

# 探討圖形與符號表徵形式對高中生比例心理 運算的影響

郭文金<sup>1</sup>、劉嘉茹<sup>2</sup>、柳賢<sup>3</sup>

<sup>1</sup>國立內埔農工教師

<sup>2</sup>國立高雄師範大學理學院院長

<sup>3</sup>國立高雄師範大學數學系教授

## 摘 要

本研究運用整體反應時間技術探討表徵形式對高二學生比例問題的心理運算的影響。研究對象為 16 位高中二年級學生；研究工具為比例運算測驗題本，分為數字的符號表徵及圖形表徵兩種，兩種表徵形式題目呈現方式都是由易到難，題目內容包含柳丁汁比例問題的八個層次和三個階段，每個層次的問題都有 4 題，共 32 題；此題本的各项問題依據 Noelting 研究中的柳丁汁與水之比例關係編製而成。本研究的研究方法是透過學生的答題反應時間與答對率進行資料的收集與分析。研究結果顯示：（1）高二學生的整體反應時間在 IIA 層次兩種表徵形式中是最快的，且認為最簡單；（2）表徵形式是使高二學生的比例具體操作階段成為比例心理運算的關鍵階段，而具體操作階段中的 IIB 層次是心理運算由直接提取轉換為基於運算規則的重要層次。

關鍵詞：心理運算、表徵、答對率、整體反應時間

## 壹、前言

在日常生活的經驗中，比例運算是經常被使用的一種數學運算能力，舉凡溶液的配製、價格的估算與地圖判讀等等都需要一定程度的比例運算能力。因此，比例推理的發展，長期以來被認為是數學學習的中心（Norton, 2005），也被視為是一般運算思考的基本能力（Hoffer & Hoffer, 1992; Vass, Schiller & Nappi, 2000）。因為比例運算應用在生活情境的問題時，需要有推論、預測和批判等能力，所以不僅對中小學學生而言是屬於困難的作業任務，對許多大學生來說也是困難的作業之一（劉秋木，1992；Lamon, 1993; Norton, 2005）。在數學的學習中，表徵是數學本質的一環，也是將數學概念形於外的具體化的呈現形式，當學習者能夠確實掌握表徵所表現的涵意之後，便可進一步成為運思的材料，進行解題的活動；此外，比例式數字的關係也是影響比例問題解題的相關因素，如比例式中的數字是否為整數倍、數字出現的順序是否有規律性，以及數字的大小都會影響學生比例問題解題的表現（魏宗明、劉祥通，2003）。

過去在比例概念學習的研究上，大部分都使用紙筆測驗、晤談等表現於外的測驗方式進行（Ifenthaler, 2010），但個體內在的心智處理並無法藉由表現於外的測驗方式得知，且王建雅與陳學志（2009）也指出可從腦科學的證據去檢證與過去教育相關之理論，如果腦科學證據與教育研究獲得一致性結果，教育者也能確信這些發現的合理性，若結果不一致，則提醒教育者做深入的研究。在認知科學中使用個體執行作業任務時所需的整體反應時間（Total response time; 簡稱 TRT）以及作業表現的答對率來測量心智，這也是目前被廣泛接受並能提供科學證據的方法（Ashcraft, 2002/2004）。整體反應時間是指從刺激呈現到個體做出回應之間的時間間隔，從訊息處理理論的觀點而言，可以解釋為自感官接收刺激訊號，經辨認、過濾、分析和組織動作到完成動作等處理過程所需的時間（馬啟偉、張力為，1996）。

以往，國內外的學者在比例的問題上都做了很多的相關研究，在這些研究中的受試者大部分都是國中或是國小的學生，以高中生為研究對象的比較少，且從 Piaget 的認知發展論來看，高中生應該已經進入形式運思

期，其在比例問題的解題成功率應該也會增加，整體反應時間和答對率也會趨向於穩定，雖然高中生應該處於形式運思期，其在比例問題的答對率和整體反應時間是否符應 Piaget 的認知發展層次而趨於穩定，目前鮮少有針對高中生進行研究。因此，本研究主要目的在運用整體反應時間技術探討圖形表徵和數字的符號表徵兩種形式對高中生在比例心理運算時的影響。

## 貳、文獻探討

### 一、比例問題表徵形式對解題的影響

Bruner (1966) 從運思的角度將人類的表徵系統分為三層：「動作表徵」、「圖形表徵」和「符號表徵」，此三種表徵也代表著個體認知發展的三個階段。陳李綢 (1985) 指出此三種表徵系統是平行並存，且彼此互補而非取代，三個表徵系統之間具有階層統整性，也就是較高階段的發展特性會含攝或綜合較低階段的發展特性在內。表徵是運思材料，且問題表徵的形式是解題者與問題的第一道接觸，所以問題表徵形式自然會直接影響下一個運思活動的方式，進而影響整個解題方式 (蔣治邦, 1994)，因此，許多研究就不同題目表徵形式對學生解題的影響進行探討，有些研究 (Sowder & Threadgill-Sower, 1982; Moyer et al., 1983) 發現圖形題的表徵形式最有助於解題的表現，所以學生在圖形題的解題表現顯著優於文字題的表現，另外也有研究 (林美惠, 1997; 陳美芳, 1995) 發現高數學能力的學生在文字題和圖形題的表現沒有顯著的差異，而中數學能力的學生在文字題的解題表現顯著優於圖形題，但低數學能力的學生則是圖形題的解題表現顯著優於文字題。

在比例問題的研究中，Noelting (1980a, 1980b) 認為題目難易度的差異來自於比例問題的比值型態，並利用柳丁汁混合的問題來探究學生的比例概念。他以 319 位年齡介於 6 歲到 16 歲的學生答對题目的比率定義該題的難度。據此，Noelting 除了將比例問題分層八個難易層次外，也將此八個層次分成三個階段 (表 1)：第一階段為直觀期，受試者只能比較兩個比例項，如 (2, 5) 和 (5, 2)，只比較第一項；第二時期為具體操作階段，受試者能用有序數對的共變來解決整數比的問題，如 (1, 2) 和

(2, 4)，前項的比為 2，所以後項的比也要為 2（整數倍）；第三個時期為形式操作階段，受試者能夠比較任意比值的比例問題，如 (4, 2) 和 (7, 3)，前項的比非整數倍，後項的比亦為非整數倍（非整數倍）。

表 1 Noelting 比例問題的 8 個層次與 3 個階段

| 層次/階段  |            | 題型              | 題目條件                                                           | 難易度       |
|--------|------------|-----------------|----------------------------------------------------------------|-----------|
| IA     | 直觀前期       | (2,5)v.s.(5,2)  | $\{a < c, b \geq d\}$                                          | 1         |
| IB     | 直觀中期       | (3,2) vs. (3,1) | $\{a = c, b > d\}$                                             | 0.96~0.97 |
| IC     | 直觀晚期       | (4,4) vs. (5,8) | $\{a < c, b < d, a = b, c < d\}$                               | 0.91~0.93 |
| II A   | 具體操作<br>前期 | (2,2) vs. (3,3) | $\{\frac{m}{n}a = c, \frac{m}{n}b = d, a = b, c = d\}$         | 0.74~0.79 |
| II B   | 具體操作<br>後期 | (1,2) vs. (2,4) | $\{\frac{m}{n}a = c, \frac{m}{n}b = d, na \neq b, nc \neq d\}$ | 0.49~0.58 |
| III A1 | 形式操作<br>前期 | (1,2) vs. (2,3) | $\{ma = c, mb \neq d, na = b, nc \neq d\}$                     | 0.18~0.44 |
| III A2 | 形式操作<br>中期 | (4,2) vs. (7,3) | $\{\frac{m}{n}a \neq c, \frac{m}{n}b = d, a = nb, c \neq nd\}$ |           |
| III B  | 形式操作<br>晚期 | (5,2) vs. (7,3) | $\{ma \neq c, mb \neq d, na \neq b, nb \neq d\}$               | 0.16↓     |

※形式規則(a, b)、(c, d)(a和c為柳丁汁的杯數，b和d表示白開水的杯數)

修改自林福來（1984）

比例運算應用在生活情境的問題時，需要有推論、預測和批判等能力，所以不僅對中小學學生而言是屬於困難的作業任務，對許多大學生來說也是困難的作業之一（劉秋木，1992；Lamon, 1993; Norton, 2005）。因為個體必須理解比例問題中的情境、找到比例推理的概念（單位比率、相等比值）以及連結比例推理的相關概念（百分率和分數），同時藉由個體間解題策略的討論強化比例推理的能力，進而發展出比例符號表徵方式

(Chapin & Anderson, 2003)，但陳建州(2007)認為如果個體尚未具備完整概念時，會以畫圖的方式來處理，不僅有助於理解問題，更能夠具體呈現比例項間的比例關係。在比例推理的相關研究中，Noelting (1980a, 1980b) 曾利用數字符號的數對方式探討 6 歲至 16 歲的學生比例推理的能力，Liu 與 Shen (2011) 也以 Noelting 的柳丁汁測驗為研究工具，設計成以符號表徵和圖形表徵的方式，探討不同表徵形式對小學生比例推理過程的影響，結果顯示不同的表徵型態會影響學生比例推理的解題策略。因此，本研究也以 Noelting 的柳丁汁測驗為研究工具，參考 Liu 與 Shen (2011) 的表徵設計模式，探討不同表徵形式對高中學生比例心理運算的影響。

## 二、訊息處理模式與心理運算

訊息處理模式 (information processing model) 主要在探討人類如何藉著感官接受訊息、產生注意、識別、記憶、理解及思考等心理的活動，Gagne (1985) 將訊息處理模式整理為感覺登錄、特徵的選擇注意、短期和長期記憶以及反應等五個階段，個體從環境中接收的訊息，經由「選擇性知覺」(selective perception) 的歷程，才能被轉存在「短期記憶」，短期記憶的容量有限，所以個體可將短期記憶區中訊息加以編碼並與舊有的相關知識相結合，儲存於「長期記憶」區。提取 (retrieval) 指的乃是把儲存在長期記憶中的訊息轉換送到當前可以運作狀態中的過程。有兩種方式：其一是藉助某種回憶線索，檢索提取出相關的資料，送回短期記憶，然後進行分析、整合等工作，隨後送至「反應器」(effector)；另一則發生在自動化的反應或十分熟練的學習，有關的訊息自長期記憶檢索出後，直接送至反應器。然而，訊息處理模式是個體認知的過程，認知心理學家在 1950 年代中期以後，運用訊息處理過程所需的反應時間，來研究個體的訊息處理階段或連續處理的歷程，在所有認知科學所使用的技術中，反應時間 (reaction time, 簡稱 RT) 是心理實驗中最早使用且應用廣泛的反應變項之一 (朱滢, 2002)。

心理運算是指在沒有外在工具 (如紙、筆、計算機、電腦等) 的協助之下，個體進行的算術運算活動。在心理運算的研究中發現心理運算有兩種加工方式：(1) 直接從長期記憶區提取 (2) 基於一定的運算規則 (

Groen & Parkman, 1972; Campbell, Parker, & Doetzel, 2004; Núñez-Pefia, Cortifias, & Escera, 2006)。Campbell (2004) 認為心理運算的加工主要包括三個部分：編碼（表徵）、運算（或提取）和反應（給出答案）（Campbell, 2004）。編碼階段就是個體在接收到外在的刺激後，將刺激轉化為適當的內在表徵，接著是算術知識的直接提取或是基於算術運算規則的加工過程，心理運算加工過程完成後給出答案並做出回應。由於日常生活的經驗或是在不斷的學習運用的過程中，對於一些簡單的算術問題已經可以和問題的答案結合在一起（如  $3+4$ ， $3\times 5$  等），當個體看到簡單的算術問題時會自動提取答案，不需要任何形式的運算規則，但是對於需要較複雜的問題（如  $456-98$ ， $38\times 67$  等），如果沒有記住現成的答案，則需要基於相關的算術運算規則進行運算才能獲得答案。

Campbell 與 Fugelsang (2001) 的研究發現，呈現形式會影響心理運算的加工效率，也會影響策略的選擇，這也說明對編碼（表徵）階段的影響。所以，人類藉由感官接受外在世界的刺激，並對接受到的刺激進行處理及回應，人類心理運算的加工過程也是一種訊息處理，從訊息處理模式可以看到在心理運算的加工過程中編碼就是個體接受刺激的感覺登錄及特徵的選擇注意，然後提取短期記憶或是長期記憶中的資料進行運算，最後做出反應。

### 三、應用整體反應時間探討心理運算的必要性及優勢

反應時間測量技術則是心理學實驗研究中被普遍應用的一種方法，在無法直接觀察的心理過程中，反應時間的測量提供了一種有效的測量方式（張學民、舒華，2004；Der & Deary, 2006）。反應時間是指從刺激呈現到個體做出表現於外的應答的時間間隔，也就是從接受刺激到做出反應之間的潛伏期。依據 Schmidt (1991) 的訊息處理步驟，從刺激輸入到動作完成之間經歷三階段所花的時間，稱之為整體反應時間，TRT 可細分為反應時間與動作時間（Movement Time, MT），RT 是指從刺激輸入到反應動作開始之間的時間間隔，並不包含動作本身，強調的是在反應動作開始之前的一段時間，MT 則是指從動作開始到動作完成之時間間隔。所以，反應時間可以定義為個體接受刺激開始到做出反應的時間間隔，包括心理潛伏期和反應執行，其中的心理潛伏期又包含刺激識別階段、選擇反應

階段、反映組織階段（張學民、舒華，2004）。雖然有些研究中使用「反應時間」代表這三個階段，為避免混淆，所以本研究則以「整體反應時間」稱之。

心理運算的編碼加工的編碼複雜性模型（*encoding complex model*）認為編碼階段和運算階段是相互作用、相互影響的，較符合大腦複雜、高效率的加工模式，同時也得到了研究證明（劉昌、王翠豔，2008）。然而，不同表徵形式的輸入對於個體後續的運算加工是否會產生影響？Paivio（1986）的二元編碼理論認為在人類的長期記憶中，有這兩種不同的編碼系統，當接收到來自外在的語文和非語文表徵時，會分別到各自的系統進行運作，且這兩個系統運作是各自獨立的，但是會利用參考性連結（*referential connection*）互相連接（林玉雯，2011）。另外，Noel 與 Seron（1997）分別用阿拉伯數字和羅馬數字呈現乘法問題，探討不同輸入形式對心理運算過程的影響，並設計了數字比較任務，以估計阿拉伯數字和言語數字的編碼時間，實驗紀錄同一個任務在兩種輸入條件下的反應時間，計算出兩者的差異，結果發現在乘法任務中，言語反應時間是阿拉伯數字反應時間的 2.5 倍，兩者相差了 335ms，研究認為不同的數字輸入方式，除了會影響心理運算的編碼階段之外，也會影響隨之的心理運算。在許多研究指出人們對於不同的心理運算問題則會選擇採用不同的加工策略（Campbell, Parker, & Doetzel, 2004; Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu, & Tsivkin, 1999; Kalaman & LeFevre, 2007; Núñez-Peña, Cortiñas, & Escera, 2006），心理運算活動存在兩種加工策略：直接提取和基於運算規則（Robert & Campbell, 2008; Verguts & Fias, 2005），直接提取是針對簡單的心理運算問題，直接從長期記憶區提取答案的過程，這種心理運算實質上是一種記憶的提取，而基於運算規則是面對複雜的心理運算問題時，需要經過一定的基於運算規則的過程才能得到答案。

綜上所論，當一個外在訊息進入個體後，如果個體已達符號表徵系統，則訊息會經過表現、推論和轉化的歷程，從長期記憶中提取原有的基模，以解決問題。且 Noel 與 Seron（1997）的研究指出不同輸入的形式會影響個體後續的心理運算加工過程，Campbell 與 Fugelsang（2001）的研究發現，呈現形式會影響心理運算的加工效率，也會影響策略的選擇，最後會表現在反應時間和答對率上，所以不同的表徵形式是否會影響到個體

在解比例問題時的心理運算？一般都以答對率做為檢視數學問題難易程度的判準，但內在的心智處理的差異不容易從表現於外的答對率看出來，答對率的表現是最後反應的結果，但個體在接受到刺激後，是直接提取或是基於運算規則進行運算的心理運算，則無法從答對率找到答案。此外，依照 Piaget 的認知發展理論，年齡的成熟度是重要的因素，研究也支持隨著年齡增大，比例問題的解題成功率也會增高（何意中，1988），因此從 Piaget 的認知發展論來看，小學生屬於具體運思期，高中生應已進入形式運思期，所以高中生比小學生更加成熟，且也應已習慣運用形式思考，其在比例問題的解題成功率應該和整體反應時間也應會趨向於穩定。

本研究 and Liu 與 Shen（2011）的研究相異之處在 Liu 與 Shen 的研究對象是小學生，且又是以眼動資料進行分析，無法看到受試者的心理運算；且從 Piaget 的認知發展理論而言，高中生與小學生分屬不同的認知發展期，在心理運算以及形式思考上，高中生應該較為穩定，此外，大多數探討心理運算的研究，大都以反應時間的快慢來看加工過程。因此，本研究預期高二學生接受到不同表徵形式的比例問題後，會進入圖形表徵系統或符號表徵系統，經過表現、推論和轉化的歷程，提取長期記憶中的基模，轉化成對自己有意義的訊息，以進行心理運算。

## 參、研究方法

### 一、研究對象

本研究以整體反應時間探討問題表徵形式對高中二年級學生比例心理運算的影響。研究過程分成預試階段和正式施測兩個階段。在預試階段，選取屏東縣某國立高職綜合高中部學術學程二年級學生 96 人為研究樣本，分別施測圖形表徵和數字的符號表徵等二種不同形式的紙本測驗，以建立比例心理運算題目的信度。在正式施測階段，從同校二年級學生中選取 16 位自願參加認知實驗的學生。所有受試者均為右利手，矯正後的視力均正常，也都沒有神經生理疾病史紀錄。

### 二、研究工具

為建立本研究測驗題目的信度，乃依據 Noelting 的比例推理題目先

編製紙本測驗題。由於本研究想瞭解學生對圖形表徵和數字的符號表徵這兩種形式測驗题目的心理運算的差異，故將 Noelting 所編定比例問題，從數字符號轉換成圖形方式呈現（如圖 1），而編定出分別以數字符號和圖形呈現的二份比例心理運算的測驗題目。分別稱為「比例圖形表徵測驗（簡稱圖形測驗）」和「比例數字的符號表徵測驗（簡稱數字符號測驗）」。每份測驗各有 32 題。本研究依照 Noelting 的研究此分層方式，將兩種表徵的比例問題依序由易到難呈現，各表徵形式的题目中每一個層次的題目均有 4 題，共 32 題，且此兩種表徵中 32 題的相對應的題目都是相同的。比例圖形表徵測驗和比例數字的符號表徵測驗的内部一致性信度分別為 .83 及 .84。

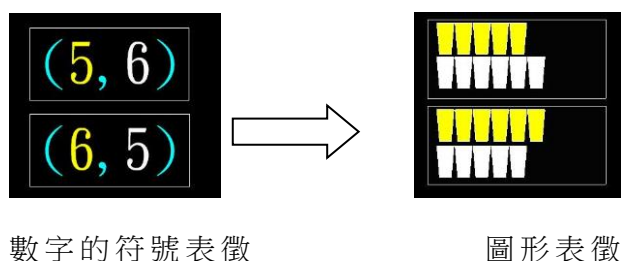


圖 1 符號表徵轉換為圖形表徵

### 三、研究設計

為了解表徵形式對高中學生比例心理運算影響的差異情形，本研究將依照下列三個階段分別進行資料收集：

第一階段：由研究者向受試者說明實驗的流程，並向受試者做口述的指導語。

第二階段：研究者為了解受試者是否清楚回答题目的按鍵操作，所以此階段讓受試者作練習題的操作。

第三階段：本階段為實驗階段，兩種表徵的题目皆為 32 題。

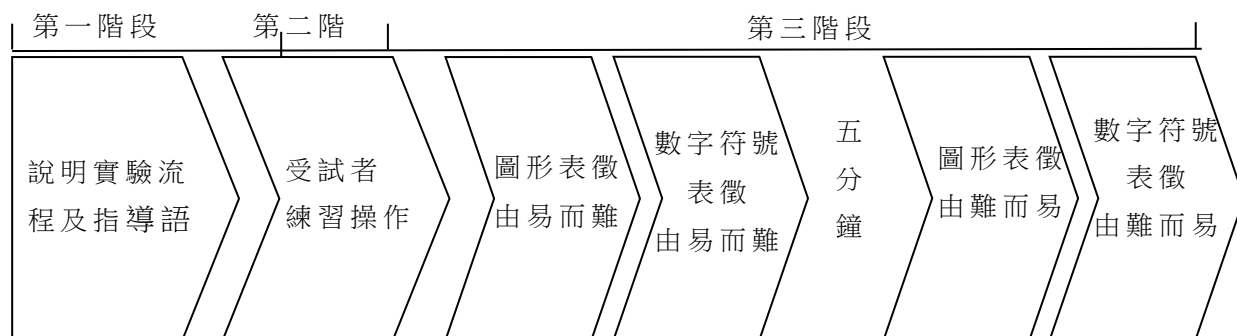


圖2 實驗設計流程圖

#### 四、研究儀器

本研究使用腦波儀來收集行為數據。腦波儀的裝置包含 Stim 電腦和受試者觀看的螢幕，Stim 電腦是發送刺激的電腦，本研究採用的 Stim 軟體為 Neuroscan Stim 3.3，所有的實驗刺激都經由 Stim 電腦發送到受試者的螢幕（螢幕為 17 吋，螢幕與受試者距離 47 公分，視角.7 度）。腦波儀可收集受試者的答題情形以及整體反應時間等行為數據，答題情形以 0 或 1 來表示，0 代表答錯或沒有回應，1 代表答對，整體反應時間則是以毫秒（ms）為記錄的最小時間單位。

#### 五、實驗步驟

本研究以腦波儀呈現圖形表徵和數字的符號表徵的比例問題，以蒐集每位受試者的整體反應時間和答對率的行為數據資料。在正式實驗開始之前，研究者先向受試者說明實驗的流程，並舉例說明兩種表徵題目作答的方式，在讓受試者開始練習之前，研究者用口述的方式說明指導語，並告訴受試者在每個題目呈現後，在自己認為對的情況下，以最快速的時間作答，口述指導語如下：「螢幕上將呈現同時呈現上下兩瓶柳丁汁，分別為用數字和圖形兩種方式呈現，如果以數字呈現，每瓶前面黃色的數字代表柳丁原汁的杯數，後面的數字代表白開水的數字，每瓶的柳丁汁都是由這些柳丁原汁和白開水混合而成，如果以圖形呈現，黃色的杯子代表柳丁原汁，白色的杯子代表白開水，每瓶的柳丁汁都是由這些柳丁原汁和白開水會合而成，當題目出現時，請你以最快的速度判斷哪一瓶柳丁汁的濃度較濃並按下按鈕，在實驗的過程中，也請你盡量保持頭部固定不動。」，接

著讓受試者都練習兩種表徵的題目各 9 題（上方瓶較濃的 3 題，下方瓶較濃的 3 題，兩瓶一樣濃的 3 題），練習題都未出現在正式施測的題目中，研究者藉以觀察受試者的答題表現是否合乎實驗的要求，如果未符合要求，再重複前述的步驟，直到受試者了解實驗的要求後才進入正式實驗。

研究設計採對抗平衡設計，正式實驗時受試者先接受由易到難的圖形表徵題目，題目出現的順序由 Noelting 比例題目中最簡單的 IA 層次開始，依序到最困難的 IIIB 層次，結束後休息 3 分鐘，接著進行由易到難的數字的符號表徵題目，呈現的順序同圖形表徵。此部分結束之後受試者休息 5 分鐘，接著進行由難到易的圖形表徵題目，呈現的順序由最困難的 IIIB 層次開始，依序到最簡單的 IA 層次，結束休息 3 分鐘，緊接著接受由難而易的數字的符號表徵題目，呈現的順序同圖形表徵。此外，實驗過程要求受試者比較判斷上方瓶和下方瓶的濃度，看看哪一瓶的濃度較濃，如果上方瓶比下方瓶濃，就按「1」號按鍵，如果下方瓶比上方瓶濃，就按「2」號按鍵，如果兩瓶濃度一樣，就按「4」號按鍵，比較判斷完後盡快回應並按下按鍵，每題回應的時間以 10 秒為上限，受試者如在 10 秒以內做出回應按下按鈕，則會直接進入下一題，若超過 10 秒沒有回應，Stim 會直接進入下一題，待受試者完成兩部分的所有題目後，即實驗結束。Sime 的設計如圖 3 和圖 4 所示：

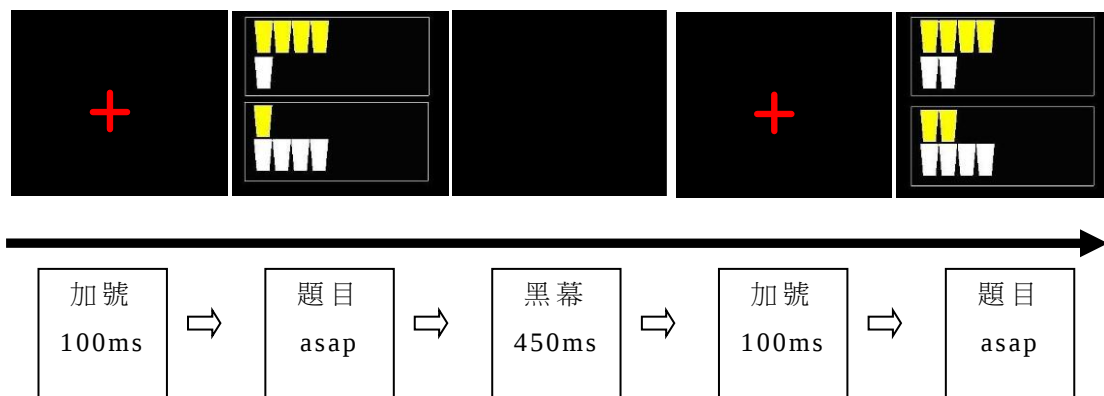


圖 3 圖形表徵測驗的 Stim 設計

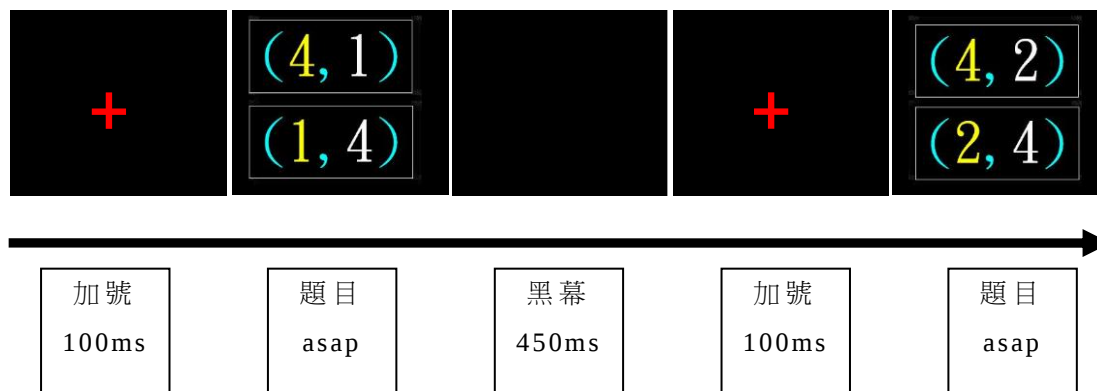


圖4 數字的符號表徵測驗的Stim設計

## 六、資料蒐集與分析

在資料分析部分，本研究將收集的答對和答錯的 trials 及其整體反應時間等行為數據，利用 SPSS 軟體進行統計檢定，首先進行圖形表徵由易到難呈現方式和由難到易呈現方式的 t-test 和數字的符號表徵由易到難呈現方式和由難到易呈現方式的 t-test，以檢定對抗平衡，接著進行由表徵形式和層次在答對率和整體反應時間的二因子重複量數變異數分析，最後再進行由表徵形式和階段在答對率和整體反應時間的二因子重複量數變異數分析。若二因子重複量數變異分析的交互作用顯著時，則進一步做單純主要效果分析。當不符合 Mauchly 球形檢定時，則進行校正，若  $\epsilon$  值  $< .75$ ，用 Greenhouse-Geisser 法校正，若  $\epsilon$  值  $> .75$ ，則用 Huynh-Feldt 法校正。

## 肆、結果與討論

依據研究目的，行為數據將分為兩部份進行分析：第一部分比較高二學生對不同層次比例問題的心理運算是否有差異；第二部分比較高二生在不同表徵形式比例問題的心理運算是否有差異。

### 一、高二學生在圖形表徵形式和數字的符號表徵形式的比例運算層次中，都是 IIA 層次的反應時間最短，且答對率最高

心理運算的問題大小效應顯示，隨著運算數字複雜度的增加，受試者

的整體反應時間會延長且答對率會下降，在 **Noelting** 比例的測驗中，根據題目的難易度，由易到難分成 **IA**、**IB**、**IC**、**IIA**、**IIB**、**IIIA1**、**IIIA2**、**IIIB** 等八個層次，本研究也依照 **Noelting** 比例測驗的順序，探討高二學生對不同層次的心理運算的差異情形。

表 2 是高二學生的圖形表徵形式和數字的符號表徵形式在比例問題的八個層次的整體反應時間與答對率的描述性統計摘要表。

表 2 八層次的整體反應時間和答對率的描述性統計摘要表

| 層次    | 人數 | 圖形表徵           |              | 數字的符號表徵        |              |
|-------|----|----------------|--------------|----------------|--------------|
|       |    | 整體反應時間         | 答對率          | 整體反應時間         | 答對率          |
|       |    | 平均數<br>(標準差)   | 平均數<br>(標準差) | 平均數<br>(標準差)   | 平均數<br>(標準差) |
| IA    | 16 | 1649.5(698.5)  | 0.98(0.07)   | 1803.1(541.1)  | 0.98(0.05)   |
| IB    | 16 | 1887.5(654.4)  | 0.95(0.10)   | 2232.2(851.5)  | 0.91(0.14)   |
| IC    | 16 | 2260.2(1193.4) | 0.71(0.09)   | 2128.3(881.4)  | 0.97(0.07)   |
| IIA   | 16 | 1160.2(760.5)  | 0.97(0.07)   | 923.4(312.7)   | 1.00(0.00)   |
| IIB   | 16 | 3676.9(1396.5) | 0.61(0.25)   | 2780.5(1455.4) | 0.84(0.23)   |
| IIIA1 | 16 | 4113.6(1549.7) | 0.66(0.27)   | 3593.2(1011.5) | 0.77(0.27)   |
| IIIA2 | 16 | 3470.6(1467.0) | 0.55(0.35)   | 3550.3(876.1)  | 0.65(0.34)   |
| IIIB  | 16 | 4255.0(1139.1) | 0.77(0.13)   | 4148.0(1354.3) | 0.76(0.23)   |

接著就兩個表徵形式和八個比例層次的整體反應時間，利用重複量數的 ANOVA 進行分析，分析結果如表 3。

表 3 八層次的整體反應時間的二因子變異數分析摘要表(表徵形式×比例層次)

| 變易來源      | SS        | Df   | MS       | F        | $\eta^2$ |
|-----------|-----------|------|----------|----------|----------|
| 表徵形式      | 1728095   | 1    | 1728095  | 1.75     | 0.10     |
| 比例層次      | 284100000 | 3.56 | 79910000 | 57.17*** | 0.79     |
| 表徵形式×比例層次 | 8736179   | 3.93 | 2225328  | 2.85*    | 0.16     |

\*  $p < .05$  ; \*\*\* $p < .001$

在表 3 中，以整體反應時間為依變項，進行表徵形式×比例層次二因子重複量數變異數分析，結果顯示表徵形式和比例層次的交互作用達到統計考驗顯著的差異水準（ $F=2.85$ ， $p < .05$ ），所以需進行單純主要效果分析，分析結果如表 4：

表 4 八層次的整體反應時間的二因子單純主要效果變異數分析摘要表

| 單純主要效果內容    | SS        | df   | MS       | F        | $\eta^2$ |
|-------------|-----------|------|----------|----------|----------|
| 表徵形式因子      |           |      |          |          |          |
| 在 IA 條件下    | 188575    | 1    | 188575   | 1.45     | 0.09     |
| 在 IB 條件下    | 950907    | 1    | 950907   | 8.98**   | 0.37     |
| 在 IC 條件下    | 139359    | 1    | 139359   | 0.33     | 0.02     |
| 在 IIA 條件下   | 448523    | 1    | 448523   | 3.76     | 0.20     |
| 在 IIB 條件下   | 6428017   | 1    | 6428017  | 7.52*    | 0.33     |
| 在 IIIA1 條件下 | 2166451   | 1    | 2166451  | 2.16     | 0.13     |
| 在 IIIA2 條件下 | 50811     | 1    | 50811    | 0.05     | 0.003    |
| 在 IIIB 條件下  | 91632     | 1    | 91632    | 0.25     | 0.02     |
| 比例層次因子      |           |      |          |          |          |
| 在圖形表徵條件下    | 163200000 | 3.90 | 41790000 | 32.98*** | 0.69     |
| 在數字的符號表徵條件下 | 129700000 | 3.28 | 39600000 | 42.04*** | 0.74     |

\*  $p < .05$  ; \*\*  $p < .01$  ; \*\*\* $p < .001$

由表 4 可以發現，表徵形式對比例層次的整體反應時間的影響，在 IB 和 IIB 的條件下達顯著差異。在 IB 層次中的圖形表徵的整體反應時間

快於數字的符號表徵（ $M$  圖形=1887.5ms， $M$  數字=2232.2ms， $F=8.98$ ， $p<.01$ ， $\eta^2=0.37$ ），達顯著差異水準；另外，在 IIB 層次中的圖形表徵的整體反應時間慢於數字的符號表徵（ $M$  圖形=3676.9ms， $M$  數字=2780.5ms， $F=7.52$ ， $p<.05$ ， $\eta^2=0.33$ ）且達顯著差異水準；Cohen（1988）指出  $\eta^2$  值在 0.06 以下屬微弱關係，大於 0.06 小於 0.14 屬中度關係，在 0.14 以上屬強度關係，在 IIA 層次中，雖然圖形表徵和數字的符號表徵的整體反應時間未達顯著差異水準，但  $\eta^2=0.20$ ，表示表徵形式可以解釋整體反應時間 20%的變異量，兩者之間的關係屬於強度關係。而比例層次對表徵形式的整體反應時間的影響，在兩種表徵形式下都達顯著差異。在圖形表徵條件下，從平均數可以看出，IIA 的整體反應時間最短（1160.2ms），IIIB 的最長（4255.0ms），經事後考驗發現在圖形表徵下的八個層次的整體反應時間由快到慢為：IIA>IA>IB $\div$ IC>IIIA2 $\div$ IIIB $\div$ IIIA1 $\div$ IIIB，其中 IIA 顯著快於其他層次，IA 的整體反應時間除了 IIA 之外，也顯著快於其他層次，IB 顯著快於 IIB、IIIA1、IIIA2、IIIB，IC 顯著快於 IIB、IIIA1、IIIA2、IIIB；而 IIB、IIIA1、IIIA2、IIIB 之間的整體反應時間則未達顯著差異水準。在數字的符號表徵條件下，從平均數可以看出，IIA 的整體反應時間最短（923.4ms），IIIB 的最長（4148.0ms），經事後考驗發現，在數字的符號表徵下的八個層次的整體反應時間由快到慢為：IIA>IA $\div$ IC $\div$ IB>IIB>IIIA2>IIIA1 $\div$ IIIB，其中 IIA 顯著快於其他層次，IA 的整體反應時間除了 IC、IIA 之外，也顯著快於其他層次，IB 顯著快於 IIB、IIIA1、IIIA2、IIIB，IC 顯著快於 IIB、IIIA1、IIIA2、IIIB；IIB 顯著快於 IIIA1、IIIA2、IIIB，IIIA2 顯著快於 IIIA1、IIIB。

上述的統計結果發現，表徵形式和比例層次的整體反應時間具有交互作用，從單純主要效果的分析發現數字的符號表徵中 IIA 的整體反應時間最快，IIIB 的整體反應時間最慢，顯示受試者在進行比例問題心理運算的時候，在數字的符號表徵中 IIA 的心理運算最快速，而圖形表徵中 IIIB 的心理運算最慢。

就兩個表徵形式和八個比例層次的答對率，利用重複量數的 ANOVA 進行分析，分析結果如表 5。

表 5 八層次的答對率的二因子變異數分析摘要表(表徵形式×比例層次)

| 變易來源      | SS   | df   | MS   | F        | $\eta^2$ |
|-----------|------|------|------|----------|----------|
| 表徵形式      | 0.49 | 1.00 | 0.49 | 20.76*** | 0.58     |
| 比例層次      | 4.42 | 2.96 | 1.50 | 12.61*** | 0.46     |
| 表徵形式×比例層次 | 0.71 | 4.24 | 0.17 | 6.74***  | 0.31     |

\*\*\*p&lt;.001

由表 5 可以得知，表徵形式和比例層次之間的答對率的交互作用達顯著差異水準（ $F=6.74$ ； $p<.001$ ），所以需進行單純主要效果分析，分析結果如表 6：

表 6 八層次的答對率的二因子單純主要效果變異數分析摘要表

| 單純主要效果內容    | SS   | df   | MS   | F        | $\eta^2$ |
|-------------|------|------|------|----------|----------|
| 表徵形式因子      |      |      |      |          |          |
| 在 IA 條件下    | 0.00 | 1    | 0.00 | 0.00     | 0.00     |
| 在 IB 條件下    | 0.01 | 1    | 0.01 | 1.52     | 0.09     |
| 在 IC 條件下    | 0.53 | 1    | 0.53 | 93.34*** | 0.86     |
| 在 IIA 條件下   | 0.01 | 1    | 0.01 | 3.00     | 0.17     |
| 在 IIB 條件下   | 0.44 | 1    | 0.44 | 15.70**  | 0.51     |
| 在 IIIA1 條件下 | 0.13 | 1    | 0.13 | 4.80*    | 0.24     |
| 在 IIIA2 條件下 | 0.08 | 1    | 0.08 | 2.19     | 0.13     |
| 在 IIIB 條件下  | 0.00 | 1    | 0.00 | 0.03     | 0.00     |
| 比例層次因子      |      |      |      |          |          |
| 在圖形表徵條件下    | 3.35 | 3.06 | 1.10 | 14.38*** | 0.49     |
| 在數字的符號表徵條件下 | 1.77 | 3.24 | 0.55 | 7.99***  | 0.35     |

\* p&lt;.05；\*\* p&lt;.01；\*\*\*p&lt;.001

從表 6 可以發現，表徵形式對比例階段答對率的影響，在 IC、IIB 和 IIIA1 的條件下達顯著差異。在 IC 層次中的圖形表徵的答對率顯著低於數字的符號表徵（ $M_{圖形}=0.71$ ， $M_{數字}=0.97$ ， $F=93.34$ ， $p<.001$ ， $\eta^2=0.86$ ）；在 IIB 層次中的圖形表徵的答對率也顯著低於數字的符號表徵（ $M_{圖形}=0.61$ ， $M_{數字}=0.84$ ， $F=15.70$ ， $p<.01$ ， $\eta^2=0.51$ ）；在 IIIA1

層次中的圖形表徵的答對率顯著低於數字的符號表徵（ $M_{\text{圖形}}=0.65$ ， $M_{\text{數字}}=0.77$ ， $F=4.80$ ， $p<.05$ ， $\eta^2=0.14$ ）；在 IIA 層次中，雖然圖形表徵和數字的符號表徵的答對率未達顯著差異水準，但  $\eta^2=0.17$ ，表示表徵形式可以解釋答對率 17% 的變異量，兩者之間的關係屬於強度關係。而比例層次對表徵形式的答對率的影響，在兩種表徵形式下都達顯著差異水準。在圖形表徵條件下，從答對率的平均數可以看出，IA 的答對率最高（0.98），IIIA2 最低（0.55），經事後考驗發現在圖形表徵下的八個層次的答對率由高到低為：IA  $\simeq$  IIA  $\simeq$  IB  $>$  IIIB  $\simeq$  IC  $\simeq$  IIIA1  $>$  IIB  $\simeq$  IIIA2，其中 IA、IB、IIA 之間的答對率未達顯著差異，但這三個層次的答對率都顯著高於其他層次；IIIB、IC、IIIA1 之間的答對率也未達顯著差異，但 IIIB 的答對率則顯著高於 IIB、IIIA2。在數字的符號表徵條件下，從答對率的平均數可以看出，IIA 的答對率最高（1.00），IIIA2 最低（0.65），經事後考驗發現在數字的符號表徵下的八個層次的答對率由高到低為：IIA  $\simeq$  IA  $\simeq$  IC  $>$  IB  $\simeq$  IIB  $\simeq$  IIIA1  $>$  IIIB  $\simeq$  IIIA2，其中 IA、IC、IIA 之間的答對率未達顯著差異，但 IIA 的答對率顯著高於其他層次，另外，IA 和 IC 這兩個層次的答對率都顯著高於 IIB、IIIA1、IIIA2、IIIB；但 IB、IIB、IIIA1 之間的答對率也未達顯著差異，但 IB 的答對率顯著高於 IIIA2 和 IIIB，而 IIB 則是顯著高於 IIIA2；在 IIIA1、IIIA2、IIIB 這三個層次之間的答對率則是未達顯著差異。

從上述的統計結果發現，表徵形式和比例層次的答對率具有交互作用，從單純主要效果的分析發現數字的符號表徵中 IIA 的答對率最高，且是所有受試者都答對，顯示受試者在進行比例問題心理運算的時候，在數字的符號表徵中 IIA 的心理運算是最快速的。另外，有研究（胡名霞，2003；Chang & Deming, 2003; Der & Deary, 2006）指出當作業難度增加時，反應速度會變慢，整體反應時間也就會增加，本研究也發現比例八個層次的圖形表徵的整體反應時間和答對率有顯著的負相關（ $r=-0.39$ ， $p<.001$ ），數字的符號表徵的整體反應時間和答對率也有顯著的負相關（ $r=-0.45$ ， $p<.001$ ），顯示當比例層次增加時，對高二學生而言，難度也跟著增加。

綜上所述，表徵形式對高二學生的比例各層次心理運算的影響，在整體反應時間方面，僅有 IB 層次的圖形表徵的整體反應時間顯著低於數字

的符號表徵，以及 IIB 層次的數字的符號表徵的整體反應時間顯著低於圖形表徵，其餘層次的表徵形式則是未達顯著水準，在答對率方面，有 IC 層次、IIB 層次和 IIIA1 層次等三個層次中，圖形表徵的答對率顯著低於數字的符號表徵，其他層次則是未達顯著水準。此外，無論在圖形表徵或是數字的符號表徵中，比例心理運算各層次之間的整體反應時間和答對率的結果發現 IIA 層次的整體反應時間都顯著低於其他七個層次，顯示高二學生在 IIA 層次的心理運算速度最快，IIIB 層次的心理運算速度最慢，本研究認為造成 IIA 層次和 IIIB 層次整體反應時間差異的因素，可能是因為高二學生在這兩個層次使用不同的心理運算影響所致。

## 二、表徵形式使具體操作階段成為比例心理運算的關鍵階段

Noelting (1980a, 1980b) 也另將比例問題依難易度分為直觀階段、具體操作階段以及形式操作階段。Liu 與 Shen (2011) 的研究發現，對國小學生而言，表徵形式在具體操作期的答對率達顯著差異水準，顯著低於直觀階段和形式操作階段，此結果與 Noelting 的分層不完全一致，那麼高二學生對三個階段的難易度表現是否也會和國小學生一樣的結果？因此，接著探討高二學生在三個階段的圖形表徵和數字的符號表徵的比例問題的心理運算的差異情形。

首先就兩個表徵形式和三個比例階段的整體反應時間，利用重複量數的 ANOVA 分析，分析結果如表 7。

表 7 三階段的整體反應時間的二因子變異數分析摘要表（表徵形式×比例階段）

| 變易來源    | SS       | df    | MS         | F         | $\eta^2$ |
|---------|----------|-------|------------|-----------|----------|
| 表徵形式    | 1048513  | 1     | 1048513.82 | 2.69      | 0.15     |
| 比例階段    | 68730000 | 1.408 | 48820000   | 109.51*** | 0.88     |
| 表徵×比例階段 | 1905546  | 2     | 952773     | 6.02**    | 0.29     |

\*\*  $p < .01$ ；\*\*\*  $p < .001$

以整體反應時間為依變項，進行表徵形式×比例階段二因子重複量數變異數分析，結果顯示表徵形式和比例階段的交互作用達顯著水準（

$F=6.02$ ， $p<.01$ ），所以需進行單純主要效果分析，分析結果如表 8：

表 8 三階段的整體反應時間的二因子單純主要效果變異數分析摘要表

| 單純主要效果內容    | <i>SS</i> | <i>df</i> | <i>MS</i> | <i>F</i> | $\eta^2$ |
|-------------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| 表徵形式因子      |           |           |           |          |          |
| 在階段一條件下     | 119275    | 1         | 119275    | 1.07     | 0.07     |
| 在階段二條件下     | 2568122   | 1         | 2568122   | 10.53**  | 0.41     |
| 在階段三條件下     | 266663    | 1         | 266663    | 0.76     | 0.05     |
| 比例階段因子      |           |           |           |          |          |
| 在圖形表徵條件下    | 35340000  | 1.46      | 24140000  | 63.44*** | 0.81     |
| 在數字的符號表徵條件下 | 35300000  | 1.37      | 27600000  | 91.16*** | 0.86     |

\*\*  $p<.01$ ；\*\*\* $p<.001$

由表 8 可以得知：表徵形式對比例階段的整體反應時間的影響，在具體操作階段下的圖形表徵的整體反應時間顯著慢於數字的符號表徵（ $M$  圖形=2418.57ms， $M$  數字=1851.99ms， $F=10.53$ ， $p<.01$ ， $\eta^2=0.41$ ）。而比例階段對受試者的整體反應時間的影響，在兩種表徵形式下都達顯著差異，在圖形表徵條件下，直觀階段的整體反應時間最快，具體操作階段次之，形式操作階段最慢（ $M$  直觀=1932.42ms， $M$  具體操作=2418.57ms， $M$  形式操作=3946.40ms， $F=63.44$ ， $p<.001$ ， $\eta^2=0.81$ ），且均達顯著差異水準；在數字的符號表徵條件下，具體操作階段的整體反應時間最快，直觀階段次之，形式操作階段最慢（ $M$  具體操作=1851.99ms， $M$  直觀=2054.52ms， $M$  形式操作=3763.83ms， $F=91.16$ ， $p<.001$ ， $\eta^2=0.86$ ），也均達顯著差異水準。

綜合上述統計結果發現，表徵形式和比例階段的整體反應時間具有交互作用，因此，從單純主要效果分析發現數字的符號表徵中具體操作階段的整體反應時間最快，顯示受試者在進行比例問題心理運算的時候，在數字的符號表徵中具體操作階段的心理運算最為快速。

接著就兩個表徵形式和三個比例階段的答對率，利用重複量數的 ANOVA 分析，分析結果如表 9。

表 9 三階段的答對率的二因子變異數分析摘要表（表徵形式×比例階段）

| 變易來源    | SS   | df   | MS   | F        | $\eta^2$ |
|---------|------|------|------|----------|----------|
| 表徵形式    | 0.21 | 1    | 0.21 | 23.91*** | 0.61     |
| 比例階段    | 0.88 | 1.41 | 0.62 | 21.58*** | 0.59     |
| 表徵×比例階段 | 0.02 | 2    | 0.01 | 1.48     | 0.09     |

\*\*  $p < .01$ ；\*\*\* $p < .001$

由表 9 可以得知，表徵形式和比例階段之間的答對率的交互作用未達顯著差異（ $F=1.48$ ； $p>.05$ ），但在表徵形式與比例階段的「主要效果」均達顯著差異水準（ $F=23.91$ ， $p<.001$ ； $F=21.58$ ， $p<.001$ ）。從邊緣平均數和事後比較發現，在表徵形式變項方面，數字的符號表徵的答對率（ $M=0.87$ ）顯著優於圖形表徵（ $M=0.77$ ）；在比例階段變項方面，直觀階段的答對率（ $M=0.92$ ）顯著優於具體操作階段（ $M=0.76$ ）和形式操作階段（ $M=0.69$ ），且具體操作階段的答對率顯著優於形式操作階段，亦即直觀階段的答對率最高，具體操作階段次之，形式操作階段最低。

綜合上述的研究結果顯示，在比例的三個階段中，表徵形式對整體反應時間的影響，僅有具體操作階段達到顯著水準，在直觀階段和形式操作階段，均未達顯著水準，不過在難易度的順序方面，則是直觀階段最簡單，具體操作階段的難度次之，形式操作階段最難，且都達顯著水準。另外，三個階段的圖形表徵的整體反應時間和答對率有顯著的負相關（ $r=-0.35$ ， $p<.05$ ），數字的符號表徵的整體反應時間和答對率也有顯著的負相關（ $r=-0.57$ ， $p<.001$ ），顯示當比例層次增加時，對高二學生而言，難度也跟著增加。

本研究的結果顯示比例八個層次的難易度順序不完全符合 Noelting 的比例層次，但如以比例階段的分類方式，三個比例階段的難易順序又和 Noelting 的比例階段完全相符，究其原因可能是因為具體操作階段包含 IIA 層次和 IIB 層次，雖然 IIA 層次的整體反應時間和答對率幾乎都是最快和最高，但因為 IIB 層次的整體反應時間和答對率皆慢於且低於直觀階段的 IA、IB、IC 三個層次，所以 IIA 層次和 IIB 層次歸類為具體操作階段後的難易度平均值就次於直觀階段了。

## 伍、結論與建議

本研究主要目的在運用整體反應時間技術探討圖形表徵和數字的符號表徵兩種形式對高中生在比例心理運算時的影響。經過資料的收集與分析討論後，得到以下幾點結論：

### 一、比例問題難易呈現的先後順序不會影響受試者的心理運算

為排除題目難易呈現順序對實驗結果的影響，本研究參照 Noelting 以及 Liu 與 Shen 的研究的順序進行實驗，採對抗平衡設計，結果發現難而易的呈現方式，對受試者的答對率和整體反應時間的表現上，沒有顯著的差異，顯示題目難易度呈現的順序不會影響受試者的心理運算。

### 二、高中學生在數字的符號表徵的比例問題的反應時間快於圖形表徵

許多研究指出輸入到個體的表徵形式，會影響受試者後續的加工運作（林玉雯，2011；Campbell et al., 2004; Liu & Shen, 2011; Noel & Seron, 1997）。本研究結果整體來看可以發現受試者在數字的符號表徵的答對率顯著高於圖形表徵的答對率，在整體反應時間的表現則是沒有顯著差異，不過數字的符號表徵的整體反應時間還是比圖形表徵快了 164.32ms，在 Mack（2000）的研究指出，4－6 年級的學生在學習分數的整數倍算則之後，不再只依賴圖像表徵來解題，Behr, Lesh 與 Post（1987）的研究也發現七年級的學生在表徵轉換思考時，喜歡轉換到抽象表徵進行思考，因此對高二學生而言，由於平常的學習已經習慣於使用數字的符號表徵進行思考，所以其在看到圖形表徵的比例問題時，會將圖形轉換成數字的符號表徵後再進行心理運算，而這可能是造成數字的符號表徵的整體反應時間較快於圖形表徵的原因。

Noel 與 Seron（1997）認為不同的輸入形式會影響心理運算的編碼階段和隨之的心理運算加工階段，本研究的結果也呼應 Neol 等人的研究結果，尤其在具體操作階段，Liu 與 Shen（2011）認為此階段的解題策略會受到表徵形式的影響，本研究也有相同的結果，從整體反應時間的向度而言，推測表徵形式應是心理運算轉換的關鍵，也是影響比例學習的重要因素，所以在比例問題的學習過程中，加強具體操作階段的教學設計，也許

可以提升學習者比例問題的學習成效，但需做進一步的研究。

### 三、高中學生面對不同難度層次的比例問題時，採用的心理運算也會不同，簡單的問題會採取直接提取的加工策略，困難的問題會採取基於運算規則的策略

在認知功能測驗研究指出當作業難度增加時，反應速度會變慢，整體反應時間也就會增加（胡名霞，2003；Chang & Deming, 2003; Der & Deary, 2006），本研究結果顯示高二學生的 IIA 層次在兩個表徵形式中的整體反應時間都是最快速的，且平均答對率也是最高，所以對高二學生而言，IIA 層次的比例問題應該是最簡單，而這個結果和 Noelting 的比例層次順序並不一致。可能的原因是源自於心理運算加工的因素，朱滢（2002）指出人類經由視覺通道接受外在刺激的平均反應時間為 150ms~225ms，中間值為 187.5ms，兩種表徵形式的 IIA 層次的平均整體反應時間為 1041.84ms，扣除視覺平均反應時間的中間值後，剩下的時間約為 854.34ms，此段時間應為受試者進行心理運算處理的時間，處理時間不到 1s，當受試者看到規則形式為（5，5）vs.（6，6）的訊息後，從相同的數字符號或是柳丁汁與白開水杯數圖形的長度一樣的訊息，再藉由日常生活的經驗或是以往的學習經驗，馬上可以得知兩瓶的濃度相同，所以本研究推測受試者應是採取直接提取的心理運算；而對於 IA 層次【規則形式為（4，2）vs.（2，4）】、IB 層次【規則形式為（2，3）vs.（2，4）】、IC 層次【規則形式為（3，4）vs.（2，2）】的題目可能也是採取直接提取的心理運算，不過此三層次可能還需要多進行序列比對，所以花費的平均整體反應時間多於 IIA 層次，且答對率也低於 IIA 層次。

綜上所論，雖然高中生位在 Piaget 認知發展層次中的形式運思時期，但在心理運算的加工策略的選擇，仍然使用直接提取和基於運算規則等兩種策略，使用的時機則是依據問題的難易而定，換言之，受到日常生活經驗與學習的影響，簡單的問題會採取直接提取的加工策略，困難的問題則會使用基於運算規則的加工策略，無論是符號表徵還是圖形表徵都是如此，然而，當問題在相同難度的層次時，雖然使用的心理運算加工策略相同，但反應時間仍會有所差異，且符號表徵的心理運算快於圖形表徵，可能是因為高中學生已經非常熟悉符號表徵，所以在面對較為複雜的比例圖

形表徵問題時，會將圖形表徵轉換為數字的符號表徵，因而增加了反應時間，這也呼應 Piaget 的認知發展層次，因此，符號表徵和圖形表徵會影響高中生的比例的心理運算。

由於本研究的對象為高二學生，不同於國中小的學生。另一方面，本研究參考 Liu 與 Shen (2011) 的研究設計，即先呈現圖形表徵的問題再呈現數字的符號表徵的問題，這樣的設計可能會因為受試者將圖形表徵轉化為數字的符號表徵，然後再利用數字進行心理運算，使得受試者在數字的符號表徵之前就已使用數字進行運算，可能會造成練習的效果存在，而影響到後續的數字的符號表徵的結果。所以，本研究的結果在研究對象以及研究設計的限制下，不宜做過度的推論。

另外，本研究的分析資料皆以顯著水準.05 作為考驗的標準，據此作為進一步的推論依據，但受試者人數較少，因此統計檢定力 (statistical power) 較低 (Cohen, 1988)，故以本研究中所呈現之未達顯著差異水準的整體反應時間和答對率進行推論時，應考量效果量 ( $\eta^2$ ) 的值，以避免假設考驗中第二類型的錯誤。

因此，建議未來的研究對象可以針對國小高年級的學生的比例層次做進一步的研究。此外，數學教材的內容很多，比例只是其中一環，且 Noetling 的柳丁汁問題又是比例內容的一部分，所以未來研究的課題可以對比例其它內容進行研究，甚而能擴展到其他的數學內容。此外，運用整體反應時間技術的研究方法，可以看到個體更微觀的心理運算，所以，未來的相關研究可透過整體反應時間的研究方法能更進一步的了解表徵形式在其他數學內容的影響，期望對國內數學教育的教與學和數學教育的研究能有些許的幫助。

## 參考文獻

- 王建雅、陳學志 (2009)。腦科學為基礎的課程與教學。**教育實踐與研究**，22 (1)，139-168。
- 朱滢 (2002)。**實驗心理學**。台北市：五南。
- 林福來 (1984)。青少年的比例概念發展。**科學教育月刊**，73，7-25。

- 林美惠（1997）。題目表徵形式與國小二年級學生加剪髮解題之相關研究。國立嘉義師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版。
- 林玉雯（2011）。生物概念學習圖形表徵辨識歷程之研究。國立高雄師範大學科學教育研究所博士論文，未出版，高雄。
- 胡名霞（2003）。動作控制與動作學習。台北市：金名書局。
- 馬啟偉、張力為（1996）。體育運動心理學。台北市：東華書局。
- 陳李綢（1985）。布魯納理論應用於中小學生認知學習的成效研究。教育心理學報，18，191-227。
- 陳美芳（1995）。「學生因素」與「題目因素」對國小高年級兒童乘法應用問題解題影響之研究。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所博士論文。
- Ashcraft, M. H.（2004）。認知心理學（陳學志、邱發忠、劉政宏、林宜利、陳荻卿、林奕宏等（譯））。臺北：學富圖書出版公司。（原著出版於2002）
- 陳建州（2007）。一個國中學生解比值和比例問題之個案研究。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文，未出版，嘉義。
- 張學民、舒華（2004）。實驗心理學綱要。北京市：北京師範大學出版社。
- 蔣治邦（1994）。由表徵的觀點探討新教材數與計算活動的設計。國民小學數學科新課程概說（低年級）（頁60-76）。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。
- 劉昌、王翠豔（2008）。心算的加工機制：來自認知神經科學的研究。心理科學進展，16（3），446-452。
- 劉秋木（1992）。國小數學科教學研究。台北市：五南。
- 魏宗明、劉祥通（2003）。兒童對數學比例問題的建構。科學教育研究與發展，32，87-109。
- Behr, M., Lesh, R., & Post, T. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University.

- Campbell, J. I. D. (2004). *Handbook of mathematical cognition*. New York : Psychology Press.
- Campbell, J. I. D., & Fugelsang, J. (2001). Strategy choice for arithmetic verification : effects of numerical surface form. *Cognition*, 80(3), B21-B30.
- Campbell, J. I. D., Parker, H. R., & Doetzel, N. L. (2004). Interactive effects of numerical surface form and operand parity in cognitive arithmetic. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition*, 30, 51-64.
- Chang, L., & Deming, L. (2003). The role of working memory and sensorimotor speed in adult age differences in mental subtraction. *Acta Psychologica Sinica*, 35(5), 617-627.
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.
- Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking : *Behavioral and brain-imaging evidence*. *Science*, 284, 970-974.
- Der, D., & Deary, I. J. (2006). Age and sex differences in reaction time in adulthood : Results from the United Kingdom health and lifestyle survey. *Psychology and Aging*, 21(1), 62-73.
- Gagné, R.M. (1985). *The conditions of learning and theory of instruction*. New York : Holt, Rinehart and Winston.
- Groen, G. J., Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review*, 79(4), 329-346.
- Hoffer, A. R., & Hoffer, S. A. K. (1992). *Ratios and proportional thinking*. In T. R. Post(Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8*(2nd ed.) (pp. 303-330). Boston : Allen and Bacon.
- Ifenthaler, D. (2010). Relational, structural, and semantic analysis of graphical representations and concept maps. *Educational Technology Research and Development*, 58(1), 81-97.
- Kalaman, D. A., & LeFevre, J. A. (2007). Working memory demands of exact and approximate addition. *European Journal of Cognitive Psychology*, 19,

187-212.

- Lamon, J. (1993). *Ratio and proportion : Cognitive foundation in unitizing and forming*. In G. Harrel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-122). New York : State University of New York Press.
- Liu, C. J., & Shen, M. H. (2011). The influence of different representations on solving concentration problems at elementary school. *Journal of Science Education and Technology*, 20(5), 621-629.
- Mack, N. K. (2000). *Long-Term Effects of Building on Informal Knowledge in a Complex Content Domain : The Case of Multiplication of Fraction*. (ERIC Document Reproduction Service No.ED442671).
- Moyer, J. C. et al. (1983). *Story problem formate : Some interview results*. (ERIC Document Reproduction Service NO. ED 229149).
- Noel, M. P., & Seron, X. (1997). On the existence of intermediate representations in numerical processing. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and cognition*, 23, 697-720.
- Noelting, G. (1980a). The development of proportion reasoning and the ratio concept : Part I- Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 217-253.
- Noelting, G. (1980b). The development of proportion reasoning and the ratio concept : Part II- Problem structure at successive stages; problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 331-363.
- Norton, S. J. (2005). The construction of proportional reasoning. *The 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne, Australia*.
- Núñez-Peña, M. I., Cortiñas, M., & Escera, C. (2006). Problem size effect and processing strategies in mental arithmetic. *Cognitive Neuroscience and Neuropsychology*, 17, 357-360.
- Paivio, A. (1986). *Mental representations : A dual coding approach*. New York : Oxford University.
- Robert, N. D., & Campbell, J. I. D. (2008). Simple addition and

- multiplication : No comparison. *European Journal of Cognitive Psychology*, 20, 123-138.
- Schmidt, R. A. (1991). *Motor learning and motor performance : From principle to practice*. Champaign, IL : Human Kinetics.
- Sowder, L., & Threadgill-Sowder, J. (1982). Drawn versus verbal formats for mathematical story problems. *Journal for Research in Mathematical Education*, 13(5), 324-331.
- Vass, E., Schiller, D., & Nappi, A. J. (2000). The effects of instructional intervention on improving proportional, probabilistic, and correlational reasoning skills among undergraduate education majors. *Journal of Research in science teaching*, 37(9), 981-995.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M., & Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on Missing-value problems : How numbers may change solution. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 187-211.
- Verguts, T., & Fias, W. (2005). Interacting neighbors : A connectionist model of retrieval in single digit multiplication. *Memory and Cognition*, 33, 1-16.

## **Exploring the Effect of High School Students' Selection of Mental Operation on Proportional Problem Representation**

### **Abstract**

This study investigated the influences of students' selection of mental operation on two forms of representations in proportional questions by using the total response time analysis technology. There were 16 high school students (11th graders') participated in this study. A proportional test which consisted of two representational capacity tests was applied for data collection. The two tests involved graphical and number symbolic which cover eight levels from easy to difficult and three stages from easy to difficult (Noelting, 1980a, 1980b). There are four questions for each level. Cognitive science usually adopts total response time and accuracy rate to measure human's mental. The total response time and the response scores were used to analyze students' performance on answering the proportional questions. The results showed : (a) students revealed the fastest total response time and highest response rate at IIA level; (b) the forms of representations are one of the important factors which could help 11th students for translating the selection of proportions' mental operation from concrete stage to critical stage. Furthermore, the IIB level might be the important level which could demonstrate 11th students' translation of the selection of proportions' mental operation from direct retrieval to procedural strategies. To sum up, the forms of representations might be one of the important factors to indicate 11th graders' translations on selection of proportional mental operation.

Key words : representation, accuracy rate, total response time, mental operation