

數學解題之探討

涂金堂

一、前言

數學是一種抽象的概念學習，在學習的過程中，牽涉到相當複雜的心理運作過程，因此數學學習與心理學有著密切的關係。受到本世紀初行為主義盛行的影響，數學教育比較著重於機械化的計算能力之培養，較缺乏概念性與思考性的數學能力之培養。六〇年代後，認知心理學逐漸地復甦，由於認知心理學強調『問題解決』能力的培養，數學教育在其影響之下，也逐漸地重視『數學解題』（mathematical problem solving）的教學活動。

一九七七年美國數學督導協會（National Council of Supervisors of Mathematics）即指出『學習問題解決是學習數學的主要目的』。一九八〇年美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics）也強調『問題解決是一九八〇年代數學教學的重心』。從一九八〇年代起，全世界的中小學數學教育都非常強調『數學解題』的教學，而我國也在國小數學課本第十一冊，安排第三、六、九等三個單元，介紹『怎樣解題』，期望藉由解題策略的教學，以提昇學生的數學解題能力。

二、數學解題的意義

關於數學解題的意義，茲分述幾位學者的見解如下：

美國數學督導協會（The National Council of Supervisors of Mathematic, 1977）將數學解題界定為應用先前獲得的知識，到新的和不熟悉的情境之歷程。

Lester（1980）認為數學解題是指個人面臨一種沒有算式可以保證獲得解答的情境，而個人必須利用所擁有的相關訊息，去獲得問題的解答。

Kilpatrick（1985）曾以三個不同觀點來敘述（譚寧君，民82）

（一）從心理學的層面看

數學解題常被定義成一個情境，在此情境中某人想要達到某一目標，但直接通往此目標的路徑已經被阻塞了（因此問題產生了），當然在尋求答案的過程中，需要用到一些數學概念、原理、方法等，亦即把解題看成達成某種目的而做的一些活動。

（二）從社會人類學的層面看

把一個數學問題當作是老師給學生的一項任務（Task），學生在接受此項任

務時與老師所產生的微妙關係，互相猜測對方的心意及從自我觀點出發來解釋對方的行為。

(三)從數學的及數學教學的層面看

將數學問題當作是數學建構的泉源，數學教學進行的思考工具。因為“所有的數學都是數學家們在形成問題及解題的過程中創造出來的”，所以數學解題正是讓學生搭起數學鷹架的很重要工具。

綜合上述學者的見解可知，數學解題的意義是指解題者在面對一道數學題目時，無法立即發現獲得正確答案的途徑，必須融合運用已有的數學概念、原理或方法，以求得解答的一種心理歷程。

三、數學解題歷程

在數學解題歷程的研究方面，學者根據自己的研究心得，提出許多的解題歷程模式，以下將探討 Polya、Schoenfeld、Mayer 等三位學者所提出的數學解題模式。

1. Polya 的數學解題歷程模式

Polya (1945) 在其所著的『怎樣解題』(How to Solve It) 一書中，將解題過程區分為

四個步驟：一、瞭解問題；二、擬定計畫；三、實施計畫；四、回顧解答（如表一所示）。其中每個步驟各包含許多子問題，例如：未知數是什麼？條件是什麼？你知道什麼相關問題嗎？你能證明它是不正確的嗎？你能用不同的方法得出結果嗎？……等等。Polya 提出的數學解題歷程成為後來許多研究數學解題的參考範

本。

表一 Polya 的解題歷程表

第一步 必須了解問題	瞭解問題 未知數是什麼？條件是什麼？可能滿足條件的各個部份嗎？條件足夠決定未知數嗎？不夠嗎？過多嗎？矛盾嗎？作一個圖導入適當的計畫？分開條件的各個部份。你能把它們都寫下來嗎？
第二步 找出未知數和已知數之間的關係 如果找不到就 得考慮一些輔助問題	擬定計畫 你以前見過它嗎？或者見過形式稍微不同的同樣問題嗎？你知道什麼相關問題嗎？有什麼可能有用的問題嗎？注意未知數！試想出一個有相同或相似的未知數的熟問題？這樣有一個相關的，以前你解過的問題，你能應用它嗎？你能應用它的結果嗎？你能應用它的方法嗎？你是否該導入些輔助原案，以便應用！你能改進這問題嗎？你能將它改進的更不同些嗎？回到定義！你若解不出這問題，就事先解個相關的問題。你能想一個更相關的問題嗎？一個更一般的問題嗎？一個更特殊的問題嗎？一個類似的問題嗎？你能解決問題的一部份嗎？保留一部份條件，丟開其餘部份！這樣決定的未知數會如何？你能從已知數得出什麼有用的東西來嗎？有沒有其他已知的東西可以用來決定未知數？你能改變未知數或已知數，必要時同時改變，使新未知數和新已知數能夠更加接近嗎？你用了所有的已知數嗎？你用了全部的條件嗎？問題中所包含的重要觀念都以考慮到了嗎？
第三步 實行你的計畫	擬定計畫 實行你所擬定的計畫，校核每一步驟。你能清楚的看出那個步驟是正確的嗎？你能證明它是正確的嗎？
第四步 校核所得的解答	回顧解答 你能校核結果嗎？你能校核論證嗎？你能用不同的方法得出結果嗎？你能一眼看出來嗎？你能把這結果或方法應用道別的問題上去嗎？

(引自 張德勝，民76)

2. Schoenfeld 的數學解題歷程模式

Schoenfeld (1985) 在其所著的『數學解題』(Mathematical problem Solving) 一書中，強調數學解題的研究方向需要考慮四個變項：資源 (resources)、捷思 (heuristics)、控制 (control) 及信仰系統 (belief system)。資源是指解題者擁有這些數學知識包含了數學事實、程序及技巧等訊息。捷思是指捷思策略 (heuristics strategies) 而言，許多的解題研究都非常重視受試者在解題歷程所使

用的啟思策略，例如簡化問題、畫表格、尋找組型、猜測……等等。控制則是著重在解題者解題時，如何決定計畫、如何選擇目標和次目標評估解題結果等方面。Schoenfeld 認為控制的因素與心理學上的後設認知有相當大的關連性。信仰系統是指解題者對於數學的觀點，而解題者擁有的數學觀將會影響其解題行為。

在 Schoenfeld (1982,1983,1985,1992) 的相關研究中，他發現在資源、捷思、控制及信仰系統等四項中，控制因素居於較為關鍵的地位。因為如何有效的運用資源，如何採用適當的捷思策略，常常是由控制因素所主導。所以特別在解題歷程中，以控制因素的觀點，將解題歷程區分為一、閱讀；二、分析；三、探索；四、計畫；五、執行；六、驗證等六個階段，而六個階段中的每個階段又細分為幾個解題步驟。

3. Mayer 的數學解題歷程模式

Mayer (1992) 將解題歷程分為兩個步驟，每個步驟又包含二個子步驟，分述如下（如圖一所示）。

(一)問題表徵 (problem representation)：

即將文字或圖案轉換成心理表徵，又包含二個子步驟：

- 1.問題轉譯 (problem translation)：將每一個句子或主要的詞句轉變為內在心理表徵。問題轉譯需要有良好的陳述性與程序性知識，而且將問題從文字表徵轉換成心理表徵是不太容易的。
- 2.問題整合 (problem integration)：問題整合要求學生將問題的敘述組

合成連貫的表徵，為了整合問題的訊息，需要具有基模知識 (schematic knowledge)，以區分問題的類型。

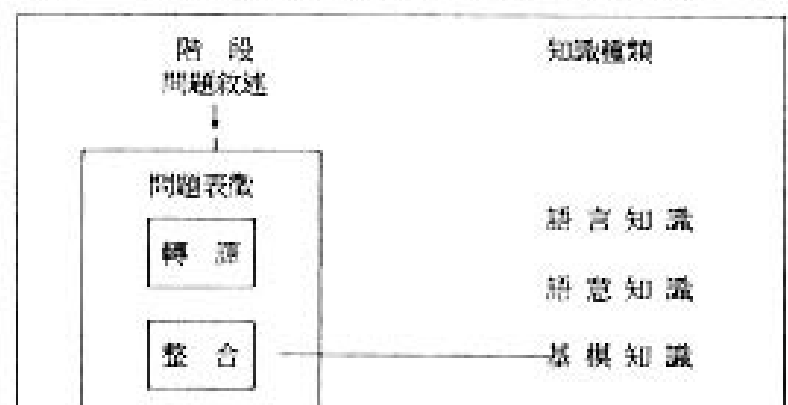
(二)問題解決

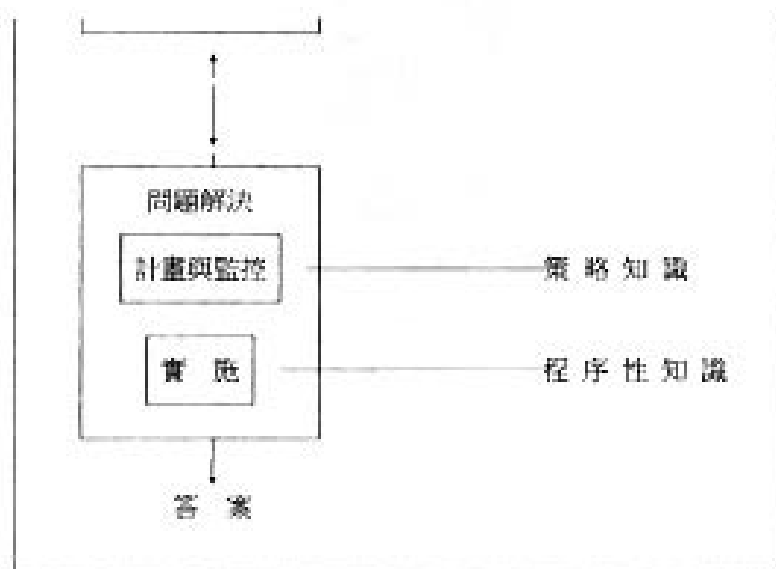
即從問題的心理表徵進行到最後答案的過程，含二個步驟如下：

- 1.解答的計畫與監控 (solution planning and monitoring)：計畫與監控需要具有如何解決問題的策略知識。
- 2.解答的實施 (solution execution)：需要以程序性知識正確且有效的應用算則，以執行計算工作。

由上述三位數學教育學者所提出的解題歷程，可知 Polya 提出了瞭解問題、探索、計畫、執行及驗證等六個階段；而 Mayer 則將解題歷程區分為問題表徵和問題解決兩個步驟。其中 Polya 和 Schoenfeld 的數學解題歷程，較著重在探究數學解題歷程中所經歷的階段，並且詳細地解析每個階段所應採取的有效策略；而 Mayer 的數學解題歷程，則較著重於問題的表徵方面，也就是將數學題目中的每一個句子轉譯成心理表徵，並且把每個句子整合成連貫一致的結構的研究上。

圖一 Mayer 之解題歷程與知識的關係





(引自Mayer, 1992)

四、數學解題的評量方法

數學解題的評量方式，以前的研究較偏重評量解題的結果，而現在則兼重解題的歷程與結果，以下列舉較常使用的評量方法。

(一)紙筆測驗法 (paper and pencil test)

紙筆測驗法有兩種評量方式：一種是以數學應用題的形式讓受試者計算正確答案；另一種是以選擇題的形式，讓受試者選擇正確的選項，根據受試者的答對題數，以評量其數學解題表現。

(二)錯誤類型

此種評量方式主要是分析解題者在解某種數學領域的題目時，所產生的錯誤。透過此種錯誤類型的分析，試圖找出某個學生或是部份學生，容易產生的系統性錯誤。此種評量方式有助於教師在教數學時，提醒學生該注意的地方。

(三)策略計分系統

策略計分系統的評量方法，通常以選擇的方式呈現，而將各種解題策略安排於選項中。根據解題者作答的情形，以評量解題者在解題過程中，所採用的解題策略

之種類與頻率。國內學者劉秋木（民78）所編製的『數學解題行為評量表』，即採用此種評量方法。

(四)放聲思考法 (thinking aloud method)

近年來，由於數學解題研究較重視解題的歷程，所以學者在研究數學解題時，常採用『放聲思考』的方法，來研究解題者在整個解題歷程中，所表現出的解題行為。所謂放聲思考是指解題者在解題時，將腦中思考的運作情形，同步的以語言口述出來。而研究者通常會採錄音或錄影的方式，將解題者口述的語言記錄下來。然後在將記錄下來的語言，轉譯成為文字，即所謂的原案（ protocol ）。

五、結語

數學是一切科學研究的基礎問題，唯有完備的數學理論基礎，才有足夠的能力發展高級科學技術。隨著資訊時代的來臨，各國莫不致力於提升本國的科技水準，因此各國政府都相當重視中小學數學教育的紮根工作，如何提升中小學生數學推理及數學解題的能力，是各國目前數學教育的重要目標。

目前我國正進行課程的改革工作，在國小數學科課程的修訂方面，主要的重點之一在於加強數學解題的活動，以培養學生數學解題的能力。期望學生具有良好的數學解題能力後，也能有效的解決日常生活中所遭遇到的問題。而如何協助學生具有良好的數學解題能力，則有賴教育學者在數學解題這個主題上，繼續貢獻心力。

（作者：高雄市東光國小教師）