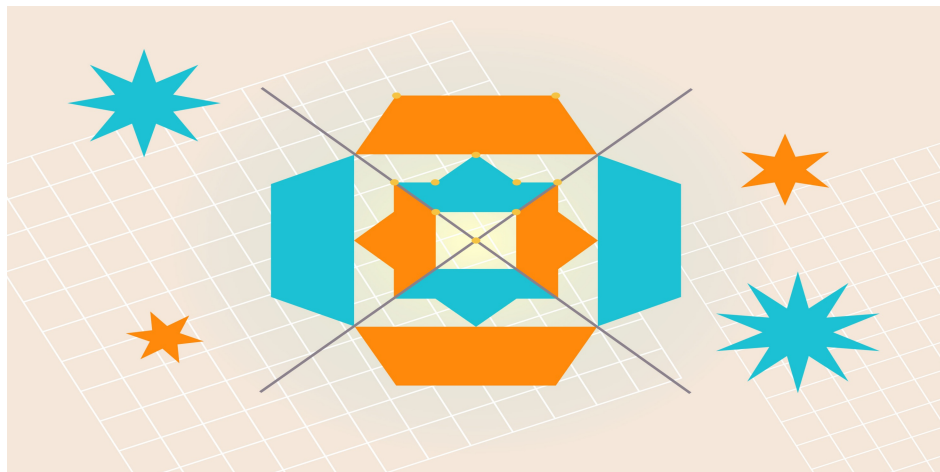


用GeoGebra軟體來畫對稱圖形

蕭英勵*



壹、前言～孩子學習困惑，重新思考教學策略

孩子面對著一道「線對稱圖形」數學題型而苦思許久（南*版數學五下「第三單元 線對稱圖形」）（課本第72頁與習作第51頁），個人突發奇想而從軟體實作與數學解題的雙向角度，為孩子提出可行的思考方向與解決良方，期望能為孩子解決困擾心中之疑難。

孩子進行數學研究過程中，公式抽象且不容易用言語完整表達，因此利用了動態幾何數學軟體Geogebra與空間繪圖軟體SketchUp等資訊科技工具，將歸納出的原則來繪製圖形，精準傳達了數字變化的奧妙。以「引線穿格」的數學研究題目為例，正方形對角線會穿過幾個正方形格子，穿越過格子數的計算方法是：長加寬減掉長和寬的最大公因數，可以推出對角線穿過 $m \times n$ 的格子數時算式為： $m + n - (m, n)$ ，利用GeoGebra數學軟體來畫出一條對角線所通過的格子數量（圖1、圖2、圖3、圖4）。

圖1〈3,3〉平面圖形

圖2〈4,9〉平面圖形

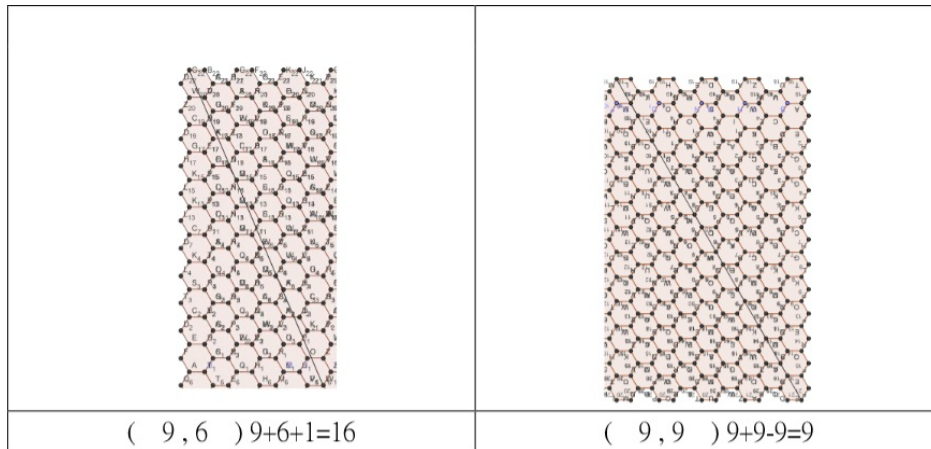
(3, 3) $3+3-3=3$	(4, 9) $4+9-1=12$

資料來源：作者繪製

資料來源：作者繪製

圖3 〈9,6〉平面圖形

圖4 〈9,9〉平面圖形



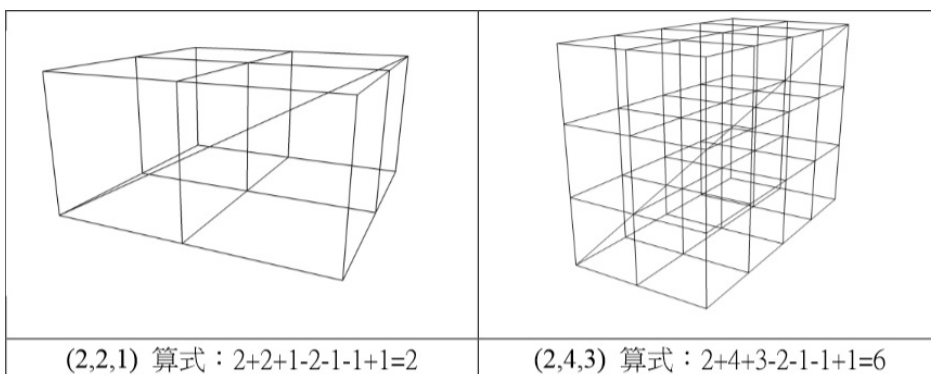
資料來源：作者繪製

資料來源：作者繪製

另外，在立體圖形方面，對角線在正方體圖形穿過的格子數算式為： $a+b+c-(a \cdot b)-(b \cdot c)-(a \cdot c)+(a \cdot b \cdot c)$ ，以SketchUp軟體來畫出一條對角線所通過的立方體數量〈圖5、圖6、圖7、圖8〉。

圖5 〈2,2,1〉立體圖形

圖6 〈2,4,3〉立體圖形

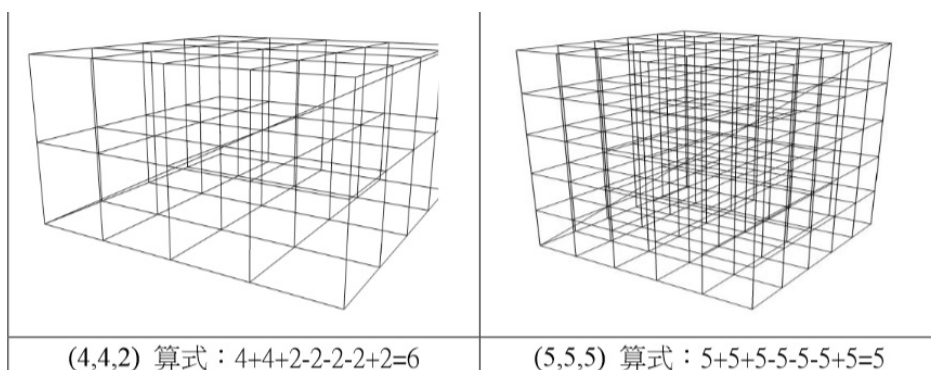


資料來源：作者繪製

資料來源：作者繪製

圖7 〈4,4,2〉立體圖形

圖8 〈5,5,5〉立體圖形



資料來源：作者繪製

資料來源：作者繪製

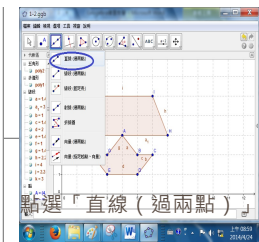
帶著孩子進行數學研究的歷程中，藉以數學軟體、平板電腦等資訊科技工具來傳達數學研究成果，是一項極有樂趣與成就感的學習體驗。因此，本文以對稱繪製圖形為例，希望能引起現場教師對於資訊科技融入數學的興趣，善於應用資訊科技將原有的抽象概念來化成有意義的數學圖形，帶著孩子進入電腦教室內或使用平板電腦，孩子動手實作繪畫出獨特的對稱圖形，引起孩子對於數學學習興趣與動機。

貳、以GeoGebra數學軟體繪製對稱圖形~軟體教學實例

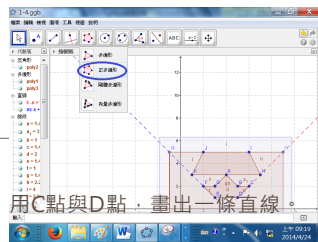
(一) GeoGebra下載與安裝

		
<p>在網頁瀏覽器上鍵入 GeoGebra的官方網址： www.GeoGebra.org</p>	<p>點選“Software”下載新版軟體</p>	<p>有行動Apps版本（如： Windows Store、iOS App Store、 Google Play），也有 其他電腦作業 系統版本</p>

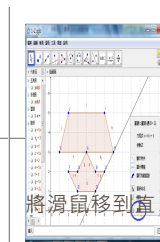
		
<p>點選“Windows”下載 Windows版本</p>	<p>點擊程式進行安裝</p>	<p>點選「完成」 鍵，啟動 GeoGebra軟 體介面：左為 「代數區」， 右為「繪圖 區」</p>
<p>(二) 開始繪製一個原始多邊形的原件</p>		
		
<p>在「繪圖區」內，滑鼠右 鍵出現快捷選單，選「格 線」功能，出現細小方 格，以方便繪圖</p>	<p>點選「多邊形」功能鍵</p>	<p>繪製出一個多 邊形圖形</p>
<p>(三) 畫出兩條紅色虛線與藍色虛線為線對稱軸</p>		



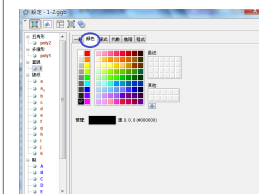
點選「直線 (過兩點)」
的功能鍵。



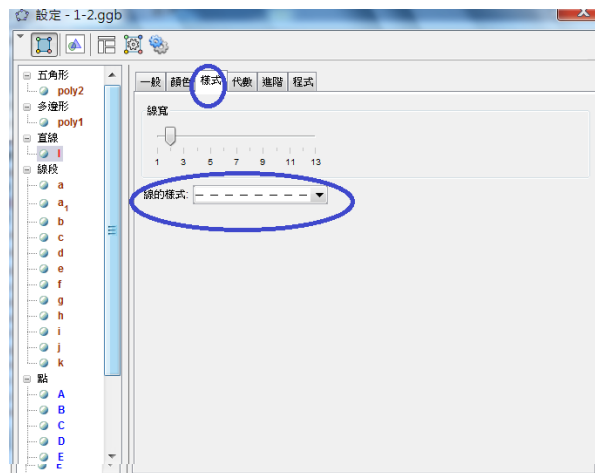
用C點與D點，畫出一條直線。



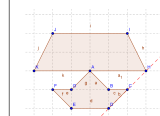
將滑鼠移到直
線上方，按滑
鼠右鍵啟動快
捷工具列，選
「屬性」來更
改直線顏色。



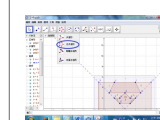
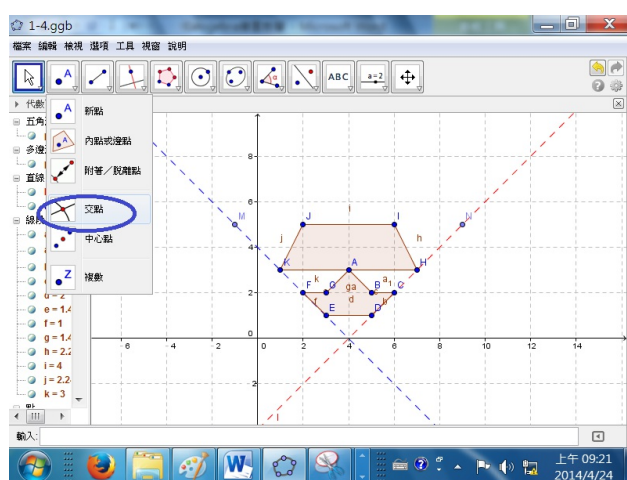
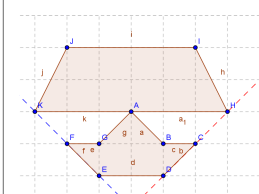
選取「顏色」，改為紅
色。

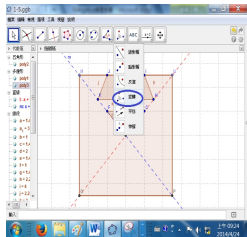
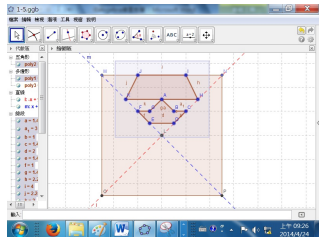

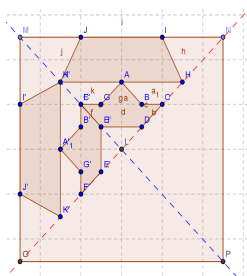
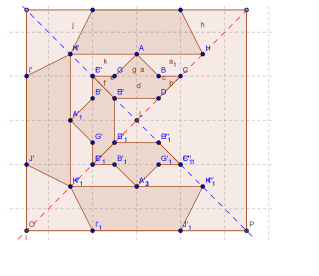
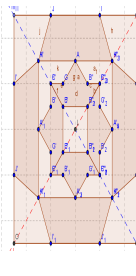


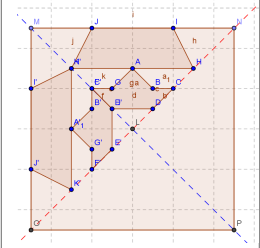
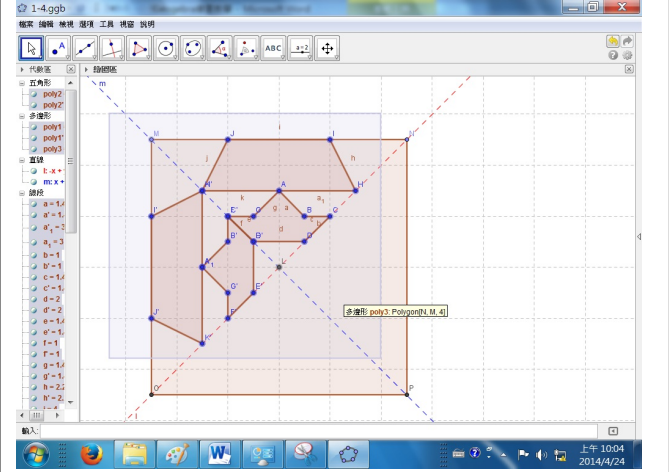

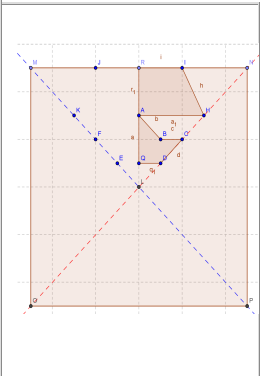
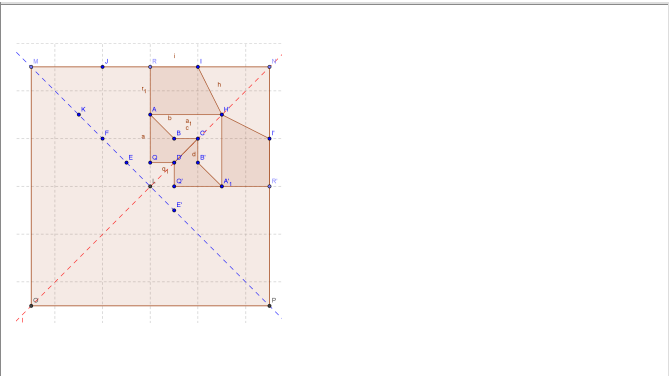
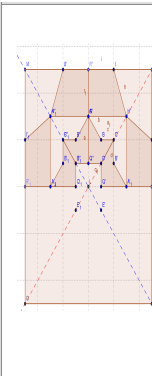
選取「樣式」，改為虛線。

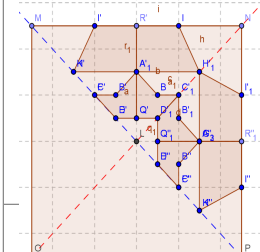


畫出一條紅色
虛線，以x軸為
對稱軸；

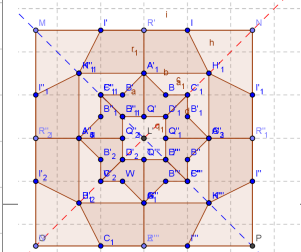


<p>以同樣的步驟，畫出一條藍色虛線，以y軸為對稱軸。</p>	<p>點選「交點」功能鍵，兩條對稱軸相交於L點。</p>	<p>點選「正多邊形」的功能鍵，畫出一個方格板。</p>
<p>(四) 繪製出完整的對稱圖形</p> <p>方法一：選取原始物件，分別旋轉90度、180度、270度。</p>		
		
<p>點選「旋轉」功能鍵</p>	<p>先選取要旋轉的物件，以L點為旋轉點。</p>	<p>鍵入90度</p>
		
<p>物件以逆時針旋轉90度</p>	<p>再次選取要旋轉的物件，以L點為旋轉點。以逆時針旋轉180度。</p>	<p>再次選取要旋轉的物件，以L點為旋轉點。以逆時針旋轉270度。</p>
<p>方法二：原始物件旋轉90度後，以紅色虛線為對稱軸，畫出對稱圖形。</p>		

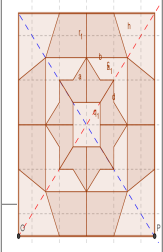
		
<p>物件以逆時針旋轉90度</p>	<p>選取物件</p>	<p>點選「線對稱」功能鍵，以紅色虛線為對稱軸。</p>
<p>方法三：將原始物件對切一半，再用紅色虛線與藍色虛線為對稱軸進行繪圖。</p>		
		
<p>將原始物件對切一半</p>	<p>以紅色虛線為對稱軸，畫出線對稱圖形</p>	<p>選取要旋轉的物件，以L點為旋轉點。以逆時針旋轉90度，再以L點為「點對稱」。</p>
<p>方法四：直接使用紅色虛線與藍色虛線為兩條對稱軸，最迅速的繪圖方式。</p>		



以x軸為對稱軸〈紅色虛線〉畫出對稱圖形，

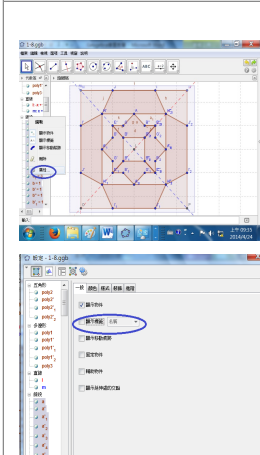


再以y軸為對稱軸〈藍色虛線〉畫出對稱圖形。

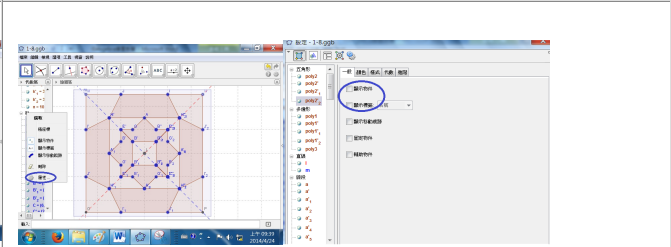


以藍色與紅色兩條虛線為對稱軸時，為線對稱圖形。

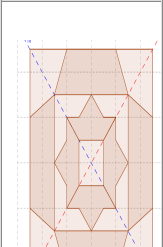
(五) 隱藏線段或點的標籤



將滑鼠移到「代數區」內「線段」上方，按右鍵出現快捷選單，選「屬性」。出現設定選單，取消「顯示物件」、「顯示標籤」勾選。出現快捷選單，選「屬性」。出現設定選單，取消「顯示標籤」勾選。

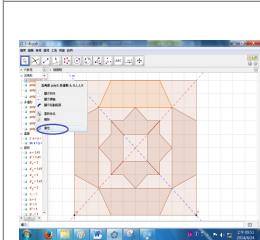


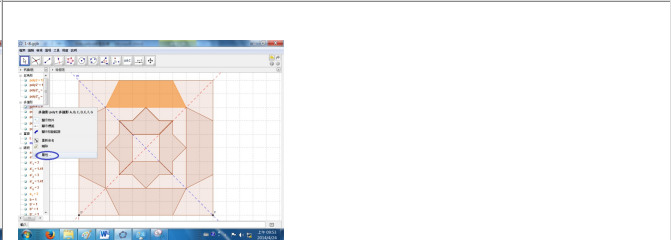
將滑鼠移到「代數區」內「點」上方，按右鍵出現快捷選單，選「屬性」。出現設定選單，取消「顯示物件」、「顯示標籤」勾選。

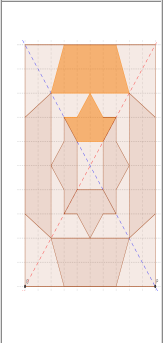


多邊形上的點「標籤」即刻隱藏。

(六) 修飾上色







		
<p>將滑鼠移到「代數區」內 的五邊形上，點選「屬 性」。選「顏色」，並 「填滿」。</p>	<p>將滑鼠移到「代數區」內的「多邊形」上，點選「屬性」。選「顏色」，並「填滿」。</p>	<p>完成圖</p>
<p>(七) 延伸練習題目: 依照上述三種製圖方法，嘗試著繪出點對稱或線對稱圖形。</p>		
		

參、教學省思與分享～教師選用不同的教學工具來達到教學目的

自由軟體在推展初期並非想像中順利，功能過於簡化（過去軟體介面粗糙、中文化未臻完整、功能選單欠缺整合等缺失，現已有完整中文語系支援，並整合各版本功能，定期更新版本強化了各種新穎功能，自動通知使用者新版本釋出並可下載的訊息）、安裝不易（過去僅限定Linux版本，現已經釋出Windows版本，便利使用者下載點選安裝，現更有Apps、Apple版本供使用者多樣化選擇），熱心社群同好因而經歷了前所未有的艱辛推展歷程。但由於網路社群貢獻所學與心力而不斷地研發技術與校園教育推展，推出了文書處理軟體、網路管理系統、繪圖軟體與相關教育軟體等，符合了眾人期待與生活應用便利。尤其，自由軟體搭上了行動科技風潮，當下熱門Android作業系統與Google雲端整合學習資源廣受青睞，終有屬於自己一片天，得以與商業軟體相抗衡，消費者有著更多元彈性空間來選用行動科技產品。

自由軟體GeoGebra數學程式彷彿為教師多添增了一種教學工具的選擇，孩子透過簡易操作介面來依樣畫葫蘆繪製對稱圖形，引導其清新明瞭的點對稱、線對稱、旋轉點與旋轉角度（逆時針與順時針）等基本數學幾何概念。孩子經由電腦數學軟體之

對稱圖形實作課程後，解決了隱藏已久的困惑與疑問，也一掃了似懂非懂的學習陰霾。雖然，在課本內容中只是指出「線對稱」的概念，但是實際上，在GeoGebra數學軟體中，可以同時搭配著使用線對稱軸、點對稱軸、旋轉、切割等多種幾何功能，來繪製出一個對稱圖形。

本文稿採用了（南*版數學五下「第三單元 線對稱圖形」）（課本第72頁與習作第51頁）題目，孩子進入電腦教室操作軟體，並成功繪製出不同的對稱圖形。帶孩子進行主題探究或科學研究的過程中，告知孩子利用電腦軟體來繪製幾何數學圖形，可以縮減了人工繪製的誤差，正確的呈現出作品比例大小。孩子具有了基本圓規與量角器使用的基礎後，往往可以輕易的繪製出多樣化的幾何數學圖形，雖然隨後檢視幾何圖形，似乎沒有極大的誤差，讓孩子個個得意滿滿。但是就科學研究的態度來說，秉持虛心求教態度，以吹毛求疵縮小可能誤差，達到完美無瑕的境地。雖然看來是差不多的角度、線條、幾何圖形等，但是真正用電腦軟體來繪製時，卻發現有些許的誤差（例如：2公分），經過仔細檢查後，發現孩子的繪圖方式錯誤，從電腦畫面放大檢視後，就可以看到線條未能完美銜接、角度偏斜等錯誤，因而造成那麼大的誤差。所以，再次教導孩子正確的幾何數學繪圖方式，且以電腦軟體進行繪製，並隨時以放大功能來逐一檢視每一線條與角度，才能呈現出完美的零誤差畫面結果。因此，個人的觀念是，要注重每一繪圖環節，即使是極小的誤差，也要想辦法進行修正。「差之毫釐，失之千里！」作品完成後，必花費更多的時間與心力來回頭檢視每一繪圖過程中，哪一環節出了問題。所以，個人不僅教導孩子正確的操作軟體方式、學科知識等，更重要的是要細心的檢視做過的每一圖形，才能呈現出完美的對稱圖形。

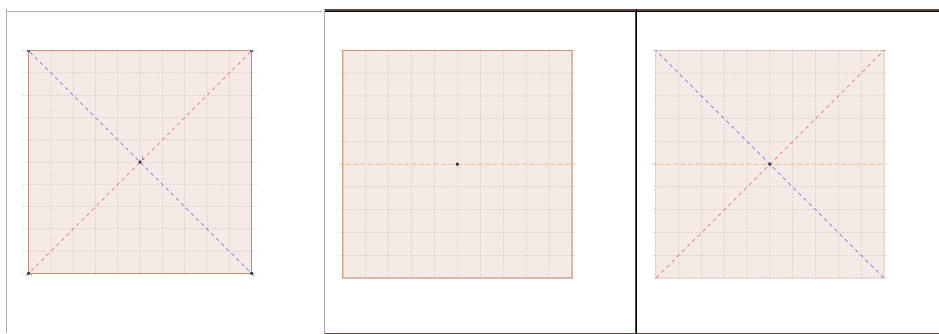
肆、結語~穩固安全且幸福有感的學習鷹架，啟發孩子學習創意

教師在講臺上振筆直書與口沫橫飛的詮釋對稱圖形製作方法之時，臺下的孩子也竭盡所能的試著理解抽象數學文字數據，實際上卻不知理解幾分？正是要孩子善用科技的時候了！教師用心思考著如何將Apps程式融入教學，正是教導孩子如何正視網路沉癮問題，並清楚明瞭科技所扮演的輔助學習角色。

當教師在課堂教學過程中敏銳的捕捉到孩子臉龐上百思不得其解的眼神時，何不嘗試彈性運用教學策略，融合多元教學工具，為孩子建立穩固安全且幸福有感的學習鷹架，進行一場別開生面的知識探索學習之旅。孩子融入了創意點子與想法，並透過傳統美術媒材或Apps行動科技應用程式，以對稱數學概念來創作更種樣式的藝術成品，使得學習成果更為多元，教學活動更形活潑有趣。從孩子豁然開朗的微笑表情，似乎意味著已理解了對稱圖形的基本組成架構與繪製判讀技巧，克服數學恐懼與建立學習信心，進一步啟發孩子深度探討其他數學學習單元的興趣。

附件、10x10空白方格板

（說明：使用10x10空白方格板，先在其中一個象限區域內畫出圖形原件後，即可利用點對稱、線對稱、旋轉等幾何原理來畫出完整的線對稱圖形。讓孩子發揮想像與創意，可以用紙或電腦軟體來自由創造第一個原始圖形原件，如：機器人、樹、車子、火車等造型，全班同學開始試著畫出完整的對稱圖形。）



四個象限區域 (4x90度 =360度)	四個象限區域 (4x90度 =360度)	八個象限區域 (8x45度 =360度)
---------------------------	---------------------------	---------------------------

參考資料

昌爸工作坊 (2015) 。 **GeoGebra** 。 取自 www.mathland.idv.tw/ggb/geogebra.htm

Chrome (2015). *GeoGebra*. Retrieved from

<https://chrome.google.com/webstore/detail/geogebra/bnbaboaihkhkjoalfnfoabhlhlahjnee?hl=zh-TW>

Google Play Store (2015). *GeoGebra*. Retrieved from

<https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra>

International GeoGebra Institute (2015). *GeoGebra*. Retrieved from

<https://www.geogebra.org>

Mac App Store -(2015). *GeoGebra 5*. Retrieved from

<https://itunes.apple.com/us/app/geogebra-5/id845142834?mt=12>

Mac App Store (2015). *GeoGebra*. Retrieved from

<https://itunes.apple.com/us/app/geogebra/id687678494>

Wikipedia (2015). *GeoGebra*. Retrieved from en.wikipedia.org/wiki/GeoGebra

Windows Store (2015). *GeoGebra app for Windows*. Retrieved from

<http://apps.microsoft.com/windows/en-us/app/geogebra/f321a028-276b-44e8-b981-6e87f27caa62>

* 蕭英勵，國立台南大學教育學系博士

電子郵件：q2068956@mail.cy.edu.tw