

賽局理論觀點分析排球賽事、訓練及選才運用

紀恩成

國立屏東大學體育學系

摘 要

本篇論文的目的是利用賽局理論中的一種分配方法—核仁及其相關理論結果，去探討核仁與排球選材之間的關係。主要方法如下：首先，我們介紹一些賽局理論的基本數學模型，藉由此模型去引進排球訓練與比賽的相關數學模型。接下來，我們介紹一些由佩利格、索利安諾與摩利亞分別於 1986、1998 年分別所提出對於核仁所衍生出的相關公設及公設化結果。最後，我們將這些公設以及公設化的結果以一些現實世界的管理原則予以解釋，再將相關結果拓展到排球賽事與訓練的數學模型。所得到的結論證明了賽局理論中的核仁及其相關結果是可以應用到排球選材上。衍生出的建議也指出賽局理論的其它分配方法或許也可以應用到排球選材。

關鍵字：核仁、數學模型、賽事與訓練

通訊作者：紀恩成

通訊地址：90003 屏東市民生路路 4-18 號

電話：(08)7663800 轉 10512 行動電話：0925-097250

傳真：(08)7211867

E-mail: g731007@mail.nptu.edu.tw

壹、前言

在數學上，賽局理論是在利用各種領域的數學工具將現實世界的各種系統數學模式化，並藉此探討當任何個體在做決策時，所涉及影響的，不會只是個人自身的權益，往往也會對於其它個體或團體也會造成影響。這種現象在現實社會既有的各種互動和行為（比如說合作、談判、競爭等等）中隨處可見。賽局理論是希望以數學為工具，嚐試以許多不同的角度去釐清和剖析在許多互動和行為系統中，個體和團體之間所產生的交絡複雜度與穩定度的一門學問。而在數學以外的領域，賽局理論這門學問已經廣泛應用在許多社會科學學門，尤其是在經濟、管理和政治等領域上更是大放異彩，已經有多位學者更因此榮獲諾貝爾經濟獎及其它的學術榮譽。

賽局理論中有一個領域是討論所謂的解（solution），也就是分配資源或利益的方法。而要去判斷一個解到底是否合理以及是否可以被廣為接受，有一個領域是利用所謂的公設化(axiomatization)理論去分析探討。公設(axiom)就是把現實生活中一些公平公正可以廣為接受的一些原則數學模式化，比如不超支、天下沒白吃的午餐、合作力量大等等。公設化的過程如以下簡述：如果要說服大家一個解是合理以及可以被廣為接受，就要去利用數學去證明那個解符合了一些合理以及可以被廣為接受的公設，而且那些公設是唯一並且缺一不可的。

賽局理論中存在著非常多的解，包含核仁（the core）、夏普利值（the Shapley value）、不可分割消費均等分配（the equal allocation of nonseparable costs）等等。而這篇文章主要是要針對賽局理論上的一個解：核仁（The core）來進行公設化的解析、探討與應用。簡單來說，核仁是依據『資源完全分配』（efficiency）以及『每個團體個體兼顧合理性』（coalitional rationality）這兩大原則而形成的分配結果。佩利格（Peleg）、索利安諾與摩利亞（Serrano and Volij）當時是主要是依據『個人合理性』（individual rationality）、『資源共享』（superadditivity）、『一

致且穩定』(consistency)、『上下同心協力合作』(converse consistency) 和『適切合作不落空』(nonemptiness) 這幾個原則來進行核仁的公設化。

而在另一方面，因為排球賽事及訓練過程就是結合競爭和合作的一種賽局型態，因此，選手的選才對於整體球隊的運作有舉足輕重的影響。在以往，排球選才大多集中於選手的生理層面或心理層面來進行探討分析。而這篇文章的主要是評估排球選手行為所能形成的多方面效益，再結合賽局理論對於核仁的公設化結果來對選才進行分析探討。本篇文章的結果以下列 2 個方向來呈現：

一、在理論方面，我們首先介紹一些基本的數學符號，以及賽局理論的基本數學模型，同時也將排球選手行為所能形成互動關係與效益利用這些數學工具與模型加以數學模型化。

二、接下來我們介紹由佩利格 (Peleg)、索利安諾與摩利亞 (Serrano and Volij) 對於核仁所進行的相關公設與數學公設化結果。之後我們將這些數學公設與公設化結果套用在管理學與現實世界中一些公平公正且廣為接受的原則，賦予其具體化的意義。最後，我們將核仁的數學公設與公設化結果配合具體化的結果應用到所建構的排球賽事與訓練的數學模型範疇，尋找這些公設和排球賽事與訓練的等價關連性，來證明賽局理論上的核仁是可以被運用到排球選材的範疇。

貳、賽局理論的核仁以及其相關理論結果；

排球賽事與訓練的數學模型

令 U 是一個非空和有限的參與者集合。一個結盟是一個 U 的非空子集合 N 。我們稱 (N, v) 是一個效益可轉換的結盟賽局，在這裡 N 是一個聯盟，在運動管理的領域上可以視為一個運動聯盟或是一個運動隊伍，比如 NBA、MLB、CPBL、排球隊、籃球隊等等。且 $v: 2^N \rightarrow R, v(\emptyset) = 0$ 是一個測量聯盟中任意形成的團體

所產生效益的一個函數，可以將其視為計算運動結盟中每一個團體所可以產生產能的計算方法，我們定義符號 G 為蒐集所有賽局的母集合，可以視為結合所有運動團體因為不同的效益所能形成的組織。給定一個聯盟 N 中的一個小聯盟 S ，我們稱 (S,v) 是一個被限制只在小聯盟 S 中進行的子賽局，可視為最大運動結盟中的次級聯盟，比如 MLB 中的 1A、2A、3A 聯盟。

比如在一個排球隊伍中，舉球員與快攻手的配合就是一個團體、舉球員、主攻手與後排攻擊手的配合又可以形成一個團體，每一個團體所配合的整體戰術都不一樣，所形成的效益也大不相同，而每一個團體也可以混合形成另一個不同的團體。在這個排球賽事中，攻擊的成功率就可以看成是一種效益，攔網的成功率也可以看成是另一種效益，同樣的一群球員，就可以因為不同的效益而形成不一樣的賽局模型來分析探討。所有因排球隊不同效益評估所形成的不同賽局模型蒐集起來，就是這支球隊所形成的母集合，這樣所形成的樣本空間才會完整。而排球賽事中的攻擊陣形或防守陣形就可以被視為一個子賽局。

接下來我們開始介紹所謂的核仁 (the core)，首先定義一些必需的符號。給定一個賽局 (N,v) 以及任意一個小聯盟 S ，定義 $|S|$ 是 S 聯盟中所有參與者的數量。當一個群人完成一個賽局後，很自然地就要分配給每個人應該得到的酬勞，我們以一個 $|N|$ 維向量 $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in N}$ 來表示每一個人得到的酬勞，在這裡，對於每個參賽者 $i \in N$ ， x_i 表示 i 和大家合作後所分配到的酬勞。對於每一個賽局 (N,v) 以及每一個酬勞向量 $\mathbf{x}$ ，我們有以下的性質：

- 假如 $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ ，則 $\mathbf{x}$ 被稱為是具有有效益的 (efficient, EFF)。
- 假如 $\sum_{i \in N} x_i \leq v(N)$ ，則 $\mathbf{x}$ 被稱為是具有不超支的 (non-overload, NO)。
- 假如對於每個參賽者 $i \in N$ ， $x_i \geq v(e^{(i)})$ ，則 $\mathbf{x}$ 被稱為是具個人合理性的

(individual rationality, IR)。在這裡，對於每個團體 $S \subseteq N$ ， $e^S = (e_i^S)_{i \in N}$ ，

假如 $i \in S$ ， $e_i^S = 1$ ，假如 $i \notin S$ ， $e_i^S = 0$ 。

以 EFF 數學式意義來觀察，等號左邊代表所有人拿到的酬勞的和，等號右邊代表所有人產生的效益，對照現實的現象來說，就是妥善分配所有的資源。以 NO 數學式意義來觀察，所有人拿到的酬勞的和小於所有人產生的效益，對照現實的現象來說，就是不超支。以 IR 數學式意義來觀察，每一個參賽者所獲得的回報比每一個參賽者單獨產生的效益還多，對照現實的現象來說，就是合作比單打獨鬥好。

給定一個賽局 (N, v) 、 $S \subseteq N$ 以及一個酬勞向量 x ，定義 $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ 。對照以上酬勞向量的一些性質，我們需要搜集一些性質相近的酬勞向量來形成一些集合：

- $X^*(N, v) = \{x \mid x \text{ 具備 NO 性質}\}$
- $X(N, v) = \{x \mid x \text{ 具備 EFF 性質}\}$
- $I(N, v) = \{x \mid x \text{ 具備 EFF 和 IR 性質}\}$

如果有個定義在 G 上的函數 σ 可以賦予每個賽局 (N, v) 一群至少不超支的的酬勞向量，也就是 $\sigma(N, v) \subseteq X^*(N, v)$ ，我們就稱此函數為一個解。

定義一

核仁 (The core)，以 C 為符號，是一個定義在 G 上面的一個解，賦予每一個賽局 (N, v) 以下的解集合

$$C(N, v) = \{x \in X(N, v) \mid x(S) \leq v(S) \forall S \subseteq N\}$$

以上核仁數學式所代表的現實世界意義，就是搜集所有妥善分配資源，並且讓每個團體都協調的酬勞向量。

接下來，我們介紹一些在賽局上的對於解的幾個公設。

定義二

假設 σ 是一個解。

- 如果對於每一個賽局 (N, v) ，都有 $\sigma(N, v) \subseteq X(N, v)$ 的情況，則稱 σ 具有有效性 (efficiency, EFF)。
- 如果對於每一個賽局 (N, v) ，都有 $\sigma(N, v) \subseteq I(N, v)$ 的情況，則稱 σ 具有個人合理性 (individual rationality, IR)。
- 如果對於每一個賽局 (N, v) ，都有 $\sigma(N, v) = I(N, v)$ 的情況，則稱 σ 具有單人賽局合理性 (one-person rationality, OPR)。
- 如果對於每一個賽局 (N, v) ，都有 $\sigma(N, v) \neq \emptyset$ 的情況，則稱 σ 具有非空性 (non-emptiness, NE)。
- 如果對於任兩個賽局 (N, v) 和 (N, w) ，都有 $\sigma(N, v + w) \supseteq \sigma(N, v) + \sigma(N, w)$ 的情況，則稱 σ 具有可加性 (superadditivity)。在這裡，對於每一個子聯盟 S ，

$$(v + w)(S) = v(S) + w(S)。$$

接下來我們要介紹的是一個在賽局上非常重要的性質，就是所謂的一致性 & 反一致性—Consistency and converse consistency。在介紹一致性之前，就必須探討所謂的退化局 (reduced game)。

定義三

戴維斯和馬修勒 (Davis and Maschler) 在 1965 年時提出了一個退化局如下。

給定一個賽局 (N, v) 、一個酬勞向量 $\mathbf{x}$ 以及任意一個小聯盟 S ，一個退化局 $(S, v_S^{\mathbf{x}})$

可以被定義成

$$v_S^{\mathbf{x}}(T) = \begin{cases} 0, & \text{if } T = \emptyset \\ v(S) - \mathbf{x}(S), & \text{if } T = S \\ \max_{Q \in N \setminus S} \{v(T \cup Q) - \mathbf{x}(Q)\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- 如果對於每一個賽局 (N, v) 、每一個酬勞向量 $\mathbf{x}$ 以及每一個任意的小聯盟 S ，

都具有 $\mathbf{x} \in \sigma(N, v)$ 可以延伸到 $\mathbf{x}_S \in \sigma(S, v_S^{\mathbf{x}})$ 的情況，則稱 σ 具有一致性

(consistency, CON)。

- 對於每一個賽局 (N, v) 、每一個具有個人合理性的酬勞向量 $\mathbf{x}$ 以及每一個任意

的小聯盟 S 都具有 $\mathbf{x}_S \in \sigma(S, v_S^{\mathbf{x}})$ ，假如以上條件可以延伸到 $\mathbf{x} \in \sigma(N, v)$ 的情

況，則稱 σ 具有反一致性 (converse consistency, CCON)。

佩利格 (Peleg)、索利安諾與摩利亞 (Serrano and Volij) 根據以上的性質分別對核仁提出了公設化結果。

定理一

一、在所有利益可交換的平衡賽局上，核仁是唯一同時符合個人合理性、非空性、超加性及一致性的解。

二、在所有利益可交換的賽局上，核仁是唯一同時符合單人賽局合理性、個人合理性、一致性及反一致性的解。

參、核仁在排球賽事、訓練與選材上的連結與應用

在這一個章節，我們首先利用前述所提出的公設來解釋一些管理學上的現象，之後再利用這些現象來分析如何將核仁應用到運動管理。

根據前述定義二、三的公設定義以及數學式所表達的意義，可以將這些公設轉換成管理學的一些現象如下：

- **有效性：**有效性是指將賽局所產生的資源完全妥善分配給每一個參與者，也就是所謂的『資源完全分配』。
- **個人合理性：**個人合理性是指每一個參賽者經由合作分到的回報會比每一個參賽者單獨產生的效益還多，也就是所謂的『合作比單打獨鬥好』。
- **單人賽局合理性：**單人賽局合理性是指當一個賽局就只有一個人參與進行的時候，所得到的回報就由那個人完全取得，也就是所謂的『一分耕耘一分收穫』。
- **超加性：**在賽局中很多情況必須分開處理，超加性是指一個賽局若因應某些需要而得分開處理的話，所得到的效益應該以合併處理才會因為資源可相互平行支援而產生更多的分配選擇，也就是所謂的『資源共享進而提昇效率』。
- **非空性：**非空性是指一個賽局中若每一個連結都充份有效地合作，就會獲得回報而不致於落空，也就是所謂的『充份有效率地合作就會獲得回報』。
- **一致性：**一致性是指一個賽局中如果每一個進行的環節若是穩定而有效率的話，則任意一個個體或小團體若對於整個體制不滿意時，經過溝通或協調後還是會回歸到穩定而有效率的局面，也就是所謂的『一致及穩定的整體機制』。
- **反一致性：**反一致性是指一個賽局中如果每一個個體或小團體若都經過充份的溝通協調之後即可回歸到穩定而有效率的局面，而毋須所有的個體或團體都得同時溝通協調，也就是所謂的『事半功倍的隨機調整』。

肆、結語與建議

藉由以上章節中理論與應用的論述，賽局理論中的核仁可以成為運動管理的領域中一種有用的分配方法。在賽局理論中，除了佩利格（Peleg）、索利安諾與摩利亞（Serrano and Volij）之外，也有其他的學者專家針對核仁提出許多不同的

公設和公設化，如 Moulin (1985), Tadenuma (1992), Serrano and Volij (1998) 等等。這表示，這些公設化同時也可以被應用到運動管理的領域上。

而另一方面，如同在緒論所提及，賽局理論中存在著非常多的解，包含夏普利(the Shapley value)、不可分割消費均等分配(the equal allocation of nonseparable costs) 等等，這些分配方法在數學上也已經都被賦予了相當多的公設化，如 Myerson (1995), Young (1985), Hart and Mas-Colell (1989), Maschler and Owen (1989) 等等。同樣的，這些解以及相關的公設化同時不僅可應用在選材上，亦可被應用到教育行政及運動管理的領域上。這都是值得再去研究及深入探討的話題。

參考文獻

- Davis M, Maschler M. (1965). The kernel of a cooperative game. *Naval Research Logistics Quarterly* 12:223-259.
- Hart S, Mas-Colell A. (1989). Potential, value, and consistency. *Econometrica* 57:589-614.
- Maschler M, Owen G. (1989.) The consistent Shapley value for hyperplane games. *International Journal of Game Theory* 18:389-407.
- Moulin H. (1985). The separability axiom and equal sharing methods. *Journal of Economic Theory* 36:120-148.
- Myerson R. (1980). Conference structures and fair allocation rules. *International Journal of Game Theory* 9:169-182.
- Peleg B. (1985). An axiomatization of the core of cooperative games without side payments. *Journal of Mathematical Economics* 14: 203-214.

Peleg B. (1986). On the reduced game property and its converse. *International Journal of Game Theory* 15:187-200.

Serrano R, Volij O (1998) Axiomatizations of neoclassical concepts for economies. *Journal of Mathematical Economics* 30:87-108

Shapley LS. (1953). A value for n-person game. In: Kuhn HW, Tucker AW(eds.) *Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies* 28, Princeton University Press, Princeton, 307-317.

Tadenuma K (1992) Reduced games, consistency, and the core. *International Journal of Game Theory* 20:325-334

Application for theoretical selection of the volleyball players based on game theory

En-Cheng Chi

Department of Physical Education, National Pingtung University

Abstract

The purpose of this paper is aim to adopt some game-theoretical results of the core to investigate the relations among some results of the core and the field of the theoretical selection of the volleyball players. The main methods are as follows: First, we introduce some basic mathematical models related to game theory, and plan to extend these models to the framework of the games and the training for the volleyball players. Further, we study the core, some axioms and related axiomatizations proposed by Peleg (1986) and Serrano and Volij (1998). Finally, these axioms and related axiomatizations will be asserted by some rules related to management in the real world. Further, we plan to extend these axioms and axiomatizations to the framework of the games and the training for the volleyball players. The conclusion of this paper shows that the core could be applied to the field of the theoretical selection of the volleyball players. The extended suggestions also point out that other game-theoretical methods may be applied to the field of the theoretical selection of the volleyball players.

Key words : the core, mathematical models, games and training