其概念說明

主類目	次類目	主要概念說明
A. 形體外觀之辨識	A1. 辨識平面圖形與立體形體 (線段、面與體)	辨認、分類、描述與命名平面與立體形體。
B. 平面圖形與立體形體之建置與轉換	B1. 建製平面圖形與立體形體	描繪、仿製、建造形體及其模型，或將形體經由分解、合成轉換成另一形體，了解與利用工具特性 (尺、圓規、三角板、量角器等) 測量或作圖。
	B2. 轉換平面與立體之表徵	辨識、轉換立體形體在平面上之表徵方式 (正/長方體的二維展開圖、視圖等) 並理解其關係。
C. 形體性質之探究並運用其性質解題	C1. 辨認、理解形體的組成要素及關係，並據以解決相關問題	理解形體組成要素間的關係，辨識形體或利用其關係解決相關問題。
	C2. 透過實測、實作，察覺形體性質並運用其性質解題	從解題過程與經驗，察覺形體性質，並利用其解決相關問題。
D. 形體特質之探究並運用推理	D1. 理解垂直、平行及對角線性質，並運用其解決問題	察覺形體或實際生活中的垂直、平行現象及對角線，理解其相關性質，並運用其性質解決問題。
	D2. 察覺、理解相似、全等性質，並運用其解決問題	察覺、理解形體的相似、全等性質，以相關幾何語言描述其關係，並運用其性質解決問題。
	D3. 理解對稱關係，並運用其性質解決問題	察覺形體或實際生活對稱現象，理解其相關性質，並運用其推測、辨認或解決有關問題。
E. 空間概念	E1. 位置	使用適當方位語詞或座標系統描述物體在空間中的位置及關係。
	E2. 方向	依空間中物體的位置關係，描述物體移動路徑及方向。
	E3. 距離	依物體在空間之位置，判別、計算距離。

表B 小學測量教材內容分析類目及其概念說明

主類目	次類目	主要概念說明
A. 測量之初步認識與直接比較	A1. 認識長度與直接比較	瞭解各種長度測量物件的屬性、單位、系統與測量過程。
	A2. 認識面積與直接比較	瞭解各種面積測量物件的屬性、單位、系統與測量過程。
	A3. 認識體積與直接比較	瞭解各種體積測量物件的屬性、單位、系統與測量過程。
B. 測量之間接比較實際操作	B1. 個別單位的合成、複製、描述與間接比較	當兩個量無法直接比較時，透過複製一個量，並使用此複製出來的量與另一個量進行直接比較，繼而使用遞移律的推論兩個量的比較結果。
C. 測量工具與普遍單位的認識、計算與估測	C1. 普遍單位的意義、比較與估測	利用等量的合成，複製的結果來描述一個量與進行比較。
	C2. 利用測量工具製作圖形	利用適當的測量工具結合幾何製圖概念，製作指定圖形。
D. 測量單位制度的認識與換算	D1. 長度單位的認識與換算	瞭解長度測量的單位，將長度裡描述小／大單位的量，轉化成爲大／小單位的量，亦簡稱爲單位量的轉換或化聚運算。
	D2. 面積單位的認識與換算	瞭解面積測量的單位，將面積裡描述小／大單位的量，轉化成爲大／小單位的量，亦簡稱爲單位量的轉換或化聚運算。
	D3. 體積單位的認識與換算	瞭解體積測量的單位，將體積裡描述小／大單位的量，轉化成爲大／小單位的量，亦簡稱爲單位量的轉換或化聚運算。
E. 公式化的概念及量與量、量與數之間的關係	E1. 公式化的概念	使用公式來描述一個特定幾何圖形或立方體的面積或體積的量。
	E2. 量與量、量與數之間的關係	不同測量的量之間的關係（例如：容量與體積、重量與體積及長度、面積、體積之間的關係），數與長度量、面積量和體積量之間的關係。

表C 不同時期教科書之幾何與測量單元文本表徵模式分析樣本

時期／單元	幾何（形狀、面）	測量（長度、面積）
第一期 民國元～38年 (1912～1949)	<ol style="list-style-type: none"> 1.新主義算術課本[依18年課程暫行標準發行，初小四下62版, B8, Ch2] (1932) 2.世界第一種算術課本[依21年課程標準發行，初小一下9版, B2, Ch25] (1933) 3.新課程算術課本[依21年課程標準發行，初小三上12版, B5, Ch20] (1932) 4.新課程算術課本[依21年課程標準發行，初小四上12版, B7, Ch19] (1932) 	<ol style="list-style-type: none"> 1.新主義算術課本[依18年課程暫行標準發行，初小三下37版, B6, Ch9] (1932) 2.臺灣版算術課本[依31年課程標準發行，初二下, B4, Ch2] (1950) 3.臺灣版算術課本[依31年課程標準發行，初三下, B6, Ch8] (1950)
第二期 民國39～56年 (1950～1967)	<ol style="list-style-type: none"> 1. **國民學校算術課本[依51年課程標準發行，二上修訂暫用, B3, Ch8] (1966) 2. **國民學校算術課本[依51年課程標準發行，三下修訂暫用, B6, Ch9] (1967) 	<ol style="list-style-type: none"> 1.國民小學算術課本[依37年課程標準發行，修訂暫用三上, B1, Ch46] (1960) 2.國民小學算術課本[依41年課程標準發行，修訂暫用四下, B4, Ch33] (1963) 3.國民小學算術課本[依41年課程標準發行，修訂暫用四下, B4, Ch34] (1963)
第三期 民國57～63年 (1968～1974)	<ol style="list-style-type: none"> 1.國民小學數學課本[依57年課程暫行標準發行，二上初版, B3, Ch4] (1969) 2.國民小學數學課本[依57年課程暫行標準發行，四下初版, B8, Ch12] (1972) 	<ol style="list-style-type: none"> 1.國民小學數學課本[依57年課程暫行標準發行，二下初版, B4, Ch6] (1970) 2.國民小學數學課本[依57年課程暫行標準發行，四下初版, B8, Ch14] (1972)
第四期 民國64～88年 (1975～1999)	<ol style="list-style-type: none"> 1.國民小學數學課本[依64年課程標準發行，二上改編三版, B3, Ch6] (1992) 2.國民小學數學課本[依64年課程標準發行，四下修訂初版, B8, Ch3] (1989) 3.國民小學數學課本[依82年課程標準發行，二上初版, B3, Ch8] (1997) 4.國民小學數學課本[依82年課程標準發行，四上初版, B7, Ch9] (1999) 5.康軒國小數學課本[依82年課程標準發行，二上初版, B3, Ch9] (1997) 6.康軒國小數學課本[依82年課程標準發行，四下初版, B8, Ch4] (2000) 	<ol style="list-style-type: none"> 1.國民小學數學課本[依64年課程標準發行，二上改編三版, B3, Ch2] (1992) 2.國民小學數學課本[依64年課程標準發行，四上改編初版, B7, Ch11] (1993) 3.國民小學數學課本[依82年課程標準發行，二上初版, B3, Ch4] (1997) 4.國民小學數學課本[依82年課程標準發行，四下初版, B8, Ch5] (2000) 5.*國民小學數學課本[依82年課程標準發行，五上初版, B9, Ch3] (2000) 6.康軒國小數學課本[依82年課程標準發行，二上初版, B3, Ch3] (1997) 7.康軒國小數學課本[依82年課程標準發行，四上初版, B7, Ch9] (1999)
第五期 民國89～100年 (2000～2011)	<ol style="list-style-type: none"> 1.康軒國小數學課本[依92年課程綱要發行，二下2版, B4, Ch9] (2008) 2.康軒國小數學課本[依92年課程綱要發行，四下2版, B8, Ch3] (2010) 	<ol style="list-style-type: none"> 1.康軒國小數學課本[依92年課程綱要發行，二上3版, B3, Ch3] (2009) 2.康軒國小數學課本[依92年課程綱要發行，四下2版, B8, Ch8] (2010)

註：*依82年課程標準發行的國編版教科書，測量與面積公式介紹的單元呈現在五年級上學期，故選取為分析樣本。

**因依民國41年課程標準，低年級算術科無課本，故以依民國51年課程標準發行之教科書樣本。

表D 不同時期課程標準與課綱之幾何教材綱要條目所包含之類目

主類目	次類目	時期				
		第一期	第二期	第三期	第四期	第五期
A.形體外觀之辨識	A1.辨識平面圖形與立體形體 (線段、面與體)					
B.平面圖形與立體形體之建置與轉換	B1.建製平面圖形與立體形體	-				
	B2.轉換平面與立體之表徵	-	-	-		
C.形體性質之探究並運用其性質解題	C1.辨認、理解形體的組成要素及關係，並據以解決相關問題	-	-	-		
	C2.透過實測、實作，察覺形體性質並運用其性質解題	-	-	-		
D.形體特質之探究並運用推理	D1.理解垂直、平行及對角線性質，並運用其解決問題	-				
	D2.察覺、理解相似、全等性質，並運用其解決問題	-	-	-		
	D3.理解對稱關係，並運用其性質解決問題	-	-	-		
E.空間概念	E1.位置	-				
	E2.方向	-				
	E3.距離	-		-	-	

表E 小學測量教材內容分析類目及其概念說明

主類目	次類目	時期				
		第一期	第二期	第三期	第四期	第五期
A. 測量之初步認識與直接比較	A1. 認識長度與直接比較					
	A2. 認識面積與直接比較					
	A3. 認識體積與直接比較					
B. 測量之間接比較實際操作	B1. 個別單位的合成、複製、描述與間接比較	-				
C. 測量工具與普遍單位的認識、實測、計算與估測	C1. 普遍單位的意義、比較與估測					
	C2. 利用測量工具實測與製作圖形	-	-			
D. 測量單位制度的認識與換算	D1. 長度單位的認識與換算					
	D2. 面積單位的認識與換算					
	D3. 體積單位的認識與換算					
E. 公式化的概念及量與量、量與數之間的關係	E1. 公式化的概念					
	E2. 量與量、量與數之間的關係					