

除法的應用

呂玉琴

(三)

除法的第五種應用類別：反求因子（在又積中）一套典型的教科書（包括教師手冊、測驗等）從作者的原稿到出版大約要花70個編輯一月(1)假如出版公司在這套書上用5個編輯者，則要編輯多久的時間？(2)假如這套書必須在一年內編輯完畢，那麼需要多少個編輯者？每一個問題都能用單一的除法來回答。

$$(1) \frac{70 \text{ 個編輯一月}}{5 \text{ 個編輯}} = 14 \text{ 個月}$$

$$(2) \frac{70 \text{ 個編輯一月}}{12 \text{ 個月}} = 6 \text{ 個編輯}$$

上面的例題說明了如何利用乘法的又

積來解出需要除法的問題。題目必須給定複合單位及其中一個因子，而反求另一個因子。

例題：

1. 能量的使用：一間大房屋從1980年10月22日到1980年11月22日的電費單是806千瓦一小時。平均起來，在這個月內的某給定時間，使用多少瓦？

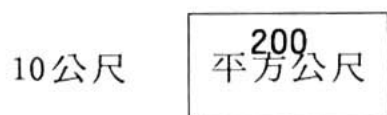
答：806千瓦／小時＝806,000瓦小時。
欲求瓦數就除以小時數。31天共744小時。

$$\frac{806,000 \text{ 瓦一小時}}{744 \text{ 小時}} = 1083 \text{ 瓦}$$

註：假設一天中有8個小時消耗較少的

能量（當時屋內的人在睡覺），那麼就把 806 千瓦一小時除以 496 小時，得到平均使用 1625 瓦的電力，這是一個很高的消耗率。

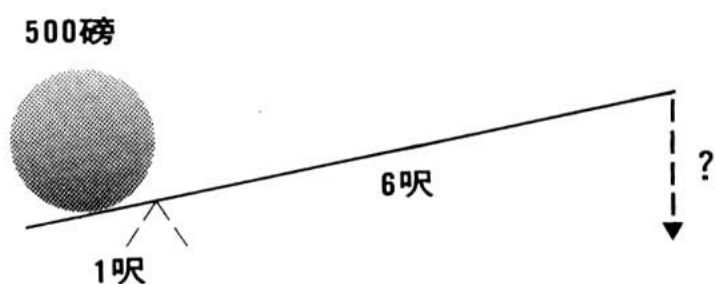
2. 深度：一家商店需要 200 平方公尺的店面，現在有一塊空地前面長 10 公尺。問這家商店要建多深？



答：假如這個商店是建在這塊地的同一邊，也用了所有的寬度，那麼它必須有
 $\frac{200 \text{ 平方公尺}}{10 \text{ 公尺}}$ 或 20 公尺的深度。

註：這個問題可以歸類於“給面積求長”。

3. 槓桿：用一根 7 呎長的槓桿來移動 500 磅的石頭。假如槓桿的支點離石頭 1 呎，那麼必須施力多少才可以移動這塊石頭？



答： $\frac{500 \text{ 磅} \times 1 \text{ 呎}}{6 \text{ 呎}} = 83 \frac{1}{3} \text{ 磅}$ ，所以

至少需施力 $83 \frac{1}{3}$ 磅。

註：在這裏的複合單位是呎一磅，一個力矩的單位。

4. 要維持廚房 2000 瓦的電力負荷（例如：同時使用烤麵包機和微波爐），

必需使用幾安培的保險絲？假設標準電壓是 120 伏特。

答：不是使用公式 $P = E \times I$ ，

而是與它相等的 $I = \frac{P}{E}$

$$I = \frac{2000 \text{ 瓦}}{120 \text{ 伏特}} = 17 \text{ 安培，所以必}$$

須使用 20 安培的保險絲。

註：在所謂“警戒燈火管制”期間，電力公司可能不會提供 120 伏特的電壓，假設在上述情形下提供 105 伏特的電壓，那麼大約需要 20 安培的電流。

摘要

除法的二個應用意義是同單位比率和異單位比率。每一個應用意義都能用一個比較量來表達。前者比較的量有相同的單位；後者比較的量有不同的單位。商是完全的不同。在同單位比率這種情形，商是一個純數，而且把比較的二個量交換相除的順序可以得到商的倒數；在異單位比率這種情形，商是一個量（具有一個導出單位），而交換除數與被除數可以得到一個商的倒數和顛倒的單位。

除法擁有三個其他的應用類別，每一個應用類別都和乘法的一個應用類別相對應。

異單位比率除數 ← ——— → 比率因子

改變大小的除數 ← ——— → 大小的改變

反求因子 ← ——— → 又積

這些對應關係通常是透過相關的事實： $a \times b = c$ 若且唯若 $a = c/b$ 或 $b = c/a$ 。乘法的比率因子能想成由除法的異單位比率導出，而乘法大小的改變是由除法的同

單位比率導出。所以這三個除法的應用類別有二個可能是源於除法本身。

教科書通常將除法表達為同單位比率而忽略了異單位比率。在學生的課本中，僅有“均分”的應用，含有一小類的異單位比率或異單位比率除法的問題，這也難怪學生認為除法的應用很困難。

教育的備註

開始就像任何的運算一樣，教師通常會以一個學生能用心算算出來的簡單例題來做開始，例如這兒有一個同單位比率的問題。

小英花三分鐘做一個題目，小明花12分鐘做這個相同的題目。問小明所花的時間是小英的多少倍？

學生通常不必相除就回答4。現在問：你可以用那一個運算來得到答案？然後問：假如這個數字改變了，是不是可以用相同的運算來做？然後改變數字。依學生作答的經驗，例子與概念形成之關係，是熟練過程是否完整？你可以先將12分鐘改為15分鐘或將12分鐘改為13分鐘，或將3分鐘改為3½分鐘等等。然後再改變情境。小明有3元，小英有12元，小英的錢是小明錢數的多少倍……等等，直到除法的一般觀念被了解為止。

同單位比率在除法的問題中，當商數是同單位比率時，常被看成是單一的數。上述問題的答案是4，而不是4:1。

同單位比率的二種比較順序通常都能被接受。上題也可以問：小英所花的時間是小明的多少倍？

答案是：小英花 $\frac{3\text{分}}{12\text{分}}$ 或 $\frac{1}{4}$ 倍長的時

間。保留單位似乎能幫助學生。

同單位比率是數字在做比較，老師強調可以用減法或除法來比較。前者通常在二個數大小相接近時的比較，而後者通常用在二數相差較多時的比較。

分數與除法 對於除法的應用，在本質上，學生能把 $\frac{a}{b}$ 解釋為“a除以b”

及一個單一的數，即a和b的商。

學生會這樣解釋的理由是大部分除法的應用是以分數觀念來建立的。

異單位比率 在很多書中找到的“均分”問題都很適合當異單位比率的第一個例題。例如：

在一個晚會中，10個客人吃了50塊餅乾，平均起來，每個客人吃多少塊餅乾？

保留除數，被除數和商的單位，並且強調“塊／個”以表示那些單位到那裏去了。就像前一頁所給的例題一樣，在學生知道能用除法得到答案後，改變數字使得答案不是整數。

在一個晚會中，9個客人吃了48塊餅乾……

答案 $5\frac{3}{9}$ —表示所有的客人都能分到 $5\frac{1}{3}$

塊餅乾。答案“5餘3”表示所有的客人每人都能分到5塊餅乾，而且還剩下3塊。二個答案都可以用乘法來檢驗。

$$\text{檢驗 1 : } 9\text{個} \times 5\frac{1}{3} \frac{\text{塊}}{\text{個}} = \dots\dots$$

$$\text{檢驗 2 : } 9\text{個} \times 5\frac{\text{塊}}{\text{個}} + 3\text{塊} = \dots\dots$$

注意：檢驗時也查對答案的單位。

假如學生已經學過分數或小數，那麼可以給包括測量值不是整數的異單位比率的例題，使學生看到真實世界中有理數的除法的應用，包括測量的異單位比率的問題有速率（哩／小時，公里／小時，公里／秒，等），壓力（磅／平方吋，克／平方公分等），獲得重量（磅／週，公斤／月，等）和密度（重量／體積）。測量值在分母的異單位比率可以提供除數是分數或小數的問題。

異單位比率除數 雖然供給包括單位的測量問題是如此的複雜，但是研究顯示它們是學生所能了解的除法問題中最簡單的一類。很多書用異單位比率除數的問題來開始教除法的應用。

50 塊餅乾均分給客人使得每個客人可以得到 5 塊餅乾，問可以分給幾個客人？

$$\text{答：} \frac{50 \text{ 塊}}{5 \frac{\text{塊}}{\text{個}}} = 10 \text{ 個}$$

這兒單位的算法可以用分數的除法的標準規則來處理：

$$\frac{\text{塊}}{\frac{\text{塊}}{\text{個}}} = \text{塊} \times \frac{\text{塊}}{\text{個}} = \text{個}$$

這種問題會變得簡單的原因是學習時常常忽略單位“個”，而把這種問題當成是同單位比率的問題。這種想法很容易應用在很多異單位比率除數的情形中，而我們也不加以勸阻。有些老師可能希望用二種方法來解這一類問題，所以最好先讓學生練習在分數中連單位一起運算。

改變大小的除數 第一個例題應該用

簡單的數字。

1. 某書上的昆虫照片是實際尺寸的 3 倍。假如在照片中的昆虫長 6 公分，那麼實際的昆虫有多長？

在這個情境中，大小改變因子和改變大小後的結果是已知的，而希望求出改變大小前的量。就像除法的其他應用類別，在用簡單的數字學會這個概念後，改變問題的數字是很重要的。（但不必要改變情境）。

2. 某書上的圖片是實際尺寸的 14 倍，假如圖片中的動物長 2.3 公分，問實際的動物有多長？

3. 某書上的圖片是實際尺寸的 $\frac{1}{4}$ 倍，假如圖片中的動物長 8 公分，問實際動物有多長？

回答第(3)題，你可以用乘的：8 公分 $\times 4 = 32$ 公分，然而，你也可以用除的： $\frac{8 \text{ 公分}}{\frac{1}{4}} = 32$ 公分。從分數的除法改變

到乘去，提供一個很好的“顛倒相乘”的例子。也就是，在教“顛倒相乘”這個規則時，你可以給一個改變大小的相除問題，其中的改變大小因子是一個單位分數。

最困難的百分率問題在這個類別中。上述問題用相同的情境：

4. 某書上的圖片是實際尺寸的 23 %，假如圖片中的動物長 5 公分，問實際動物有多長？

$$\text{答：} \frac{5 \text{ 公分}}{23 \%} = 22 \text{ 公分}$$

對這一類問題有困難的學生，可以利用乘法關係來解題。在第(4)題為：

$23\% \times \text{實際尺寸} = 5 \text{ 公分}$

但是仍然要5除以0.23才可以得到答案。所以一開始就用除法來想這個問題是較有利的。這題也可以這樣想：假如5公分是實際尺寸的23%，那麼（100%）實際尺寸是多少？然後用比率來做

$$\frac{5 \text{ 公分}}{23\%} = \frac{X \text{ 公分}}{100\%}$$

而且，因為 $100\% = 1$ ，所以相同的除法可以得到答案。

反求因子 因為每一個除法問題 $a \div b = c$ 相當於一個乘法問題 $b \times c = a$ ，因此理論上每一個除法問題都能稱為“反求因子”。然而，在本書中，對於除法的應用，我們保留了這個起源於乘法又積的應用類別。乘法又積的單位是乘法因子的單位相乘得到的。例如，千瓦一小時是從千瓦和小時得到；對是從男孩和女孩得到；平方公分是從公分和公分得到，等等。

介紹這個應用類別的一種方法是在乘法的情境中利用交換已知和欲求，而建立一個除法的情境。例如：

乘法：假如一個100瓦的燈泡燃燒了3天（72小時），問用掉多少能量？

（答：7200瓦一小時，或7.2千瓦一小時）

除法：假如7.2千瓦一小時的能量用了3天，問每一個給定的時間用多少瓦？

解除法的問題時，記住單位會使問題變的較為簡單。

$$\frac{7.2 \text{ 千瓦一小時}}{72 \text{ 小時}} = 0.1 \text{ 千瓦} (= 100 \text{ 瓦})$$

問題

1. 班上有20個學生，問3個學生所占的百分率是多少？

2. 一輛加滿12.3加侖汽油的汽車，行走

300哩以後，必須再加11.4加侖的汽油才會注滿油槽，問這輛汽車每加侖的汽油可以行走多少哩？

3. 下列三個單位有什麼樣的關係：字；字／分；分？

4. 30哩／小時等於多少小時／哩？用你的答案將30哩／小時換算成分／哩。

5. 利用下列資料算出二個不同單位的異單位比率：大明在20天內瘦了4公斤。

6. 利用下列資料造三個問題，每個問題有一個數據是未知的，而且依應用類別把這三個問題分類。

真實世界中2呎長的物品在圖片中是3吋，圖片內的物品是實際尺寸的 $\frac{1}{8}$ 倍。

7. 從下列情境中這一個條法的问题。某校六年級有三班，每班平均有27個學生，總共有81個學生。

8. 計程車車資在宣布漲價20%之後，乘坐一輛計程車付了7.20美元的车資，問還沒有漲價前的車資是多少？

9. 是否可能有一塊暗礁的頂部面積是1平方呎而長是2呎？如果可能，這塊暗礁有多大？如果不可能，為什麼？

10. 某人在一小時內可完成工作的 $\frac{1}{3}$ ，依這種速率，要多久才可以完成工作的一半？（提示：用單位當提示來看那二個數相除。）

11. 某校去年有2430個學生，今年有2296個學生，問今年學生減少的百分率是多少？

（作者：國立台北師院副教授）