素養、課程與教材—以數學為例

單維彰*國立中央大學數學系副教授

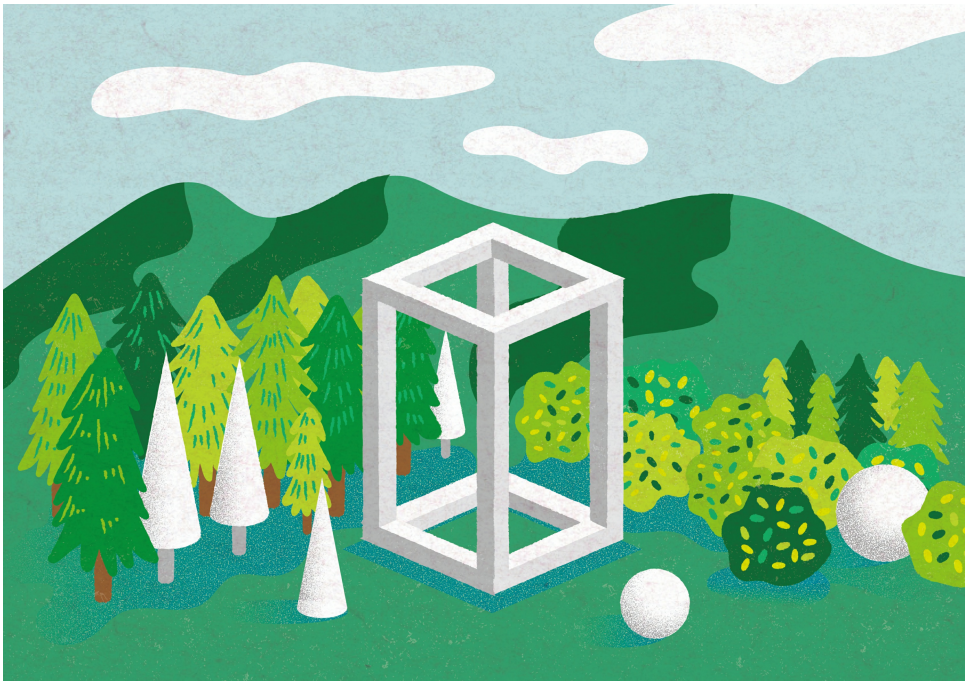
摘要

「素養」一詞，中文本有。然而，素養作為教育的特定觀念而形成專門化的定義，應該是在21世紀受西方（特別是歐洲）影響而發展成形的。就這個新意義而言，它是Competency或Literacy的意思。雖然國內已經有不少探討或詮釋素養的文章，而且在某種程度上已經形成了標準詮釋，但是本文為了探討所謂素養導向之數學課程與教材，還是有必要從頭再摸索一次素養概念的脈絡，並嘗試再詮釋素養的意義。

作者從人力資源管理領域，探索素養的一支源頭，簡述影響臺灣教育界素養概念的歐洲文件，藉此理解Competency或Literacy原本的實用意涵。然後，分別在文化、教學和課程層面，提出素養觀念在華人世界的可能拓展；簡要而言，它們分別是（一）在我國社會對於教育的傳統期望之中，素養不能只有實用的意涵，望文生義還有「素質」和「修養」的意涵，（二）素養的主張不等於建構主義、學生中心、或者專題導向的學習，作者援引「知、行、識」來分析素養教學的元素，（三）十二年國教之數學課程，應從十八歲的終點素養目標回溯學習主題，並一一按照學生的生活經驗或認知能力，發展出完整而聯貫的脈絡。

素養導向的評量已經透過大型國際評量的形式而發揮影響力，論述者眾，國內外的範例也多了起來。但是素養導向的教材則還在初萌的階段。我們在十二年國教的數學主題中，抽出幾條一般讀者都能理解的脈絡，推薦幾項素養教材的範例。

關鍵詞：素養，數學素養，課程綱要，書面教材



壹、素養概念溯源

中文本來就有「素養」之詞，而且已經用在教育文件裡。例如民國84年之《高級中學課程標準》，即有「提升高中生人文與科學素養」的說法（教育部，2005：599）。類似地，中國大陸在西元1988年頒布的《九年義務教育全日制初級小學數學教學大綱》裡，也寫著「掌握一定的數學基礎知識和基本技能，是我國公民應當具備的文化素養之一」（黃友初，2013）。然而，「素養」作為教育的特定觀念而產生專門化的定義，應該是外來的；海峽兩岸皆如此。換句話說，素養被用來對應特定的外文之後，至少在教育領域裡，從普通名詞演變成專有名詞了。

國科會委託洪裕宏於2008年完成的「界定與選擇國民核心素養研究」，以及教育部國民素養辦公室委託李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏於2013年完成的「數學素養研究」，可謂國內討論一般教育領域之素養和特定教育領域之數學素養的最主要參照。前者將Competence譯為素養，而後者採用Mathematical Literacy作為數學素養的原文。兩份文件都將這一波探討素養的源頭，指向經濟合作與發展組織（OECD：The Organization for Economic Co-Operation and Development）在1997年底委託的「素養的定義與選擇」研究（DeSeCo：Definition and Selection of Competencies），主要的資助單位是美國教育部和教育統計中心，而執行單位是瑞士的國家統計局。

為什麼一個經濟組織會關心教育呢？簡單的說，經濟發展需要人力，而人力需

要教育來培植與訓練。Competency可以直譯為「能耐」，它長期以來是人力資源管理（HR：Human Resources，簡稱人資）領域中的用語；目前，維基百科（Wikipedia）羅列了Competence在人資、法律、生物與地質等領域的專門解釋，但是沒有教育領域的。而作者認為，在西方的「素養」相關文件中，Competence始終是以人資領域的意義而言的，並不是教育的。（Competency和Competence的意義略有不同，但本文暫且將它們視為同一個字的兩種寫法。）

國內的人資領域將Competency譯為「職能」，此概念是美國哈佛大學心理學家McClelland於1973年提出的，原意是提出高等教育不應以智商作為甄選的依據，而應更注重實際影響學習績效的能力（competences）。後來，當企業「想要了解表現優秀與普通工作者之間的差異，找出並確認哪些是導致工作上卓越績效所需具備的知識、能力及行為表現，…都是參照McClelland提出的概念來進行，提供了許多明確的方向和觀念供企業參考」（李嘉哲，鄭晉昌，2008）。所以職能不只是智商，也不只是知識和技能，還有透過行為表現出來的態度。在這個理解之下，對照DeSeCo界定出（一）能使用工具溝通與互動、（二）能在異質社群中進行互動與（三）能自主行動等三個核心範疇，每個範疇又分成三項指標與內涵，以確保「個人的成功實現與社會的良好運作」（Rychen & Salganik, 2003），我們更容易理解：DeSeCo所探討的Competency是從人資領域的脈絡裡延伸出來的。

數學素養的原文Mathematical Literacy來自於國際學生能力評量計畫（PISA：Program for International Student Assessment）之中，對於數學評量內容的定義。PISA也是OECD主導的計畫，但是在描述數學的知識、技能和行為表現時，卻不使用Competence而改用Literacy，透露出主事者將數學視為一種語言。

Literacy的原意是識字與讀寫能力。此概念不含聽與說的能力，因為它原指母語而非外語，能流利聽與說的人可能是文盲，不能算是具備了Literacy。將基礎數學視為一種語言，作為一切學習的基本工具，促成英國在1957年創造了一個新字Numeracy，意指認識數字並具備關於數字的讀寫能力，簡要的解釋就是「識數和計算能力」。英國和鄰近的蘇格蘭和愛爾蘭，常以Literacy and Numeracy當作其小學基礎教育的主題（例如DfE，2003，或在Google搜尋上述英文字）。

由上可知，Numeracy比較局限在數與量的學習內容，這的確是小學基礎教育的主要數學課題。但PISA的施測對象是即將完成國民共同教育階段的15歲少年，而不是兒童，所以不能只具備數與量的數學知識和能力，還要認識形體、變化關係、以

符號代表數、資料處理與不確定性等數學內容，並具備關於它們的讀寫（與實用）能力。作者認為，PISA的主事者是在前述思考脈絡之下，選用了Mathematical Literacy這個詞。

到這裡，我們或許可以看出來，不論Competence還是Literacy，都是指「能力」；前者較為綜合性與一般性（知識、技能與行為表現），而後者傾向於特指基礎能力（識、讀、寫、算）。兩者都在「能力」之上，被賦予更高的原則，就是以現世生活為目標的人力資源發展。於是，這些想法導致對於教育成效的務實或實用觀點。在這個大原則之下，最早成形而且發揮影響力的例證之一，就是歐洲語言共同參考架構（CEFR：Common European Framework of Reference for Languages）。

歐盟理事會（Council of the European Union）在西元2001年公布CEFR，建議不要將語言的學習視為知識（knowledge）的累積，而應強調其功能性（functions），亦即在真實情境下使用語言進行溝通的能力。CEFR是一個以「能做」描述（ “Can-do” Descriptors）界定語言能力的參考架構；它建議（第二或外國）語言的教學與評量，應該不要太專注於語言知識（linguistic knowledge），亦即對語言系統的認識，例如字彙和文法等，而要重視語用能力（pragmatic competence），亦即對語言之功能性資源的熟悉度，例如語言的聯貫性、對言談的掌握、對各類體裁的理解等（Council of Europe, 2001）。注意前面的語用能力是說Competence，而不是Literacy，因為這裡指的是運用第二或外國語言以進行溝通的能力，包括聽說讀寫，是綜合性的能力而不是基礎能力。

對照CEFR和PISA測驗，讀者應該非常清楚地察覺它們的一致性：不要太強調知識的本身，而要強調在現世生活中的應用。

舉一個CEFR的A2等級（六個等級中的第二級）閱讀「能做」描述為例：

> Can understand everyday signs and notices: in public places, such as streets, restaurants, railway stations; in workplaces, such as directions, instructions, hazard warnings.

試譯作「能了解日常標誌及告示：在街道、餐廳、車站等公共場所，或者在工作場合的指標、指引、警告標誌等」。相信國內讀者都能辨識出來，這不就是我們的「能力指標」嗎？

可見「素養」和「能力」實在有點糾纏不清。或許因為如此，本期《教育脈

動》才會以這兩個名詞的排比當作主題。很多人自由心證而將它們各自解讀，例如，嚴長壽提出了作為教育大目標的「三個素養、兩個能力」（2015），就表現出他個人對於素養和能力這兩個觀念的解讀。

本節的目標是在闡述：「素養」一詞的專門用法，源自人資領域，是西方實用主義觀點的具體表現。限於篇幅，本節並沒有做完整的文獻探討。有興趣深入閱讀的讀者，可以從洪裕宏（2008）和李國偉等人（2013）的結案報告裡，獲取更多的文獻。據了解，在本文正式刊出之時，國家教育研究院將已經決定「素養」的英文翻譯，請讀者留意。

貳、素養再詮釋

九年一貫說「能力」，十二年國教說「素養」，究竟是另起爐灶？還是換湯不換藥呢？本文想要指出，它們其實是一脈傳承的。

根據前一節的闡述，希望讀者已經接受，不論Competency還是Literacy基本上都是指能力；而且，以CEFR為典範例的相關文件也都以「能做」語句來描述這些能力。可見「能力」概念非常貼近歐洲相關文件的原意，而「能力指標」更直接對照歐洲的「能做」描述。然而「素養」的概念源頭，也是Competency和Literacy。所以我們獲得的第一個結論，應該是：「素養」與「能力」系出同源。

前面引述的國內學者，都指出歐洲文件裡所說的Competency或Literacy超出了它們的普通字面含意。我們不在這個議題上多做推敲，只想要指出：不論西方怎麼說，至少我國的教育學者對於單純的能力概念與全然的實用主義，並不滿意，而想要改進。「素養」就是在文化與價值的驅動之下，對「能力」的回應。用上述觀點來看，十二年國教課程的核心素養主軸，是順著九年一貫課程的能力指標主軸發展出來的。臺灣依照自己的教育傳統與價值觀，將西方的教育實用主義作品，先轉譯成能力指標，再進一步融入本土的精神，轉化成素養。

以下，作者就個人能力所及，試圖從文化、教學、課程三個層次，敘寫素養比能力多了些什麼？以及十二年國教的數學課程企圖作了些什麼？

一、文化層次

教育當然有其經濟價值，但是在我們的文化裡，教育不純然是經濟活動。所以，我國對於教育的傳統看法，不容易完全接納徹底的實用主義。素養一詞，望文生義還有「素質」和「修養」的含意。進一步說，我國社會期望受教育者能擁有知

識與技能上的素質，再加上道德與智慧上的修養。更淺白地講，我國社會期待受教育者「知道」一些「該知道的事」，在待人接物之際表現出某種道德水準，而面對問題的時候，具有通盤而和諧考量的智慧。

知識與技能或許可以分科培訓，但是道德與智慧就必須是綜合性的教育。這個信念反應在十二年國教的總綱，列舉「三面九項」核心素養，並責成各領域課綱分進合擊地達成素養的教學目標。以數學領域為例，在道德上能做的（直接）貢獻不多，但是在文化上，就有豐富的內容可以提供。

即使實用主義也只能呼籲著重於實用而不能捨棄知識，更何況素養概念內含著文化的訴求。因此，素養導向的課程中，必然有知識性的內容，只是其取捨的標準，不能全然考量職業上的需求，也不再著重學科本身的知識完整性，而是要考量文化上的需求。

試舉一例，虛數i對大多數人來說，大概是最不可能「實」用的課題了。i是滿足 $i^2=-1$ 的數，它應該「實際上」不存在而只存在於數學家「虛無飄渺」的想像裡。但是，獲得美國東尼「最佳劇本」獎的《Proof》（臺灣綠光劇團譯作《證明我愛你》）或者獲得日本讀賣文學獎且搬上大銀幕的小說《博士熱愛的算式》，都把i寫進故事裡，而i也在許多文化或文明的作品中出現。所以，為了培育學生的素養，數學課程應該讓學生有機會認識i。當然這個理由不能無限上綱，在素養層次認識i，並不等於要熟練它的四則運算，更不等於要解多項式的共軛虛根。所以，培育素養的數學課程，應該要讓學生有機會認識虛數i，但是不應在共同必修的課程中，強調其計算的操作。

在國小、國中階段，可能沒有太多因為文化素養而引入數學課題的機會，但是日常生活使用的基礎數學，提供非常多的機會，讓學童認識文化的差異並增進國際視野。比如英文的數字命名很明顯不是（固有的）十進制，如果再得知法文的數字命名就更有趣了。日常生活將數字寫成三位一節，我們跟隨英美習慣用逗點隔開，但是德國用句點（小數點），而德國的逗點其實是小數點。至於三位一節的理由，可以搭配英文課學習，是因為他們的語言習慣：譬如23,373,517英文讀作twenty three million, three hundred and seventy three thousand, five hundred and seventeen，也就是每一個逗點對應一個「數量詞」：thousand、million、billion依此類推。當然此處很可能引發一個議題，就是上述的數字分節習慣，並不符合華文的習慣啊！我國的「數量詞」應該習慣以萬、億、兆分段，因此，每四位數一節才符合我們的語言。這是另

一個議題，不在這裡討論了。

數學教材的前端，經常用一個故事來引起動機或題綱契領。這些「開卷」故事不一定要僅限於生活情境或者如小說般編造的情節，還可以考慮文化方面的話題和與數學直接關聯的歷史事件，或者對學生的認知能力而言可理解的寓言或傳說故事。例如建國中學曾俊雄和林信安老師設計的「二維數據之迴歸直線」教學模組（鄭章華、單維彰，2015），便是以「迴歸」這個名詞首度出現的真實事件，當作「開卷」故事。當時討論的現象是：身材偏高的父母，通常子女的身材比父母矮，身材偏矮的父母，通常子女的身材比父母高。統計數據支持上述命題。而研究者提出一個「先驗」的解釋：因為個體的差異都將「迴歸」平均值，所以過高的後代會變矮，過矮的後代或變高。

二、教學層次

前面已經指出，素養導向的課程包括「知道」和「能做」兩個向度，而且皆應以「實用」作為判斷的規準；只是這「實用」的「實」不限於物質世界的真實（亦即生活或就業所需），還包括人類創造的符號世界的真實（亦即文化或文明）。雖然上述看法有助於我們抉擇教學內容的題材與深度，卻沒有對教學提出建議。在這個問題上，林福來、單維彰、李源順、鄭章華等人（2013：31）在數學領綱前導研究報告裡提出的「知、行、識」數學素養培育架構（如圖1），仍然非常值得借鑑。

「知」和「行」的意思比較單純，就是前面說過的「知道」和「能做」兩個向度，分別對應英文to know和can do的意思，而且潛在的主詞都是「學生」。在教學層面上，「知」當然是指學習內容，而「行」是操作技能。可是，作者想要更細緻地指出，在教材層面上，「知」仍然是大家熟悉的陳列知識，是為「是什麼」的敘寫，但是「行」則不僅是操作程序的陳列或示範（平面教材不能示範，但是影片教材就可以），更應該包括「做什麼」的敘寫。

「是什麼」不一定比「做什麼」簡單。例如「正整數是什麼」這個問題，很快就把人帶到數學哲學的深處，而純數學提供了一種公設取徑和一種集合取徑的方式，嚴格地回答上述問題。相對而言「正整數做什麼」這個問題反而容易，至少對所有小學生都還算容易，就是用來計算（離散的）物件對象「共有幾個」、「剩餘幾個」或「不夠幾個」。

「知、行、識」的數學素養培育架構，建議教材（和教師的教學）除了注意數學課題「是什麼」以外，還要在實用的規準之下，注意並經常反思，學習某個數學課

題要用來「做什麼」？

「識」是很難被翻譯成英文的中國字。它的意思比較微妙，是關於理解和連結的後設認知、以及對數學價值的賞識態度。對照知「是什麼」、行「做什麼」，識的方面則是「為什麼」，包括「為什麼要這樣」、「為什麼是這樣」等問題的理解。即使限定在「理解」這一方面，「識」仍然很難翻譯；它除了對應基本的to understand以外，還有make sense of（使產生意義）、be aware of（意識到）和have an insight into（洞察）的意思。

圖1　數學素養的課程架構圖

我們認為素養之導向與否，並不在於教法，而在於是否在「知道」與「能做」之外，還能「識」。而識的媒介與深度，仍然以前面所說的實用為依歸，同時要在學生能知的範圍裡面進行，否則就脫離了實用的原則，變成了為學科而學習，就不再符合素養的期待了。例如對小學生講故事，最好能在兒童的生活經驗或者童話故事的範圍裡，但是對中學生講故事，則歷史事件、暢銷小說、電玩情景、可解釋清楚的專業環境，應該都能作為題材。

但是前述主張仍然是個概念而不是一個方法。根據客觀條件的支持或限制，教師有許多熟知的方法，都有濟於「識」。編故事讓學生覺得數學有趣、設計例題讓學生相信數學有用、讓學生互助合作討論數學的真相、在探索活動中引導學生自行發現數學、甚至動用五色聲光讓學生受到數學之美的感召，都是可選用的方法。而且，我們認為這些教法之所以有效，都是因為它讓學生有「識」於數學了。反之，有些老師試行了上述方法，卻感慨耗費太多時間而效率不彰，可能是因為那些教學上的努力，僅達成了基本的「知、行」目標，卻沒有達到「識」。

試舉一例：負數。七年級以上的學生該知道負數的記號、在數線上的位置、正負數互為「相反數」。經過大約半年的陸續練習，多半學生也都能掌握（正負混合）整數的加減乘除。在這個主題上，「知道」和「能做」並不特別困難。但是，在「識」的層面，正和負賦予「數」方向的概念，而正負數被發明出來處理有方向性的量，則呼應了「做什麼」的部分。

許多老師為「負負得正」的「生活化解釋」傷腦筋。如果把正、負數當作物件來看，則相反數的對稱觀念，就可以用「相反的相反，就是還原」來解釋負負得正。如果把正、負性當作方向來看（這就是為什麼數線都要畫一個箭頭），那麼「負負得正」不過就是「向後轉再向後轉，就回到原來的方向」；這是每個學童都可以親自操作的概念。

其次，-1、 -2、-3 、…在數線上的位置，也就是正負數的「相反」性質，不是「推論」出來的，而是「規定」的。這是一個數學文化層次的見識：數學家堅持新舊觀念的相容性。數學不像自然科學，不（全然）是觀察世界而歸納的規則，而是由人類的心智創造的。先人規定負數所在的位置，是為了使得整數的加、減概念與正整數的加、減概念相容：加是向上數（朝箭頭方向），減是向下數。而這個相容性，保證了一個更重要的性質：加減互逆。

上述的「識」其實可以用來協助「知、能」。利用加減和「相反」觀念，教師可以輕易將整數混合加減計算，從一共九種，化約成小學就熟悉的兩種：正整數相加，和大的正整數減小的。在熟練之後，如此的化約並不重要；但是對初學者而言，舊經驗的連結應該是必須的。

熟練了混和計算之後，可以讓學生認識到：統合的「整數」整併了加減計算（不再需要特別分辨加法和減法），在觀念上（以及「程式設計」上）大幅簡化了演算法，而且促成了坐標幾何的建立（也就是幾何圖形與方程式的結合）。這些也屬於「識」的範疇。

學生應該「識」得負數是被發明的；既然它是人的發明，就別怕，它是聽人使喚來做事情的。學生將要學著識別負數的「用途」：只要被測量的對象有方向性、有基準點、有單位，就能賦予正數和負數。例如測量溫度時，朝著熱的方向，以水的冰點為基準，以攝氏為單位，就能使用正、負數；再如計算資產，以盈餘的累積為方向，以「無」為基準，以千元為單位，也就能使用正、負數。而人們既然發明了負數來「用」，當然有它的好處，學生最好能賞識負數的好用之處。

很多人質疑，即使不用負數，使用黑色或紅色的數字，或者在數字前面註明收入或支出，還是能夠完整地處理財務算術。這是正確的。但是，設上個月的資產是M，這個月的營業淨利是P，則本月結算資產時，根據M和P的盈虧和它們（絕對值）的大小，一共有六種演算法。如果採用正、負數，也就是將數賦予方向性，則演算法只有一個：$M+P$。這樣一來，不但在概念上單純而簡潔，在「程式設計」上，也變得實用多了。

以上舉負數為例，建議可以如何參考「知、行、識」的架構來設計教材，並以此教材引導教學。但是，我們並沒有設定特殊的教法。而「知、行、識」的架構，就是本文對於數學素養在教學層次的具體建議。

三、課程層次

十二年國教的數學領域課程綱要，在總綱的整體規劃之下，以素養為設計的主軸。數學領綱實踐其整體素養目標的方式之一，就是更精緻地銜接前後學習階段，釐清了許多數學概念的發展脈絡，讓它們從小學到中學有著清晰的軌跡。對於每一條學習的軸線，在各學習階段都有其專注的層次和各自的階段性目標，而各學習階段之間，都應該有更明確的轉銜。這是素養理念賦予課程設計的一個理念：希望教師更清楚地明白，自己負責的這一階段課程，並不是孤立的點，而是在整個數學的學習脈絡中，有其特定的意義和目的。教師的清晰概念，應該有助於學生在合理而平順的課程中學習與成長。

在此，我們舉林福來等人在數學領綱「前導研究」中特別關心的一條軸線為例：空間概念（林福來等人，2013）。

相對於平面，空間課題應該是更具體的學習對象。畢竟，我們生活在空間裡（這裡說的空間是指三度空間），而數學所謂的平面，在生活經驗中其實是「不存在」的。人們為了處理空間中的問題，將空間現象抽象化而且簡化成平面或直線上的問題。所以，數學中的直線與平面幾何，其實是「依附」或「嵌含」在空間之內的；直線和平面其實是從空間的經驗中抽象出來的。

從小學低年級（第一學習階段）開始，學生從自己的視覺和觸覺具體地認識基本幾何形體，從這些實體物的面和稜抽出點、直線和平面的初步認識。在三年級，帶領學童從展開圖製作正方體和長方體，而後又陸續認識柱、錐、球等基本形體。學童先在化約到平面上的簡單環境中，認識直線的平行和垂直。然而，當他們在生活

環境中舉例的時候，卻直覺地將平面上的兩線平行或垂直關係，嵌入了空間之中（例如指出鐵軌是兩條平行線）。到了五年級，將感官和語言直覺地結合在一起，在一個長方體上，認識空間中兩平面的垂直和平行。接著，以長方體的認識為基礎，在生活環境中指出互相平行或垂直的面。課綱可能還會建議一種新的教具：空間中的直角板，作為測量垂直面的工具。

到了國中階段，學生應該進一步認識（直）柱體上的平行面或垂直面，在長方體或柱體上辨識互相平行、垂直或歪斜的直線。我們也期望學生在這個階段能認識直線與平面的垂直關係。藉由畢氏定理和直角三角形上的正弦、餘弦與正切比值，國中階段也把空間形體的認知，從觀察層次推進到初步的測量層次。

高中一年級，學生要在長方體上識別「不落在同一面上」的三角形，換句話說就是三角形的截面，並以三角關係做測量。高中二年級要認識一般的兩面角，以及空間中的直角坐標系（還是奠基於長方體），而A類課程的學生要進入坐標化的空間中直線與平面，以方程式或向量，處理垂直、平行、以及一般的測量問題。高中三年級的甲類選修課程，繼續帶領學生認識一般形體的截面，以及旋轉體。

總括而言，十二年國教數學課程的空間主題，在國中階段以前，目的是將生活經驗對應到數學語言，使學生可以運用數學性質，理性思考生活中發生的空間問題。到了高中階段則主要是提升到測量層次，一部分的學生要了解工業或商業設計中的空間幾何原理，另一部分學生要做好進一步專業化學習的準備。課綱委員特別把支持3D動畫和3D列印所需的數學原理，放在重要的考量上。

參、素養導向的教材參考

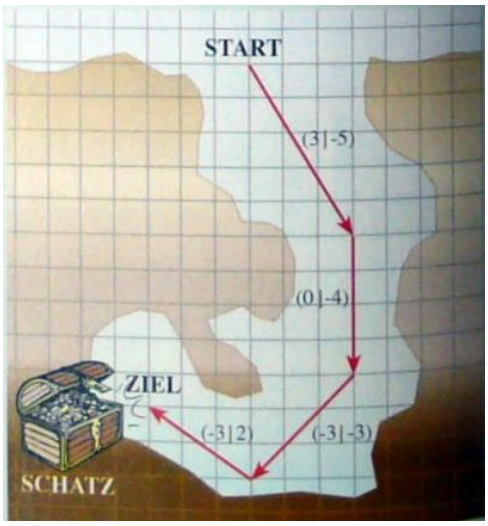
作者在今年9月訪問德國哥丁根（Göttingen）大學的數學系，拜會了數學教育學者Stefan Halverscheid教授（正在兼任系主任）。訪談中，他推薦一套數學教科書：Mathematik Neue Wege（數學新道）。Stefan說這是唯一完全在PISA之後全新設計的教科書，適用於文理中學（Gymnasium）的5至10年級。他的推薦理由是，這一套教材是按照PISA想法而設計的，有許多令人欣賞的創新。按照我國的說法，Stefan教授的推薦辭，可謂「這是一套素養導向的數學教材」。作者發現，許多臺灣同儕在過去五年之間曾經討論或嘗試的新想法，在臺灣或許還沒有進入實驗階段，但是已經被寫在這套《數學新道》裡面了（Lergenmüller , 2006）。

觀察《數學新道》，除了欣賞其個別教學主題的新穎設計以外，它在六個年段之間設計的綿密脈絡，也是令人讚嘆的。本節僅以前面提過的負數與空間兩個主

題，試舉此教材的幾個特殊設計，供讀者參考。

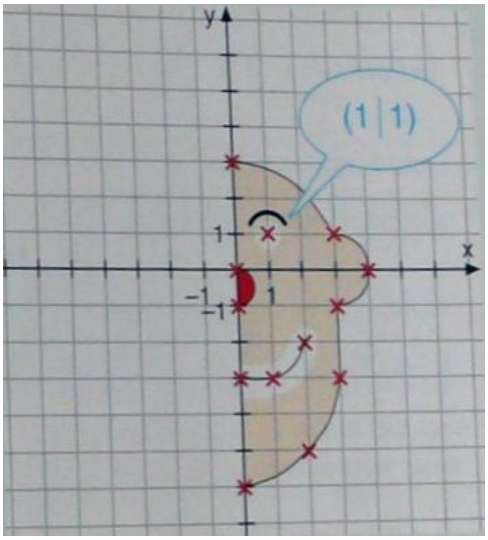
一、負數

《數學新道》在六年級引入負數，而且它是放在有理數那一章裡。最初，負數就是用來表示位移，而且他們是在平面的方格紙上引進負數。在臺灣的數學老師看來，他們簡直就在教向量了。雖然它的抽象觀念的確是向量，但是放在一種如遊戲般的情境裡，不但具體而且好玩。學生的「任務」就是在方格紙上，指揮一艘軍艦（或海盜船）在海域中航行；船必須從起點依序抵達幾個定點，並且避開危險。而船長下的指令就是(a|b)，其中a表示東西向的移動，b表示南北向的移動；正數代表朝東或朝北，負數代表朝西或朝南，課本裡只用整數（在方格的交點上行動）。

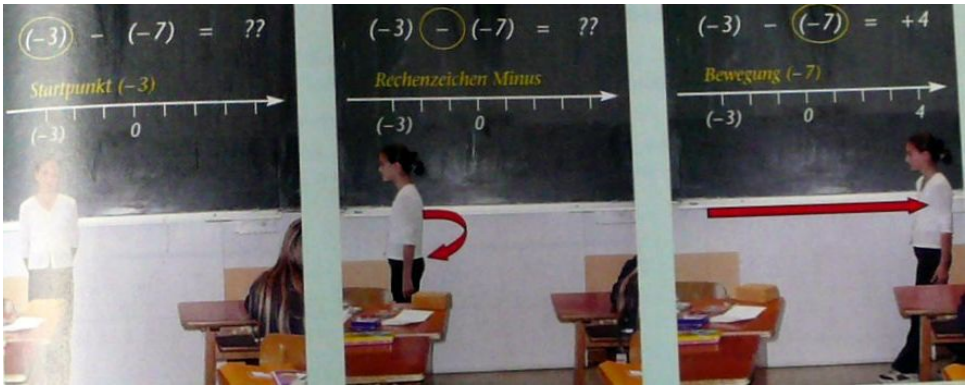


這項設計不僅恰好贊同我們前面所提的「方向」主張，而且也恰好吻合課綱的另一項主張：每個數學課題的學習，都儘量先從算術或數值的記號引進，然後才發展代數層次，最後（如果存在的話）才發展到函數層次。上述的學習層次，在小學階段非常清楚，但是從國中起就模糊了。我們希望新的十二年國教數學課綱，能夠讓每一個主題都符合上述層次的發展。《數學新道》的負數，就是先以記號的形式登場的。而且這份教材並不刻意區分平面和數線，反正在方格紙上，自然就有東西南北（或上下左右）的觀念，並不需要真正引入平面坐標系。

學生習得負數記號之後，才發展它們在數線上的位置。因為學生在五年級就非常熟悉方格紙了，所以介紹數線之後，立刻就介紹了平面坐標系，但是後者僅以「記號」的方式出現，而且還是以遊戲的形式出現；例如在坐標平面上畫一張小丑臉，要學生指出關鍵的點坐標。



在這些記號層次的學習完成之後，才開始做加減計算。此時，《數學新道》採取的說法和本文的主張一樣：把負解釋為方向，而且加減計算就是沿著數線的向前走或向後走。教材把a+3 解釋為從a開始，面朝前（右）走3步，a-3是面朝後（左）走3步，a+(-3)是朝前倒退3步，而 a-(-3) 就是朝後倒退3步。課本建議教師在黑板上畫出數線，單位長大約就是學生的步長，讓孩童親身練習。

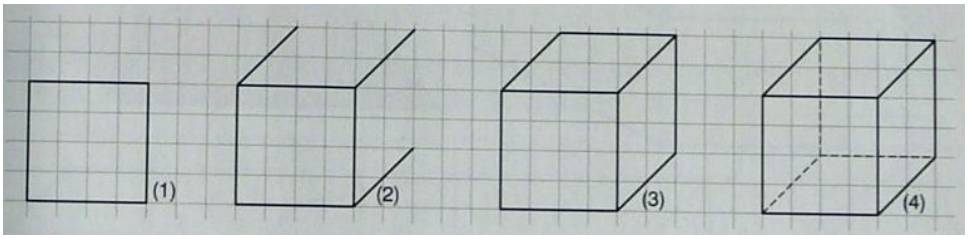


乘和除則拖延到更後面，和有理數一併處理。也就是說，並不單獨針對（正、負）整數處理乘和除的計算。

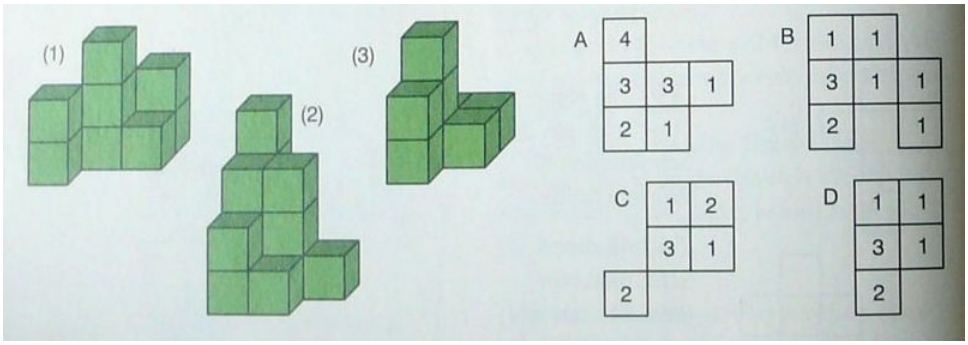
二、空間

前面看到《數學新道》並不刻意分離數線和平面坐標系，只是學習的層次不同。同樣地，他們也不刻意分離空間形體和平面圖形；如我們前面說過的，平面圖形在現實生活中「並不存在」，它們都是從空間中被抽象而簡化形成的。《數學新道》的另一項特色是：大量使用方格紙，設計了非常多在方格紙上的學習活動。而整個德國的數學課程，也看得出來特別注重幾何的操作活動。

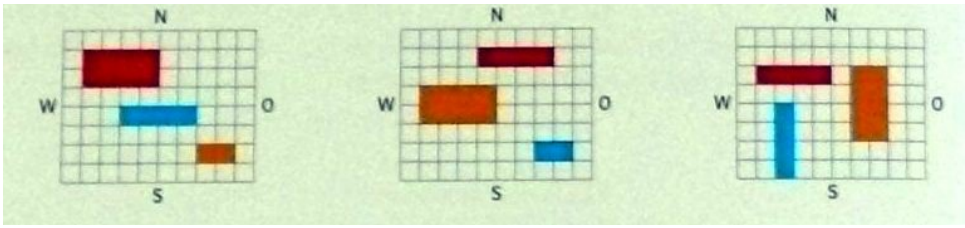
五年級的第一課就是空間形體，從日常生活所見的照片，化為錐或柱狀的幾何物件。他們謹慎地解釋「透視圖」和「示意圖」的差異：前者並無平行線，而後者刻意顯示平行線。他們要求學生在方格紙上練習繪製幾何形體的示意圖。這個學習步驟，是我國課程中長期忽略的。



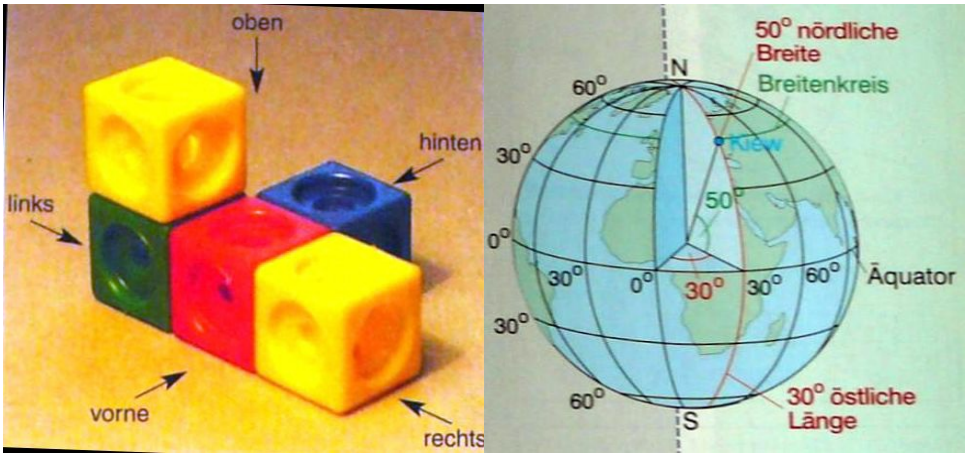
另一項我國課程忽略的課題是立體圖形的三視圖。同樣在五年級，《數學新道》的基本三視圖教學目標，是連結左側的積木透視圖與右側的上視圖（方格中的數字表示那一堆的高度）。這或許像是智商測驗的題目，有些人具備這種空間關係的天分，無師自通；這些人是「生而知之者」。但教育的目的，不就是幫助那些「學而知之」的人，有學習和成長的機會嗎？所以，既然這種空間觀念不是每個人的天分，而且現代生活和科技工具需要這樣的能力，將它放在學校教育的課程中，似乎是說得過去的。



三視圖不僅於此。在六年級，學生根據畫在方格紙上的上視圖（如下圖），要畫出從東、南、西、北方所看到的視圖（給定每塊積木的高度）。

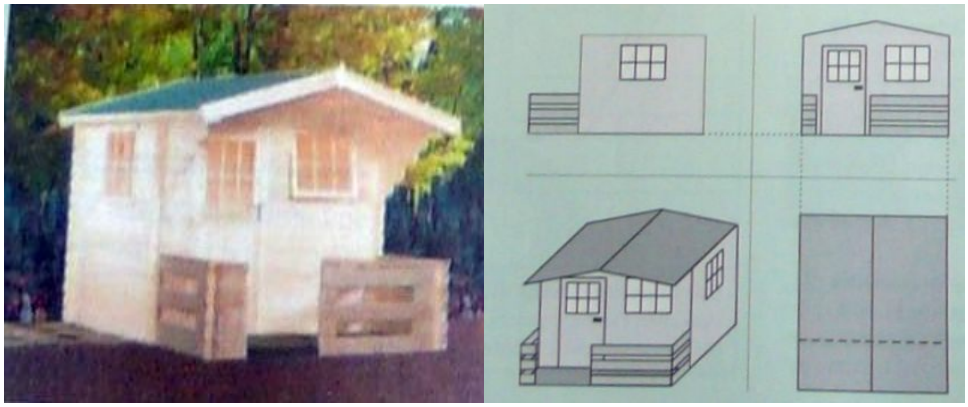


在七年級，則要根據透視圖（如下圖之左），描繪或辨識某個面的視圖，但視圖所見的可能是經過旋轉的同一堆積木。

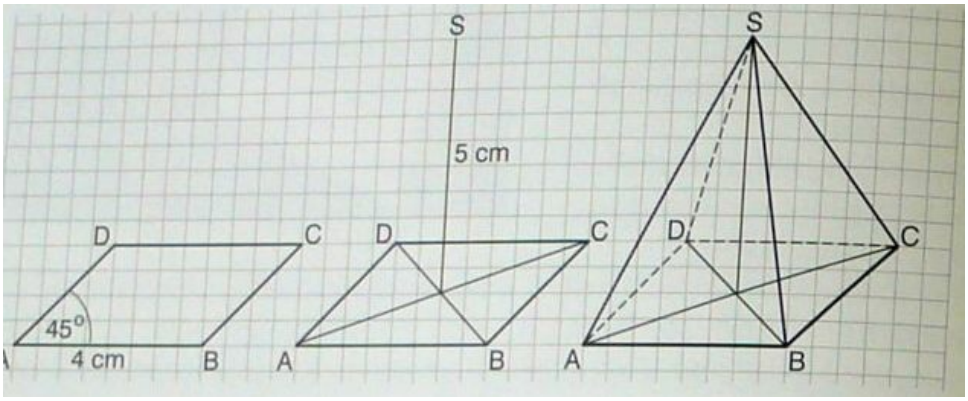


平面與空間的混搭，也出現在圓和球：學了圓之後，可以應用在球上的圓就跟著出現了。上圖之右是經緯度的解釋，我國可能屬於地理課程，它在德國屬於五年級的數學內容。

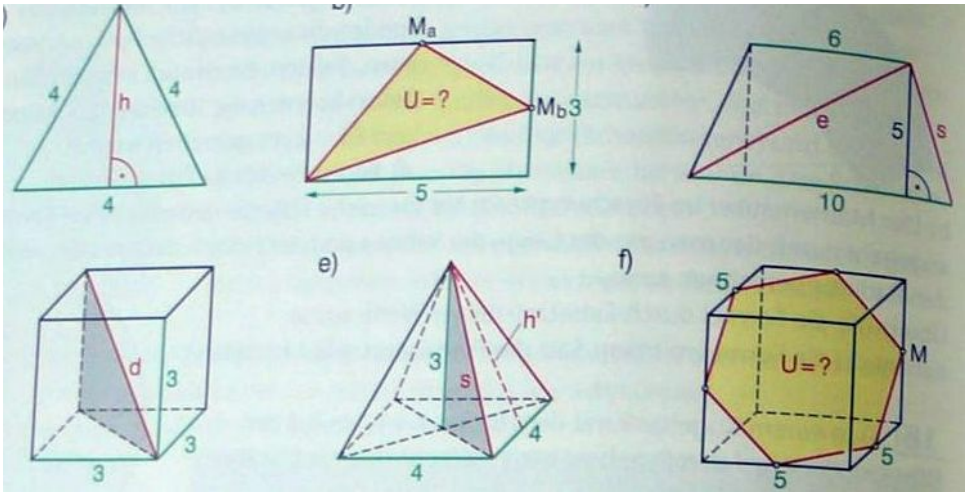
三視圖的練習一直逐漸增加複雜度與真實的程度，到了九年級，課本裡出現如下的照片，和其對應的透視圖和三視圖。這是3D繪圖軟體裡常見的畫面分割方式。而學生此時要能處理複合形體的三視圖（不再是正方體積木的堆積）。



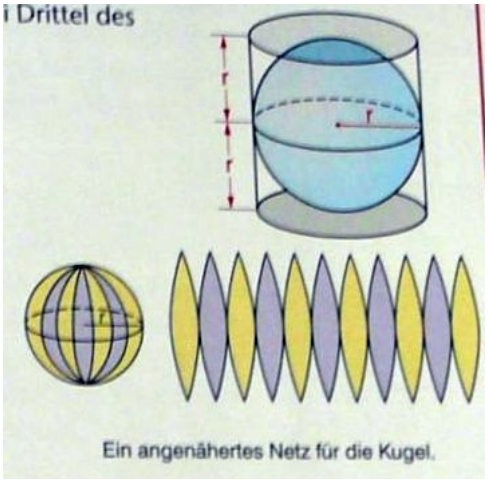
製作示意圖的能力也在逐漸發展。九年級有以下四角錐的教學，然後學生要做三角柱、圓錐、圓柱等基本形體的示意圖。



德國的中學生，在八年級學習畢氏定理，與我國一樣。但是因為學習過程中一直是平面搭配著空間，這時候也不例外：下圖中，學生做的是平面圖形的問題，但那個圖形鑲嵌在空間之中。像這樣的練習，一面精熟平面圖形的處理，一面不忘空間的本質，應該是一舉兩得的。這些問題經過數學化，看起來是純幾何的練習，但是其實已經具備測量的內涵。



球的體積與表面積，以相當「古典」的方式「說明」，如右圖。



空間課題在十和十一年級大致上中斷了，或者說，基本的空間課題在九年級完成了。在十和十一年級，德國的中學生專注於學習函數和基本的微積分。在十二（或十三）年級，空間坐標才正式出現，而空間中的直線與平面方程式，以及空間向量，都在那時候才學習。空間的坐標幾何及空間向量，是高中數學教育最後期的內容，也是學生準備高中畢業考試（申請大學的依據）的專業化內容。這一部分的數學，是選考的內容，並非每個學生都要考。

雖然前面說過，五年級就出現了「類似」平面向量的內容，但是平面向量並沒有正式出現在德國課程裡。這個現象也是本文作者常提出的觀點：平面向量在數學

史上是不存在的。平面向量固然是個方便的工具，但它所處理的問題都是普通的解析幾何就能做的，並沒有非學不可的理由。但是，作為線性代數的最基本範例，並作為空間向量的前置經驗和簡單的類比，更何況我國教師都對平面向量很拿手，數學課綱還是包含了平面向量。

《數學新道》處理平面幾何和三角函數的方式也很值得參考，但本文只打算提出負數和空間這兩條課程發展的軸線，供讀者參考。所謂「家家有本難唸的經」，德國的教育現場也有許多令他們煩惱的問題；那些特殊的問題是他們的制度傳統與社會價值觀造成的，就如同我們自己的傳統也塑造了我們的特殊問題。外國的月亮不一定比較圓，我國課程也有自己的優點，但是這並非本文的要旨，只想在此簡單地註明：環顧國際的數學教育，都有可借鏡之處，但我們有自己的獨特情況要處理，複製外國課程是不可行的。

肆、結語

我國對於「素養」的期望不止於務實的能力觀，應該可以在文化、教學與課程層面，發展自己的見解。本文提出「知、行、識」之架構，作為發展數學素養之課程與教材的參考，盼各界指教。

參考文獻

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）。**教育部提昇國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告**。臺北市：教育部。

李嘉哲，鄭晉昌（2008）。**管理職能模型之建置—以A公司為例**。第十四屆企業人力資源管理實務專題研究成果發表會, 桃園市：國立中央大學。

林福來、單維彰、李源順、鄭章華（2013）。**十二年國民基本教育領域綱要內容前導研究」整合型研究子計畫三：十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究研究報告**（編號：NAER-102-06-A-1-02-03-1-12）。國家教育研究院。

洪裕宏（2008）。**界定與選擇國民核心素養：概念參考架構與理論基礎研究**。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告 (NSC 95-2511-S-010-001)。臺北市：國立陽明大學。

教育部（2005）。**普通高級中學課程暫行綱要**。臺北市：作者。

黃友初（2013）。**中國大陸數學素養研究綜述，收錄於「教育部提昇國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告」**。臺北市：教育部。

鄭章華、單維彰（2015）。**素養導向之數學教材初探**。邁向十二年國教新課綱的第一哩路研討會。國家教育研究院。

嚴長壽（2015）。教育真的可以不一樣。**教育脈動電子期刊，1**，取自 http://pulse.naer.edu.tw/content.aspx?type=A&sid=19

Council of Europe (2001). *Common European Framework of Reference for Languages: Learning, teaching, assessment*. Cambridge University Press.

DfE (2013) .*The National Curriculum in England, Framework Document,Department for Education, United Kingdom*. Retrieved from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/210969/NC_framework_document_-_FINAL.pdf

Lergenmüller (2006). Mathematik Neue Wege 7, Schroedel Verlag.

McClelland, D. C. (1973). Testing for Competence rather than for Intelligence, *American Psychologist*, *28*(1), 1-24.

Rychen, D. S., & Salganik, L. H. (eds.) (2003). *Key Competencies for a Successful Life and a Well-Functioning Society*. Hogrefe & Huber, Göttingen

---

* 單維彰，國立中央大學數學系副教授

電子郵件：shann.weichang@gmail.com