

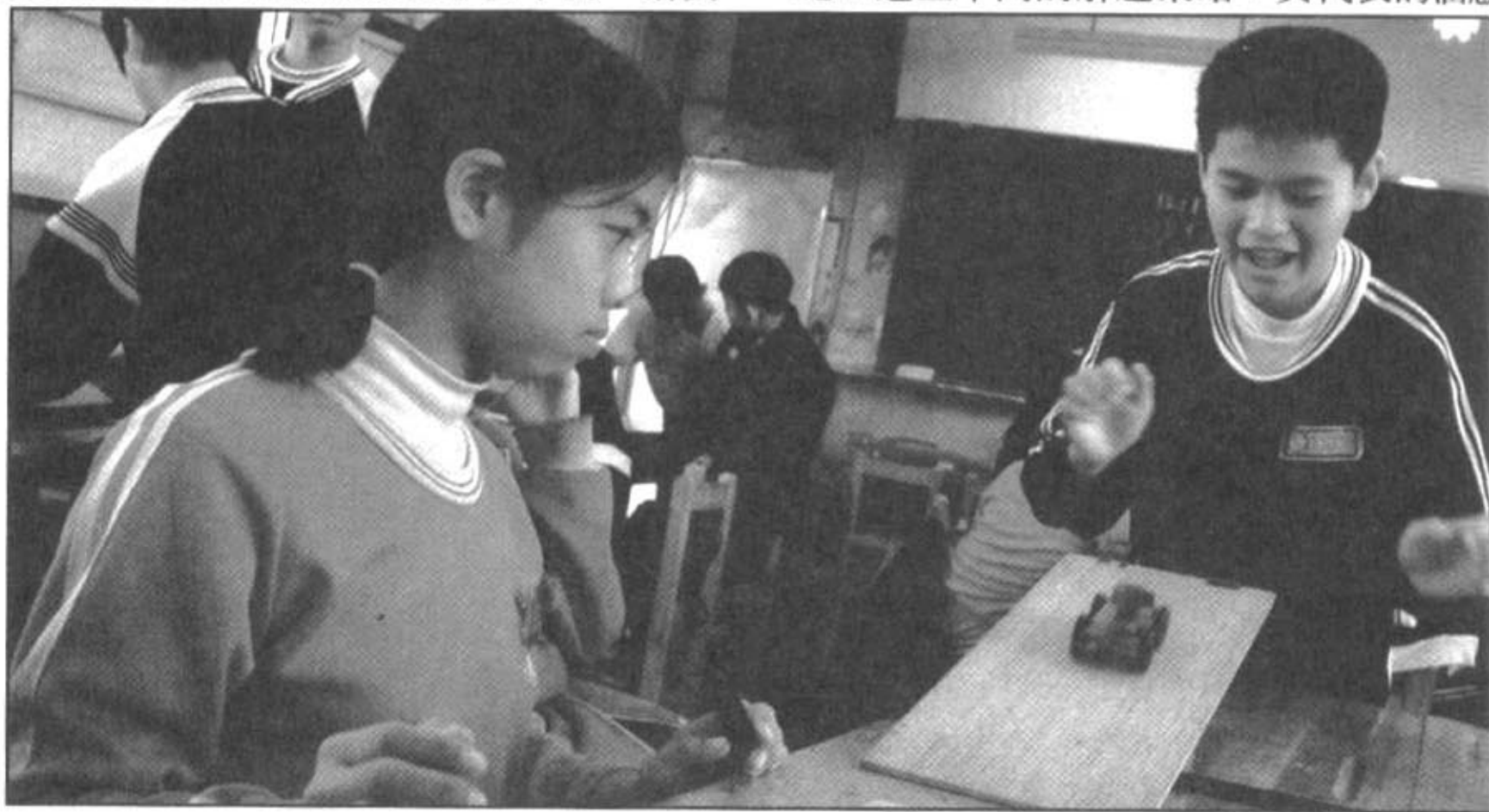
國小新生數學解題策略的多樣化

呂玉琴／國立台北師範學院數理教育系副教授

八十五學年度由一年級開始逐年實施的國小數學新課程，在其課程標準草案的修訂序言（台灣省國民學校教師研習會，民 81）中提到，影響本次數學課程修訂的重要因素之一是：落實以學生為本位的觀點。教師在處理學生的個別差異時，要容忍不同學生在達到同一學習目標的時間差，當學生採用不同策略來解題時，教師都應該加以肯定與鼓勵，如此，學生才較有可能適應這個多元化發展的社會。為了達到國小數學新課程修訂序言中的“落實

以學生為本位的觀點”，國小教師在進行教學活動時，其中一個重要任務是提出問題後，應該讓學生透過討論來進行解題或由學生自行解題，並發表其解法。教師不再是提出問題後，接著告訴學生解此題的最簡單、最有效的方法。

由學生透過群體或個別的解題時，由於學生的心智發展程度不一，因此，其解題策略也常常會呈現多樣化。但是，國小教師們是否能看出學生解題策略的不同呢？這些不同的解題策略，其代表的涵意



國小數學課程修正採「落實以學生為本位」的觀點

又是什麼呢？如何利用學生不同的解題策略來安排教學活動呢？我到過好幾個學校，看了好多國小數學新課程試用班級的教學，也和老師們談論其教學。曾經有一個老師提出一個問題說：「我們強調小孩子有自己的策略，有不同的策略，可是我班上學生看起來好像解題方法都差不多，我沒有看到有什麼不同的策略。」其實這一天的教學裡，我看到她班上學生的解題方法也有多樣性，因此，引發我寫這篇文章的動機。

本文將提出國小一年級上學期的學生，在解各種不同問題時的各種策略，並分析這些解題所代表的涵意，或如何利用學生不同的解題策略來安排教學活動。

底下 S1、S2、... 代表特定學生。框框內的文字或圖形，為學生寫在白板上解題策略。框框下面的描述，為學生口述的解題策略。

問題一：媽媽買了 6 瓶蘋果牛奶，5 瓶草莓牛奶，媽媽共買了幾瓶牛奶？
學生的解法：

S1：

5	○○○○○○
---	--------

5、6、7、...11，媽媽共買了 11 瓶牛奶。

S2：

○○○○○○	○○○○
--------	------

1、2...11，媽媽共買了 11 瓶牛奶。

S3：

6	○○○○
---	------

6、7、8...11，媽媽共買了 11 瓶牛奶。

S4：

○○○○○○	●●●●●
--------	-------

1、2...11，媽媽共買了 11 瓶牛奶。

S5：

☞☞☞☞☞☞	☞☞☞☞☞
--------	-------

1、2...11，媽媽共買了 11 瓶牛奶。

S6：

○○○○○○	○○○○
--------	------

6、7、8...11，媽媽共買了 11 瓶牛奶。

從語言表徵來看，學生 S2、S4、S5 都是採用從 1 開始一個一個點數的“全部數策略”。使用這種策略的學生，對正整數數詞的了解，是透過數個「1 個」的合成活動來掌握，屬於序列性合成運思。學生 S1、S3、S6 都是採用從被加數或加數開始，往上一個一個點數的“向上數策略”。使用這種策略的學生，對正整數數詞的了解，以學生 S1 為例，他不只可以將 5 視為 5 個 1 瓶牛奶的合成，也可以將 5 瓶牛奶視為一個整體，再從這個整體，逐次增加 6 個“1 瓶牛奶”來解題，屬於累進性合成運思。

從圖象表徵來看，學生 S2、S4、S5、S6 都是採用“全部數策略”，而學生 S1、S3 則採用“向上數策略”。此時，有二個現象值得注意：

第一個現象是，學生 S1～S5 解問題一所使用的解題策略，其語言表徵和圖象表徵是相一致的，但是學生 S6，其語言表徵採用“向上數策略”，屬於累進性合成運思，而其圖象表徵卻採用“全部數

策略”，屬於序列性合成運思。Carpenter 和 Moser(1984) 曾將孩童解加、減法文字題的能力分成四個基本的層次：

層次 1 的孩童僅會使用“全部數策略”來解題；

層次 2 是一個轉移期，此層次內的孩童同時使用“全部數策略”和“數數策略”（含“向上數策略”）；

層次 3 的孩童雖然有時會跌回使用“全部數策略”，但主要是依賴“數數策略”；

層次 4 的孩童用九九加法和九九減法來解加、減法問題。所謂九九加法是指一位數加一位數的加法，而九九減法的指減數和差（或稱為差數）是一位數的減法。

按照 Carpenter 和 Moser 的分法，這六個學生解問題一的能力由低到高依序是學生 S2、S4、S5 → 學生 S6 → 學生 S1、S3。

第二個現象是，雖然學生 S2、S4、S5 的解題策略，無論是語言表徵或圖象表徵是採用“全部數策略”，其認知能力似乎是相同的，但是仔細觀察，我們可以發現其圖象表徵的複雜度卻有明顯的不同。如果學生只是基於愛畫畫、愛表現而花大量的時間在畫圖上，教師可以採用縮短學生的解題時間，來強迫學生改用較簡單的圖象表徵；或告訴學生，這是數學課而不是美勞課，如果你喜歡畫畫，請

下課再畫或回家再畫，以免浪費時間在等學生畫圖。當然，如果教師將數學與美勞作合科教學，那又另當別論。要留意的是，如果學生畫圖畫得仔細的原因不是因為他愛畫畫、愛表現，而是因為他沒有畫出牛奶瓶子，沒有畫出蘋果，他就無法想像這是一瓶蘋果牛奶，也就無法解題，此時，若教師要求他以圓圈等簡單的圖象來表徵蘋果牛奶以節省時間，那麼，這位學生只好在無法了解的情形下，模仿教師給予的簡單、有效的解法，這種現象若一再發生，學生將不再主動思考如何解決問題，而等著教師給予最簡單、有效的解法，這又回到傳統的教、學方式了。因此，如何拿捏，如何處理才會對學生的學習有最大的幫助，就靠教師對學生解題能力、認知的了解了。

底下呈現的是，學生在已有解加、減法文字題（合成、分解問題）的經驗，但是還沒有正式學習用算式來記錄解題活動的過程和結果時，學生如何在白板上用自己的方法來記錄。



問題二：老師買了 9 張聖誕卡，再買 2 張，老師共買了多少張聖誕卡？

學生的解法：

S1 : $\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc + \bigcirc\bigcirc = 11$

S2 : $9 + 2 = 11$

S3 : $\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc + \bigcirc\bigcirc = \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$

S4 : $\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \quad \bigcirc\bigcirc \quad 11$

S5 : $\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \quad \bigcirc\bigcirc$

S6 :
$$\begin{array}{c} \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \\ + \\ \bigcirc\bigcirc = 11 \end{array}$$

S7 : 9 、 10 、 11

由於這個教學活動的目的是要介紹用算式來記錄解題活動的過程與結果，因此教師在安排上述學生上台發展振紀錄時，可考慮由較差的紀錄漸漸引入較佳的紀錄。

我們可以明顯的看出，學生 S7 是採用“向上數策略”來解題，但是他的紀錄中，並沒有表示“合起來”的符號，而加數亦隱藏在其中而沒有明白的表現出來。學生 S5 表現了代表 9 和 2 的數量，也用大橢圓來表現“合起來”的意思。學生

S1、S3、S6 都表現出欲合作的兩量及其總和，也表現出“合起來”的意思，只差沒有全部用數字來表示其數量。其中，學生 S6 的記紀格式和傳統的算式不一致，我們也可以讓學生比較 S1 和 S6 的記錄有沒有什麼差異。學生 S2 的記錄可以放在最後出現，以達到介紹用算式來記錄解題活動的過程與結果的教學目標。

問題三：樹上有 8 隻小鳥，又飛來 6 隻，樹上現在有幾隻小鳥？

學生的解法：

S1 : ○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○

1、2...14

S2 : $8 + 6 = 14$

8、9、10...14

S3 : $8 + 6 = 14$

因為我知道 $7 + 6 = 13$ ，再加 1 隻就是 14

S4 : $8 + 6 = 14$

6 拿掉 2，和 8 合起來是 10，6 拿掉 2 剩 4，所以是 14

S5 : $8 + 6 = 14$

我是空撥的

除了學生 S1 還不會用算式來紀錄解題活動的過程和結果外，其他的四個學生都已經會用算式來紀錄。學生 S1 是採用“全部數策略”，學生 S2 採用“向上數策略”。學生 S3 知道 $7 + 6 = 13$ ，而又看出 $8 + 6$ 與 $7 + 6$ 的差異，因此採用 13 再加上 1 是 14 的方法來計算 $8 + 6$ 的答案。在進入小學的前、後一段時間，部分孩童已經能記憶二個一樣的數（通常這個數不大於 10）相加起來的和，例如： $1 + 1 = 2$ 、 $2 + 2 = 4$ 、 $3 + 3 = 6$ …等。雖然這些孩童知道 $4 + 4 = 8$ 、 $5 + 5 = 10$ ，但是，如果你問他 $4 + 5$ 是多少或 4 和 5 合起來是多少，通常他們不會利用 $4 + 4 = 8$ ， $4 + 5$ 比 $4 + 4$ 多 1，所以 $4 + 5$ 是 8 再加 1；也不會利用 $5 + 5 = 10$ ， $4 + 5$ 比 $5 + 5$ 少 1，所以 $4 + 5$ 少

1，以 $4 + 5$ 是 10 再減 1。亦即，他們常常不會利用已知的九九加法來解題，而是重新使用“全部數策略”或“向上數策略”來解題。因此，學生 S3 能看出 $8 + 6$ 與 $7 + 6$ 的差異，並能利用 $7 + 6$ 的結果來解題，其認知已相當高。學生 S4 能看出 8 和 10 的關係，再將 6 拿來分解，也是一種相當高級的解法。學生 S5 利用心算的方法來算出答案，從“空撥”的描述中，我們無法知道他是否了解 $8 + 6$ 的意義，是會算 $8 + 6$ 的答案，還是純粹靠記憶解題？因此，教師有必要進一步的追問，如：你會不會用花片或畫圖告訴我，為什麼 $8 + 6 = 14$ ？

雖然學生 S2 ~ S5 的記錄都是 $8 + 6 = 14$ ，但是他們的解題方法卻都不一樣，如果不聽聽學生的口述說明，我們還無法知道學生解題策略的多樣性呢！

