

幾何證明文本閱讀的眼動研究： 圖文比重及圖示著色效果

陳琪瑤、吳昭容*

幾何證明的文本具有圖示參照的特性。透過眼動追蹤技術可以瞭解圖文的閱讀比重以及圖示著色對閱讀歷程與理解的影響，以探究閱讀幾何證明的圖文整合歷程。本研究採四道國中的幾何證明為材料，操弄附圖上是否著色，以學過但不熟稔幾何證明的 31 位大學生為受試者，蒐集其閱讀幾何證明時的眼動資料，隨後立即進行紙筆回憶測驗。結果發現，(1)受試者有一半的凝視時間落在圖區，且單位畫素凝視時間圖區較文區長，閱讀幾何證明相當依賴讀圖的現象，說明了圖示提供建構與整合各幾何元件空間關係之訊息，且此訊息因空間工作記憶的限制而需重複閱讀。此外，圖示也提供憶取幾何性質之線索，有助於讀者進行橋接論證，顯示讀圖的教學是個值得著力之處。(2)圖示著色縮減關鍵區的初始理解時間，但不影響其回視時間，也未造成回憶表現的差異，顯示著色影響大學生閱讀幾何證明的視覺化歷程，但對幾何推理歷程以及最終的理解記憶影響不大。亦即圖示著色是個可以影響幾何證明閱讀效率的表徵方式，在文本呈現與教學上有其意義。(3)結論處也指出幾何閱讀的眼動研究尚須確認數學詞彙單位、處理圖文來回時意外落點的技術，以及閱讀軌跡的分析方式等基礎研究。

關鍵詞：眼動、幾何證明、數學閱讀

* 陳琪瑤：國立台南大學附設實驗小學教師

吳昭容：國立台灣師範大學教育心理與輔導學系教授（通訊作者）

cjwu@ntnu.edu.tw

Eye Movements During Geometry Proof Reading: Text Contrasting With Figure and the Colored Effects

Chi-Yao Chen & Chao-Jung Wu*

The reading comprehension of geometry proofs necessitates a coherent mental representation of all the information conveyed in the figure and text. Eye movements can be used to assess the perceptual and cognitive processes, and how colored figures affect the integration of text and figures during comprehension. For our experiment, we used four junior high school level geometry proofs with colored/uncolored figures to examine 31 undergraduate students who had learned but have not mastered geometry proofs. First, the participants' eye movements were recorded during reading. A paper-and-pencil recall test was then administered to the participants after the reading procedure. The data reveal that half of the fixations were located on figures, and the proportion of fixations to the pixels of the figures was greater than that of the texts. The results suggested that the reading of geometry proofs depended more on figures that organized the statements using a specific status and provided cues for the geometry proof properties compared to text. Working memory limitations increased the regression time for figures. Additionally, figures provided utility cues for recalling geometric properties, which assisted readers in performing deductions and verifications. Colored figures influenced the visualization of undergraduate students when reading geometry proofs. This reduced the initial reading comprehension time of one theorem, but did not affect the regression time and comprehension exhibited in the recall tests. Valid analyses of eye movements when reading geometry proofs must be supported by definitions of mathematical words and data-screening skills.

Keywords: *eye movements, geometry proof, mathematics reading*

* Chi-Yao Chen: Teacher, National University of Tainan Affiliated Primary School
Chao-Jung Wu: Professor, Department of Educational Psychology and Counseling,
National Taiwan Normal University (corresponding author)

幾何證明文本閱讀的眼動研究： 圖文比重及圖示著色效果

陳琪瑤、吳昭容

壹、緒論

閱讀是個體主動學習並與外界溝通的一個重要管道。而學科閱讀，除了涉及認字、理解兩個歷程（Adams & Lowery, 2007；Österholm, 2006），也與學科的先備知識和學科特殊閱讀技巧有關。數學是一種簡潔、抽象的語言，不僅蘊含與日常生活用語不同的專屬意義，也是通往自然科學、社會科學或管理科學等領域的重要工具，其閱讀包含辨識文字、數學符號、圖示、表格，以及轉化與整合各種表徵以成為專屬數學意義的歷程。

近幾年有多位研究者關注到證明的閱讀理解（左台益等，2011；葉明達、柳賢，2007；Selden & Selden, 2003；Yang & Lin, 2008），他們認為完成幾何證明與讀懂證明有密切的關係，學生在學習以嚴謹的形式進行論證之前，得先能理解與接受一個新定理的證明。而幾何證明的閱讀理解不僅有前述統整數學文本各種表徵的認知歷程，同時還存在著演繹邏輯特有的論述方式，其閱讀歷程更顯特殊。

近年來閱讀歷程的研究，因為眼動追蹤技術的發展，而大幅提昇了我們對文字、篇章、圖片、視覺搜尋等認知歷程的瞭解（de Koning, Tabbers, Riker, & Paas, 2010；Rayner, 1998, 2009），也提供多模態（multimedia）教學上的建議（Jamet, Gavota, & Quaireau, 2008）。數學教材與試題中常見同時包含文字、符號、圖、表的多模態文本，眼動追蹤技術可以協助我們瞭解讀者如何統整數學文本中的不同表徵。

教科書上的幾何證明常見以著色凸顯相等的角或邊長的標記方式，此一設計符應了文獻上一再被驗證的標記效果（signaling effect）（Mayer, 2008）。而 Cheng 和 Lin（2005）以及 Lee 和 Cheng（2007）也發現在幾何論證或證明的圖示部件加以著色，有助學生覺察圖示部件中和解題相關的內隱性質。此外，讀圖的眼動文獻也顯示著色

有助於理解機械圖 (Boucheix & Lowe, 2010) 或加速科學圖文的閱讀整合 (Folker, Sichelschmidt, & Ritter, 2005)。因而本文透過眼動追蹤技術，探究幾何證明閱讀歷程中圖示或文本的閱讀比重，同時操弄幾何圖示上的顏色，用以探討是否有標示效果及其可能的影響歷程。

貳、文獻探討

一、幾何認知活動與證明的閱讀理論

數學語言具有符號化、邏輯化、嚴謹性、抽象性和精簡等特性。幾何證明的理解除了包含數學閱讀所必須的數學語言、符號和圖表的編碼與整合之外 (Barton, Heidema, & Jordan, 2002; Adams, 2003)，還包括數學證明所需的一連串假設、推論等歷程以及對幾何圖示意義建構與理解，其歷程非常繁複。例如 Yang 和 Lin (2008) 指出，幾何證明的閱讀理解應包含：知道術語、符號和圖示的意義；辨別證明中的陳述是定義、前提、幾何性質應用或是結論；根據演繹規則檢查每一步驟；辨明問題的陳述是前提或是結論；發現證明的關鍵點；判斷證明的確實性；判斷每個命題的真偽和普遍性；找出證明和自我預期證明中的衝突部分；修正命題和對陳述提出合理的解釋等部分。Yang 和 Lin 整理相關文獻，同時藉由與數學專家或教師的半結構訪談，對幾何證明閱讀理解提出 RCGP (reading comprehension of geometry proof) 模式，以表層 (surface)、辨識元件 (recognizing elements)、鏈結元件 (Chaining elements) 和膠囊化 (encapsulation) 四個階層來說明幾何證明閱讀的不同理解層次。此四層次中，表層理解層次是指運用概念性和程序性知識解讀術語、符號、圖表的意義；辨識元件層次是從證明的命題中找出內隱的前件、結論，與性質三種元件，用以解析命題的邏輯角色；鏈結元件層次則是以幾何性質聯繫前件和結論，使其論述得以被確認；最後則是膠囊化理解層次，則是將各個鏈結好的前件與結論統整成一個大的論點，以形成完整的論證系統。

在幾何圖示理解部分，Duval (1995) 認為其包含知覺性 (perceptual) 理解、序列性 (sequential) 理解、論述性 (discursive) 理解和操作性 (operative) 理解四部分。知覺性理解是指直接認出由視網膜接收到的圖示訊息，或透過知覺恆常性，重新組織

感官接受器上的訊息，而辨識出圖形特徵；序列性理解是指建構和描述圖示結構時，利用數學性質表徵物件彼此關係之特有的陳述順序，來理解次圖示（sub-figure，即圖示中與解題相關的角或線段等）間的關係；論述性理解是指當圖示中的數學特性不能完全透過知覺性理解時，藉著命題和假設的敘述來說明圖示的幾何性質；操作性理解部分，Duval（1998）認為是視覺在問題解決中所扮演的重要角色，透過此部分，閱讀者可對圖形重新建構，並對解題更具有洞察力。

針對操作性理解，Duval（1999）用視覺化（visualization）來說明：一般視覺僅包含認識（epistemological）和概要性（synoptic）兩種認知功能，而幾何中的視覺化則是一種根基於符號本質，且能透過心智或實際運作來表現彼此關係，或表徵部件間更好組織的一種符號表徵。透過視覺化，幾何圖示理解可能獲得提升。

Gal 和 Linchevski（2010）認為幾何的視知覺與知識表徵（visual perception and knowledge representation, VPR）包含連續的三個階段，而幾何圖示理解困難也可能發生在這三階段。此三階段分別是：(1)組織（organization）階段，指從視覺影像中抽取形狀和元件的早期處理歷程，閱讀者可能受完形原則的限制，在重組、建構圖形內部次圖示意義時受到阻礙，而影響對幾何圖形的掌握，但透過著色或加粗線條可能獲得改善；(2)再認（recognition）階段，透過個體結合特徵和脈絡訊息，決定出由視覺收錄而來的是什麼形狀或元件，此階段包含由上而下（top-down）以及由下而上（bottom-up）的同時認知處理歷程。若儘量將直角的兩邊以水平和垂直方向的原型（prototype）呈現，或以小直角記號標記，則可促進由下而上訊息收錄以及由上而下認知處理歷程，而減少理解困難；(3)表徵（representation）階段，著眼在以感官知覺為基礎的知識表徵（perception-based knowledge representation）具有整合語言和圖像表徵的特性，亦即內在表徵不僅保留感官知覺所觀察到的細節，同時以語彙加以描述、摘要。但因幾何物件以空間位置（spatial position）的方式貯存，而文字的貯存是線性的（linear order），因此這兩種訊息貯存形式間的衝突會導致此階段的圖示閱讀、書寫和理解的困難。改善此階段的圖示理解困難，可透過將重要次圖示依字母順序或一般讀者熟悉順序命名，例如選用 $\angle ABC$ 指稱 AB 和 BC 邊所夾角（而非 $\angle BAC$ 來指稱 BA 和 AC 邊所夾角），或在證明兩圖全等時，減少兩圖間的相對旋轉角度，以減少在重組、建構圖形內部次圖示意義時受到阻礙而影響對幾何圖形的掌握。

就如 Duval（1999）與 Gal 和 Linchevski（2010）所言，理解幾何圖示在證明文本中的意義，涉及從背景中將重要的幾何元件抽離，並觀察幾何元件間的關係。透過圖

示著色，對抗視覺化可能受到完形原則的限制，提升由下而上的訊息擷取，是否能提升幾何證明閱讀的效率或理解呢？而圖示與命題間相關訊息將如何整合以完成幾何證明閱讀理解，是本研究所關心的議題。

二、幾何證明閱讀的實徵研究

由於閱讀幾何證明是高度認知負荷的作業，左台益等人（2011）將複雜的幾何證明以分段的方式呈現，比較分段與未分段的呈現方式對於專家（主修數學的準教師或在職數學教師）和生手（八年級學生）在認知負荷的感受與閱讀理解上的影響。49 位專家與 66 位生手在分段呈現證明文本時，其閱讀意願顯著提高，且閱讀證明時所產生的困難度和所花費的心力也顯著降低，但在閱讀理解的表現上，是否分段並未造成顯著差異。此外，不論證明文本以分段或未分段呈現，專家的閱讀意願與信心指數都顯著高於生手，而其閱讀證明時的困難度和所花費的心力則顯著低於生手，且專家的閱讀理解表現也顯著優於生手。此研究結果呼應了前一小節所述，幾何證明閱讀理解中涵蓋諸多複雜認知歷程，分段呈現幾何證明文本雖顯著降低認知負荷，但不論專家或生手，其最終的幾何證明閱讀理解都不受呈現方式的影響。

除了分段呈現，幾何證明可有多種呈現論證的方式，例如將結論和支撐結論的理由分左右兩欄或不分欄，或者將結論與理由先後呈現。Yang、Lin 與 Wang（2008）以閱讀理解試題探討文本呈現方式、證明的複雜度，以及提問的層次對答題表現的影響。雖然過去的文獻提及左右欄或先提出結果的敘述方式，不利於習慣中文閱讀的本國學生，Yang 等人的結果卻發現，幾何證明文本的呈現方式對於 153 名九年級學生答題品質沒有影響，該變項也不與另外兩個自變項有交互作用。上述兩篇研究結果可能指出幾何文本的呈現方式的確不影響閱讀理解，但也可能僅是因為閱讀理解正確率這樣的測量方法無法敏銳地反映呈現方式的影響。因為即使呈現方式的確影響閱讀理解的難度，但在不限時，且有後續測驗作為目標的情況下，為了能回答問題，受試者會努力統整文本的資訊以正確答題，所以無法從正確率上看到差異。此時，採取閱讀時間或眼動追蹤的指標就比較有機會呈現可能的差異。

關於幾何圖示著色的效果，Cheng 和 Lin（2005）發現要求在兩步驟幾何證明中只能完成部份步驟的國中生，針對已知中所提及之相關圖示部件進行著色，能有助學生看見圖示部件中隱含而和解題相關的重要特性，進而提昇證明的完成率。而 Lee 和 Cheng（2007）也發現，在幾何證明圖示關鍵部分著色後的色卡，雖無法明顯提升六

年級學童幾何論證的層次，但對圖形中隱性性質之覺察或性質間之關連性具有提示作用。此一著色效果和其它知覺的研究一致。過去研究顯示，操弄顏色確實能提高個體對物件的注視時間和頻率（Turatto & Galfano, 2000），而 Folker 等人（2005）在文本左半部以文字說明細胞分裂過程，右半部以圖示方式呈現，結果發現在關鍵文字與對應圖示區塊中著色相較於無著色，學生的閱讀理解表現較佳。

顏色標示在提升閱讀效果的可能理由有二：一是就減低認知負荷的觀點來看，圖文並置的閱讀歷程中，個體為了搜尋與文字內容相關的圖示，必須在工作記憶中保存相關的文字內容，同時在圖示中搜尋語意相關的線索，若在圖片與文章相關內容部分著色，就能減少工作記憶的負荷，進而提升理解效果（Folker et al., 2005）。二則，將圖上所需凸顯的圖示線索加以著色，除了可以由下而上的方式擷取個體注意力，也可使個體訊息的編碼和整合更有效率，因而也提升了理解效果（Gal & Linchevski, 2010）。幾何圖形蘊含著豐富的訊息，圖片中所包含的龐大資訊量常造成學理解圖形的困難。從視覺化的觀點，著色有其理論依據，而教師教學上也常將等長線段或等角上標以相同顏色。因此本研究透過幾何證明中重要步驟相對應的圖示元件加以著色，來提升視覺化的效益，並透過幾何證明的眼動資料與理解記憶表現，以分析著色對幾何證明閱讀之影響。

三、圖文閱讀的眼動研究

在純文字的篇章閱讀（text reading）中，通常涉及兩個基本歷程：詞彙歷程（lexical processes）和理解歷程（comprehension processes）（Sternberg, 2009, p. 383），前者在於辨識字詞，後者則在整合語句或全文的意義。篇章閱讀的眼動文獻（Juhasz & Rayner, 2003；Williams & Morris, 2004）則指出，一個詞彙意義的初始處理階段可以用第一凝視時間（first fixation duration，簡稱 FFD）或第一連續凝視總時間（first gaze duration，簡稱 FGD 或 GD）來測量。前者指的是進入分析區（interest area）後的第一個凝視點的時間，後者則指進入分析區後到離開該區前，不論凝視點為一點或多點的所有時間總和，此二指標都會受到詞頻影響，越常見的詞彙凝視時間越短。而重新分析階段則可用回視率（regression rate）或回視總時間（regressive gaze，簡稱 RG）來測量，此階段和語句或全文的統整有關，具預期性的文章脈絡比不具預期性的文章的回視次數少或時間短。如果以接觸詞彙的 GD 和 RG 兩組眼動指標分別對應到幾何證明閱讀的解碼歷程（decoding processes）和理解歷程，在目前缺乏研究提出相對於一般文字的

一個「詞彙」的數學單位該如何界定之下，欲以眼動資料進行幾何證明閱讀歷程分析存在些許困難。顧及幾何證明歷程中，閱讀者需充分掌握前一命題後，才能進行橋接論證，因此本研究以幾何證明文本之「命題」為單位（詳見參之「五、資料分析與選擇」之（一）之 3 的說明），用以蒐集相關眼動訊息以分析幾何證明閱讀歷程。

文章中加入圖片說明，不僅可以吸引讀者的注意，同時也可提升閱讀動機和理解（Carney & Levin, 2002）。因此，無論是日常生活中的書籍、報章雜誌、平面廣告或是教科書，都常使用圖文並置的方式來傳遞訊息。Hegarty、Carpenter 和 Just（1991）記錄大學生讀圖文並置之滑輪系統時的眼動型態，發現科學圖文閱讀中，受試者建構心智表徵主要是文本主導（text-directed）。隨後，Hegarty（1992）分析大學生閱讀滑輪系統時眼球移動的順序與凝視點兩個眼動指標，發現凝視點會在幾個相關連續的圖區，以及圖文間來回移動，也有重新凝視的情形。這說明了閱讀歷程中，可能受限於工作記憶容量或背景知識不足因素，受試者必須來回檢視，同時對照圖文兩區的概念表徵以完成閱讀理解。此外，該研究也發現整個圖文閱讀的歷程主要由文主導。受試者會先在文區內來回凝視，之後再到與文區相對應的圖區閱讀。而在處理圖區訊息時，凝視點會先停留在局部部件上，待一些部件相關訊息完成解碼後，再整合多個部件彼此相互關係，進而完成整體知識表徵。

Schmidt-Weigand、Kohnert 和 Glowalla（2010）利用圖文兩區的總凝視時間與凝視點，操弄文字或口語呈現文本，以及文本呈現速度之不同，探討大學生閱讀閃電成因圖文時的認知歷程。結果發現受試者花在文本的時間顯著多於圖區，但當文本呈現速度變慢時，圖區停留時間延長，圖文間來回檢索的次數也增加，而在受試者自我控制文本呈現速度下，圖文來回檢索頻率比系統控制速度時高，此結果支持 Hegarty 系列研究中，認為科學圖文閱讀歷程中，文本佔有主導地位。該研究的圖區凝視時間占整體比率在兩次實驗中約在 .24~.41。相較之下，Hegarty（1992）的受試者讀圖的凝視時間比率較高，該研究的大學生受試者讀滑輪系統的圖文凝視時間比率接近各半，此結果可能來自於該研究中，滑輪圖示旁的文字說明遠少於 Schmidt-Weigand 等人之研究。

至於兒童閱讀圖文並置的科學文本時，其讀圖比率如何？Hannus 和 Hyona（1999）以不同能力的 10 歲學童閱讀六篇生物教科書的文本，每個文本包括 3~6 個圖片，包括相片或彩色、黑白繪製的圖。該研究將文本分為文、圖、圖說（figure caption）、空白四個分析區，結果凝視時間總和高能力學童（332.3 秒）比低能力學童（272.3 秒）

來得長，但分配在四區的時間比率則非常相似，文區的凝視時間最多，約佔總時間的 .81，其次是圖說約 .12，圖區的凝視時間僅 .6，顯示對於兒童而言，科學圖文閱讀理解仍是文本主導。

上述研究多以文區或圖區凝視時間來討論文圖的閱讀比重，Rayner、Rotello、Stewart、Keir 和 Duffy（2001）以成人閱讀廣告進行眼動資料的分析時，考量文區或圖區的面積大小不一，僅比較兩區的凝視時間可能產生偏差，因此除了凝視時間和凝視點之外，採用了第三個指標－凝視時間除以分析區畫素（looking times in milliseconds per pixel），透過三個指標之分析結果的交互檢證，得到相當一致的結論。結果發現讀者讀文的比重顯著多於圖區，在不同的廣告中，讀者讀圖的凝視時間約佔總時間的 .30，而單位畫素的凝視時間是文區為圖區的 3~5 倍。

在數學領域中，Epelboim 與 Suppes（2001）是極少數以幾何解題為材料所進行的眼動研究，其研究目的在提出「眼動的幾何推理引擎」(oculomotor geometrical reasoning engine) 模型，用以估計特定受試者解決特定幾何量問題時的視覺工作記憶。該研究以 10 道幾何量的計算題為工具，受試者是三名成人，所有試題的數字都在可心算的範圍內。文本部份以一句一行的方式呈現，每題限時 5 分鐘。解題時不提供紙筆，但要求受試者放聲思考，以便同時蒐集眼動與放聲思考資料。研究發現解題時所需要建構的輔助線，雖然未出現在圖上，但專家受試者能在心智上建構出這條關鍵的輔助線，並在眼動現象上顯現掃瞄的軌跡；相對地生手受試者則沒有此一眼動的軌跡。此外，在口頭報告時的掃視軌跡相當重複（redundant），亦即受試者會一再凝視看過的元件，但口頭報告的內容並不重複相關的訊息。Epelboim 和 Suppes 認為重複的眼動軌跡顯示視覺工作記憶之容量限制，此特性來自於個體必須讓消失的必要訊息能再次進入工作記憶中，而資料分析上也支持這樣的主張。該研究雖然確認了眼動指標可以和放聲思考內容相配合，提供我們瞭解幾何附圖作為解題線索的重要性，但無法提供有關幾何證明中，文本的命題與附圖在論證過程中各自扮演角色的參考資料。

相較於科學文本使用較多生活或書面語言，幾何證明文本多為數學符號；而科學圖示常有相片或日常生活的物件，幾何證明圖示則以非日常生活中可見之幾何圖形來表徵。閱讀歷程中科學文本多由文來主導，幾何證明中卻常受限於工作記憶容量，讀者常需在圖文間來回檢視，以將訊息維持在工作記憶中來進行論證。幾何證明文本與科學文本的圖文形式存在著差異性。

綜合上述文獻，本文聚焦在閱讀幾何證明文本時的圖文閱讀比重以及圖示的著色

效果。透過眼動儀所提供的凝視位置與時間的訊息，本文推敲讀者在閱讀幾何證明時圖示與文字符號的重要性及可能的功能，而透過操弄幾何圖示的有無著色，一則能進一步探究幾何文本閱讀的本質，也能瞭解著色是否真的影響幾何證明的閱讀理解或其歷程。研究問題如下：

- (1) 幾何證明文本的閱讀歷程中，圖文訊息的比重為何？
- (2) 幾何圖示有無著色標示對閱讀中的眼動指標有何影響？
- (3) 幾何圖示有無著色標示對閱讀後的回憶量有何影響？

參、研究方法

本研究分兩階段進行，先在閱讀階段蒐集即時性的眼動資料，隨後在紙筆測驗階段要求受試者完成相同的幾何證明題。紙筆測驗一方面可使受試者用心閱讀，另一方面也能評估受試者閱讀理解的情況。

圖文閱讀比重是以讀者在同一證明題上分佈於圖區或文區的眼動指標加以分析。而幾何圖示的著色效果，則採用操弄材料的實驗法，使每一證明題均有著色和未著色兩種版本，同一名受試者只接受其中一種版本，用以比較著色相對於未著色對眼動指標以及閱讀後回憶表現的影響。

一、受試者

參與本研究的 35 名受試者，來自北部兩所大學的大學生與研究生，他們多半來自教育學院，不包括數學或數學教育系，且對於國中學過的幾何證明題已不熟悉。經刪除校正過程無法完成者一名、偏移嚴重者一名，以及眼動資料蒐集後發現凝視點出現諸多落在非文區也非圖區的受試者兩名，最後眼動資料保留 31 名有效樣本。其中部份受試者閱讀文本末尾處出現飄移現象，分析著色效果時因需使用範圍較小的分析區塊而被刪除，故分析著色效果時的有效樣本數較少，詳見「五、資料選擇與分析」。

二、研究材料

本研究材料包含兩部分。一為呈現給受試者閱讀的幾何證明題的問題與示範證明，另一則為蒐集受試者回憶表現的紙本。

(一) 幾何證明題的題目與示範證明

為能更廣泛蒐集幾何證明閱讀的相關眼動行為，本研究之幾何證明文本材料選自康軒出版社（2005）與翰林出版社（2006）國中教材第四、五冊，內容包括三角形全等性質、角平分線，以及圓外角性質、圓周角性質等，並與一位數學教育教授及兩位國中數學教師討論後，選擇四道不同證明題（見圖 1 至 4），難度依序為易、中、中和難。每題的材料包括一頁的題目與一頁的示範證明。題目部分和一般幾何證明題類似，包括了已知條件、求證和附圖，示範證明則類似解答一般，除了上述三個部分外還提供了證明步驟。

題目之附圖均無著色，示範證明的附圖則分為有、無著色兩種狀況。著色的附圖中，若與文本證明步驟有對等關係，則在其相對圖示位置著色。如果同一題有兩個對等關係，則以不同顏色區隔。例如題一之 \overline{AB} 和 \overline{AD} 均著上紅色， \overline{AG} 和 \overline{AE} 則著上綠色。具對等關係的證明步驟，則稱做關鍵命題，本文以虛線方框標在圖 1 至 4 上，為該題證明步驟中，橋接論證的重要步驟，亦為文本閱讀眼動資料之分析區塊。

(二) 幾何示範證明回憶測驗

回憶測驗的型態類似於一般常見的證明題，題目上呈現已知、求證以及附圖，所有附圖均無著色（參見附錄一，示範證明部份為解答及計分準則）。為避免受試者單靠死記就能得分，回憶測驗的試題與圖示並未複製原試題，部分試題中的點或角改以不同英文字母標示，部分附圖並進行鏡像或上下翻轉。

已知：如右圖， $ABCD$ 、 $AEFG$ 均為正方形。

求證：試證明 $\triangle ADE \cong \triangle ABG$

證明：

1. $\because ABCD$ 、 $AEFG$ 均為正方形

$\therefore \overline{AB} = \overline{AD}$ ， $\overline{AE} = \overline{AG}$

2. $\because \angle DBA = 90^\circ = \angle GAE$

$\therefore \angle EAD = \angle BAD + \angle 1 = \angle GAE + \angle 1 = \angle GAB$

故 $\triangle ADE \cong \triangle ABG$ (SAS 全等)

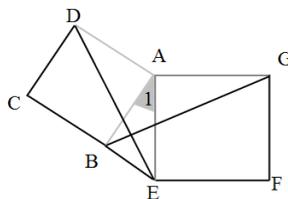


圖 1 SAS 性質 (題一)

已知：如右圖，兩弦 \overline{AB} 與 \overline{CD} 的延長線交於圓外一點 P

求證： $\angle P = \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD})$

證明：

1. $\angle 1 = \angle P + \angle 2$ (三角形外角性質) …①

2. $\angle 1 = \frac{1}{2}\widehat{AC}$ (圓周角) … ②, $\angle 2 = \frac{1}{2}\widehat{BD}$ (圓周角) … ③

3. 將 ②、③ 代入① 知

$$\frac{1}{2}\widehat{AC} = \angle P + \frac{1}{2}\widehat{BD}$$

$$\angle P = \frac{1}{2}\widehat{AC} - \frac{1}{2}\widehat{BD}$$

$$\text{故 } \angle P = \frac{1}{2}(\widehat{AC} - \widehat{BD})$$

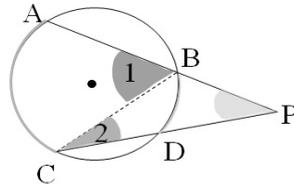


圖2 圓外角性質 (題二)

已知：如右圖，圓的兩弦 \overline{AB} 與 \overline{CD} 相交於P點

求證： $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PD} \times \overline{PC}$

證明：

1. $\triangle PAC$ 與 $\triangle PDB$ 中

$$\because \angle 1 = \angle 2$$

$$\angle 3 = \angle 4 \text{ (同一弧所對之圓周角相等)}$$

$$\therefore \triangle PAC \sim \triangle PDB \text{ (AA相似)}$$

2. $\because \triangle PAC \sim \triangle PDB$

$$\therefore \overline{PA} : \overline{PC} = \overline{PD} : \overline{PB}$$

$$\text{故 } \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PD} \times \overline{PC}$$

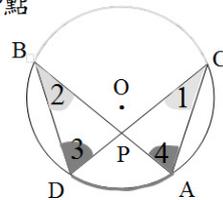


圖3 圓周角性質 (題三)

已知： $\triangle ABC$ 中， \overline{AP} 平分 $\angle BAC$

求證： $\overline{BP}:\overline{PC} = \overline{AB}:\overline{AC}$

證明：

1. 延長 \overline{AP} ，在 \overline{AP} 上取一點 D，使 $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$

$\because \overline{BD} \parallel \overline{AC}$ ， $\angle C = \angle 4$

$\angle 1 = \angle 3 \cdots \textcircled{1}$ (內錯角相等)

$\therefore \triangle APC \sim \triangle DPB$ (AA相似)

2. $\because \triangle APC \sim \triangle DPB$

$\therefore \overline{AC}:\overline{PC} = \overline{DB}:\overline{PB} \cdots \textcircled{2}$ (相似三角形，對應邊成比例)

3. $\triangle ABD$ 中， $\because \overline{AP}$ 平分 $\angle BAC$ ， $\therefore \angle 1 = \angle 2 \cdots \textcircled{3}$

由 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{3}$ 知 $\angle 2 = \angle 3$ ， $\overline{AB} = \overline{BD} \cdots \textcircled{4}$

將 $\textcircled{4}$ 代入 $\textcircled{2}$ 知 $\overline{AC}:\overline{PC} = \overline{AB}:\overline{PB}$

故 $\overline{BP}:\overline{PC} = \overline{AB}:\overline{AC}$

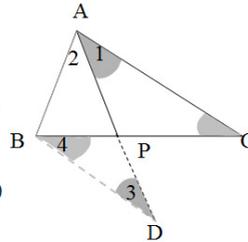


圖4 三角形角平分線性質 (題四)

三、儀器設備

本研究使用了呈現實驗材料與蒐集眼動資料兩組設備。前者包括一台 PC 電腦、 1024×768 (pixels) 解析度之 19 吋螢幕，內緣長寬約 $378\text{mm} \times 215\text{mm}$ ，以及用來撰寫實驗程序的套裝軟體—Experimental Builder (EB)；後者則包含 Dell OptiPlex Gx620 之相容個人電腦設備、取樣率為 250~1,000 赫茲的眼球注視追蹤系統 Eyelink 1000，以及 Chimei 19PS 顯示器來呈現實驗材料，並同時紀錄眼球凝視點的座標位置、駐留時間等資料。受試者如同一般閱讀以兩眼同時觀看，但儀器只記錄受試者右眼眼動型態及反應時間。

由於本研究屬認知類型，因此採用 SR Research 公司對認知型實驗所建議之設定值來進行實驗。採用三種眼球跳動閾值標準：移動量超過 0.2° 視角、移動速度 (velocity) 超過 30deg/sec 或移動加速度 (acceleration) 超過 8000deg/sec 。

四、研究程序

實驗採個別施測，第一階段先蒐集受試者閱讀幾何示範證明材料之眼動資料，第

二階段則蒐集受試者對各題的回憶量。為減低試題先後呈現順序所造成的影響，其中一半的題本順序是題一至四，另一半的順序則為題三、四、一、二。四題中有兩題附圖有著色，另兩題無著色，兩種題序均各有四種有 (C) 無 (N) 著色的組合：NCNC、CNCN、NCCN、CNNC。每個受試者隨機分派到上述八種版本之一，回憶測驗的版本則和該名受試者閱讀示範證明所呈現的題序相同。

正式閱讀幾何證明文本前，參與者坐在螢幕前約 54 公分處，螢幕中心與參與者眼睛約成水平線。首先進行九點校正工作，通過則開始正式實驗，每名受試者接受被分派到的版本。畫面首先呈現指導語，同時配合語音說明施測程序。接著出現幾何證明題的題目，25 秒後畫面自動轉換成示範證明，待受試者自行評估已充分理解示範證明內容後，按任意鍵轉換畫面。在蒐集下一次嘗試（即另一題）的眼動資料之前，儀器會進行飄移校正（drift correction）以修正眼球追蹤儀器設備可能產生的飄移誤差。在蒐集完四個嘗試資料後，結束眼動實驗的階段。

蒐集受試者在四題閱讀之眼動資料後，立即進行回憶量的紙本測驗。在不限定時間下，要求受試者盡可能地完成先前閱讀的證明題。

五、資料選擇與分析

（一）眼動資料

1. 樣本之選擇

本研究眼動資料共有 31 名有效樣本，由於眼動實驗敏感度高，部分受試者在閱讀至末段時有些微飄移現象。此現象通常輕微，無礙於研究者判斷其凝視點落在圖區或是文區，所以分析圖文兩區的眼動數據，仍保留 31 名受試者的資料。若欲進一步分析更精細的數學語句，就必須刪除因飄移而無法精確判斷凝視點落在哪一行的眼動資料。經研究者逐題篩選後留下 19~26 人的資料（題一 19 人、題二 26 人、題三 26 人、題四 23 人），用於後續章節中關鍵命題著色效果之分析。

2. 整體之眼動指標

首先，考量視神經資訊觸接的限制，依照一般眼動資料常用的判準（柯華葳、陳明蕾、廖家寧，2005），排除 100 毫秒以下的凝視點資料。其次，凝視時間是純文本或圖文閱讀研究常用的指標，故本研究整體閱讀歷程的分析主要以凝視時間為依變項，並以圖區總凝視時間佔整體比率作為分析圖文閱讀比重的指標之一。第三，參考

Rayner 等人 (2001) 的作法，以圖、文的總凝視時間 (以毫秒為單位) 分別除以兩區的面積 (以畫素為單位)，作為圖文閱讀比重的另一個指標，以下稱為「單位畫素凝視時間」。

3. 歷程分析之眼動指標

純文本的閱讀常以 GD 作為對詞彙進行初始處理以形成表徵的指標，而幾何證明文本閱讀中，需參照圖示提供的空間關係，方能對一個命題形成基本的表徵，因此幾何文本閱讀中常出現頻繁的圖文參照。為探討對應圖區之著色是否影響文區命題形成表徵之效益，本研究界定一個數學命題的「初始理解時間」為讀者初步看懂命題含意、含圖文整合的閱讀歷程。意即以文區某一數學命題為分析區，其初始理解時間的起點始於受試者凝視點首次進到分析區，包含在圖與該分析區來回整合的凝視點，直至前往文區其他分析區為止。圖 5 為關鍵命題的初始理解階段之示意圖。

已知：如右圖， $ABCD$ 、 $AEFG$ 均為正方形。

求證：試證明 $\triangle ADE \cong \triangle ABG$

證明：

1. \because $ABCD$ 、 $AEFG$ 均為正方形

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AD}, \overline{AE} = \overline{AG}$$

2. $\because \angle DAB = 90^\circ = \angle GAE$

$$\therefore \angle EAD = \angle BAD + \angle 1 = \angle GAE + \angle 1 = \angle GAB$$

故 $\triangle ADE \cong \triangle ABG$ (SAS 全等)

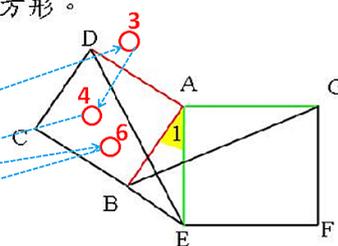


圖5 關鍵命題初始理解階段的示意圖

圖上虛線方框為分析區，圓圈為受試者閱讀的凝視點，數字則為凝視順序。本示意圖關心的分析區為命題 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，是故自凝視點進入分析區開始，包含後續來回閱讀而落入文或圖上的凝視點 (含點 1~點 7)，為 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 此分析區的初始理解時間，離開並前往其他分析區的凝視點 (如點 8)，或是其後再返回分析區的后續各點，都不納入。該題有三個關鍵命題，本研究以其各自的初始理解時間的加總做為此題關鍵命題之初始理解時間。至於關鍵命題的「回視時間」，即離開該分析區之後再次返回的凝視點的加總，亦即以閱讀關鍵命題的所有凝視點的加總扣除初始理解時間。

分析此一資料時，除了因凝視點飄移而刪除一些受試者資料之外，研究者也發現圖文參照的閱讀行為會出現文圖區域轉換後的第一個點與其後各點不在同一個分析區，可能代表從文到圖（或圖到文）的第一個凝視點無法精確落到讀者意圖進入的區域，因此研究者以逐一檢視受試者資料的方式刪除這類意外落入關鍵命題區的凝視點，其餘較為連續的資料才作為關鍵命題的理解時間。

（二）紙本回憶率的計算

回憶率依據是否能回憶出各示範證明的各步驟來計分，題一、二和三的證明步驟較少，區分成五步；題四則為九步，各題計分準則列於附錄一的解答上，每一方框為一個步驟。回憶正確率以每位受試者可以回憶該題的步驟數當分子，該題的步驟總數為分母，換算成百分比。

肆、研究結果與討論

一、不同試題的難度比較

為進行後續研究結果的討論，本小節呈現 31 名受試者之紙本回憶率，以作為證明題難度的指標。四題平均正確率分別為 95%、75%、75%，及 49%。以每名受試者各題的回憶正確率為依變項，進行單因子受試者內變異數分析，發現試題效果達顯著， $F(3, 90) = 12.47$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .294$ 。事後比較顯示題一的正確率顯著高於其他三題（ $ps < .05$ ），題二與題三無差異，題四的正確率則顯著低於其他三題（ $ps < .01$ ），此結果與研究前專家（見研究材料）對試題難度之評估一致。

二、不同試題下圖區與文區閱讀比重的比較

31 名受試者在四道試題的題目與示範證明中，其圖文兩區總凝視時間、整體總凝視時間、圖區凝視時間佔整體比率，圖區面積佔整體比率，以及圖文兩區的單位畫素凝視時間，見表 1。由於圖區和文區凝視時間佔整體比率互為消長，故表中未列文區凝視時間佔整體比率。題目在 25 秒的閱讀時限內，各題的平均整體總凝視時間都在 19~21 秒間；示範證明因未限時，各題的平均整體總凝視時間隨受試者自由閱讀而異，

初步可以看出題四的閱讀時間（111 秒）比其它三題（約 40 幾秒）來得長，單位畫素凝視時間也高於其他三題。

以表 1 的總凝視時間與單位畫素凝視時間分就題目與示範證明兩部份進行圖文（2）× 試題（4）之完全相依樣本二因子變異數分析。由於此一分析主要關心圖文的閱讀比重，試題間的比較不是關鍵，若交互作用達顯著，單純主要效果的分析僅進行圖文在各題的效果，而不進行試題在圖或文的效果。

表1 圖區或文區在四道題目與示範證明的總凝視時間（秒）與比率

	題一	題二	題三	題四
題目				
圖區總凝視時間	12.40	8.18	10.54	9.06
文區總凝視時間	8.07	11.72	9.63	10.61
整體總凝視時間	20.47	19.90	20.17	19.67
圖區凝視時間佔整體比率	.61	.41	.52	.46
圖區面積佔整體比率	.53	.42	.44	.46
圖區單位畫素凝視時間	.26	.21	.31	.21
文區單位畫素凝視時間	.19	.21	.22	.27
示範證明				
圖區總凝視時間	20.73	15.68	19.56	48.06
文區總凝視時間	20.53	25.95	24.37	63.32
整體總凝視時間	41.26	41.43	43.93	111.38
圖區凝視時間佔整體比率	.48	.38	.44	.43
圖區面積佔整體比率	.30	.19	.24	.17
圖區單位畫素凝視時間	.41	.39	.57	1.32
文區單位畫素凝視時間	.17	.15	.22	.36

（一）題目

閱讀題目之總凝視時間的二因子變異數分析結果顯示，圖文與試題的交互作用達顯著， $F(3, 90) = 22.11$ ， $p < .001$ ， $\eta^2 = .42$ ；單純主要效果的圖文比較方面，題一圖

區的總凝視時間顯著長於文區， $F(1, 30) = 32.61, p < .001, \eta^2 = .52$ ；題二則相反，文區顯著長於圖區， $F(1, 30) = 15.31, p < .001, \eta^2 = .34$ ，題三與題四未顯著。單位畫素凝視時間的圖文與試題之交互作用亦達顯著， $F(3, 90) = 16.70, p < .001, \eta^2 = .36$ ；題一圖區的單位畫素凝視時間顯著高於文區， $F(1, 30) = 15.84, p < .001, \eta^2 = .35$ ，題二無顯著差異，題三圖區顯著高於文區， $F(1, 30) = 26.42, p < .001, \eta^2 = .47$ ，題四則相反，文區顯著高於圖區， $F(1, 30) = 10.87, p < .005, \eta^2 = .27$ 。顯示受試者在限時間閱讀題目時，花在圖文兩區的時間分布受題目特性影響，並無整體趨勢。橫跨試題之比較非本研究關心之議題，故不進行試題之單純主要效果比較。

(二) 示範證明

示範證明的總凝視時間之結果顯示，圖文與試題的交互作用達顯著， $F(3, 90) = 16.80, p < .001, \eta^2 = .36$ ；單純主要效果的圖文比較方面，除題一未顯著外，題二 $F(1, 30) = 38.93, \eta^2 = .57$ 、題三 $F(1, 30) = 10.91, \eta^2 = .27$ 、題四 $F(1, 30) = 34.08, \eta^2 = .53$ ($ps < .01$)，在文區的總凝視時間均顯著長於圖區。單位畫素凝視時間的圖文與試題交互作用達顯著， $F(3, 90) = 55.28, p < .001, \eta^2 = .65$ ；單純主要效果的圖文比較方面，四題的圖區單位畫素凝視時間皆顯著大於文區，題一 $F(1, 30) = 60.95, \eta^2 = .67$ 、題二 $F(1, 30) = 62.21, \eta^2 = .68$ 、題三 $F(1, 30) = 91.15, \eta^2 = .75$ ，與題四 $F(1, 30) = 127.88, \eta^2 = .81, (ps < .01)$ 。

從上述（一）讀題的結果可以發現，在僅呈現條件與求證，而無示範證明內容，且限時閱讀的情況下，圖文的凝視時間或單位畫素凝視時間並無一致的趨勢，隨題目而異；而依據（二）示範證明的結果，雖然多數的題目是文區的凝視時間顯著較圖區長，然因圖區面積比率較低（.17~.30），四題之圖區的單位畫素凝視時間均顯著較文區大；且圖區凝視時間佔整體約有.38~.48 的比率，顯示幾何證明閱讀中讀圖比率較文獻上科學圖文閱讀的讀圖比率高。

三、著色對示範證明之眼動指標的影響

本小節分兩部分來探討操弄附圖著色對閱讀幾何證明文本造成的影響。第一部分以文圖兩區的凝視時間當作指標，31 位受試者的資料列入分析。第二部分以閱讀關鍵命題含參照圖示的時間當作指標，考量凝視點偏移的問題，此處以篩選後的 19~26 位受試者資料進行分析。由於各試題篩選後的受試者人數不一，且每位受試者各接受

兩題著色題與兩題無著色題，著色與否跨四題並非受試者間變項，因此逐題以著色與否為受試者間變項，圖文為受試者內，進行二因子混和設計變異數分析。

(一) 圖文兩區的著色效果

表 2 為閱讀四道示範證明的總凝視時間，每題閱讀圖示著色題本的受試者為 15 或 16 人，逐題以圖文 (2) × 著色 (2) 進行混和設計的二因子變異數分析。由於圖文的主要效果在上一節已探討過，故此處僅關注著色的主要效果與交互作用。結果四題的交互作用均未顯著，而著色主要效果僅題四顯著， $F(1, 29) = 4.45$ ， $p = .044$ ， $\eta^2 = .13$ ，受試者在題四附圖著色下，不論圖區或文區其凝視時間均較無著色短。

表2 示範證明圖文兩區在附圖有無著色下的總凝視時間 (秒)

	有無著色	圖區	文區	總和	F值
題一					
	有 ($n = 16$)	21.10	19.71	40.81	0.02
	無 ($n = 15$)	20.33	21.39	41.72	
題二					
	有 ($n = 15$)	14.91	23.82	38.73	0.88
	無 ($n = 16$)	16.40	27.94	44.34	
題三					
	有 ($n = 16$)	20.95	28.18	49.13	2.25
	無 ($n = 15$)	18.08	20.30	38.38	
題四					
	有 ($n = 15$)	38.27	56.91	95.18	4.45*
	無 ($n = 16$)	57.23	69.33	126.56	

* $p < .05$ ** $p < .01$

(二) 關鍵命題的著色效果

由於附圖著色位置僅針對文區中有對等關係的分析區，即關鍵命題（見圖 1 至 4 的虛線方框），表 2 的凝視時間包含了閱讀非關鍵命題的時間，可能會稀釋著色效果，而且著色的效果若在協助文本的閱讀理解，則節省的閱讀時間可能出現在閱讀關鍵命題，也可能在參照圖區的時間上，故依據前文「歷程分析之眼動指標」分就各題關鍵區的初始理解時間和回視時間，考驗有無著色對於理解關鍵命題之兩種階段的影響。

表 3 左欄呈現四題示範證明在有無著色下的關鍵命題的總凝視時間，逐題進行單

因子變異數分析，結果與前一小節使用全文本時之結果相似，僅題四差異達顯著， $F(1, 21) = 4.58$ ， $p = .044$ ， $\eta^2 = .18$ ，受試者在附圖著色下其凝視時間較未著色短。然其著色效果趨勢逐漸明顯，題一和題二呈現著色的理解時間較無著色較短的趨勢。

進一步逐題以單因子變異數分析比較有無著色對關鍵命題之初始理解時間的影響，結果除了題三未顯著外，其餘三題都是著色的時間顯著較無著色的短，題一 $F(1, 17) = 5.01$ ， $p = .039$ ， $\eta^2 = .23$ ；題二 $F(1, 24) = 11.88$ ， $p = .002$ ， $\eta^2 = .33$ ；題四 $F(1, 21) = 12.65$ ， $p = .002$ ， $\eta^2 = .38$ 。而回視時間則四題均無顯著差異。顯示著色效果主要在凸顯圖區相對於文本關鍵命題中幾何元件的空間關係，而減少了閱讀關鍵命題以形成初始空間表徵的時間，但對後續再閱讀以理解前後文邏輯性關連，則沒有顯著的影響。

表3 關鍵命題在附圖有無著色下的凝視總時間、初始理解時間，及回視時間（秒）

	有無著色	總凝視時間	初始理解時間	回視時間
題一				
	有 ($n = 10$)	21.12	8.80^a	12.32
	無 ($n = 9$)	28.23	12.37	15.85
題二				
	有 ($n = 11$)	19.85	10.64	9.21
	無 ($n = 15$)	26.56	15.21	11.35
題三				
	有 ($n = 11$)	24.02	3.77	20.25
	無 ($n = 15$)	19.81	3.16	16.66
題四				
	有 ($n = 12$)	42.60	4.22	38.38
	無 ($n = 11$)	59.79	8.66	51.12

a: 表中為粗體數字者，表示有無著色的時間達顯著差異。

表 3 另一個值得注意的是，總凝視時間中初始理解與回視兩個階段的比重，各題不同，最為困難的題四其回視時間佔總凝視時間的比率近 .90。

四、不同試題下著色對回憶率的影響

閱讀著色與無著色版本之受試者事後的回憶正確率見表 4，各題兩種版本各有 15 或 16 名受試者，合計 31 名。分就四題進行獨立樣本變異數分析，結果發現雖然著色

版的正確率有較無著色版高的趨勢，但四題的著色效果均未達顯著，顯示幾何附圖上有無著色對事後回憶率無顯著影響。

表4 四題在著色與無著色兩種版本下的事後回憶正確率（%）

	著色	無著色	平均	<i>F</i> 值
題一 ^a	96.25	94.67	95.48	0.26
題二 ^b	80.00	71.25	75.48	0.33
題三 ^a	75.00	74.00	74.52	0.01
題四 ^b	53.33	44.38	48.71	0.36

^a：著色組人數 16，無著色組人數 15；^b則相反。

伍、結論與建議

本研究根據大學生幾何證明閱讀歷程所蒐集的眼動資料，有下列幾點結論：

一、閱讀幾何證明相當依賴讀圖

幾何證明與科學圖文都具有圖文並置的特性，然而本研究顯示幾何證明有著較高的讀圖比率，顯示圖示在幾何證明中所扮演的角色不同於科學文本。本研究的大學生受試者在閱讀幾何證明的圖文時，圖區凝視時間佔整體的比率在 .38~.61 之間，高於科學圖文閱讀相關眼動研究之比率，甚至比廣告來得高（Rayner, et al., 2001）。考量圖區與文區的面積不同，本研究以單位凝視時間加以比較，則四題均是圖區的單位畫素凝視時間（.21~1.32）顯著較文區（.15~.36）來得長，顯示受試者之閱讀仰賴知覺刺激訊息密度較低的幾何圖示，而非以數學語言、符號等逐行敘寫、提供了較高知覺訊息刺激的文區。研究者認為此現象是因幾何證明圖示所扮演的兩種重要角色，一是提供幾何元件的空間關係，使得文本的語意可被理解；二是提供憶取幾何性質的線索，以協助讀者進行橋接論證，然因工作記憶的限制，讀者必須在文圖間來回凝視才能保留必要的圖形心像，因此圖示在幾何證明的閱讀比重就相當高。

以題一為例來說明圖示提供幾何元件空間的角色。「已知：如右圖，ABCD、AEFG 均為正方形」，兩個正方形的空間關係顯然是交由圖示負責，讀者從文本僅能得知兩

個正方形共用了點 A，至於兩正方形間的大小、配置等關係皆無法得知。在「求證： $\triangle ADE \cong \triangle ABG$ 」時，雖然明確地指出有待求證的是兩個三角形全等，且從文本中知道其中有一為共同點 A，點 D 的對應點是點 B，點 E 的對應點是點 G，但到底這些點和原先的正方形之間的關係如何，很難從這麼有限的文本中獲知，也因此幾何元件之間的關係必然得在圖示中尋找。示範證明中，以本研究前文圖 5 的眼動資料為例，當受試者閱讀第一個關鍵命題 $AB = AD$ 時，單純由文本所提供的 AB 等於 AD ，知道所指稱的是正方形中共用點 A 的兩邊，但卻無法得知此二線段在整個圖示中與其他幾何元件間的空間關係。因此，研究中的受試者在讀完 AB 後，隨即進入圖區參照 AB 所在位置，之後回到文區繼續讀完 AD ，又再回到圖區檢索 AD ，完整建構此二線段在整體圖示中的空間關係，以完成此命題之初始理解歷程，方能進入下一命題繼續閱讀。

同樣以題一說明在工作記憶容量的限制下，圖示提供憶取幾何性質的線索，以協助讀者進行橋接論證之現象。當讀者讀到第三關鍵命題 $\angle BAD + \angle 1 = \angle GAE + \angle 1$ 時，因受工作記憶容量限制，若要維持住 $\angle BAD$ 的訊息直到命題末尾「 $\angle 1$ 」，完成命題的理解，讀者需在圖文間來回檢視。而且從最困難的題四與另外三題之回視時間的比較，可發現回視時間與推理的難度有關，其論證理解的難度較高的題目，回視時間占總凝視時間的比率也越高。這樣的 eye-tracking 資料和 Yang 和 Lin (2008) 的 RCGP 模式的主張一致，該理論認為鏈結元件和膠囊化理解層次中，由於受限於認知資源，閱讀者需在圖文間來回檢視，以在工作記憶中保留所需的相關訊息，來進行邏輯論證。而 Duval (1995) 也主張在序列性、論述性和操作性理解中，透過文本對圖示元件關係陳述的先後，或以文本中的命題和假設來說明圖示，甚至利用視覺化來協助理解圖示，由此可預見幾何的認知作業依賴圖示比率應高於文區。

然而眼動型態深受文體、詞頻等文本特性以及先備知識或閱讀能力等讀者特性的影響，上述現象僅來自大學生閱讀四題國中數學程度的幾何證明題，若推論步驟數更多，或幾何圖示更為繁複，抑或讀者為國中生，其圖文閱讀比重的現象是否相似，仍有待後續研究探討。

二、圖示著色影響大學生的閱讀歷程，但未影響事後回憶的表現

依據文獻探討，顏色標示可以減少個體搜尋歷程中的工作記憶負荷，或者有效擷取個體注意力而促進由下而上與由上而下間的認知整合，抑或能對抗完形原則。而教

科書上的幾何證明也常見以著色凸顯相等的角或邊長的標記方式。

本研究的著色效果，在整個文本和與著色有關的關鍵命題之凝視時間上，僅在難度最高之題四達顯著，但若再將關鍵命題總凝視時間區分為第一次閱讀關鍵命題時形成空間表徵的「初始理解時間」和之後再次回到該命題的「回視時間」，則可發現在初始理解階段之凝視時間，除題三未顯著外，其餘三題都是著色的時間顯著較無著色的短，而所有四題的回視時間均無著色效果，這說明了著色效果可減少初始空間表徵建構階段的時間，但對後續命題間統整的影響有限。

圖示在初始空間表徵階段所扮演的角色，如前節所述乃在提供幾何元件空間關係，與 Duval (1999) 的視覺化歷程較為有關。同樣以前文圖 5 來說明。讀者首次進入 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 後，必須參照圖示方能掌握兩線段的位置與關係，同以紅色標示的 \overline{AB} 和 \overline{AD} ，快速擷取了受試者的注意力，因此受試者從文區眼跳到圖區，容易找到這兩個幾何元件。同時在諸多幾何元件中以顏色突顯 \overline{AB} 和 \overline{AD} 在正方形 ABCD 中的空間位置，有助於閱讀者突破完形原則的限制，而能在更短的凝視時間下確認 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 。此一著色的功能就 Gal 與 Linchevski (2010) 的觀點，被歸為三階段中最早的組織階段，此一階段以由下而上的知覺成份為主。此一效果在題一、二、四均顯著，但題三未達顯著，可能與題三著色過於複雜有關。題三相同著色的圓周角（圖 3 中之 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ ），與另一著色之另兩個圓周角分別共用一邊（圖 3 之 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ ），且和對應之 AD 弧間出現另一著色圓周角 $\angle 3$ ，因此使著色效果未能顯著。

而在後續回視階段，圖示的主要任務如前文所述，是在工作記憶容量的限制下提供憶取幾何性質的線索，以協助讀者進行橋接論證，與 Duval (1999) 的推理歷程較為有關。以題一的關鍵區為例，讀者可能在閱讀到 $\triangle ADE \cong \triangle ABG$ (SAS 全等) 時回視 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 等三個關鍵區，用以確認關鍵區提供了結論成立的前件。回視的重點在於確認兩個三角形的確具備兩等邊夾一等角的條件，此時閱讀重點在於確認前文各命題的邏輯角色。至於橋接論證所必須之次圖示的關係（哪個邊與哪個邊相等），此時已建構完成，著色自然就不再能扮演重要的角色。其次，從最困難的題四回視時間占總凝視時間的比率非常高，也可以支持回視時間和辨識各命題的邏輯角色、統整各命題以理解論點有密切的關係。

前述著色縮減初始理解時間，但不影響回視時間的現象，若放在 Gal 與 Linchevski (2010) 的理論脈絡下，可從著色促進了圖示的組織和再認兩個階段加以解釋。將兩個相等的角或邊著上相同顏色，使之容易成為視覺焦點而與其它的背景區

隔開來，而且因為相似性原則使同色的幾何元件容易被群集在一起，而掌握二者相等的關係。若在 Yang 和 Lin (2008) 的 RCGP 模式下，著色可解讀為僅有促進表層理解的功能，使讀者解讀幾何元件的速度較快，並無提昇辨識元件邏輯角色、在論證過程中鏈結元件的功能。

至於著色效果在事後回憶率之影響未達顯著，研究者認為本實驗之受試者為大學生，在被告知將以紙本評量其閱讀成效時，合作的受試者會在閱讀過程中儘可能讀懂文本，亦即以較長的閱讀時間來達成閱讀理解的目標。因此在難度較低的證明題上，未著色雖然讓幾何證明的視覺化較為困難，但閱讀能力純熟又合作的大學生受試者，會以較長的凝視時間來完成圖形心像的建構，因此只會顯示出閱讀時間的差異，而不會在最終的閱讀理解與記憶上顯現差異。而在難度較高的證明題上，隨機分派的著色和無著色組可能都有類似比率的受試者遺忘或欠缺相關的幾何知識，例如缺乏數學符號的背景知識，或無法掌握圖示特有的表徵格式，或特定的幾何性質（例如同弧等角），抑或無法連結前提與結論間的關係，都將無法理解並記得整個論述。此時，圖區的著色雖影響了受試者的眼動模式，卻不足以影響受試者既存的相關背景知識或演繹推理能力，因此事後回憶量不足以超越組內的受試者變異而產生組間差異。所以，圖示著色只影響大學生幾何證明閱讀的效率（*efficiency*），但不影響其效益（*effectiveness*）。

三、幾何讀圖比率及圖示著色在文本設計與教學上的意義

雖然多數成人不再接觸幾何證明的數學教材，但在討論數學觀念或科學史的科普文本上，成人讀者仍有機會透過幾何圖文的閱讀獲取新知或瞭解歷史上的典故。從本研究的發現可知，這類科普文章的作者或出版者，應該盡量提供與文字內容相搭配的圖示，且若圖示複雜，最好能有適當的著色或符號標記，使讀者能較輕鬆地從圖上找到對應文字的圖示部件。因為翻閱雜誌或閒書的讀者，通常不會想要費力地讀懂一篇報導新知或典故的文章，即使圖示著色僅影響閱讀效率，但這已足以讓讀者決定閱讀或放棄這篇文章。

延續上述的論點，雖然本研究顯示圖示著色僅影響大學生閱讀的效率，卻不影響其效益，但若受試者換成初學幾何證明的國中生，研究者推測圖示著色不僅可能促進國中生的閱讀效率，而且也能提升閱讀理解的效益。其一，因為國中生在工作記憶較大學生來得小，著色所產生由下而上擷取注意力的功能就可能更有助益。其二，初學

幾何證明的國中生對幾何圖示理解掌握也不若大學生，著色可能提高視覺化操作的可能、協助對抗完形原則，同時進行圖示理解與再認以提升圖示理解，對後續的邏輯證明可能提供助益。其三，低成就或低動機的國中生，更容易因閱讀困難而放棄學習。著色的圖示在文圖參照的過程較易被理解，這對學習意願不高的學生可能幫助更顯著。

現行國中數學教科書在幾何性質與論證的相關單元，未必會針對證明步驟在相對應的幾何圖示上著色或標記以求凸顯。就本研究結果所示，此種情況可能會使初步理解一個幾何命題的歷程較為費時費力，亦即教學上教師必須預留較長的時間，讓學生能依據證明步驟的命題，在圖示上完成 Gal 和 Linchevski (2010) 所說的組織、再認、表徵的認知活動。或者，教師應如 Cheng 和 Lin (2005) 的建議，指導學生自行依據證明步驟的命題在圖示上著色，以幫助學生在圖示中順利找到相關幾何元件，清楚看見這些元件間的關係，形成對證明步驟中單一命題的理解。承上述想法，國小教材中若涉及等角、等邊的圖形（例如介紹正 n 邊形，或討論全等圖形時），不妨考慮以著上相同顏色或加上記號，一方面協助學童比較快地察覺指涉的角或邊，另一方面也讓學生熟悉與學習這樣的表徵方式。

四、幾何閱讀眼動軌跡分析尚須諸多基礎資訊與分析技術

目前數學文本閱讀現象欠缺許多基礎資料，使眼動研究有不少的限制。數學符號的心理單位欠缺研究，是數學文本閱讀歷程要進行更為細緻之分析的障礙。如同緒論所言，閱讀的眼動研究多以詞彙的 GD 和 RG 兩種眼動指標對應到閱讀的編碼與理解兩個歷程，但前提是必須先確認詞彙單位，恰當的切分方式才能使得 GD 能適切地反映詞彙意義的觸接，也才能有適當的 RG 來反映意義統整的難度。然而，我們並不清楚數學詞彙的心理單位為何？ $\triangle ABC$ 是一個單位、兩個單位（ \triangle 和 ABC ）還是四個單位？如果主張這四個符號表徵的是一個物件所以應該是一個單位，那麼「三角形 ABC 」也是一個單位，而「三角形 CPD 」同樣是一個單位？因此，本研究中以「命題」當作為單位來進行分析，在眼動指標的命名上也刻意與 GD、RD 有所區分，雖然研究資料所顯現的特性和 GD、RD 有類似的屬性，但仍無法借用文本閱讀眼動的派典來解讀資料。此一數學單位的議題可以借用中文詞單位的研究派典（Yan, Kliegl, Richter, Nuthmann, & Shu, 2010；Yang & Vitu, 2007）加以探究。

此外，數學文本的平均眼跳距離或知覺廣度基礎資料的建立，也有助於判斷幾何

閱讀歷程中大量圖文間來回檢視的意義。加上圖文間不若一般文本以線性連續的方式呈現，造成有些凝視點落入空白處或前後凝視點無關的位置，雖然凝視時間在達到 100 毫秒的有效凝視的範圍，但本研究認為這些落點是因為眼跳幅度過大所產生的意外落點，而予以刪除。還有在某命題僅停留一個凝視點，讓研究者懷疑這些凝視點並非閱讀者有意閱讀的位置，而純然是圖文來回過程中的意外。甚至落入其他無關分析區中，可能影響分析結果之情況，研究者在本研究中以人工方式逐一檢視刪除。此外，實驗資料常出現某命題中僅停留一、兩個凝視點，例如：「 \overline{AP} 平分 $\angle DAC$ 」，僅在 \overline{AP} 出現 525mm 和「平」上出現 155mm 後，隨即跳離。如果有相關數學文本閱讀的平均眼跳距離或知覺廣度的資料，將有助於研究者判斷「平分 $\angle DAC$ 」的訊息是否已被處理，隨之而來的影響，若下一凝視點移至圖區的點 D ，是該判斷為有意義的圖文統整歷程或為意外的落點之判定。對於本研究中資料篩選判準是否客觀？是否能有系統軟體提供更快速且客觀的資料刪選工具？亦需要更多相關基礎資料。

本研究雖嘗試進行眼動軌跡之分析，然因幾何證明的閱讀有大量的回視與圖文間的跳視，而受試者採取的閱讀策略相當多元，很難以人工方式加以歸類分析。文獻上顯示 *Marcov* 分析法是眼動軌跡可用的分析技術 (*Hacisalihzade, Stark, & Allen, 1992* ; *Simola, Salojärvi, & Kojo, 2008*)，該法假設人們多數的決策是依據過去某一特定階段的舊訊息，不是依據過去所有訊息而形成的，亦即前後兩次視線位置的相關性最強。因此只要計算出前一次與下一次狀態轉換的機率矩陣，便可收斂到一個穩定的軌跡。因此，未來眼動軌跡的分析必然得藉助更有效力的量化技術。

五、未來研究方向

本研究顯示著色效果影響眼動指標，但未影響記憶表現，雖然顯示了眼動儀作為研究工具的敏感度，但對於初學幾何證明的國中生，著色所產生的效果是否可能同時展現眼動指標與理解或記憶的測驗上。故，未來可運用眼動儀和測驗同時收集學生閱讀幾何證明的線上和離線的表現。

根據文獻探討，圖示在幾何證明理解各歷程中扮演不同角色，理解圖示也涵蓋許多不同階層，圖示功能可否由眼動資料獲得實徵上的探究？如同 *Hegarty、Mayer 和 Green (1992)* 曾利用 *Mayer* 的文字題解題歷程四階段，使用眼動資料說明了不一致文字題中，受試者解題關鍵在於整合和計畫階段，眼動資料可能有助於歷程性的分析；若配合放聲思考法蒐集資料，是否更能說明眼動軌跡所代表之認知意涵，也是值

得未來研究繼續努力。此外，本研究指出幾何證明閱讀理解歷程中，讀圖比率約佔一半，此一現象在專家、生手間是否存在差異？生手比專家更依賴讀圖？還是生手比專家更不會運用圖示？最後，如同上一節所言，數學文本閱讀的分析單位、幾何證明圖文間眼跳距離、幅度、眼動軌跡的分析技術等，都有待進一步的探討。

誌 謝

本文承國科會專案 NSC 96-2521-S-003-002-MY3、NSC 99-2511-S-003-023-MY2 的補助，也蒙鄭英豪副教授提供建議，江健豪助理的資料處理，特此致謝。

參考文獻

- 左台益、呂鳳琳、曾世綺、吳慧敏、陳明璋、譚寧君 (2011)。以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明的影響。**教育心理學報**, **43**, 291-314。
- 柯華葳、陳明蕾、廖家寧 (2005)。詞頻、詞彙類型與眼球運動型態：來自篇章閱讀的證據。**中華心理學刊**, **47** (4), 381-398。
- 康軒出版社 (2005)。**國民中學數學教科書第四、五冊**。臺南：康軒。
- 葉明達、柳賢 (2007)。建立判讀理解層級：高中生進行數學論證判讀活動困難之探討。**教育與心理研究**, **30** (3), 79-109。
- 翰林出版社 (2006)。**國民中學數學教科書第四、五冊**。臺南：翰林。
- Adams, T. L. (2003). Reading mathematics: More than words can say. *The Reading Teacher*, *56*, 786-795.
- Adams, T. L., & Lowery, R. M. (2007). An analysis of children's strategies for reading mathematics. *Reading & Writing Quarterly*, *23*, 161-177.
- Barton, M. L., Heidema, C., & Jordan, D. (2002). Teaching in mathematics. *Education leadership*, *60*(3), 25-28.
- Boucheix, J. M., & Lowe, R. K. (2010). An eye tracking comparison of external pointing cues and internal continuous cues in learning with complex animations. *Learning and Instruction*, *20*(2), 123-135.

- Carney, R. N., & Levin, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review*, 14(1), 5-26.
- Cheng, Y. H., & Lin, F. L. (2005). *One more step toward acceptable proof in geometry*. Symposium conducted at the meeting of 11th EARLI Conference, Nicosia, Cyprus.
- de Koning, B. B., Tabbers, H. K., Riker, R. M. J. P., & Paas, F. (2010). Attention guidance in learning from a complex animation: Seeing is understanding? *Learning & Instruction*, 20, 111-122.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Boston, MA: Kluwer Academic.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for Learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (Vol. 1, pp. 3-26). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environment Education.
- Epelboim, J., & Suppes, P. (2001). A model of eye movement and visual working memory during problem solving in geometry. *Vision Research*, 41, 1561-1574.
- Folker, S., Sichelschmidt, L., & Ritter, H. (2005). Processing and integrating multimodal material: The influence of color-coding. In B. G. Bara, L. Barsalou, & M. Bucciarelli (Eds.), *Proceedings of the 27th annual conference of the cognitive science society* (pp. 690-695). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: Analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies of mathematics*, 74, 163-183.
- Hacisalihzade, S. S., Stark, L. W., & Allen, J. S. (1992). Visual perception and sequences of eye movement fixation: A stochastic modeling approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, & Cybernetics*, 22(3), 474-481.
- Hannus, M., & Hyona, J. (1999). Utilization of illustrations during learning of science textbook passages among low- and high-ability children. *Contemporary Educational*

- Psychology*, 24, 95-123.
- Hegarty, M. (1992). Mental animation: Inferring motion from static displays of mechanical systems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 18, 1084-1102.
- Hegarty, M., Carpenter, P. A., & Just, M. A. (1991). Diagrams in the comprehension of scientific texts. In R. Barr, M. L. Kamil, P. Mosenthal, & P. D. Pearson (Eds.), *Handbook of reading research* (pp. 641-668). New York: Longman.
- Hegarty, M., Mayer, R. E., & Green, C. E. (1992). Comprehension of arithmetic word problems: evidence from students' eye fixations. *Journal of Educational Psychology*, 84(1), 76-84.
- Jamet, E., Gavota, M., & Quaireau, C. (2008). Attention guiding in multimedia learning. *Learning & Instruction*, 20, 135-145.
- Juhasz, B. J., & Rayner, K. (2003). Investigating the effects of a set of intercorrelated variables on eye fixation durations in reading. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, & Cognition*, 29, 1312-1318.
- Lee, T. N., & Cheng, Y. H. (2007). The performance of geometric argumentation in one step reasoning. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 256). Seoul, Korea: PME.
- Mayer, R. E. (2008). *Learning and instruction* (2nd ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.
- Österholm, M. (2006). Characterizing reading comprehension of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, 63(3), 325-346.
- Rayner, K. (1998). Eye movements in reading and information processing: 20 years of research. *Psychological Bulletin*, 124(3), 372-422.
- Rayner, K. (2009). Eye movements and attention in reading, scene perception, and visual search. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 62(8), 1457-1506.
- Rayner, K., Rotello, C. M., Stewart, A. J., Keir, J., & Duffy, S. A. (2001). Integrating text and pictorial information: Eye movements when looking at print advertisements. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, 7(3), 219-226.
- Schmidt-Weigand, F., Kohnert, A., & Glowalla, U. (2010). A closer look at split visual attention in system- and self-paced instruction in multimedia learning. *Learning and*

- Instruction*, 20(2), 100-110.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34, 4-36.
- Simola, J., Salojärvi, J., & Kojo, I. (2008). Using hidden Markov model to uncover processing states from eye movements in information search tasks. *Cognitive Systems Research*, 9(4), 237-251.
- Sternberg, R. J. (2009). *Cognitive psychology* (5th ed.). Belmont, CA: Wadsworth.
- Turatto, M., & Galfano, G. (2000). Color, form and luminance capture attention in visual. *Vision Research*, 40, 1639-1643.
- Williams, R. S., & Morris, R. K. (2004). Eye movements, word familiarity, and vocabulary acquisition. *European Journal of Cognitive Psychology*, 16(1/2), 312-339.
- Yan, M., Kliegl, R., Richter, E. M., Nuthmann, A., & Shu, H. (2010). Flexible saccade target selection in Chinese reading. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 63, 705-725.
- Yang, K. L., & Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics Education*, 67(1), 59-76.
- Yang, K. L., Lin, F. L., & Wang, Y. T. (2008). The effects of proof features and question probing on understanding geometry proof. *Contemporary Educational Research Quarterly*, 16(2), 77-100.
- Yang, S. -N., & Vitu, F. (2007). Dynamic coding of saccade length in reading. In R. P. G. van Gompel, M. H. Fischer, W. S. Murray, & R. L. Hill (Eds.), *Eye movements: A window on mind and brain* (pp. 293-317). Amsterdam: Elsevier Ltd.

投稿收件日：2012 年 2 月 13 日

接受日：2012 年 10 月 12 日

附錄一 回憶測驗的試題及其計分的步驟

題一

已知：如右圖， $ABCD$ 、 $CEFG$ 均為正方形。

求證：試證明 $\triangle BCE \cong \triangle DCG$

證明：

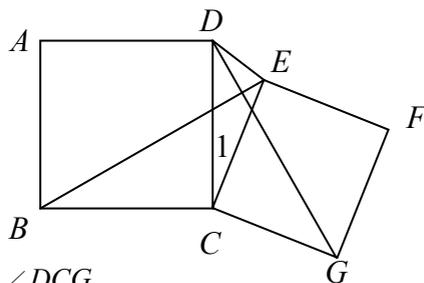
$\because ABCD$ 、 $CEFG$ 均為正方形

$$\therefore \overline{BC} = \overline{CD}, \overline{CE} = \overline{CF}$$

$$\angle BCD = 90^\circ = \angle ECG$$

$$\angle BCE = \angle BCD + \angle 1 = \angle ECG + \angle 1 = \angle DCG$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCG$$



題二

已知：如右圖，兩弦 \overline{AC} 與 \overline{CD} 的延長線交於圓外一點 P ，

$$\text{求證：} \angle P = \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{AC})$$

證明：

$$1. \angle 1 = \angle P + \angle 2 \dots\dots \textcircled{1}$$

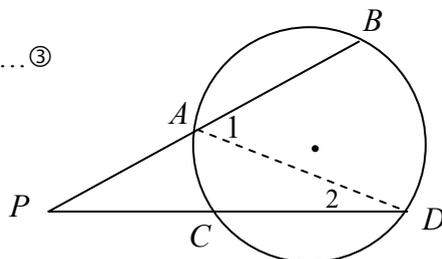
$$2. \angle 1 = \frac{1}{2}\widehat{BD} \dots\dots \textcircled{2}, \quad \angle 2 = \frac{1}{2}\widehat{AC} \dots\dots \textcircled{3}$$

3. 將②，③代入①知

$$\frac{1}{2}\widehat{BD} = \angle P + \frac{1}{2}\widehat{AC}$$

$$\angle P = \frac{1}{2}\widehat{BD} - \frac{1}{2}\widehat{AC}$$

$$\text{故 } \angle P = \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{AC})$$



題三

已知：如右圖，圓的兩弦 \overline{AB} 與 \overline{CD} 相交於 P 點

求證： $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

證明：

1. $\triangle PAD$ 與 $\triangle PCB$ 中

$$\therefore \angle 1 = \angle 2$$

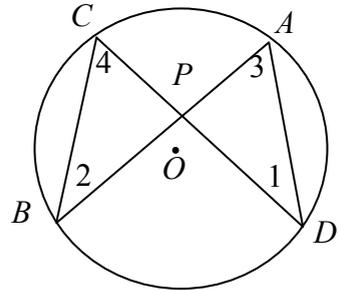
$$\angle 3 = \angle 4$$

$$\therefore \triangle PAD \sim \triangle PCB$$

2. $\therefore \triangle PAD \sim \triangle PCB$

$$\therefore \overline{PD} : \overline{PA} = \overline{PB} : \overline{PC}$$

$$\text{故 } \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$



題四

已知： $\triangle ABC$ 中， \overline{CP} 平分 $\angle ACB$

求證： $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AC} : \overline{BC}$

證明：

1. 延長 \overline{AP} ，在 \overline{AP} 上取一點 D ，使 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}, \angle B = \angle 4$$

$$\angle 2 = \angle 3 \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \triangle APD \sim \triangle BPC$$

2. $\therefore \triangle APD \sim \triangle BPC$

$$\therefore \overline{AP} : \overline{AD} = \overline{PB} : \overline{BC} \dots \textcircled{2}$$

3. $\triangle ABC$ 中， $\therefore \overline{CP}$ 平分 $\angle ACB$ ， $\therefore \angle 1 = \angle 2 \dots \textcircled{3}$

$$\text{由 } \textcircled{1}、\textcircled{3} \text{ 知 } \angle 1 = \angle 3, \overline{AC} = \overline{AD} \dots \textcircled{4}$$

$$\text{將 } \textcircled{4} \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 知 } \overline{AP} : \overline{AC} = \overline{PB} : \overline{BC}$$

$$\text{故 } \overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AC} : \overline{BC}$$

