加法的應用(四)

Z. Usiskin
M. Bell 著
周筱亭 譯

註解與評論

註6. Sutherland 的論文

在本書各項資料成稿之後，以及這些註解第一次成稿之後，我們偶然發現一本Ethel Sutherland所寫的書，它代表了早期(1947)欲將運算的用法加以分類所作的努力。她對問題的敘述如下：

"爲了要決定與加、減、乘、除等四種運算有關聯的不同單一步驟有多少個？"。(P.5) Sutherland檢查了「三年級到六年級現代數學基礎課本中所有的文字題」。她不僅檢查多步驟的問題，亦檢查了單一步驟的問題。由此，再決定每一年級數學課程中單一步驟問題各種類型出現的次數。在她的書中，四種基本運算以如下的順序各成一章：減法、除法、乘法、加法。我們將本書各章後面的註解與她的分類作一比較。

Sutherland的論文對於後來學習運算的用法及意義的學生而言，似乎已經失傳。即使連曾對以往文獻作過深入探討的Vest和Kansky(見註7)都錯過了。我們深信這是由於她的博士論文(哥倫比亞大學，教師學院)未被收錄於論文摘要(Dissertation Abstracts)中之故，而她的書就是根據論文而寫成的，被列於一般性教育系列的書籍中，不太可能爲數學教育學者發現，我們是從Wheat(1951, P.337)書中的一本參考文獻中偶然發現的。往後的學生不應該忽略了她的有價值的作品。

註7. Vest和Kansky的論文

對於運算的各式各樣定義有興趣的讀者可以參考Vest(1968)及Kansky(1969)的博士論文，他們的論文都對文獻作了深入的探討，並將數學運算的呈現方式作了分類。

Kansky提出了四種數系模式並同意可能還有其他的模式：減法模式，特殊模式、應用模式及結構模式。「所謂應用模式是指一個眞實的、設計的或想像的問題情境，在此情境中，需用到數學，但卻不須產生所需的數學概念」(P.114)，他強烈地主張應用模式並不適合於用在小學來介紹小學數學，這是我們所不同

意的。事實上，他們認爲，由於從開始教運算時起，教師們就採用一些應用模式，所以使得學生們在學加法和減法時，學得不錯(例如，將3個物件和4個物件放在一起，來說明3+4)。

Vest的模式包含了一般人通稱的運算的具體表徵(如：數學積木)或代表(如：數線)。他還提供了可用於評鑑這些模式在教室中的適用性及應用於判別使用類別的適用程度的標準。這些標準是：在數學領域中的一般性成長(如：在定理方面或解題方面)；與全數系統有關的特殊知識、技能與概念；全數系統的延伸；其他特殊數學技巧的應用(如：百分率的教學)；與學習者本性的配合；困難的程度；認知結構與形態的適合性；對於抽象原理應用的貢獻；教學方法的可行性；在科學上的應用能力；應用於普通社會上的能力；對於教師、標準測驗及設備的應用能力。

註8. 其他人的論文

我們並未發現有任何其他的人想要將所有運算的使用方法以調和的方式加以分類。然而，確實有許多人將某一運算的使用意義及其他意義作分類，同時，由於最近解題研究的盛行，有許多人將需用到某種運算的文字題試作分類。少數其他針對某一運算的分類綱要已在相關各章後的註解中提及。

上面的註解係針對第二部份各章而列，下面的註解僅供作本章加法的應用之參考。

註9. 「合併」的其他說法

這種使用類別常稱之爲「聯集」，此名稱源自於它與「測度函數」之間的關聯性。測度函數具有下面的特性：假如m是一個測度函數，A與B爲不相交的集合，m(A)=A，且m(B)= b，則m(A)>0 且 m(AUB)=a+b。具有上述特性的函數例子如下：

m(A)=A集合中的總數

m(A)=角A的度數

m(A)=線段A的長度

m(A)=區域A的面積

m(A)=在某一給定的取樣空間中事件A發生的機率

在Usiskin(1976)的書中，總數和角度的例子分別歸於兩個不同的類別，稱之爲「聯集」和「結合」(joining)。如果我們想要強調加法中非數數的用法，這樣分開是很恰當的。許多其他的人也曾作過上述的考慮，但是大部份人都將自己侷限於數數的情境，Carpenter, Hiebert, and Moser(1981)將可數物件的例子歸於「部份—部份—全體」，即併加(part-part-whole)的類別中，而將一組物件添入另一組物件的例子歸於添加的類別中。如果我們想要瞭解爲什麼孩子們可以解涉及同一概念的使用類別中的某些問題，而卻不會解其他的問題，這樣的細分是必要的。Greeno(1978)將它們稱之爲「合併」與「變換—增加」(很像本書中的轉移)；Lindvall (1981)稱爲「合併集合」與「得到更多的東西」。

註10. 「轉移」的其他說法

Greeno所稱的「變換—增加」及Lindvall所稱的「得到更多的東西」可以解釋爲「轉移」的變通名稱。Usiskin (1976)用了「滑動」(Slide)一詞。本書選用「轉移」，有兩個原因：第一，轉移可以是平穩的(連續性的)及跳動的(分離性的)，而「滑動」僅暗示有平穩之意味；第二，就方向而言，轉移是中性的；而「增加」或「得到更多的東西」之概念是單方向的。

註11. Sutherland 的分類

Sutherland 在 1947 年曾檢查過四套三至六年級數學課本中的文字題，她將加法歸爲四種類型，該四類型均列在「找出總數」的標題下。(在四種運算中，她最弱的分類是加法)。下面所列的是加法的四種類型，四套課本中包含這些類型的問題總數，及四套課本中每種類型的加法問題所佔百分率的範圍。

第一類：問題中的用語有助於強調找出總數的念頭。
總題數 931： 範圍 29%-43%。

第二類：問題中的用詞並未包括上述第一類中提及的特殊字眼或表示方法。
總題數 675： 範圍 25%-30%

第三類：問題中的用語係特別針對買賣行爲的。
總題數 788： 範圍 26%-37%

第四類：問題中的用語與某些減法類型的用語相似。
總題數 74： 範圍 1%-5%

上述的分類很難與此章中的使用類別互相對照，因爲它們完全是基於語意上或結構上的考慮。譬如說，第四種類型，似乎可與本章中的「來自減法的加法」對應，但又涉及我們可以歸爲「轉移」的類型。請注意涉及錢的問題有多少(第三類)以及第四類的問題數又是多麼的少！我們很懷疑是否今天的教科書中亦佔同樣的分配比例，如果眞是如此，也許可以解釋爲什麼學生們會作某一類的問題，而不會解另外的問題了。

註12. Kansky 的模式

Kansky(1969) 發現下列被使用的自然數加法一般模式。

籌碼模式 (counter models)。
分段式積木模式 (segmented-rod models)。
非分段式積木模式 (non-segmented-rod moels)。
幾何模式 (geometric models)。
故事模式 (storyline models)。

故事模式與本章中所提的很接近。Kansky 找到三種故事模式：在某條路上的旅程，錢的遞送及天平的橫桿。「在某條路上的旅程」很類似於數線。錢的遞送是由一位郵差帶來現金或支票。(將信件退還給郵差，相當於減法模式)。天平的橫桿應該算是一種具體操作的教具而非使用類別。

註13. 比值的加法

前述的加法使用意義中「合併」的例 10 和 11便屬於比值的加法。這些是在百分率及機率的例子中，非常自然的情境，它們亦同時是平日偶而聽見有人斷言「你不能像加別的數一樣，將比值相加」的反例。爲了要使得比值的加法有意義，相加的比值必須屬於同一事件。(在例 10 中，所指的事件是根據所擲出的兩個骰子的點數和，決定往旅館移動的步數；在例 11中，所指的事件是某州的居民人數)

常被提出的用以分析比值的加法情境如下：一位打擊手在第一局的三次打擊中，打中了一次，而在第二局的四次打擊中，打中了兩次。那麼，他的打擊率(可稱爲比值或比率，視你的用語而定)是：第一局爲 0.333，第二局爲 0.500，當然，全部的打擊率一定不是 0.833。事實上，全部的打擊率是七次打擊中，擊中了三次，平均大約是 0.429。我們需要作的是將有序對 (1,3) 和 (2,4) 相加，以獲得綜合兩局的結果 (3,7)，要計算的是相加後的比值，不是相加前的。

所以，作比值的加法時，有可能要將有序

對相加，亦有可能當它們是單獨的數的比值，須將比值相加。你需要記得的最重要的一件事是：當某一種比較恰當時，就不要用到另外一種了。

註14. 其他的加法使用意義

我們曾經考慮過，但卻拒絕將「速算」(shortcut counting) 列爲加法使用意義之一，當一個人第一次學加法時，常常會遭遇到用這種方法的情境。

1979-81年間，每天在伊朗都有美國人質，有些社區以他們爲榮，便升起一面國旗，假若在某一天，剛好有100面國旗在某一社區飄揚，那麼，一星期之後，會有多少面國旗在該社區飄揚？

解這個問題時，有人並未從100開始，一個一個地向上數，而應用了「加7」的捷徑。在數學上，根據Peano首先提出的「連續數(Successor)概念所下的自然數加法定義，速算有一個互相配對的東西。Peano所提出的概念，今日稱之爲Peano公設。

加法與速算之間的關係相當於乘法與連加之間的關係，也相當於連乘與乘冪之間的關係。因而，將這種使用意義納入是有理論上的根據的。我們決定不採用是因爲像上面所舉的人質例子很弱，事實上，很難找到很明顯的例子。但是，其他人可能希望在分析加法時，也考慮將此種使用意義納入。尤其是當每個小朋友作加法的行爲表現都要探討時，更應該如此。

註15. 不必要的加法使用類型

既然所有的減法都有加法反例，每個減法使用類型都有一個加法使用類型。看看下面的比較情境。

一月中的某一天，由於「湖面效應」，湖邊的芝加哥市氣溫爲6℉，同一時間，O'Hare(在湖的西方10哩處)的氣溫爲-4℉。兩地氣溫相差多少？

下面是相對的加法情境。

由於「湖面效應」的影響，湖邊附近的氣溫較附近的氣溫爲高，所以，在芝加哥，湖面的氣溫比O'Hare機場的氣溫要高10℉，如果元月中某一天在O'Hare(距離湖的西方約10哩處)機場的氣溫是-4℉，那麼芝加哥的氣溫大約是多少？

在結構上，上述的加法情境可歸在「回復比較類型的第二個數」(recovering second number in a comparison)然而，這種情境卻很容易地納入「轉移」型(自O'Hare的氣溫中，轉移10℉就可以得知湖面的氣溫，如果是低10℉，就轉移-10℉)

第二個例子比較簡單：

小明有35元，小華的錢比小明多15元，小華有多少元？

我們也可以將上面的例子歸於「轉移」的情境，即使它用到了兩個不同的數量，但是，如果有人想要再細分，我們也可以爲這種形態的情境擬想一種不同的使用類別。

我們發現沒有一個例子不能用本章中的使用類別加以處理，所以我們認爲「回復比較類型的第二個數」是不必要的類型。

註16. 用到加法的公式

我們都知道許多用到加法的公式(如：F=9/5C+32)這些用法相當於導出公式的數的常數用法(第一章，Section F)，我們並未將這種用法納入，因爲(1)在理論上，這些基本用法在別處已作分類(見第10章，Section 8，例3)及(2)運算已明顯地列出，故無需選擇運算。 (作者：本會研究員兼研究室主任)