

外積在高中數學的簡易應用

數學科 王文君老師

在高中數學的教學與討論中，外積的運算一直是被忽略與模糊化的。但是因為外積的定義與計算方式，對於某些數學問題的解法有相當快速而且便利的幫助，因此一直以來，高中數學老師多或少都會在課堂上提到一些有關外積計算方式與簡單的應用，但是對於外積這個名詞定義與介紹可能就不一定見於教學之中了。

但是在高中的物理學中，對於內積與外積的運用卻是非常普遍且頻繁的；在物理學外積可視為一種操作。就如同許多物理學的操作也可化為矩陣來運算一樣，外積也是解決物理問題時一個重要且方便的利器。再加上物理學對於三角積分與微分的需求，常會感嘆高中數學與物理的教學時程與內容不能互相配合而困擾不已。

直到近幾年才陸陸續續有各版本的教科書把”外積”這個名詞真正帶進數學課本的教材中，也使得高中老師們可以更放心地介紹外積的定義與簡易的應用方式。”外積”終於在高中數學中正式初試啼聲。在此，僅就外積在高中數學中簡易的計算及運用方式做一個粗簡的整理與介紹。

(一)外積的定義：

令空間中兩個相異的非零向量， $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ ， $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ ，

定義兩向量之外積 $\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

其幾何意義為與向量 $\vec{u}$ ， $\vec{v}$ 均互相垂直之向量。

方向：取右手定則，姆指的方向

再者， $\vec{v} \times \vec{u} = \left(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_1 & a_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \right) = - \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$

由於外積具有方向性，且 $\vec{u} \times \vec{v}$ 與 $\vec{v} \times \vec{u}$ 之大小相同，但方向卻相反。這個性質在高中數學的基礎應用上較少被強調，但在物理學上卻是非常重要的差別。

(二)簡易應用

1. 空間中平面法向量的求法：

(1) 令 $\vec{u} \times \vec{v} = (x, y, z)$

$$\text{因為} \begin{cases} (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \\ (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x, y, z) \cdot (a_1, b_1, c_1) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (a_2, b_2, c_2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{則} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z \\ a_2x + b_2y = -c_2z \end{cases}$$

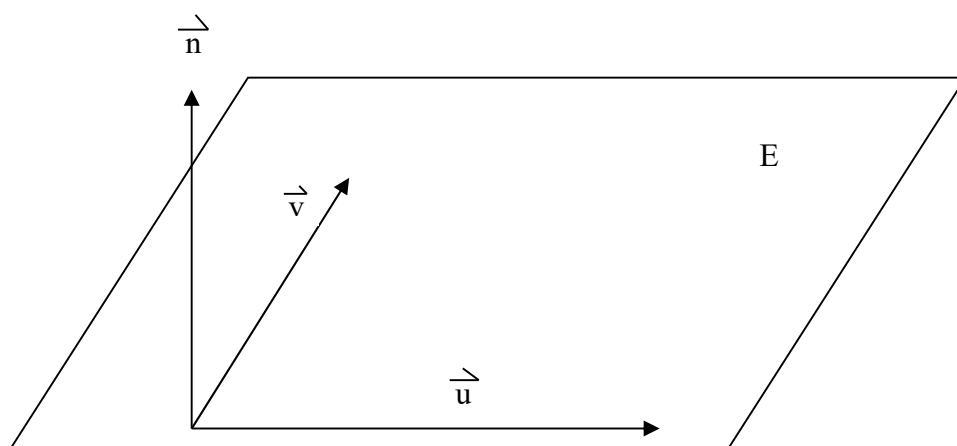
$$\text{由克拉瑪公式可知} \begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z = \frac{\begin{vmatrix} b_2 & c_1 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z \\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z = \frac{\begin{vmatrix} c_2 & a_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z \end{cases}$$

$$\text{計算可得 } x: y: z = \frac{\begin{vmatrix} b_2 & c_1 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z : \frac{\begin{vmatrix} c_2 & a_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} z : z$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad .$$

(2) 設空間中一平面 E 上兩相異且不平行之非零向量 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ ，如圖：

平面法向量為 $\vec{n}$



由於 $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ 且 $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$,

故 $\vec{u} \times \vec{v}$ 與平面 E 的法向量 $\vec{n}$ 互相平行,

可適當提出倍數或提出公因數, 甚至可乘以負數使成反向,

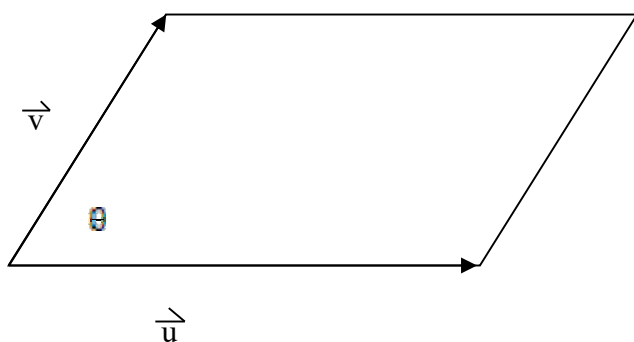
找到適當 k 值, 使得法向量 $\vec{n} = k(\vec{u} \times \vec{v})$ 即為所求。

例如: 若經計算得 $\vec{u} \times \vec{v} = (-18, 12, 6) = -6(3, -2, -1)$,

則可取法向量 $\vec{n} = (3, -2, -1)$

2. 設空間中兩相異且不平行之非零向量 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$, 欲求 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 所張平行四邊形之面積:

(1) 如圖:



令 $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$

令向量 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 之夾角為 θ

則 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 所張平行四邊形之面積

$$= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta$$

$$= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right)^2}$$

$$= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sqrt{\frac{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2}}$$

$$= \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

$$= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(a_1^2 b_2^2 + a_1^2 c_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 c_2^2 + c_1^2 a_2^2 + c_1^2 b_2^2) - 2(a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1 a_2 c_1 c_2 + b_1 b_2 c_1 c_2)} \\
&= \sqrt{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} \\
&= \left| \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| \\
&= |\vec{u} \times \vec{v}|
\end{aligned}$$

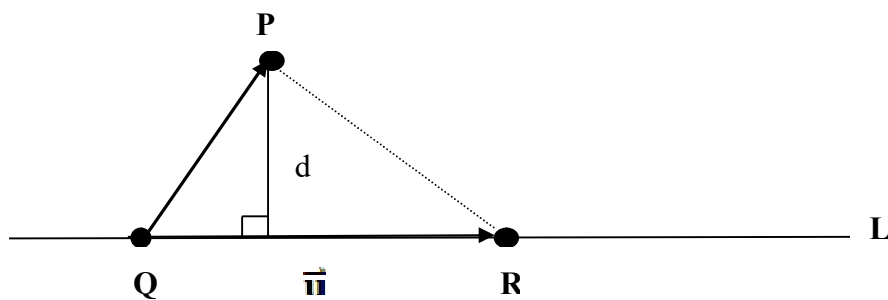
故知 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 所張平行四邊形之面積恰為 $|\vec{u} \times \vec{v}|$

P.S. 三角形面積為 $\frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$

3. 求空間中直線外一點到此直線之最短距離：

令空間中一直線 L ， $\vec{u}$ 為其一組方向向量，

直線外一點 P ，直線上一點 Q ，如圖：



令 P 到此直線之最短距離為 d ，

在直線上取一點 R ，使得 $\overrightarrow{QR} = \vec{u}$ ，

則 $\triangle PQR$ 面積 $= \frac{1}{2} \text{底} \times \text{高} = \frac{1}{2} \overline{QR} \cdot d$

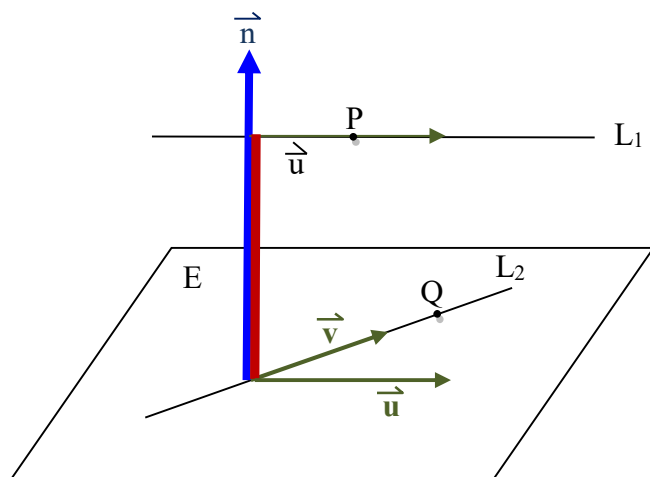
又 $\triangle PQR$ 面積 $= \frac{1}{2} |\vec{u} \times \overrightarrow{QP}|$

則可推得 $d = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{QP}|}{\overline{QR}} = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{QP}|}{|\vec{u}|}$

4.求兩歪斜線之公垂線段長：

解法(一)

設 L_1 ， L_2 為空間中一組歪斜線。如下圖：



其中 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 分別為 L_1 ， L_2 之一組方向向量，

點 P、Q 分別在 L_1 ， L_2 上；

令平面 E 為包含直線 L_2 且與直線 L_1 平行之平面。

為了方便起見，將 $\vec{u}$ 平移至平面 E 上，

利用 $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ 且 $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$ 之特質，

再利用平面之點向式找出包含 L_2 且以 $\vec{u} \times \vec{v}$ 為一組法向量之平面 E 之方程式，

且已知 L_1 平行於平面 E，

因此 L_1 ， L_2 之公垂線段長就等於 L_1 與平面 E 之距離，

也等於點 P 到平面 E 之距離。

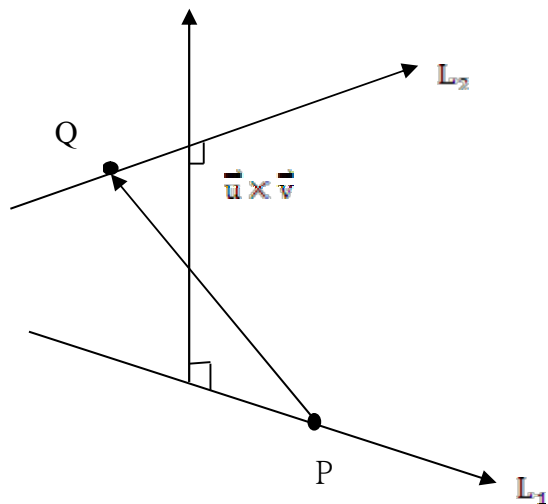
即 $d(L_1, L_2) = d(L_1, E) = d(P, E)$

再利用點到平面之距離公式，即可求得此二歪斜線之距離。

解法(二)

設 L_1, L_2 為空間中一組歪斜線。在 L_1 上取一點 P，在 L_2 上取一點 Q，

$\vec{u}, \vec{v}$ 分別為 L_1, L_2 之一組方向向量，如圖：



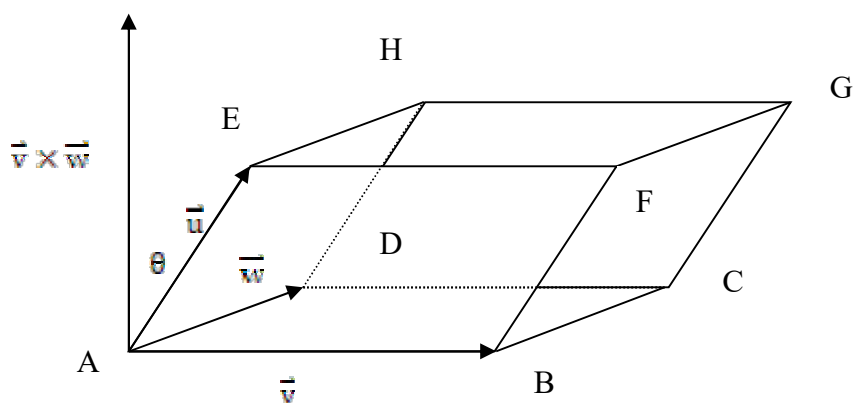
$\because (\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ ，且 $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$ ， $\therefore (\vec{u} \times \vec{v}) \perp L_1$ ，且 $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp L_2$ ，

則此二歪斜線之最短距離 = $\overline{PQ}$ 在 $\vec{u} \times \vec{v}$ 上之投影長 = $\frac{|\overline{PQ} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$

P.S.空間中兩歪斜線之公垂線段長的求法有很多種，這裡只是提出另外一種思考模式供大家參考，與其他方法並行不悖。

4. 三向量 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 所張之平行六面體體積：

令空間中相異且互不平行之三向量 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ，如圖：



則 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 所張之平行六面體體積

=底面積 $\times$ 高

=平行四邊形 ABCD 面積 $\times$ 高

= (平行四邊形 ABCD 面積) $\times$ (向量 $\vec{u}$ 在 $\vec{v} \times \vec{w}$ 上之投影長)

令 $\vec{u}$ 與 $\vec{v} \times \vec{w}$ 之夾角為 θ ,

另一方面 $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\cos \theta| = |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\vec{u}| \cdot |\cos \theta|$

= (平行四邊形 ABCD 面積) $\times$ (向量 $\vec{u}$ 在 $\vec{v} \times \vec{w}$ 上之投影長)

= 平行四邊形 ABCD 面積 $\times$ 高

= $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{w}$ 所張之平行六面體體積

可知 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{w}$ 所張之平行六面體體積 = $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

討論：

I、若 $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0 \Leftrightarrow$ 則 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{w}$ 共平面

II、若 $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \neq 0 \Leftrightarrow$ 則 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{w}$ 不共平面，且可形成空間中一組基底

其實，若令 $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ ， $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ ， $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$

則 $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (a_1, b_1, c_1) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right)$

= $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

= $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

= $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

因此 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{w}$ 所張之平行六面體體積

= $\left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|$

這也是我們在課堂上常介紹給同學在空間中求體積的公式。

以上為外積在高中數學上較常使用的運算思維，當然還有很多外積的運用會在未來的大學課程中出現，譬如三重積或四重積，相信學習者很快就可以發現外積更富變化的應用與好處，可以更積極深入地學習，與各學科(尤其是物理學)融會貫通，展現其科學的風貌。