

# 數學素養之意涵與其變遷

游自達\*國立台中教育大學教育學系副教授

## 摘要

數學素養源於1950 末期，到1980年代漸受各主要國家的關注，成為重要的數學教學目標。近年來更因經濟合作與發展組織推動之學生成就評量、國民素養專案、十二年基本教育核心素養等方案的推動，讓數學素養的議題成為教育界及大眾討論的重點。

近半世紀來，不同國家、地區的學者使用不同的詞彙來詮釋數學素養，而素養的內涵也因時空推移而有所變遷。有鑒於此，本文先探討數學素養概念的緣起及不同用詞的關聯，其次分析半世紀來數學素養的內涵變遷，最後反觀數學素養的內涵論述對數學教育的意義。基本上，數學素養的內涵已從早期有關特定數學內容的精熟，逐步過渡到個體現實生活關聯的思考與批判。數學素養是個體、數學和社會生活三者相結合的綜合體，也是現代公民應具備的核心特質。

**關鍵詞：**數學素養，數學能力，數學教育



## 壹、前言

約近二十年，「素養」成為大眾經常接觸與使用的語彙，許多與素養有關的概念

在專業領域中廣受討論，也應用於日常生活中。例如，數學素養、科學素養、閱讀素養、民主素養、電腦素養、科技素養、數位素養、媒體素養、多元文化素養等用語常見於新聞報導和教育議題的討論之中。加上「經濟合作與發展組織」

（Organisation for Economic Cooperation and Development, [OECD]）等國際組織對國民素養的重視與評量，使得國民核心素養的培養受到高度關注（方德隆，2013；洪裕宏，2008；陳伯璋，2010；蔡清田，2011，2013a，2013b）。國民核心素養的培養更成為我國十二年國民基本教育的課程主軸，以養成國民適應現在生活及面對未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度（教育部，2014）。

在數學教育方面，學生數學素養的提升成為諸多數學教育團體所揭櫫的首要教育目標（如教育部，2003，2014；American Association for the Advancement of Science, [AAAS], 1989；National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 1989, 1991；Niss, 1996）。儘管數學素養的提升廣受關注，學者們對於數學素養的觀點和用字則有分歧，形成多個用字各自表述的現象。在國外，從1980年代至今，數學素養的培育成為英國、美國、澳洲等國的重要課程目標。在國內，隨著十二年國民基本教育的推動，「核心素養」取代九年一貫課程的十大基本能力成為引導課程發展的方針（教育部，2014）。在提升國民核心素養的教育改革趨勢中，數學素養乃是其中重要的環節。具體而言，素養教育成為世界各主要國家重要的課程目標，數學素養的培養亦是其中的重要面向。不過，觀諸近半世紀來有關數學素養的論述，數學素養的內涵因時空推移而有所變遷，不同國家、地區的學者有其共同關注的面向，也有因社會文化的差異而有不同的著重點。為釐清數學素養的意涵與變遷，本文先討論數學素養概念的緣起，其次分析數學素養的內涵變遷，最後反觀數學素養的內涵論述對數學教育的意義。

## 貳、數學素養的術語與其意涵

在數學素養相關文獻中，國內外不同的機構或學者往往使用不同的詞彙來詮釋與探討數學素養之相關議題。在英文文獻中，與數學素養相關的用字包括「numeracy」、「mathematical literacy」、「mathematical proficiency」、「quantitative literacy」、「Matheracy」等。正如黃友初（2014）、陸昱任、譚克平（2006）、Madison與Steen（2008）所指出，這些不同的用詞和當地的文化傳統有關。分析相關文獻顯示，英國、澳洲等國家之官方、學術機構、學者多用numeracy及mathematical literacy，而美國則多以mathematical literacy、mathematical proficiency、quantitative literacy等來表達數學素養的意涵。其中，「mathematical

literacy」一詞則因經濟合作暨發展組織所推動的國際學生評量計畫（Program for International Student Assessment, [PISA]）而廣受各國學者所使用與討論。

使用「Numeracy」這個字來表達學生應該具有的數學能力可追溯自1959年英國的「克勞瑟報告書」（Crowther Report）。這份報告是數學素養概念的最初起源。該報告主筆的J. G. Crowther認為數學能力和一般的讀寫能力同等重要，二者可說是一體的兩面（mirror image of literacy），乃是一個有教養的人應具有的基本素質。因此結合Numerate和Literacy，創用了Numeracy一字，用以表達數學的讀與寫能力。該報告指出Numeracy的兩種含義：（一）對觀察、假設、實驗、驗證等科學研究方法的理理解；（二）基於社會定量思考和認識問題程度的需要，透過量化思維去了解所面臨問題的困難度及問題的形態（Central Advisory Council for Education, 1959）。基於這樣的起源，Numeracy這個字較常見於英國及大英國協國家，如澳洲和紐西蘭等。

美國有關數學素養的文獻則交互使用mathematical literacy、mathematical proficiency、quantitative literacy等用語。美國數學教師協會（NCTM）所組織的學校數學標準委員會（Commission on Standards for School Mathematics）於1986年在著手擬定學校數學改革的任務時提出以培養學生數學素養為課程改革的重要目標，並用Mathematical Literacy一詞表示數學素養（NCTM, 1989, 1991）。此後，數學素養成了美國數學課程與教學的中心議題，在數學課堂教學中也扮演了重要的角色。至於Quantitative Literacy一詞的使用則源自美國麻省理工學院的Jerrold Zacharias教授。他於1974年以Quantitative Literacy表示公民所應具有用以處理影響自身、國家和所處世界之事物和論證的能力。這些能力包括基本運算、數線、測量、圖形與地圖運用、利率、統計等方面的概念與運用（Skalicky, 2004）。近年來，不少學者（如Best, 2007；Burkhardt, 2007；Kosko & Wilkins, 2011；Madison, 2003等）亦沿用Quantitative Literacy來表示現代人面對資訊社會所應具有的理解、分析、批判等能力。

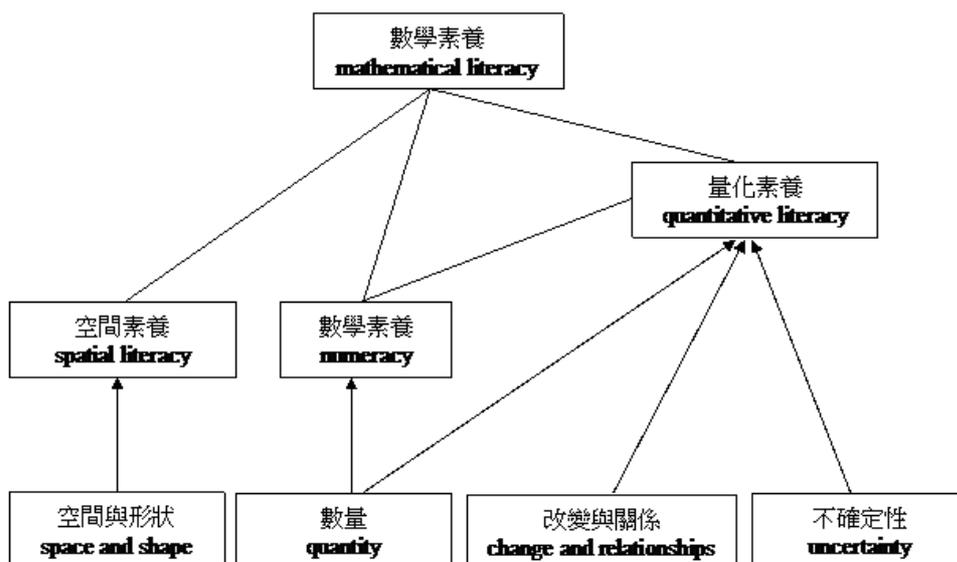
另外，mathematical proficiency主要源自於美國國家研究委員會（National Research Council，簡稱NRC）下屬的數學學習研究委員會（Mathematics Learning Study Committee，簡稱MLSC）在2001年所發表的報告書。該報告書名為「累加向上：幫助兒童學習數學」（Adding it up: Helping children learn mathematics），以mathematical proficiency表示數學素養，認為數學素養是一個與成功的數學學習相對應的用詞，是所有學生需達到的學習目標（Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001）。該報告認為數學素養是五種緊密交織的能力所共同構成。這五種能

力包括概念理解 (conceptual understanding)、程序流暢 (procedural fluency)、策略能力 (strategic competence)、合宜推理 (adaptive reasoning)、具積極傾向 (productive disposition)。學者們後續的研究討論也沿用該報告書中有關mathematical proficiency的架構。

至於Matheracy 一字則是巴西學者Ubiratan D'Ambrosio 於1999年所創用。他認為上個世紀初世界各國以讀寫算 (3Rs) 為基礎的課程，已無法適應社會的需要。因此提出以讀寫素養 (literacy)、數學素養 (matheracy) 以及技術素養 (technoracy) 的培養來因應科技與資訊時代的需求。數學素養 (matheracy) 乃是mathematics與literacy的綜合，意指每一個現代人從所面對的各項資訊中，提出假設、進行推論、形成結論、進行反思等的整合能力 (D'Ambrosio, 1999)。

針對有關數學素養的不同用詞，De Lange (2006) 分析不同用詞的內涵後認為「mathematical literacy」一詞較能統合個體在情境中有關空間與形狀 (space and shape)、數量 (quantity)、改變與關係 (change and relationships)、不確定性 (uncertainty) 等面向的能力。數學素養涵蓋個體在環境活動所需的「空間素養」 (spatial literacy)、處理生活中數量問題的「數字素養」 (numeracy)、因應情境中確定、不確定、關係等關係的「量化素養」 (quantitative literacy) 等三方面的素養。De Lange並以樹狀關係圖 (如圖1) 表示前述幾個詞之間的相互關係。

圖1 De Lange的數學素養結構樹狀圖



資料來源：“Mathematical Literacy for Living from OECD-PISA Perspective”. by J. De Lange, J., 2006, Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics, 25, p. 15.

綜合而言，目前國際上表示數學素養的常用詞有mathematical literacy、quantitative literacy、mathematical proficiency和matheracy等。在不同的國家基於其社會文化而有不同使用習慣，而且幾組用詞之間也常交換使用。例如，近年來，美國國家教育和紀律委員會（The National Council on Education and The Disciplines）出版《數學與民主：以數學素養為例》（Mathematics and democracy：The case for quantitative literacy）（Steen, 2001）和《數學素養：何以其攸關中小學和大學教育》（Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges）（Madison & Steen, 2003）兩本專書中的專文便分別使用了quantitative literacy、numeracy、mathematical literacy和matheracy這幾組和數學素養有關的詞彙。這些詞彙均傳達了對現代公民應具數學素養的意涵。

### 參、數學素養內涵之變

數學素養的概念從numeracy 在1959 年被提出至今已超過半個世紀，mathematical literacy 一詞的使用也有30年左右的歷史。在經濟、科技與社會快速發展過程中，數學素養的培育廣受各國所重視，不過數學素養的內涵已因時代而有所轉變。在不同的年代，歐美學者對數學素養的認識有所不同，即使同一時代，學者們也因文化背景和研究視角的差異，對數學素養的內涵也有不同的闡述。從基本能力、職場功能需求、公民社會參與或個人潛能發展等不同面向，產生不同的論述重點。以下先就歐美國家有關數學素養的重要教育報告加以整理，分析數學素養的內涵，再綜合歸納數學素養內涵的變遷。

#### 一、有關數學素養發展的重要報告

有關數學素養的關注起於1950年代後期，到1980年代左右則廣受世界各主要國家所關注。上個世紀末起又因OECD的國際比教評量計畫PISA，至今廣受世界主要國家的重視。半世紀來，歐美國家提出多項和數學素養有關的重要教育報告。謹舉出較重要且具影響力的報告或事件，彙整如表1。

表1

有關數學素養發展的重要報告與事件

年代	國家	報告／課程	與數學素養有關之內涵

1959	英國	克勞瑟報告 (Crowther Report)	<p>1、提出了Numeracy一詞以表示數學素養。</p> <p>2、Numeracy的兩種含義：對科學方法的理解及透過量化思維以了解所面臨問題難度及型態的能力。</p> <p>3、前蘇聯人造衛星升空的影響，以培養菁英為著眼點，趨向於科學力量的願景與知識的需求（Central Advisory Council for Education, England, 1959）。</p>
1982	英國	考克羅夫特報告 (Cockcroft Report)	<p>1、認為數學教育的目標在於滿足學生日後生活、就業和進一步學習的需要。</p> <p>2、強調培養學生了解使用數學作為溝通的方式，並且著眼於個體日常生活所需的技能。</p> <p>3、數學素養是一般民眾在社會生活中所需要的數學，包括兩方面：一是運用數位和數學技能處理家庭和日常生活中實際問題的能力；二是認識與理解像圖表、曲線、百分比等數學語言所含資訊的能力（Cockcroft, 1982）。</p>
1989	美國	學校數學課程和評量標準 (Curriculum and evaluation standards for school mathematics)	<p>1、美國數學教師協會（NCTM）在1986年擬定學校數學課程改革任務時提出Mathematical Literacy一詞表示數學素養。</p> <p>2、認為具備數學素養的個體懂得數學的價值，具備數學能力，能進行數學溝通，對自己數學能力有信心，能有效的使用數學方法去解決問題（NCTM, 1989）。</p>
			<p>1、由、澳大利亞數學教師協會（The Australian Association of Mathematics Teachers）在Perth舉辦「數學素養教育策略發展研討會」（Numeracy Education Strategy</p>

1997	澳大利亞	數學素養關乎每位民眾 (Numeracy =everyone's business)	<p>Development Conference) 之後提出。</p> <p>2、指出Numeracy 是指個體在面對家庭、工作，以及參與社區和公民日常生活時，能有效的使用數學。</p> <p>3、認為Numeracy 有四部分組成：數學概念和技能的理解；數學思維和策略；一般思維技能；有根據地感知情境 (Grounded appreciation of context) ( AAMT, 1997)</p>
1999	OECD	學生知識技能評量新架構 (Measure student knowledge and skill: A new framework for assessment)	<p>1、OECD/PISA 是一種國際性的標準評量，透過每三年的定期評量，監督教育系統中的學生表現。</p> <p>2、以 OECD 組織會員國之學生，完成義務教育者為施測對象，約為十五歲之學生。</p> <p>3、將數學素養定義為：個體能夠辨認和了解數學在世界上所扮演的角色，能夠進行有根據的評斷，並且針對個體在生活中的需求來運用或者投入數學活動，以成為一個積極的、關懷的、以及反思的國民 (OECD, 1999)。</p>
2001	美國	累加向上：幫助兒童學習數學 (Adding it up: Helping children learn mathematics)	<p>1、美國國家研究委員會 (National Research Council) 下屬的數學學習研究委員會 (Mathematics Learning Study Committee) 所提出。</p> <p>2、以mathematical proficiency表示數學素養。</p> <p>3、認為數學素養是所有學生需達到的學習目標。</p> <p>4、認為數學素養是概念理解 (conceptual understanding)、程序流暢 (procedural fluency)、策略能力 (strategic competence)、合宜推理 (adaptive</p>

			reasoning) 、具積極傾向 (productive disposition) 五種緊密交織的能力所共構 (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001) 。
--	--	--	---

前述各項報告引發數學教育學者的論述與探究，並影響各相關國家的數學課程。例如，1982年英國的「考克羅夫特報告」認為具備數學素養的個體應是能了解使用數學作為溝通的方式，並且著眼於個體日常生活所需的技能。這種論述擴充了數學學習的內涵，注重個體在社會生活中所需要的數學知能培養。英國於1996年推出國家數學素養策略 (National Numeracy Strategy)，1999年9月起在英格蘭所有小學開始實施。該數學素養策略要求學校教育要培養學生運用數學思維和數學技能來解決問題，以及滿足在複雜的社會環境中日常生活需求的能力 (Department for Education and Employment, 1999)。

在美國方面，美國數學教師協會於1989年提出「學校數學課程和評量標準」 (curriculum and evaluation standards for school mathematics)，有關培養學生數學素養的主張受到認同，很多學者開始研究並發展數學素養的內涵。Pugalee (1999) 認為數學素養是個體適應未來科技與社會生活的基礎條件，因此提出了一個由內外兩個環共同構成的數學素養模型 (model of mathematical literacy)。該模型的內環是成為具有數學素養者的必要元素，由溝通 (communication)、科技 (technology)、價值觀 (values) 等三者構成；外環表示數學素養的過程 (processes of mathematical literacy)，包括表徵 (representing)、運算 (manipulating)、推理 (reasoning)、問題解決 (problem solving) 等四個歷程。Pugalee認為，學生須在內環和外環相互影響下，培養相應的數學知能。

Kilpatrick、Swafford和 Findell (2001) 以「mathematical proficiency」來代表數學素養，並透過編織繩索的五股線繩做比喻來詮釋構成數學素養所需的五項主要能力。這五項能力包括：(1) 概念理解 (conceptual understanding)；(2) 程序流暢 (procedural fluency)；(3) 策略能力 (strategic competence)；(4) 合宜推理 (adaptive reasoning)；與 (5) 具積極傾向 (productive disposition)。其中概念理解是指對數學概念、運算和關係的了解；程序流暢是指能有彈性地、準確地、有效率地、合適地執行過程技能；策略能力是指能夠形成表徵和解決數學問題；合宜推理是指能夠邏輯思考、反思、解釋與驗證的能力；積極傾向則是指將數學視為有理、有用且有價值的學問以及相信自己有能力且願意努力。

從以上各項論述可以發現，不同專業機構或學者對於數學素養的內涵有不同的主張，著重點也有差異。不過，論述的焦點大體離不開個體、數學歷程與社會文化脈絡。簡而言之，數學素養的核心關注不外乎是個體在面對周遭環境中的人、事、物等不同現象與變化時，如何產生與數學之間的連結，並以數學思考與方法合宜地加以因應處理。數學素養不只重視知識，也重視能力，更強調態度的重要性，可說是結合個人數學知識、思維方法以因應情境需求的整合能力。

## 二、數學素養內涵的變遷

因應時代需求的變遷，數學教學所欲培養學生數學素養的內涵也有所變遷。分析近半世紀年來有關數學素養的主要論述，數學素養的內涵有下列幾個主要的變遷：

### （一）數學素養的關注對象由菁英轉向全民

隨著社會民主化的發展趨勢，教育的普及帶動教育機會均等與教育品質的追求，數學素養所關注的對象由傳統的菁英主義轉向全民數學（mathematics for all）（AAAS, 1989；National Research Council, 1989；NCTM, 1989）。早期的數學課程主要是為少數菁英而設。英國1959年的克勞瑟報告側重數學讀與寫能力的培養，所注重的乃是培養菁英所需的科學知識。1960年代的全球性新數學課程發展運動，其本質亦是以培養科學家為目的，並未改變以菁英為主要對象的本質（AAAS, 1989；National Research Council, 1989）。

有關數學素養的論述在1980年代則轉向全民大眾，專業機構和學者所關注的不是菁英的數學素養，而是全體國民因應生活需求的基本數學素養。數學全民化成為重要趨勢，全民數學素養成為關注焦點。諸多學者強調，數學課程必須隨者全民數學素養的目標而做調整，從重視學科知識、內容邏輯的取向，轉而結合個人及社會的內涵，反映社會的變遷及社會的關切，著重多元性、文化性、實用性等方面的價值（邱守榕，1990；AAAS, 1989）。

### （二）數學素養的內涵由數學內容與過程擴充到社會文化脈絡的問題解決

分析有關數學素養的定義和論述可以發現，數學素養的內涵在1970年代末期有較大幅度的轉變與擴充，1990年代中葉以後又有所變動。1970年代末期以前，數學教育重視數學知識、數學基礎技能的學習，以方法技巧的正確與熟練為核心的取向。Butler和Wren（1965）曾指出，數學教育的主要目標在於為學生提供順利計算的

基本知識與技能，並培養學生能建立有效的論證。1970年代末期以後，面對國際化、科技化、資訊化等方面的變遷與衝擊，各主要國家普遍認為新世紀的世界公民所需要的基本素養，並不只是讀、寫、算而已，尚必須具有溝通、高層次思考、問題解決、及基本的科技能力（National Science Board, 1980）。美國數學教師協會（NCTM, 1980）指出，解題是數學教學的焦點，數學是一種思考方法，並重視溝通與學習信心的培養。這樣的精神具體反映於美國數學教師協會於1989年所出版的「學校數學課程與評量標準」（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics）、美國研究協會（National Research Council）所提出的「全民數算」（Everybody Counts）、美國科學促進協會（American Association for the Advancement of Science，簡稱AAAS）所發表的「美國民眾所需的科學」（Science for all Americans）的報告中（AAAS, 1989）。美國數學教師協會（NCTM, 1989）強調將數學視為解題、溝通、推理、與連結，強化數學與生活及其他學科的整合連結，使學生能肯定數學的價值、增進自己對數學能力的信心、學習進行數學性的溝通、成為數學問題的解決者、從事數學的推理，成為具有數學素養的現代公民。

數學素養內涵的擴充亦顯示於美國科學促進協會在一九八五年所發起的「2061計畫」（Project 2061）。2061計畫提出了以「科學素養」之培育為中心目標的長程教育計畫，以數學、科學、科技三方面基本素養之提昇為教育的基本方針。該計畫強調，數學與科學教育活動重點並不在於教授已知的知識，而是在於讓學生從問題的情境中，運用自己的知能，仔細思考、蒐集資料、分析資料、作邏輯判斷，並和同伴溝通合作，以有效地解決問題（AAAS, 1989）。

數學素養的內涵在1990年代中葉以後又有進一步的擴充。從運用數學知識透過解題歷程解決問題，進一步擴充至一般人生活情境中非例行性問題的覺察、解決與反省。最具代表性的當屬由OECD所推動的PISA評量計畫（OECD, 1999）。該計畫的數學素養評量架構包括數學概念、數學過程和情境脈絡（situations and contexts）等三個面向。數學概念包括空間形狀、機率、數量推理等數學內容的「大概念」（big ideas）。數學過程包含執执行程序、連結能力、數學思考與類化的能力。情境脈絡則是強調個人在不同的情境中應用數學知識與過程以解決問題的能力。PISA評量架構共涵蓋：個人、教育、職業、社會及科學等五種情境。因此評量的題材內容包羅萬象，現代國民會碰到的全球重要議題、一般生活化的常識等都納入數學素養的範圍。簡言之，PISA的數學素養乃是學生提出、形成、解決及詮釋解答牽涉到數量、空間、機率或是其他數學概念的各式各樣問題情境時，能有效進行分析、推理

以及溝通的能力。PISA的評量將學生對於數學內容的理解與數學解題思考的歷程、不同情境中應用的能力加以整合，形成數學內容、能力、與情境整合的三元架構。

綜合而言，近半世紀來有關數學素養論述的內涵由早期偏重數學內容精熟的關注，逐漸轉向數學解題過程與思考能力的培養，進而再擴充到主動運用數學知識與思維在社會文化脈絡中覺察問題、形成與解決問題，並能進行反思的綜合能力。數學內容知識、數學過程、情境脈絡等三面向成為當前數學素養的重要構面。

### (三) 數學素養之內涵由認知向度擴充至情意面向的關注

有鑒於傳統數學課程中的符號性與邏輯性傾向，讓眾多學習者對數學學習喪失信心，產生疏離感，因逃避或排斥而錯過學習數學的機會，相對地亦影響學習的表現。在提昇全民數學素養的趨勢下，一方面消極地排除學校中造成數學學習困難的因素，去除學生的數學恐懼；另一方面在數學的內容及教學做法上協助學生建立數學學習的信心、理解數學的內涵、發展批判思考能力，使人人得以學數學、喜歡數學、欣賞數學成為數學全民化下的另一項關注。

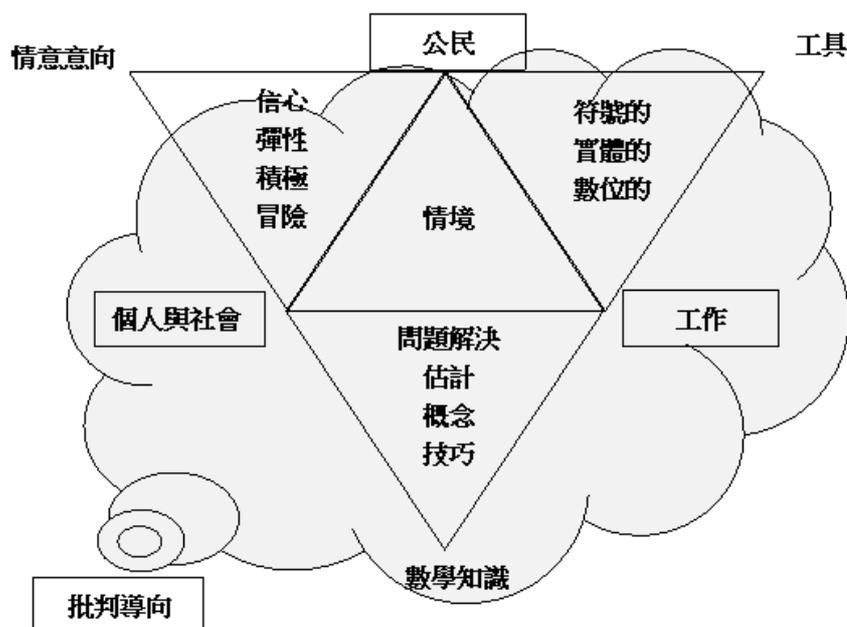
近二、三十年，數學素養的關注層面更廣，除了數學式的思考進入真實生活的認知關注外，情意層面的發展也成為數學素養的核心元素。例如，De Lange (2006)、Ginsburg、Manly以及Schmitt

(2006)、Kerka (1995)、Stoessiger (2002)等學者都強調個體的數學意向、數學信心等情感向度對數學素養十分重要。近來有關數學素養的論述重視個體能正確的看待數學，了解數學對個人和社會發展的價值（包括外在的價值和內隱的價值），在現實生活中有使用數學的意願，並具有能用數學來幫助解決問題的信心。

綜上所述，儘管各國表示數學素養的術語不同，提出數學素養的背景也有區別，但是這些數學素養的內涵都已經從特定的範疇，逐步過渡到個體現實生活的領域，認為數學素養是個體、數學以及社會生活三者相結合的綜合體，並重視個體的數學意向、數學信心等情感向度。

有關數學素養多面向、整合性的發展趨勢，Goos、Geiger與Dole (2012)所建構的新世紀數學素養模式便是新近的一個代表。Goos、Geiger和Dole認為21世紀的公民需要具有智性、情意、情境、科技等面向整全的數學素養。因此，提出如圖2所示的數學素養模式。

圖2 Goos、Geiger 和 Dole 提出的21世紀公民數學數養模式



資料來源：” Auditing the Numeracy Demands of the Australian Curriculum”, by M. Goos,

V. Geiger, & S. Dole, 2012, In J. Dindyal, L. P. Cheng & S. F. Ng (Eds.),  
Mathematics education: Expanding horizons: Proceedings of the 35th annual  
conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia , p. 315.

Goos、Geiger及Dole（2012）所建構的數學素養模式整合數學知識、工具、情境、情意意向、批判取向等五個元素，強調具有數學素養的新世紀公民需要能運用科技工具做為媒介，協助進行數學思考與行動，並能具批判性地運用數學知能進行論證。依據Goos、Geiger和Dole的觀點，這五個元素均是新世紀公民數學素養不可或缺的內涵。數學知識包含數學概念與技能、問題解決策略、估算能力等；工具則是使用實體的（如模型、測量工具等）、符號的（如符號系統、圖形、地圖、表格等）、數位的（如電腦、計算器、軟體、網路資訊等）等不同類型的工具進行學習；情境是將數學知識運用於校內外不同情境的能力；情意意向是指個體結合數學知識，運用數學方法面對生活相關活動的意願、信心與準備度；批判取向則是運用數學資訊做決定與判斷、進行論證或挑戰論證。此模式正反映了當前學者對數學素養的多面向觀點。數學素養不再只是指數學的成就表現，也不是數學的性向，而是一個人面對各種複雜多變的情境及實際問題時，能夠靈活運用學校所學的知識與方法，以主動積極的態度及多元開放的精神，整合各種相關資訊，發揮思辨、統整、溝通能力與創意來解決問題的能力。

#### 肆、從國外數學素養的論述反觀：代結語

數學素養的提出及其內涵的變遷反應不同時代發展下對於學習者能力的不同要求。不同時代、社會、文化傳統對數學素養內涵的詮釋和對人的數學素養有不同的要求。從數學課程發展的觀點來看，從菁英數學到大眾數學；新數運動、回到基礎、到素養教育；從資訊科技與數學課程整合到數學課程發展多元化，無不是為了培養擁有適合當時需求的數學素養人才。

歐美國家有關數學素養的關注和論述有其相當長的歷史。相對地，國內對於數學素養的關注則相對較晚。九年一貫課程的推動，我國學生在PISA上的表現所受到的關注，十二年國民基本教育以國民核心素養的培養為課程主軸的論述等，逐漸引發教育工作者對於素養教育的關注。隨著十二年國民基本教育的推動，課程總綱的公布及領域綱要內涵的討論等，素養教育的議題勢必在國內持續發燒、引發論辯。李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）在「教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計畫」中將數學素養內涵闡述為：「數學素養指個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、社會、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點」（p. 7）。這樣的闡述乃是整合當前數學教育界對數學素養論述的結果，也反映了我國教育和國際同步的努力。

儘管國際間對於數學素養所使用的術語不同，但是致力於提升國民數學素養的努力並無二致。不同學者、專業組織對於數學素養內涵的論述或有些許差異，但是對於數學素養的多面向性、整合性、生活情境關聯等方面則有高度共識。在這樣的趨勢下，筆者認為下列二個議題值得關注與思考：

**一、數學知識與數學素養發展之間的關聯：**數學教育學者普遍認同數學素養不等於數學知識的精熟，但無可否認地，數學是數學素養的基礎，其對於培養具有數學素養的個體有密切關聯。因此數學素養的強化與數學的學習並非背道而馳，相反地，數學是支持學生數學素養的要素（AAMT, 1997）。如何透過數學學習活動培養學生的數學素養則是一個亟需探究的議題。美國研究院（American Institutes for Research, 2006）回顧有關數學素養相關研究後指出，數學素養的發展經歷形成期（formative phase）、數學期（mathematical phase）和整合期（integrative phase）三個時期。形成期主要是發展數學概念與技巧，屬於初步知能的學習理解時期。數學期

乃是認識數學在日常生活重要性與應用的時期，屬於數學的生活連結與應用。整合期則是整合數學溝通、個人在情境中的社會、文化、情感等不同面向的複雜建構，其包含數學相關實用的、專業的、公民的、休閒的、文化的多面向目的活動。當前學者有關數學素養內涵的論述似乎較偏向整合期的素養成果。但這樣複雜多面的素養如何透過數學領域內、跨領域整合的學習而逐步發展則尚不清楚，有待後續之研究。

**二、數學素養與公民生活的關聯：**數學素養涉及個體與生活周遭的數學連結關係，因此數學素養的內涵並不局限在數學主題內容，而是綜合性的能力，應能反應真實世界中的數學需求。現代公民面對多元快速、複雜多變環境下，結合數學知識與方法進行論證、反思、批判的能力成為素養中不可或缺的內涵。Steen (1990) 將數學素養分為五類，這五類素養可說是現代公民生活不可或缺的內涵。這五類素養分別為：（一）實用素養（practical numeracy），它是將數學及統計有信心的應用在日常生活、工作，並進行決策的素養，它傾向和個人的利益有關；（二）公民素養（civic numeracy），它傾向和社會的利益有關，是將數學概念應用於公共議題（例如酸雨、溫室效應…）的素養；（三）專業素養（professional numeracy），它傾向和職業的工作場合，是個人對不同職業所需求的數學素養；（四）休閒素養（numeracy for leisure），它傾向社會大眾在休閒娛樂（例如拼圖、遊戲策略、運動賭注…）中所需要的數學素養；（五）文化素養（cultural numeracy），它傾向讓社會大眾體會數學的力與美的素養，是關於哲學、歷史與認識論的層面。由此可見，數學素養的意涵與個體、數學、社會之間密不可分。數學素養在於討論個體在周遭環境中如何與其他的人、事、物間產生數學的連結關係。因此，數學教學重點也需要因應與調整，一方面需要培養學生具有應用相關數學知識解決問題的能力，另一方面也需要連結個體的生活情境、文化與日常活動等，培養其後設、反省的能力，能在問題解決歷程中不斷地監控與檢驗自己的思考論證與其有效性。

在複雜、多面向的數學素養架構下，教育工作者亟需省思數學學習目標與內涵，調整教學的做法，除了關注領域知識的學習外，更應關注（1）學生之認知、後設認知、動機等策略運用；（2）數學學習目標的設定與調整；（3）學習的態度與信念、價值、持續追求目標達成的意志（volition）等不同面向的涵養。數學學習需要重視生活化的「邏輯推理」、「判斷能力」、「創新能力及問題解決能力」的培養，數學學習成果評量的方式也應朝向多元化、適性化的方向發展。

方德隆 (2013)。從國民基本能力到核心素養：課程發展的觀點。教育研究月刊，236，17-28。

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏 (2013)。教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計畫結案報告。臺北市：教育部。

邱守榕 (1990)。「數學教育合作研究計畫」第二階段的重點規劃。科學發展月刊，18 (2)，137-149。

洪裕宏 (2008)。界定與選擇國民核心素養：概念參考架構與理論基礎研究。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告 (NSC95-2511-S-010-001)。臺北市：國立陽明大學。

教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要—數學學習領域。臺北市：作者。

教育部 (2014)。十二年國民基本教育課程綱要總綱。臺北市：作者。

陳伯璋 (2010)。臺灣國民核心素養與中小學課程發展之關係。課程研究，5 (2)，1-26。

陸昱任、譚克平 (2006)。論數學素養之意涵。載於中華民國科學教育學會 (編)，中華民國第二十二屆科學教育學術研討會短篇論文集編 (1092-1097)。臺北：中華民國科學教育學會。

黃友初 (2014)。歐美數學素養教育研究。比較教育研究，293，47-52。

蔡清田 (2011)。從課程學理基礎與核心素養論K-12年級課程綱要。課程研究，6 (2)，63-83。

蔡清田 (2013a)。K-12課程發展的核心素養架構。教育研究月刊，231，5-17。

蔡清田 (2013b)。透過K-12課程改革提升國民核心素養。教育研究月刊，236，5-16。

American Association for the Advancement of Science (1989). *Science for all Americans: A project 2061 report on literacy goals in science, mathematics, and technology*. Washington, DC: Author.

American Institutes for Research (2006). *A review of the literature in adult numeracy:*

*Research and conceptual issues*. Washington DC: IAR.

Australian Association of Mathematics Teachers. (1997). *Numeracy=everyone's business*.

Adelaide, Australia: AAMT.

Best, J. (2007). Beyond calculation: Quantitative literacy and critical thinking about public issues. In B. L. Madison, & L. A. Steen (Eds.). *Calculation vs. context: Quantitative literacy and its implications for teacher education*. (pp. 125-135). Racine, WI: Mathematical Association of America.

Burkhardt, H. (2007). Quantitative literacy for all: How can we make it happen. In B. L. Madison, & L. A. Steen (Eds.). *Calculation vs. context: Quantitative literacy and its implications for teacher education*. (pp. 137-162). Racine, WI: Mathematical Association of America.

Butler, C. H., & Wren, F. L. (1965). *The teaching of secondary mathematics* (4th ed.). New York, NY: McGraw-Hill.

Central Advisory Council for Education (England) (1959). *A report of the Central Advisory Council for Education (England), The Crowther Report*. London: HMSO.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: Her Majesty's Stationery Office.

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy, and technoracy: A trivium for today. *Mathematical Thinking and Learning*, 1(2): 131-53.

De Lange, J. (2006). Mathematical literacy for living from OECD-PISA perspective. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, 25, 13-35.

Department for Education and Employment (1999). *The national numeracy strategy: Framework for teaching mathematics from reception to Year 6*. London: DfEE.

Ginsburg, L., Manly, M. & Schmitt, M. J. (2006). *The components of numeracy*. Cambridge, MA: National Center for the Study of Adult Learning and Literacy.

Goos, M., Geiger, V., & Dole, S. (2012). Auditing the numeracy demands of the Australian curriculum. In J. Dindyal, L. P. Cheng & S. F. Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons: Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics*

- Education Research Group of Australasia* ( pp. 314-321). Singapore: MERGA.
- Kerka, S. (1995). Not just a number: Critical numeracy for adults. *ERIC DIGEST No. 163*.  
Retrieved from <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED385780.pdf>
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Kosko, K. W., & Wilkins, J. L. M. (2011). Communicating quantitative literacy: An examination of open-ended assessment items in TIMSS, NALS, IALS, and PISA, *Numeracy*, 4(2), -3. DOI: <http://dx.doi.org/10.5038/1936-4660.4.2.3>
- Madison, B. L., & Steen, L. A. (2008). Evolution of numeracy and the National Numeracy Network. *Numeracy*, 1(1), 1-18.
- Madison, B. L., & Steen, L. A. (Eds.), (2003). *National Forum on Quantitative Literacy. Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges*. Northfield, MN: National Council on Education and the Disciplines.
- Madison, B. L. (2003). The many faces of quantitative literacy. In B. L. Madison, & L. A. Steen (Eds.), *National Forum on Quantitative Literacy. Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 3-6). Northfield, MN: National Council on Education and the Disciplines
- National Council of Teachers of Mathematics (1980). *Problem solving in school mathematics: The NCTM 1980 yearbook*. Reston, VA: The National council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston VA: Author.
- National Research Council (1989). *Everybody counts: A report of nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.
- National Science Board (1980). *Educating Americans for the 21st century*. Washington,

DC: National Science Foundation.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In J. Kilpatrick (ed.), *International handbook of mathematics, section 1* (pp. 11-47). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Organisation for Economic Cooperation and Development (1999). *Measure student knowledge and skill: A new framework for assessment*. Paris: OECD.

Pugalee D. K. (1999). Constructing a model of mathematical literacy. *The Clearing House*, 73(1), 19-22.

Skalicky, J. (2004). *Quantitative literacy in a reform-based curriculum and implications for assessment*. Paper presented at the AARE .Annual Conference Melbourne, Australia.

Steen, L. A. (1990). Numeracy. *Daedalus*, 119 (2), 211-231.

Steen, L. A. (Ed.)(2001). *Mathematics and democracy: The case for quantitative literacy*. The National Council on Education and the Disciplines.

Stoessiger, R. (2002). An introduction to critical numeracy. In W. Morony & P. Brinkworth (Eds.), *Springboards into numeracy: Proceedings of the National Numeracy Conference 4-5 October 2002* (pp. 47-51). Adelaide SA, Australia: The Australian Association of Mathematics Teachers.

---

\* 游自達，國立台中教育大學教育學系副教授

電子郵件：yiu@mail.ntcu.edu.tw