多元選修課程心得分享

數學科　黃兆禾老師

在大學裡，有許多課是屬於“選修類”的課程，學生可以依照自己的能力、興趣等因素選擇自己想要修習的課程，而現行的高中制度雖然也有選修課，可是礙於某些難以克服的原因，在高中裡要將許多選修課以類似大學的方式操作是很不容易的。所以，相對於大學生的多樣選擇，大多數高中生的選修課幾乎都是原班上課，學生只是毫無選擇地修習該門課程，這對“選修”這兩個字的意義似乎是打了不少折扣。

壹、摘要

在我要接任 103 學年的數學科召集人之前的某次課程相關會裡，赫然發現即將升高二的自然組(三類)學生有一門選修課(內容則是國文或數學這兩科擇一)，便趕緊跟幾位老師討論要開怎樣的課程給學生。雖然學生們只有兩類課可以選擇，但這卻是高中開始落實“選修課”的一大起步。本篇文章主要以教學分享為主，前面部分是簡述關於高二選修課的操作，其餘部則是本學年“高一多元選修(趣味數學實作)”部分課程介紹及教學心得。

貳、研究(教學)動機

關於高二自然組(三類)的課程，在不影響升學的學習狀態下，教師群決定教材以歷屆學測試題為主，想透過學生分組討論，以及上台解說，瞭解學生對於數學學習是否有助益。至於高一多元選修課程，教材則是一些相對有趣味感的小主題，想讓學生對數學能多一點興趣並增加其思考能力。

參、研究(教學)目的

關於高二自然組(三類)的課程，目的則是讓學生提早接觸歷屆學測試題，並由分組討論讓學習成就相對高的學生協助學習成就相對低的學生，甚至培養學生陳述自己想法的能力。至於高一多元選修課程，則是為了因應 108 課綱裡面的選修課程，讓教師群提早暖身，循序漸進地研發適合學生的課程，並逐年修正調整，最後發展出一套穩定的課程內容。

肆、研究(教學)過程

關於分享高一選修課某一堂的內容，是學生報告“齊肯多夫定理”，該定理大致敘述如下：「何正整數都可以表示成若干個不連續的費波那契數之和，
例如：15 = 2 + 13，17 = 1 + 3 + 13，30 = 1 + 8 + 21 等」。然而，此定理有個延伸的遊戲，問題如下：

有 N 顆石頭，甲、乙兩人輪流照以下規則取石頭：
(1)每次至少取 1 顆或 1 顆以上的石頭。
(2)先取的甲在第一輪時，不能將所有的石頭取完(至少留下一顆石頭)。
(3)每次取的石頭數目不得超過對方剛取走的石頭數目的兩倍。

依照上述規則可以取到最後一顆石頭者獲勝。試問：不同 N 值，先取或後取者何者具有優勢？該優勢是否是必勝策略，該策略為何？

課堂上，當學生在報告此遊戲之策略時，可能因能報告的時間不夠多或者準備不夠充分，僅將結論告訴全班同學，但多數學生仍然不是很清楚此遊戲的策略。因此，身為授課老師的我，理所當然要開始引導學生思考。首先，從規則(3)的要求，可以很快地思考出甲只能取少於$\left\lceil \frac{N}{3} \right\rceil$個石頭，否則對手乙可以直接拿完剩下所有的石頭(獲勝)。相同的道理，在整個遊戲過程中，若剩下 n 個石頭，下一個人(不管是否已處於劣勢)也是只能取少於$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$個石頭。

(註：$\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$是指大於或等於$\frac{n}{3}$的最小整數)

接下來，在上述前提下，引導學生思考不同 N 值時之情形：

$N = 2$：甲只能取 1 球，乙必勝。(後手贏)

$N = 3$：甲取 1 球或 2 球後，乙必勝。(後手贏)

$N = 4$：甲取 1 球後剩 3 球，乙取 1 球或 2 球後，甲必勝。(先手贏)

$N = 5$：甲取 1 球後剩 4 球，乙取 1 球剩 3 球，甲取 1 球或 2 球後，乙必勝。
(後手贏)。

$N = 6$：甲取 1 球後剩 5 球，乙取 1 球後剩 4 球，甲取 1 球剩 3 球，乙取 1 球或 2 球後，甲必勝。(先手贏)。

$N = 7$：甲若取 1 球，剩 6 球，由 $N = 6$ 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以乙只要取 1 球，最後必可獲勝。(後手贏)

甲若取 2 球，剩 5 球，由 $N = 5$ 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以乙取 1 球……，最後必由甲獲勝。(先手贏)

$N = 8$：甲若取 1 球後剩 7 球，由 $N = 7$ 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以乙只要取 2 球，最後乙必可獲勝。(後手贏)

甲若取 2 球，剩 6 球，由 $N = 6$ 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以乙只要取 1 球，最後乙必可獲勝。(後手贏)

$N = 9$：甲若取 1 球後剩 8 球，由 $N = 8$ 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以乙取 1 球或 2 球，最後必由甲獲勝。(先手贏)

甲若取 2 球，剩 7 球，由 $N = 7$ 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以乙只要取 2 球，最後乙必可獲勝。(後手贏)

$N = 10$：甲若取 1 球後剩 9 球，由 $N = 9$ 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以乙取 1 球……，最後必可獲勝。(後手贏)

甲若取 2 球，剩 8 球，由 $N = 8$ 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以無論乙取 1 球或 2 球，最後甲必可獲勝。(先手贏)

甲若取 3 球，剩 7 球，由 $N = 7$ 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以乙只要取 2 球，最後必可獲勝。(後手贏)

$N = 11$：甲若取 1 球後剩 10 球，由 $N = 10$ 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以乙取 2 球……，最後必可獲勝。(後手贏)

甲若取 2 球，剩 9 球，由 $N = 9$ 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以乙取 1 球……，最後必可獲勝。(後手贏)

甲若取 3 球，剩 8 球，由 $N = 8$ 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以無論乙取 1 球或 2 球，最後甲必可獲勝。(先手贏)

N = 12：甲若取 1 球後剩 11 球，由 N = 11 的情形知道，此時改將乙視為先手，只要乙取 3 球之後必可獲勝，可是因為甲只取 1 球，因此乙無法取 3 球，只能取 1 或 2 球；若取 1 球，剩下 10 球，狀態又回到 N = 10 的時候，甲再取 2 球……，最後必可獲勝，若乙取 2 球，剩下 9 球，狀態又回到 N = 9 的時候，甲再取 1 球……，最後必可獲勝。(先手贏)

甲若取 2 球，剩 10 球，由 N = 10 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以乙取 2 球……，最後必可獲勝。(後手贏)

甲若取 3 球，剩 9 球，由 N = 9 的情形知道，此時改將乙視為先手，所以乙取 1 球……，最後必可獲勝。(後手贏)

N = 13：無論甲取 1 球、2 球、3 球或 4 球，分別剩下 12 球、11 球、10 球或 9 球，輪到乙取球時，改將乙視為先手，從上面 N = 12、11、10、9 的情形來看，乙都有對應的取球方法可以獲勝，因此 N = 13 的情況是後手 (乙)贏。

引導學生分析至此，接著便讓學生觀察先手(甲)與後手(乙)的勝負情形，學生當然不難發現當 N = 2、3、5、8、13 時，先手的甲似乎絕對劣勢，甚至可說是必敗；而其他時候，先手的甲有機會獲勝，更嚴謹地說，甲都有必勝策略！

然而，學生已經學過費波那契數列，對於 2、3、5、8、13 這幾個數都不陌生，此時可以問學生：「那當 N = 21 (下一個費波那契數) 時，是否先手也是居於劣勢，後手有必勝策略呢？」。要解決這問題，有兩個方向：第一是繼續思考 N = 14、15、……直到 N = 21。第二個想法則是利用已知的勝負情形來思考，亦即後手只要想辦法取完若干個石頭後，剩下 13 個石頭，接下來就保證可以獲勝，至於方法為何，可以讓學生嘗試先用樹狀圖來研究，看看先、後手如何可以取完後剩下 13 個。以下〈表 1〉至〈表 6〉是分析先手的甲分別取 1 至 6 個石頭後的所有情形，括弧內數字為取完石頭後之剩餘數量，“$\boxed{}$”則代表後手乙最終可獲勝。

<table>
<tr><th colspan="8">〈表 1〉N = 21 時，甲先取 1 個石頭之最後勝負情形</th></tr>
<tr><th>甲</th><th>乙</th><th>甲</th><th>乙</th><th>甲</th><th>乙</th><th>甲</th><th>乙</th></tr>
<tr><td rowspan="26">1 (20)</td><td rowspan="15">1 (19)</td><td rowspan="9">1 (18)</td><td rowspan="5">1 (17)</td><td rowspan="3">1 (16)</td><td rowspan="2">1 (15)</td><td>1 (14)</td><td>$\boxed{1\ (13)}$</td></tr>
<tr><td>2 (13)</td><td></td></tr>
<tr><td>2 (14)</td><td>1 (13)</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2 (15)</td><td>1 (14)</td><td>1 (13)</td><td></td></tr>
<tr><td>$\boxed{2\ (13)}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2 (16)</td><td rowspan="2">1 (15)</td><td>1 (14)</td><td>1 (13)</td><td></td></tr>
<tr><td>$\boxed{2\ (13)}$</td><td>,</td><td></td></tr>
<tr><td>2 (14)</td><td>$\boxed{1\ (13)}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3 (13)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">2 (17)</td><td rowspan="3">1 (16)</td><td rowspan="2">1 (15)</td><td>1 (14)</td><td>1 (13)</td><td></td></tr>
<tr><td>2 (13)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2 (14)</td><td>$\boxed{1\ (13)}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2 (15)</td><td>1 (14)</td><td>$\boxed{1\ (13)}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2 (13)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3 (14)</td><td>1 (13)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="11">2 (18)</td><td rowspan="5">1 (17)</td><td rowspan="3">1 (16)</td><td rowspan="2">1 (15)</td><td>1 (14)</td><td>1 (13)</td><td></td></tr>
<tr><td>$\boxed{2\ (13)}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2 (14)</td><td>$\boxed{1\ (13)}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2 (15)</td><td>1 (14)</td><td>$\boxed{1\ (13)}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2 (13)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2 (16)</td><td rowspan="2">1 (15)</td><td>1 (14)</td><td>$\boxed{1\ (13)}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2 (13)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2 (14)</td><td>1 (13)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\boxed{3\ (13)}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">3 (15)</td><td>1 (14)</td><td>1 (13)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\boxed{2\ (13)}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

〈表 2〉$N = 21$ 時，甲先取 2 個石頭之最後勝負情形

甲	乙	甲	乙	甲	乙	甲
2 (19)	1 (18)	1 (17)	1 (16)	1 (15)	1 (14)	1 (13)
					$\boxed{2\ (13)}$	
				2 (14)	$\boxed{1\ (13)}$	
			2 (15)	1 (14)	$\boxed{1\ (13)}$	
				2 (13)		
		2 (16)	1 (15)	1 (14)	$\boxed{1\ (13)}$	
				2 (13)		
			2 (14)	1 (13)		
			3 $\boxed{(13)}$			
	2 (17)	1 (16)	1 (15)	1 (14)	$\boxed{1\ (13)}$	
				2 (13)		
			2 (14)	1 (13)		
		2 (15)	1 (14)	1 (13)		
			$\boxed{2\ (13)}$			
		3 (14)	$\boxed{1\ (13)}$			
	3 (16)	1 (15)	1 (14)	1 (13)		
			$\boxed{2\ (13)}$			
		2 (14)	$\boxed{1\ (13)}$			
		3 (13)				

〈表 3〉$N = 21$ 時，甲先取 3 個石頭之最後勝負情形

甲	乙	甲	乙	甲	乙
3 (18)	1 (17)	1 (16)	1 (15)	1 (14)	$\boxed{1\ (13)}$
				2 (13)	
			2 (14)	1 (13)	
		2 (15)	1 (14)	1 (13)	
			$\boxed{2\ (13)}$		
	2 (16)	1 (15)	1 (14)	1 (13)	
			$\boxed{2\ (13)}$		
		2 (14)	$\boxed{1\ (13)}$		
		3 (13)			
	3 (15)	1 (14)	$\boxed{1\ (13)}$		
		2 (13)			
	4 (14)	1 (13)			
	$\boxed{5\ (13)}$				

<table>
<tr><td colspan="5">〈表 4〉$N = 21$ 時，甲先取 4 個石頭之最後勝負情形</td></tr>
<tr><td>甲</td><td>乙</td><td>甲</td><td>乙</td><td>甲</td></tr>
<tr><td rowspan="7">4 (17)</td><td rowspan="3">1 (16)</td><td rowspan="2">1 (15)</td><td>1 (14)</td><td>1 (13)</td></tr>
<tr><td>$\boxed{2\ (13)}$</td><td></td></tr>
<tr><td>2 (14)</td><td>$\boxed{1\ (13)}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2 (15)</td><td>1 (14)</td><td>$\boxed{1\ (13)}$</td><td></td></tr>
<tr><td>2 (13)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3 (14)</td><td>1 (13)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\boxed{4\ (13)}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">〈表 5〉$N = 21$ 時，甲先取 5 個石頭之最後勝負情形</td></tr>
<tr><td>甲</td><td>乙</td><td>甲</td><td>乙</td></tr>
<tr><td rowspan="4">5 (16)</td><td rowspan="2">1 (15)</td><td>1 (14)</td><td>1 (13)</td></tr>
<tr><td>2 (13)</td><td></td></tr>
<tr><td>2 (14)</td><td>1 (13)</td><td></td></tr>
<tr><td>3 (13)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">備註：事實上，甲先取 5 個(剩 16 個)後，乙直接再取 8 個 (剩下 8 個)能較快獲勝。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">〈表 6〉$N = 21$ 時，甲先取 6 個石頭之最後勝負情形</td></tr>
<tr><td>甲</td><td>乙</td><td>甲</td></tr>
<tr><td rowspan="3">6 (15)</td><td rowspan="2">1 (14)</td><td>1 (13)</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>$\boxed{2\ (13)}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">備註：事實上，甲先取 6 個(剩 15 個)後，乙直接再取 7 個 (剩下 8 個)能較快獲勝。</td></tr>
</table>

從上面的表格中我們可以發現當 $N = 21$ 時，先手的甲無論取幾個石頭，後手的乙總是有辦法可以將剩下的石頭取到剩下 13 個(甚至剩下 8 個)，當然再接下去乙仍保有絕對的優勢可以獲勝。不過，實際在玩這個遊戲的時候，總不可能把上述這些表拿出來使用，加上只分析至 $N = 21$ 的情況，那麼 N 為其他費波那契數的時候又該如何呢？所以，勢必要有一套實用又好記的策略方能讓有優勢的玩家最終能獲勝。

伍、研究(教學)結果

關於此遊戲的策略，乃是利用"齊肯多夫定理"，內容大致如下：

(1)當 N 是費波納契數時：

後手有必勝的策略，其策略就是等先手拿完後，取完剩下的石頭(能夠的話)，若不能夠一次取完的話，將石頭數分解成若干個不相鄰的費波納契數之和，然後拿其中"最小的費波納契數"的石頭數量，接著重覆這樣的策略，後手必可拿到最後一顆石頭獲勝。

舉例來說，當 $N = 13$ 時，若先手第一次取 5 顆石頭(剩 8 顆石頭)，後手可以一次取完 8 顆石頭獲勝；但若先手第一次取 2 顆石頭，則剩 11 顆石頭，而 $11 = 8 + 3$，後手只需取“最小的費波納契數 3”顆石頭，剩 8 顆石頭，接著輪甲，…，最終後手必會取走最後一顆石頭獲勝。

(2)當 N 不是費波納契數時：

先手可以取走適量的石頭，讓剩下的石頭數量為最靠近 N 的費波納契數，再換對手(後手)取石頭，而此時將原本的後手重新看成“先手”，原本的先手則變成後手，根據(1)的策略，此時的後手(即原本的先手)會有必勝的策略。例如，當 $N = 30$ 時，先手只需取 9 顆石頭，剩下 21 顆石頭，接著觀察對手取石頭的數量，再利用(1)的策略最終就會贏。

陸、討論

關於此遊戲的策略，對於高中一年級的學生們而言，要了解應該沒有問題，也可以在課堂上，兩人一組實際玩幾次(不同的石頭數量)，增加學生的印象。不過，這個策略(結論)是如何得到的呢？學生可能無法在短時間的 1、2 堂課程中研究出來，因此，若是能將(每週)單次上課時間延長，並做成持續 2~3 週的課程，教師方能逐步引導學生找出箇中原理。甚至，也可以嘗試將遊戲的規則改變，例如每次取的石頭數目不得超過對方剛取走的石頭數目的“三倍”等等，都可以增加學生解決問題的思考能力。

關於 108 課綱的設計，學生有許多選修學分應該不會是像現行的上課情形一樣，全班上相同的課程內容，學校勢必會有一些因應的措施，讓“選修”逐漸落實，但這也相對的造成教師們在課程設計上的負擔，因此盡早成立教師社群來一同思考、設計適合學生的課程內容方能減低教師單打獨鬥的壓力。

柒、參考資料

一、維基百科 https://zh.wikipedia.org/wiki/齊肯多夫定理

二、非想非非想數學網

http://pisa.math.ntnu.edu.tw/attachments/article/1068/19%20saymathsgame.pdf

三、國立交通大學微積分教學小組

http://calculus.nctu.edu.tw/upload/calculus_web/maple/Site/carnival/game/ 104.htm