



國小學生的數與計算概念

呂玉琴

影響教師教學的因素很多，如：教師的知識、專業精神、社會的價值觀……等。無庸置疑的，教師的知識是影響他在教室內所做所為的最重要因素之一，而且這些做為最後將影響到學生的學習。然而，在教師所擁有的龐大知識領域中，數學教師究竟應該擁有那些重要的知識才可能幫助學生學習數學呢？

Booth (1987) 認為數學教學一定要考慮數學、學生及教學方法三方面。Shulman (1987) 則認為教師的知識至少應包括下列七類，即：內容知識、一般的教學知識、課程知識、教學內容知識、學

習者特性的知識、教育脈絡的知識及教育的目的、價值與它們的哲學背景等。Fennema及Frarnke (1992) 在數學教師的知識發展模式中，提到數學教師的知識應包括數學的知識、學習者數學認知的知識、教學的知識及特定脈絡知識與這三類知識的關聯性，可見「對學生數學認知知識的了解」是數學教師知識中很重要的一個成份。此類知識的多寡會影響教師的教學，並得到研究證據的支持 (Carpenter等，1989)。因此，本文列舉台灣國小學生的一些數學計算的學習情況，以供國小教師從事數學教學之參考。(由於下列問

題不是同一群學生作答的，因此，請注意答題學生的年級及人數）

一、有關鍵字的應用題

(一)樣本：某校國小二年級學生，每班抽取14人，共84人。

(二)題目與學生的表現

1.1 題目：盤子裡有29顆糖，吃了4顆後，剩下多少顆？

1.2 學生的表現：答對率：93%；計算錯誤率：5%

2.1 題目：小美拿50元去買鉛筆和擦子，找回了32元，買鉛筆和擦子共要多少元？

2.2 學生的表現：答對率：61%；計算錯誤率：5%

此題是違反關鍵字策略的題型，共有31位學生用加法，其中有28位學生是因為題目最後是問「共要」，所以用加法；再進一步詢問，看完題目後才選擇用加法的有21位學生，有7位學生是一看到「共」就用加法了，而他們使用此策略的原因有17名學生表示是家長教的，有4位學生表示是兄姊教的，有5位學生表示是老師上課一再強調的。

3.1 題目：小芳今天領零用錢，買了15元的簿子後，剩下8元，小芳所領的零用錢有多少？

3.2 學生的表現：答對率：49%；計算錯誤率：4%

此題也違反關鍵字策略的題型，共有43位學生用減法，其中有高達39位學生表示因為題目中有「剩下」

才用減法；不過其有先決條件，只有在他們對題目不甚了解時，才會用這種策略；進一步詢問他們使用此策略的原因，有20位學生表示以前都是這樣就會對，有5位學生表示是兄姊教的，有4位學生表示是家長教的，有5位學生表示是老師教的。

三)結論

大部分使用關鍵字策略的學生都是在不了解題意時才會用此策略，因此，學生解非典型的題目的錯誤率就相對的升高。如果教師或家長在教學時，能避免一些暗示性的話（如：共就是加起來，剩下就是用大的減小的），且多花些時間和學生澄清題目的意思，再行解題，如此應可培養出學生解題時的思考習慣，降低學生使用關鍵字解題的機會。

目前許多國小教師的數學教學還是偏重於計算，教師甚至認為學生解數學問題時產生不了解題意的現象是國語科的事，而不認為應該在數學的課堂中，花時間仔細的分析題意。Watson（引自Dickson等，1984）描述學生解一個步驟的應用題的五種錯誤類型：

- 1.缺乏閱讀能力：學生不認題目中的字或數學符號
- 2.不了解題意
- 3.缺乏轉換的能力：學生無法選擇適當的運算符號，將數學問題轉換成適當的算式
- 4.缺乏計算能力：學生無法正確的算出算式的答案
- 5.缺乏寫適當答案的能力

表一 學生解一步驟應用題的錯誤類型及百分比（引自Dickson等人，1984）

錯誤類型	中程度者 (92人)	低程度者 (92人)
閱讀	3%	8%
了解題意	6%	16%
轉換	28%	28%
計算	23%	24%
寫答案	2%	3%
粗心或缺乏動機	38%	21%

二、解除法問題的初解題策略

(一)樣本：某校國小二年級末學「分分看」單元的學生，每班上、中、下程度的學生各2人，共36人。

(二)題目與學生的解題策略

（呈現題目後，先讓學生使用花片協助解題，再讓學生以紙、筆作答）

1.1 包含除問題

志明烘了42個麵包，他想要把這些麵包裝在塑膠袋裡，每個袋子裝6個麵包。請問他到底需要多少個袋子才夠裝呢？

1.2 學生的解題策略

1.2.1 使用花片協助解題的策略

策略a：大部分的小朋友都是直接把42個花片數出來，然後再拿出6個花片放一堆

，一次就數6個放一堆，以此類推，直到花片全部數完，再算算總共拿了7堆，所以需要7個袋子。

策略b：少數幾個學生一開始就拿6個花片放一堆，第二次再拿6個花片放一堆，等到差不多時再數一數，看看是否滿了42個？如果還不夠則再拿再數；如果超過了就把多餘的拿掉，最後再數一數共有幾堆。

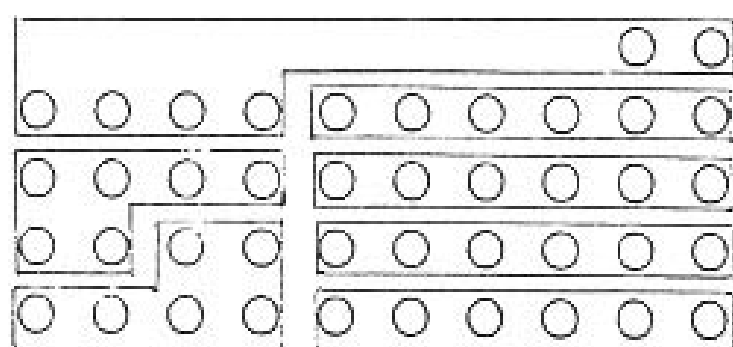
1.2.2 以紙筆作答的策略

策略a：先畫出42個圈圈，然後在圈圈裡頭寫上號碼，先寫6個①，表示裝在第一個袋子；再寫6個②，表示裝在第二個袋子，……以此類推，最後看看共寫七種號碼，表示裝了7個袋子。

策略b：先畫出42個圈圈，第一次先畫掉6個圈圈，下面標上箭頭，把畫掉的6個圈圈移畫到第一個框框裡，第二次也是同樣方法，將畫掉的6個圈圈移畫到第二個框框裡，最後只要數數共畫了幾個框框，答案就出來了。

策略c：將10個一堆換成6個一堆

，這樣就有 4 個 6，原先的每一堆還剩下 4 個，共有 4 個 4，再加上最後的 2，總共是 18，可以分成 3 個 6，所以 $4 + 3 = 7$ ，總共是 7 個 6，如下圖所示：



策略 d：利用所知道的一些乘法、加法的結果來計算。

策略 d 1：學生知道 $6 \times 6 = 36$ ，再加上 6 就等於 42，所以答案是 7。

策略 d 2：學生知道 $4 \times 6 = 24$ ，再加上 $6 \times 3 = 18$ ，就等於 42，所以答案是 7。

策略 d 3：學生利用已知 $12 + 12 = 24$ ， $24 + 24 = 48$ ，再減去 6，其結果是 42，所以答案是 7。

策略 d 4：學生利用 $6 \times 4 = 24$ ，24 加倍再減去 6，其結果是 42，所以答案是 7。

策略 e 有些學生以連加或連減來解題，如下：

$\begin{array}{r} 42 \\ - 6 \\ \hline 36 \\ - 6 \\ \hline 30 \\ - 6 \\ \hline 24 \\ - 6 \\ \hline 18 \\ - 6 \\ \hline 12 \\ - 6 \\ \hline 6 \\ - 6 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \text{①} \\ + 6 \text{②} \\ \hline 12 \\ + 6 \text{③} \\ \hline 18 \\ + 6 \text{④} \\ \hline 24 \\ + 6 \text{⑤} \\ \hline 30 \\ + 6 \text{⑥} \\ \hline 36 \\ + 6 \text{⑦} \\ \hline 42 \end{array}$
---	---

旁邊①～⑦數字是表示減去或加上 6 的次數，皆是 7 次，所以答案是 7。

2.1 等分除問題

有 28 顆玻璃珠要平分給 4 個人，每個人可以分到幾顆呢？

2.2 學生的解題策略

2.2.1 使用花片協助解題的策略

策略 a：嘗試錯誤法：

有幾個小朋友一開始不知道要拿多少個，他先從 28 個花片中拿出 9 個；再拿 9 個，最後剩下 1 個，不對；再換一次拿 5 個、5 個一數，結果還

剩下 3 個也不對；一直不斷地估計，接下來終於拿 7 個一數，拿了 4 次，且不剩下半個，所以就知道答案是 7 個。

策略 b：以一次分一個的方式來解題：

大部分的小朋友會將 28 個花片一次分一個（假設真有 4 個小朋友）第一次分了 4 個，再回頭分第二次又分了 4 個，一直分下去，最後會現假設的 4 個人分別分到了 7 個花片，所以答案便是 7。

策略 c：以折半策略來解題：

少數幾個人先將花片全部分一半，每邊各有 14 個，再將兩邊的花片再分一半，剛好分成 4 堆，每堆有 7 個，所以答案是 7。

策略 d：以 4 個花片放一堆的方式來解題：

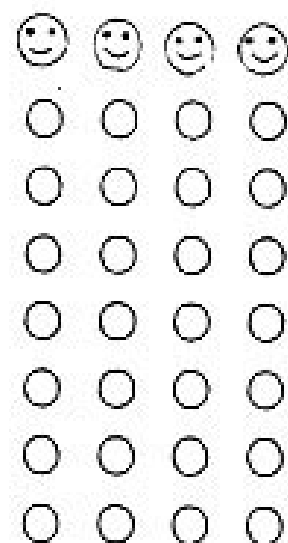
雖然遇到等分除的問題，想要以累加或累減的方法來解答很不容易，因為我們不知道該加或減多少，但還是有幾位小朋友在看到題目之後，就直接用 28 減 4（拿掉 4 個花片）擺一堆，第二次再拿掉 4 個花片擺一

堆……以此類推，最後再數數有幾堆。

2.2.2 以紙筆作答的策略

策略 a：畫出 28 個圈圈，幾個一圈表示分給一個人，先 6 個一圈，圈 4 次以後還剩 4 個圈圈；擦掉換 5 個一圈，圈 4 次以後還剩 8 個圈圈；最後 7 個一圈，圈 4 次剛剛好，所以每個人分到 7 顆玻璃珠。

策略 b：以一次分一個的方式來解題：



多數的小朋友會在紙上先畫 4 個人，然後第一次每個人下面畫一個圈，再回到第一個人畫第二個圈，邊畫還邊數 1234、2234、3234、……、6234、7234。大概估計一下圈圈的個數，算到 7234 時正好是 28 個圈圈，所以每人分到 7 個圈圈。

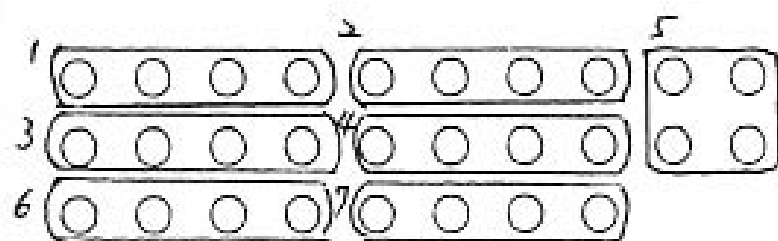
當然也有少數幾個人一次分給 2 個圈圈，等畫到差不多了，再算算每個人得了幾個圈圈。

策略 c：類似折半策略：

把 28 分成 2 個 10 和 1 個 8，首先 10 分一半，有 4 個 5，8 分一半再分一半，有 4 個 2，所以是 7。

策略 d：以 4 個花片放一堆的方式來解題：

有一個小朋友將 10 個一堆的圈圈換成 4 個一堆，這樣便有 4 個 4，還剩下 2 個 2（4），和原有的 8，共是 12，可以圈成 3 個 4，如此便有 7 個 4，所以答案是 7。操作方式如下：



結語

國小數學新課程的編寫與教學希望能落實以兒童為本位的觀點，其中的重點之一是問題的解決應該由學生的自然想法出發，再逐步聯結到形式的數學知識。因此，本節摘錄國小二年級未學過「分分看」單元的學生解除法問題的初等解題策略，以提供國小教師設計如何由這些初等解題策略聯結到除法運算的教學活動之參考。

三、乘、除法概念

(一)樣本：國小六年級學生一班 43 人。

(二)題目與學生的表現

1.1 題目：小明有 3 件不同的長褲和 6 件不同的上衣，他可以搭配出多少套不同的穿法？

(1) () 你認為此題答案應比 6
①多②少③一樣多。

(2) () 正確的計算式是：

$$3+6 \quad 6-3 \quad 6 \times 3$$

$$6+6 \quad 3 \times 6 \quad 6+3$$

$$6 \div 3 \quad 3+3$$

1.2 學生的表現：(1)小題答對率：72%；(2)小題答對率：51%。

答錯(2)小題學生中，有 19% 的學生選 $6 \div 3$ ；有 29% 的學生選 $6 - 3$ ；有 19% 的學生選 $3 + 6$ 。

選 $6 \div 3$ 者以分配的概念思考，於是選擇除法。選 $6 - 3$ 者最多，認為衣褲件數不等，可搭配的件數由一對一配完了，不可再重覆選用，故選用減法。選 $3 + 6$ 者是因為知道此題中所搭配出的套數會比褲子，也會比上衣多，於是加法成為他們的選擇。

2.1 題目：牛肉一公斤 88.2 元，請問買 0.58 公斤要多少元？

(1) () 你認為此題答案應比 88.2 元
①多②少③一樣多。

(2) () 正確的計算式是：

$$88.2+0.58 \quad 0.58 \div 88.2$$

$$0.58-88.2 \quad 88.2 \div 0.58$$

- 0.58×88.2 $88.2 - 0.58$
- 2.2 學生的表現：(1)小題答對率：81%
；(2)小題答對率：40%。
答錯(2)小題的學生中，有65%的學生選 $88.2 \div 0.58$ 。

3.1 題目：

- (1) () 你覺得乘法一定會使積數越乘越大？ ①會 ②不會 ③不一定。
- (2) () 你覺得除法一定會使商數越除越小？ ①會 ②不會 ③不一定。
- (3) () 你覺得小的數可以除以大的數嗎？（例如 $7 \div 15$ ）
①可以 ②不可以。

3.2 學生的表現：

- (1)小題答對率：81%，答錯的學生中，有74%的學生選「會」。
- (2)小題答對率：42%，答錯的學生中，有72%的學生選「會」。
- (3)小題答「不可以」的學生佔30%。

㊦結語

由國小六年級學生回答上述三個問題的表現可以看出：

- 1.雖然第一個問題的數字不大，作答的學生又已經六年級了，但由於本題是測學生對乘法的配對概念的了解，與學生熟悉的乘法的連加概念不同，因此，只有大約一半的學生能選出正確的算式。這樣的答對率告訴我們，乘法的教材或教學活動不能只偏重在連加的意義上，其他的意義（如：配對的意義）在不超出學生認知的情況下

，亦應受到重視。不僅乘法概念如此，其他數學概念的教學亦不應偏重在某一種意義上。

- 2.解牛肉問題時，雖然有81%的學生知道答案應該比88.2元少，但是受到「乘變大，除變小」的錯誤概念的影響，因此，只有40%的學生能選出正確的算式。如何安排適當的教材或設計適當的教學活動來避免或糾正學生這些錯誤概念是值得重視的問題。

四、位值概念

㊦樣本：國小六年級升國一的學生，共30人。

㊦題目與學生的表現

- 1.1 題目：() 你認為下面那一個數字和15320相等？
（①15320個「十」 ②15個「百」和320個「十」 ③1532個「十」 ④1532個「十」和20個「一」）
- 1.2 學生的表現：答對率為69%，其中有14%的學生是選②。
- 2.1 題目：() 2個「千」和35個「百」和18個「十」和6個「一」等於多少？
（①2486 ②5386 ③5686 ④以上都錯）
- 2.2 學生的表現：答對率為64%；答錯的學生都是選④以上都錯。
- 3.1 題目：0.126的2代表2個（百分之 ）
(1)0.260的2代表2個（ ）
(2)0.412的2代表2個（ ）
- 3.2 學生的表現：(1)小題答對率是76%

；(2)小題答對率是73%。

4.1 題目：

(1)請寫出一個在0.4和0.5之間的數字()

(2)請寫出一個在0.41和0.42之間的數字()

4.2 學生的表現：(1)小題答對率是75%；(2)小題答對率是74%。

◎結語

即使讀到國小畢業，仍然有25%~35%的學生，其位值概念不清。對照國小數學課本的內容，如：23564是2個10000，3個1000，5個100，6個10，和4個1；萬位數字是2，千位數字是3，百位數字是()，十位數字是()，個位數字是()。我們就不難了解為什麼答錯目1.1的學生中，約有一半是選②，而答錯題目2.1的學生都是選④。因此，有關位值概念的教學活動不能只偏重於上述的呈現方式，其他如題目1.1及1.2等的呈現方式亦應包括。

參考文獻

Booth, L.R. (1987): 診斷教學的理念，Booth專題演講，蔡淑貞整理，科學教育月刊，第100期，41-48。

Carpenter, T.P., Fennema, E., Peterson, P.L., Chinag, C.P., & Loef M. (1989) Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal*, 26(4): 499-532.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1984) *Children Learning Mathematics: A Teacher's Guide to Recent Research*. Oxford.

Fennema, E. & Franke, M.L. (1992) Teachers' Knowledge and Its Impact. In D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 147-164.

Shulman, L. (1987) Knowledge and teaching: Foundations of the new reform *Harvard Educational Review*, 57(1): 1-22.

(作者：國立台北師院教育系副教授)

「八元，還有多少零用錢？」
小芳買了十五元的簿子後，剩下



馬二／圖