
從兒童認知能力 看小學數學 實驗課程的實施

鍾聖校

壹、前言

筆者忝列師院教席，擔任教育心理學課程十餘年，對於皮亞傑認知發展理論略有所知，對各科教學原理亦略有所見。筆者恰有一兒，正在讀師院實小一年級，有幸參加目前正在全省29縣市，76班進行的國小數學課程實驗。筆者遂得以學者及家長的雙重身分，檢視當前國小新數學課程的實施問題。

概括的說，新數學課程的教學理念相當好。重視解題過程、溝通過程、合作過程，講究明白道理，能說道理，就像其教

師手冊中所介紹的（國立台北師院實驗小學，民83）。這種重視數學理解的做法，意在平衡過去數學科過分重視數字計算的偏差。認為以往在國際競賽中我國小學生數學成績好，是因我國學生做算術的時間三、四倍於英、美諸國，而英國或美國兒童若投入兩倍於他們現在花的時間，數學會比我們好。換言之，新數學認為傳統數學的教學理念已然落伍。實驗課程揭櫫的是：數量不僅是物的抽象，更是活動的抽象。物的抽象可以靠口頭傳達解說，活動的抽象則需兒童親自操作。在操作過程中，兒童可以自由發明或發現不同的

計算方法或解決問題的方法。例如 $6 + 47$ 可變成 $3 + 47 + 3 \rightarrow 50 + 3 \rightarrow 53$ ，或 $40 + 7 + 6 \rightarrow 40 + 13 \rightarrow 53$ 。實驗課程並鼓勵兒童說出自己解題的方法，透過發表討論、合作等方式，培養自動學習的習慣。

然而欲達成上述目的，「認知能力」是必須考慮的重要因素。對數字概念運算能力發展較快較早的孩子，新數學課程似乎太淺，對數字概念運算能力發展較慢較遲的孩子，新數學課程似乎太難。在班級教學中造成困擾。以下試說其理。

貳、班級數學永遠的挑戰—能力不齊

能力不齊有兩種意思，一是能力的發展速率不齊，一是學生努力用功不同，造成素質不齊。本文採前意。就兒童早期數學能力的發展而言，包含數列（sequence words）、數物（counting words）及簡單推理能力的發展（Ginsburg, 1983）。

1. 數列的發展

福森等人（Fuson, et al., 1982）認為數列的發展有三層次：

- (1) 能區別數字不同，代表的意思不同，如 5 和 6 不同；
- (2) 能從任何數字開始數數；
- (3) 能倒著數數。

林亮宜、張欣戊（民 73）研究，發現國內 3 歲半到 5 歲半兒童，若能數過 10 的，多半能察覺出數有結構，如 11 以後重覆 1 到 9 的規則。

2. 數物的發展

數物和計算能力不同。數物是把數字指派到物體上。計算則除了要有數物能力

外，還能做加減乘除的運算。這種運算已含有複雜的數學解題歷程，即問題轉譯能力、整合能力、計量和監控能力，及執行的能力。

依福森和霍爾（Fuson & Hall, 1983）的研究，通常三歲幼兒在數物時，都要用手去碰觸物體，四、五歲幼兒大多用手指頭指一下，部分五歲幼兒則連指都不必。

3. 簡單的數推理能力發展

簡單的數推理能力是指以一個數字，又稱基數（cardinal words），述說間斷物體數量的能力，它涉及數的守恒概念以及數的比較，如相等、大於、小於。

當兩組基數或兩組以上的數出現時，比較的關係就發生了。幼兒或許能直覺地認知某一組較多，但要精確地說出那一組多，且多多少時，就必須學會「數物」和「基數」的關係，了解數物時，相同的數字代表相同的數量。貝斯特（Best, 1979）的研究，指出過半數 4 到 5 歲幼兒和所有 6 歲兒童都會運用數物法來判定大小。

上面簡述數能力發展的概括規律。但任何一位國小老師都知道，班級中幼兒的數能力發展狀況遠比學者說的參差，假設學者們說中了班級中百分之七十的兒童發展狀況，則仍有百分之三十不是依常態速率發展的。而更重要的是在學習中產生問題的，往往是這百分之三十的學生。

參、未開竅孩子的數學

中文裡常用開竅指一個人能了解事物的關鍵或要點。開竅最常用來表示兒童生

長的問題。如果造成問題的主因是未開竅，則等開了竅，問題就會自然消失。台大數學系教授黃武雄（民82）便這樣說：「…在小學階段，每個人的發展有早有晚，說不定大人根本不管他，哪一天他就趕上了也說不定。有些人玩電動玩具一陣子後，數學也不錯了，有人玩過一個暑假回來也變好了。」黃教授說的是我們許多人的經驗。然而問題在：很少大人「敢」「根本不管他」。這裡說的大人包括老師、父母、親友、兄姊。矛盾的是，大多數人不敢不管。但大部分的「管」，卻並不得當。或造成兒童的挫敗感，或增加師生間、親子間的緊張，使兒童不諳數學，變成畏懼數學，甚至討厭數學；或使兒童的自我概念由我的數學不好，變成我的成績不好，以致我的能力很差。

幾乎所有的大人雖不懂微積分，但能做加減乘除四則運算，大人們即便不會解五、六年級的算數應用問題，一、二年級的加減法多數相當拿手。因此，大人教一年級小孩數學時，常低估數學對他們的難度，反過來說，亦即高估小孩子的數學能力。我在教兒子數學時，就親身體驗這事實。

1. 想不起來的秘方

一年級上學期，大約在12月左右，兒子的數學習作出現「和」超過10的加法，當時課本要求畫圓圈來算。因畫了幾天，我以為練習夠了，且兒子畫圓圈不是很專心，①常畫錯（多畫或少畫）；②常數錯（好不容易兩組圈畫對，又數錯），故答案多不對。反覆檢查，耗費時間，幼小年紀一坐書桌就一個半小時，還不能做完數學功課（雖媽媽在旁督導）。大人於

心不忍，於是教以法寶。

法寶是什麼呢？把大數放在心裡，同時手指頭伸出小數的數目後，繼續數，數的結果就是「和」。兒子很高興，用此秘方算一遍，果然和畫圓圈數圓圈結果一樣。例如9加6，把9放在心裡，雙手伸出6個指頭，繼續數，10、11、12、13、14、15，答案就是15。他反覆用這方法，較快寫完功課，下桌一溜煙，去看他的恐龍書也。如此方法用了一些日子。其後學校教認時鐘，再過幾天教10以內減法，期考前復習功課時，他困惑的注視著雙手問：「媽媽，那個秘方是什麼？」我當然再把秘方說一遍，但心知肚明，這孩子並不懂加法中大數做底的道理。

2. 36顆巧克力比42顆多

一年級下學期，在學校發給的實驗班家長「實驗課程教師手冊」中，提到要兒童了解50以內數列的規律。3月中旬，上課約3星期後，我在公車上，要他從1數到100，意外的發現他在十位數字中，每次數到個位是9後，如29、39、49，下一個數便回到該十位數字，如39的下一個數字是30；49→40；59→50，經過幾次提醒，才似乎會了。隔天再唸，其數數仍不很熟練，別說倒著數了（表示數列發展還不成熟）。

更有趣的是，3月22日晚上教他用排列花片比大小時，我舉例媽媽有36顆巧克力，弟弟有42顆巧克力，誰比較少？少幾顆？問題還沒說完，他急著抗議：「不公平！不公平！你太多了。」我楞了一下，剎時明白，他還不知道42比36大。雖然他會數1到100，雖然他會做連連看，知道36、37……到41、42地連下

去。但他以為36大，好像個位數大是他決定兩組數誰大的依據。這事，讓我們全家哈哈笑，他有點不好意思，似乎意識到自己弄錯了，但是否真知，就得過一陣子再判斷了（當時可能在意別人笑而硬改）。

3. 兩排花片數不明白

三月下旬的數學習作出現50以內的減法，要比兩組十位數的多少。實驗小組建議，要兒童用往上加的方法，找出少幾個。如28比34少6，是用補不足的方法，補一個唸一個數，29、30、31、32、33、34，因此少6個。我用花片排兩排，一排是28個黃色花片，一排是34個紅色花片，問兒子，那一排少？少幾個？兒子像在發呆，問了幾次，專心想了想，突然問「少」是什麼意思？我的天！日常誰吃得多、吃得少，是他很自然清楚的事，搬到數學裡，竟然不明白了，我利用花片短少的一邊解釋後，似乎懂了。但繼續做題目時，他表示不想用花片，要用媽媽的秘方。我覺得他對數量大小消長的現象真沒有興趣，以致花片一多反而讓他昏了頭，一對一的排也難得整齊，一對一的數也常不準。

4. 一排花片部分整體分不清

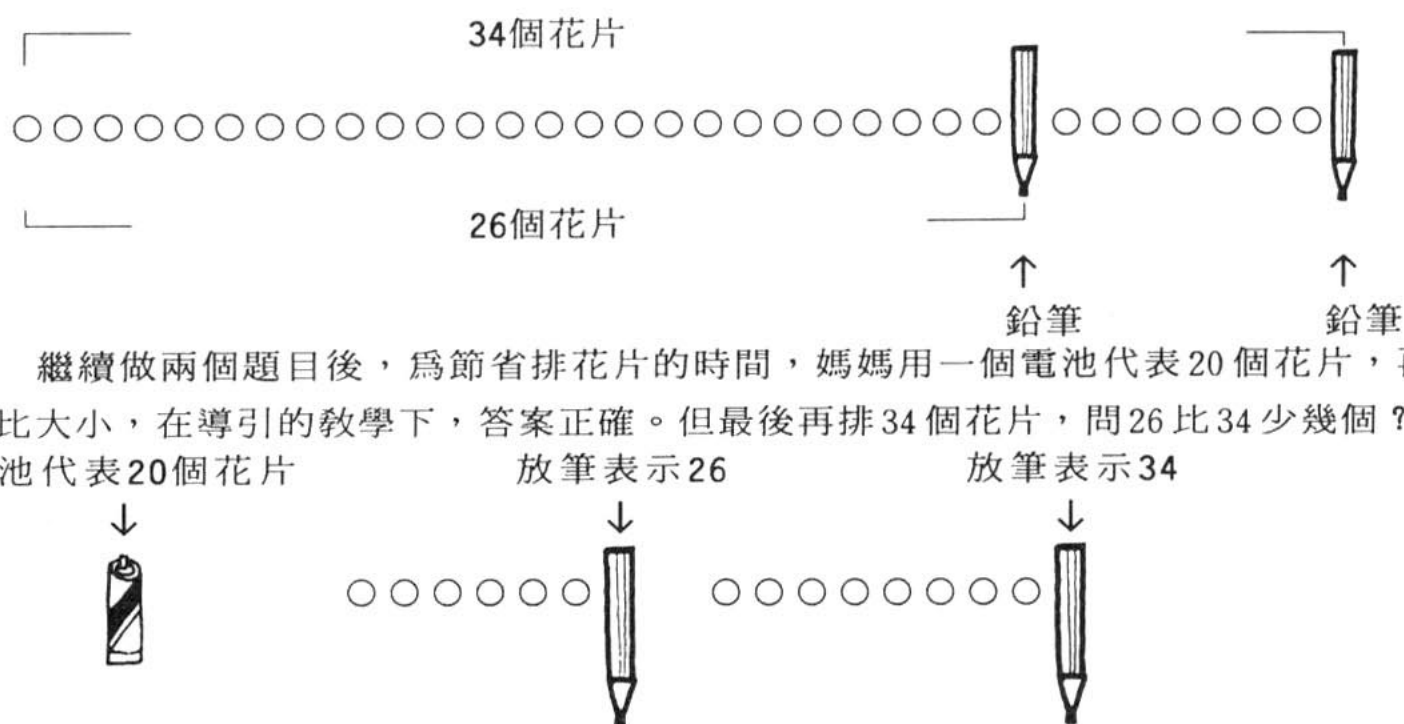
既然兩排花片比多少，容易因量多，造成視覺混亂。學者媽媽就發明用一排花片比多少的方法。如26比34少幾個？媽媽首先要兒子排34個同色花片，排成一排，在34的尾端放一枝鉛筆，再要兒子從頭數到第26個花片，在它旁邊放一枝鉛筆，然後比劃問26枝鉛筆比34枝少幾枝？在引導下他會說少8枝。

兒子想了一下，竟然把6個花片移到8個花片下說少2。雖經媽媽解釋說這電池代表20個花片，（還在電池上數點20次，再數到6，得26，再數到34，得34，問26比34少幾個？仍說少2個。

此時，兒子做題已1個小時，做錯一方面是累了，一方面也表示其數的「部分整體基模」還沒建立。

5. 10好玩，30就不好玩

一年級上學期，這個孩子做過很多把10分解成兩組數量，然後寫成加法的算式。當時我曾帶著他做題目，用生活化的例子。如有10顆巧克力，要分給嚴老師（導師）和許媽媽（保母），你想各分幾個？這時，他常囁囁的笑，準備給嚴老師



多一點，例如在嚴老師的盤子上，畫6個圈，許媽媽的盤子上畫4個圈，再寫成算式 $6 + 4 = 10$ 。如此換發不同的一組人，並在盤子裡畫圈圈表示發巧克力，這種練習，都沒有問題。

但是到一年級下學期換成50以內的數的合成時，他就傻了眼。我帶著他用花片40個排在桌上，再不同地切分成兩組（MM巧克力操作太不方便），寫成加法的算式，一題題導引，數數，大致都對，但隔天示範後要他自己做30的分解，他竟亂做了（媽媽不在場）。下面是他當時的作業，寫完後還自己批改，打100分。

數學考試

$$\begin{array}{l} 30 = \boxed{10} + \boxed{10} \\ 30 = \boxed{12} + \boxed{11} \\ 30 = \boxed{14} + \boxed{13} \\ 30 = \boxed{10} + \boxed{20} \\ 30 = \boxed{23} + \boxed{22} \\ 30 = \boxed{25} + \boxed{24} \\ 30 = \boxed{29} + \boxed{28} \\ 30 = \boxed{19} + \boxed{8} \\ 30 = \boxed{10} + \boxed{11} \\ 30 = \boxed{15} + \boxed{14} \end{array}$$

圖 1. 數的合成分解數衍作業

看到這作業，為母的心情真是又憐惜又無奈。心想：兒子啊！我要你操作算數，可不是整你，學校的功課有這一項，你得用心學習，跟上呀！

肆、數理邏輯發展慢者的認知特質

領教過吾兒的數學能力之後，我好奇他在皮亞傑保留概念幾個著名作業上的表現。在教他數學時，順便測質量保留，數量保留、液體量保留及面積保留概念（詳見鍾聖校，民79，第48頁至49頁）。結果發現除面積保留概念不穩定外，其他都具備，而且能反駁我用的對抗論証，表示這些保留概念已相當穩定。由此看來，皮亞傑的保留概念與數學學習能力不完全相同，陳李綢（民81，第498頁）曾指出「基門（R.Gelman）認為兒童有守恒（保留）概念就有數學能力，而皮亞傑認為「守恒概念是數學概念的起點。」似乎皮亞傑的看法較保守，也較正確。究竟數學概念超越保留概念之外，還包括什麼能力，仍值得我們研究。我兒的數能力發展對照上述貳之內容，顯然較慢。

1. 數列能力之發展還不能倒著數。
2. 數物能力還差，在10以內可以速視，如5個巧克力，不必一一數就知是5。但超過10，就必須用手指頭一指點，無法目視。
3. 在簡單的數推理能力方面有數量保留概念，但超過10的比大小並不熟悉。
4. 數量的「部分整體基模」還沒有建立。
5. 不會做以大數做底的加法捷思運算。

數學能力的發展事實上還牽涉其他有關特質，這些特質會影響兒童在數方面的學習，以我兒來說，有下列特性：

1. 強烈的自我中心（egocentrism）

我兒在幼稚園大班常抱怨晚上要早睡，若告以其實不早，已十一點了。他會

說我討厭十一點，要把十一點丟到海裡去。有時他會說為什麼十一點就要睡，大人說太陽下山了，大家都要休息睡覺，他就說這樣我不喜歡太陽，太陽不可以下山。自我中心不是自私，是不能跳出自我；用別的角度看事物，也因此我兒的社會化較慢。到小學一年級上學期末他還說要把太陽丟到大海裡的氣話，我說你現在還講這種幼稚的話豈不太老了嗎？但他聽不懂，執意要做完自己喜歡的事才睡覺，因此，睡前母子間常有爭執。當然最後是他得聽話早睡。由於他自我中心強，許多老師反應，在團體中人際關係不太好。我可以想像在數學課的合作學習中，他不受歡迎。

2. 左腦比右腦發展分化慢

他的語言一直到五歲半才明顯進步，在此之前所說的話很少人聽得懂，包括媽媽。而他也一直不會唱歌，因為歌詞記不住，只會哼歌。至於他的數學能力如前所述，亦比一般落後。心理學已發現左腦長於邏輯思考以及語言表達，右腦長於空間、音樂、圖像、感覺、直覺。從我兒酷愛畫恐龍（至今已畫三本恐龍書，各頁附有簡單的文字）；在一方B4的白紙上，他可以畫一條大蜈蚣，且極盡可能地畫很長，用各種方式蜿蜒盤纏，表示有某種空間能力；而配合恐龍熱，市面出版的恐龍CD唱片，他也有兩張，百聽不厭，內容其實是交響曲，中間穿插恐龍叫聲，這些CD一張播放起來，約有一個半小時，他能從頭聽到尾，不准被打擾。由這些現象看來，他的左腦較右腦發展慢，而整個認知又比一般小孩的發展慢。

3. 認知發展仍部分停留在感覺動作期

感覺動作期的認知特色是事物的存在，要透過感官知覺、操弄才知。而當事物不存在時，心中無法形成表徵，無法對之進行運思。通常在二歲後，幼兒進入前運思期會逐漸脫離感覺動作階段，但我兒在五、六歲仍有一些感覺動作期的行為表現。例如在五歲半語言能力較進步、說話別人聽得懂時，我們一起說故事「小黑遇虎記」，在豐富的情節中，他只會講（或只愛講）的一段，是「森林中的老虎看到小黑，便從樹上跳下來，大吼」。這時他「必然」配合台詞，從床上跳到地板上，然後趴在地板上轉來轉去，口中發出「吼、吼」的叫聲，陶醉在威武的姿態中，似乎唯有做此動作，故事情節才存在。）至於故事前後文則有賴媽媽述說。

在一年級上學期做功課時，他總是拖拖拉拉，心中似乎只想著他所鍾愛的恐龍、怪獸、機器人等玩具。而一旦注意到功課，則又以之為對象，感覺動作（遊戲）起來。例如看到 $8+6$ 的題目，他想到媽媽教的秘方，便臉上泛起神秘的笑容，下令別人不許說答案，自己下桌，躲到門後計算，然後得意地跑回書桌，公布答案。若正確，一聽到媽媽讚許，高興極了，衝到沙發，整個人壓在沙發背上晃起來，好一會，大人催促，才翻身下椅，趴在地上做小狗跳。東蹦西跳，跳回座位，等心情稍靜，可以看下一題時，已然過了15分鐘。因此，別人15分鐘能做完的題目，在他要拖1小時。一年級下學期開始，媽媽勒令不准用這種態度學習，每次做功課，必備一把戒尺，敲桌子或指點姿勢，以收放心。

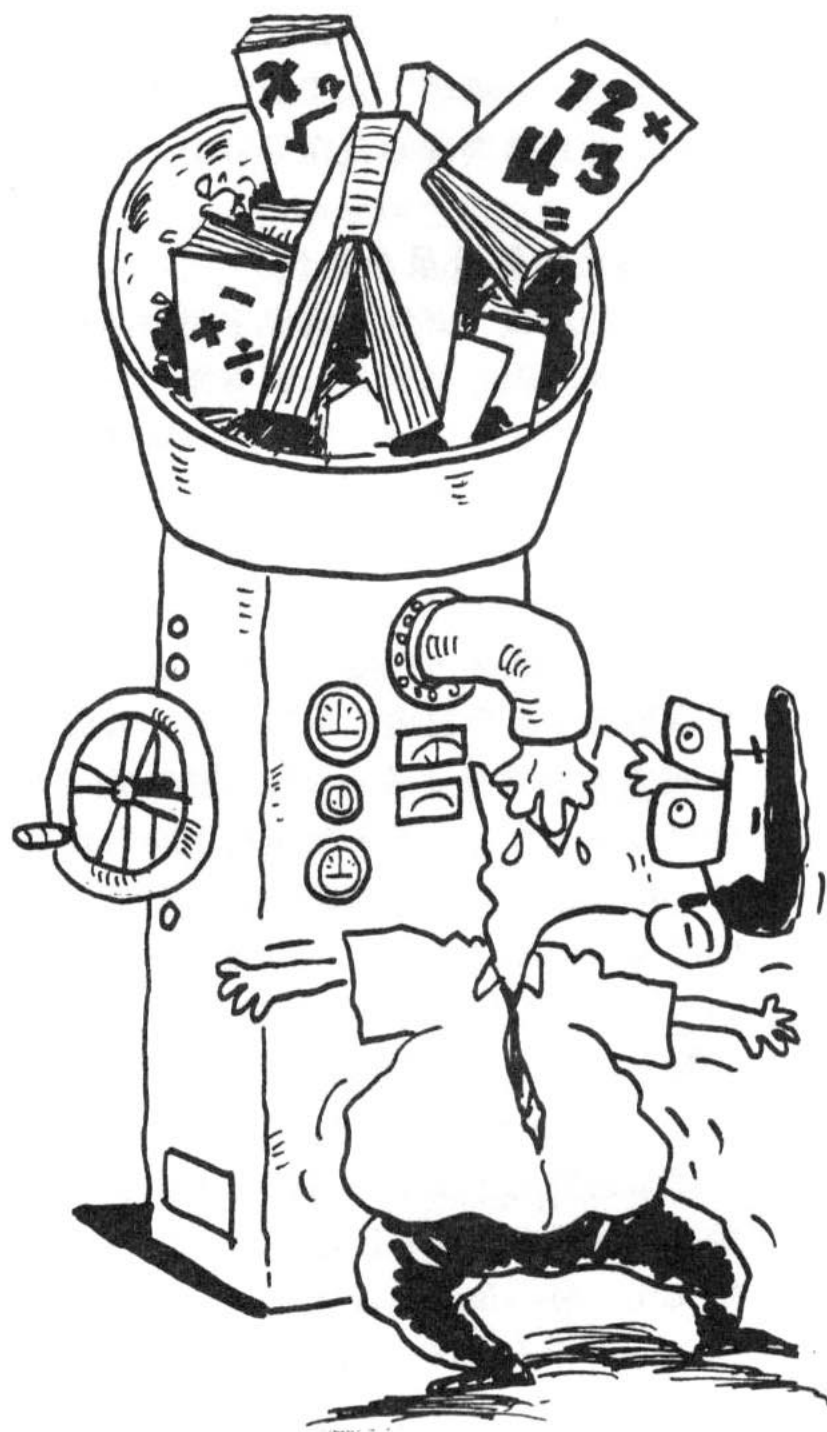
4. 堅持度高，對摯愛的事物專注力強

讀幼稚園中班時，我兒還不能跟著團體一起學習，總是獨自在一旁做自己的事（也是一種自我中心的表現），加上語言表達能力差，簡直無法溝通。幼稚園老師不知如何對待之，只有任他在角落自己學習。某一天放學接小孩，老師告訴我看到一件令她感動的事。下午我兒跪在地上拼積木，足足拼了20分鐘，解說圖放在腳跟後屁股旁邊，不會時就轉身拿說明書看，如此進行，過程中不曾向任何人求救，或生氣放棄，當時才4歲2個月，我兒有他很心愛的事物，如畫恐龍，他已連續畫兩年，內容構圖每次都不一樣，每次有進步，我們只有憑此知道他大概智力沒問題。在三歲時他最愛看卡通影片「小飛象」，該片為英語發音，中文字幕，他只能憑畫面之進展體會情節，但他常看得掉眼淚，且反覆看七、八遍。似乎他的訊息處理方式與別人不同，他需要反覆，有些人（包括大人、小孩）則會因反覆而厭煩。但他在反覆處理訊息之際，無論覺察力或感受力強度都加大，因此他有一些「最愛」，他在生活中很忙碌，晚上不肯睡覺，即因為忙著做自己喜歡的事。這與時下青少年對許多事物的接受都是立即的、淡淡的、速效的，很快建立也很快放棄，無所謂喜不喜歡，不大一樣。

伍、新數學課程對認知發展慢兒童的衝擊

新數學課程以一種理想的、嶄新的方式呈現數學經驗給兒童，跳出往日類似機械運算的穴巢。對於認知發展快，已建立數的「部分整體基模」的兒童，學習不會不適應，但對我兒這類還很自我中心、左

腦發育晚，數理邏輯推理能力尚未發展的小孩，則感困難，需要相當充裕的時間，發展「從操作中進行抽象的工作」。一般兒童早已經會的，甚至優異兒童幾乎已做膩的、做到矯情的，畫圓圈、以及數的分解組合等操作活動，對發展慢的孩子，卻是要數月、半年或一年才能跨越的問題。因此實驗課程儘管有美意，能否適合兒童，還要看教師是否能彈性地針對個別差異，進行適性教學。



陸、結語

曾有人戲稱皮亞傑理論中暗喻著：「當認知階段還沒到，學是白學，而當認知階段到了，不必學也知道了。」（Duckworth, 1979, P279）。但有時想想，對某種情況而言，其中不無道理。我對孩子不敢放任不教，像一些開放教室理念的學者專家，主張孩子不喜歡的或不想學的，不必教。我很感謝師院實小老師的寬宏，她們能欣賞孩子的不同特質，不致因數學不好，或一些科目成績不好，就瞧不起孩子。這些孩子的成長學習過程，必然帶給老師相當大的困擾，做家長當然也不能倖免。每晚飯後廚房收拾乾淨，我便開始扮演家教的角色，帶著兒子逐一做完國語和數學作業，發現不懂，還要另行講解，如此總要花上近兩個小時時間，才勉強算有所學習。還好，功課中除國語數學外，幾乎沒有別的作業了。當我催兒子收拾書包，刷牙洗臉準備睡覺時，他抱著我的腿，頭埋在衣襠中，委屈的說都是我出太多作業，害他不能畫完恐龍，「我明天早上一定要很早很早起來畫」。我覺得非常抱歉。這個一年級的孩子，雖個兒中等，心態分明還在幼稚園大班，要求他會做26比34少幾個？會排花片操作，會理解題意，把操作結果寫成算式，會自動地快樂地學數學，是否不近情理？看起來，要他跟上學校的進度，對他自己、對老師、對家長都是相當大的挑戰。在人生旅途中，這將是美麗的負擔，且拭目以待。

參考資料

林亮宜、張欣戊（民 73）：學前兒童的

數概念：數數子與比較數字。中華心理學刊，26(1)，3～17頁。

黃武雄（民 82）：兒童數理能力的發展。台北：兒童日報82年10月18日。

陳李綢（民 81）：認知發展與輔導。台北：心理。

鍾聖校（民 79）：認知心理學。台北心理。

國立台北師範學院實驗小學（民 83）：一下數學實驗課程親師手冊。台北師院實小。

Best, B.J. (1979). The origins of the number concept. New York: Praeger Publishers.

Duckworth, E. (1979). Either were too early and can't learn it or we're too late and they know it already: The dilemma of "applying Piaget." Harvard Educational Review, 49(3), 38-42

Fuson, K.C., & Hall, J.W. (1983). The acquisition of early number word meanings: A concept analysis and review. In Ginsburg, H.P. (ed). The development of Mathematical thinking. New York: Academic Press.

Fuson, K.C., Richards, J., & Briars, D.J. (1982). The acquisition and the elaboration of the number word sequence. In C.J. Brainerd (ed). Children's logical and mathematical cognition, New York: Springer-Verlag.

Ginsburg, H. P. (1983). Introduction. In H. P. Ginsburg (ed). The development of mathematical thinking. New York: Academic Press.

（作者：國立台北師院教授）