透析國小數學新課程與教學

黃幸美／台灣省國民學校教師研習會副研究員

一、前言

國民小學的數學新課程標準，教育部已於民國八十二年九月頒佈，全國的國民小學也自八十五學年度全面施行新課程。自數學新課程推展以來，仍有許多關心教育的人士，對新課程與教學的認識相當有限，甚或有迷思，茲以家長與教師對談的兩則故事舉隅，針對數學新課程與教學作進一步的剖析說明。

故事舉隅：

故事一：

甲家長憂心忡忡地請教一位任教小學的老師，因為其就讀幼稚園大班的兒子，被老師認定為：『數學能力需再加強，否則上了小學，尤其學習數學新課程，一定會成為數學陪讀生』。經此小學老師深入詢問詳情以後，原來是幼稚園老師要求小朋友們從100 倒唸到 1 ，並自 100 倒寫到 1 。小孩在倒唸的功課上，可以表現得還不錯，但是書寫的倒寫數字表現，則錯誤百出 。家長一面看著小孩作業單上被老師批畫的大叉叉，一面回想幼稚園老師的警告，為兒子進小學以後學習數學新課程的能力，擔憂不已。

故事二：

某國小兩位老師互換心得地談論數學教學，甲老師問：「最近一年級小朋友的數學已採行新課程，我看一看課本與習作，覺得新、舊課程並沒有什麼多大差別嘛？」乙老師頗同意地回答：「是啊！新課程大概比較注重讓小朋友分組討論，舊課程只是讓少數小朋友回答問題，反正讓小朋友多說說話就對了。」

從上述兩則故事舉隅，可發現不少國小教師與家長對當前所推展的國小數學新課程與教學的認識不足，傾向於以傳統的數學教學模式來揣度新課程與教學，其仍存有以下兩點疑思與誤

解：一小學數學的教學，注重兒童精通熟練數字運算，即能在愈短的時間內完成多量的計算問題。二所謂新課程的教學，即老師提供問題給小朋友，讓兒童自由地討論，小組討論就是建構知識。以下將從兒童知識認知的教學觀點，析述數學新課程的教學模式，並針對一般教師與家長對數學學習的迷思，詳加澄清與說明。期以導引教師與家長，幫助兒童建立有意義的數學學習。

二、數學知識的性質與學習

數學知識乃包含物理性知識、社會性知識及邏輯數學知識。所謂物理的知識，即指事物的外在事實與現象，其乃可以觀察或感官覺知的，例如：積木的顏色、一隻青蛙有四條腿等。物理知識的來源，部份潛存於事物物件之中。所謂社會性的知識，即指在某個文化下，文字符號的書寫與格式記錄的方式，以及口說語言的表達等，例如：桌上有五個蘋果，書寫的記錄符號為『5』（一般通用的阿拉伯數字），口語表達此數量或『5』的數詞為『五，ㄨˇ』（中文的數詞表達方式）。所謂邏輯數學知識，則包含每個各殊事物與知識之間的關係，其性質比較抽象，也是較難以理解的一種知識。例如：當呈現給兒童兩條長度與形狀相同的積木：一條為紅色，另一條為黃色，並說明此兩條積木是相似的。此「相似」則屬於邏輯數學知識。縱然積木之間相似的特性可以觀察得到，但是長度相似與形狀相似的關係，並不個別存在於紅色積木，或個別存在於黃色積木，相似性關係的存在，必需同時呈現兩條積木並作進一步關係處理時，才能從比較中建立長度與形狀的相似關係。換句話說，如果兒童尚未對此兩條積木作關係的處理，相似性在兒童的觀點中是不存在的。雖然邏輯數學的知識較抽象，但是一旦兒童理解或建構出原則與關係，其可藉推理與歸納，衍產出其他不同的關係。前述的物理知識，部份也由邏輯數學知識構成，例如：幾何形狀的分類，數量的保留概念等。同時，社會性知識也需藉助於邏輯數學知識來建構，例如：辨別符號記錄格式的溝通意義是否適當，文字表達好或差等判斷原則。

數學知識的認知，首重兒童從可觀察的事物現象，以及可重複操作的物件處理，逐漸累積操作經驗，從屢試不爽的觀察與操作經驗中，察覺事物之間的關係性，隨著解題經驗的增加，邏輯數學知識亦隨之成長。換句話說，數學邏輯知識對兒童而言，雖然抽象難理解，但是活化兒童的邏輯數學知識卻是數學學習的根本要務，教學者讓兒童從可觀察的現象作推理，而非只灌輸物理的事實或名詞（社會性知識），徒以公式背誦或名詞轉換取替推理思考。

就故事一的數數與認識數詞的序列，年幼兒童常以唱數活動來表現。對於低年

級兒童而言，知覺與動作經驗的學習是相當重要的，數數與數詞序列的認識，配合物件的點數活動，以達數量與數詞的聯結，是穩固數數能力的基礎。認識數詞序列固然爲數數能力的基礎，但是疏於前述的基礎活動，僅流於記誦式的學習，對於日後的數學知識認知，助益淺薄。記誦式的數數，亦非代表眞正的數學能力。同時，在數與計算方面，傳統的教學相當重視記憶算則規約（例如：個位數加個位數，十位數加十位數，個位數加滿十以後，進位至十位，十位數加滿百以後，進位到百位，也就是：『個位進位到十位，十位進位到百位』的算則），兒童在未詳加理解其位値概念以前，爲達成老師的教學要求，往往以記憶方式來演算，在不求甚解的情境下，錯誤百出自不在話下。例如：在計算 7 ＋ 54 ＋ 195 ＝ ? 的問題上，要求兒童以直式列出計算時，兒童極可能出現下列數種錯誤情形：

(1)
$$\begin{array}{r} 7 \\ 54 \\ +\ 195 \\ \hline 146 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 7 \\ 54 \\ +\ 195 \\ \hline 166 \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{l} 7 \\ \ 54 \\ +\ 195 \\ \hline \ 849 \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{l} 7 \\ \ 54 \\ +\ 195 \\ \hline \ 949 \end{array}$$

第一種錯誤，爲兒童先處理個位，將 7 加 4 加 5 得 16，但是忘記進位，將 10 進位到十位。

第二種錯誤，爲兒童先處理個位，將 7 加 4 加 5 得 16，並將 10 進位到十位的 50，得 60，但是忘記加上 90。

第三種錯誤，爲兒童將個位 7 的位置寫在百位，再處理個位，將 4 加 5 得 9，十位的 50 和 90 相加，得 140，但是忘記將 100 進位到百位，處理百位時，將百位上的 7（誤視爲 700）和 100 相加得 800。

第四種錯誤，爲兒童將個位 7 的位置寫在百位，再處理個位，將 4 加 5 得 9，十位的 50 和 90 相加得 140，將一百進位到百位，處理百位時，將 7（誤視爲 700）和 100 及所進位的 100 相加得 900。

將一組數字視爲一個整體，對成人而言是容易的，例如：543，成人容易瞭解 5 代表 500，但是對年齡較小的兒童，5 在 543 之中代表的是 5，未必與成人的認知相符合。因此，位値概念及其運算法則，其雖屬於文化傳承的社會規約之一部份，但是當兒童對數量的概念未充分認識之前，要求兒童以位値與算則計算來解題，是具相當難度的。相對地，如果讓兒童以他所理解的數量關係來完成解題，不強求使用符合社會規約的位値格式記錄方式，兒童犯錯的可能性也大爲降低。例如：兒童將 7 和 4 相加得 11，50 ＋ 11 ＝ 61，1 ＋ 5 ＝ 6，90 ＋ 60 ＝ 150，150 ＋ 100 ＝ 250，

250 + 6 = 256 。此種計算過程雖然較冗長，但卻是兒童所能理解的，解題對他知識經驗的精緻化是有意義的。當兒童使用自己所理解的知識完成解題，並觀摩他人不同的解題方法，發現所的結果一樣正確以後，教師可導引他注意各種合理的解題途徑，多元化的解題策略知識因此建構。

因此，有意義的數學學習是建立在兒童自己的活動歷程中（ Kamii & Ewing, 1995 ； Steffe & D'Ambrosio, 1995），而非模仿教師的規則或機械式記誦，當兒童未充分理解成人抽象的符號表徵意義時，要求兒童熟練社會規約或格式記錄，對數學知識的學習是不具意義的，讓兒童的學習建立於自己認知活動中，重視兒童的自然想法（黃敏晃，民 83 ；甯自強，民 84），鼓勵兒童從經驗中察覺數學的關係與規律，是數學新課程的基本精神。

三、以兒童知識認知為基礎的教學活動

認知導向的有意義教學，乃包含下列三項要素：教對學生的數學操作方法的知識，教師對學生數學知識的認知，以及教師與學生互動的結果（ Simon, 1995 ； Steffe & D'Ambrosio, 1995）。換句話說，教師對其學生在數學問題解決溝通脈絡中的思考與表現，詳加認知與解析，是有意義教學的重要根基。

語言的溝通與說明，是知識建構的重要工具（ King, 1994 ）。兒童透過與同儕的問題討論與解題溝通，可以愈澄清其概念，與同儕及老師的語言互動討論中，認知多元性的合理解題策略，增進關係的理解，充實數學知識之建構（ Hicks, 1996 ： King, 1994）。此也是數學新課程鼓勵兒童參與解題討論，培養使用數學語言溝通與批判能力之要旨。

教師在教學活動中，鼓勵小組的討論互動、提供例行性與非例行性的佈題，以及教材教具的充分運用，皆為促進學生認知學習的有效工具，但是一個教師具備使用這些工具的能力，尚未足以使其教學活動能確實達成學生有效建構知識，教師需對教學架構理論以及對兒童數學知識皆具充分認知，多方相輔相成，方能成為數學學習情境中幫助學生成功建構概念的建築師 (Simon, 1995)。由此可見，放任式、無解決問題目標導向地的讓學生討論，亦可能導致兒童天馬行空地對談，產生無意義地對話，無益學習。

教師能充分瞭解與掌握學生的數學想法，對於學生談論數學時，具有監控與增強認知之功用。例如：教師佈題：「一籃**蘋果有 12 顆，小明吃掉了全部的$\frac{3}{4}$，請問小明吃掉了多少顆蘋果？**」。小朋友經過解題討論以後，各有不同的作法，例如：

(1)方法一： $12 \div 4 = 3$ ， $3 + 3 + 3$

$=9$ ，答： 9 顆。此方法為把全部的蘋果 12 顆，平分成 4 份，一份有 3 顆，吃掉的是三份，所以為 9 顆。

(2)方法二： $12 \times \frac{3}{4} = 9$ ，答 9 顆。此方法為把全部的蘋果數 12 當成 1 ，求出全部的 $\frac{3}{4}$ 的蘋果數量。

(3) $12 - \frac{3}{4} = 11\frac{1}{4}$ 。答： $11\frac{1}{4}$ 顆。此方法為學生未釐清題目中「吃掉了全部的 $\frac{3}{4}$ 」的意義，將「吃掉了全部的 $\frac{3}{4}$ 」誤解為「吃掉了 $\frac{3}{4}$ 顆」。

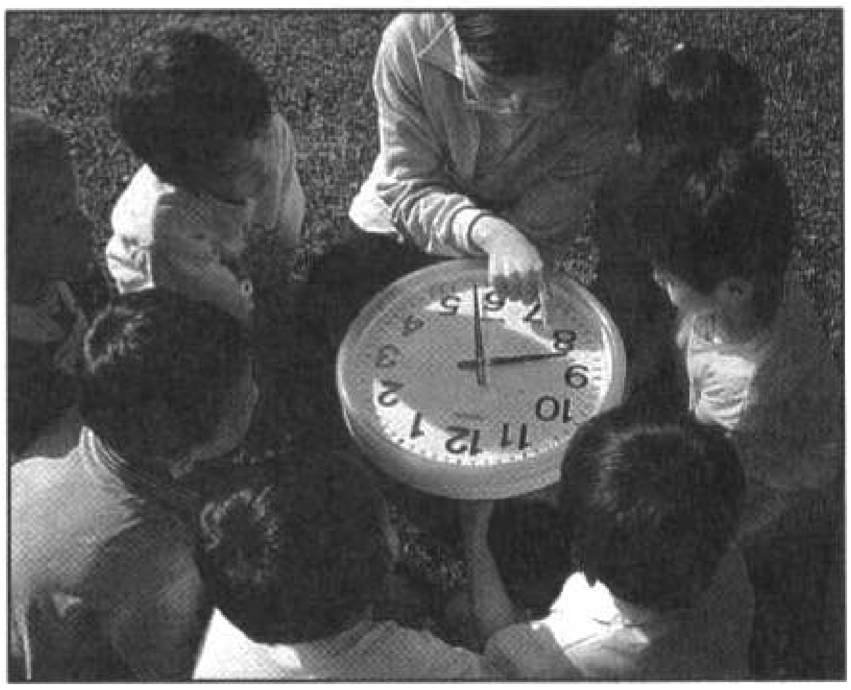
當教師發現兒童解題錯誤，瞭解兒童的想法以後，他（她）必須及時針對兒童的迷思，再提供兒童同儕之間的討論批判機會，或教師進一步舉例作比較說明，詳加澄清，讓兒童瞭解「吃掉了全部的 $\frac{3}{4}$ 」與「吃掉了 $\frac{3}{4}$ 顆」之間的差異。

教師處理進一步的概念釐清時，一方面也觸動學生對解題的反省思考。因此，教師在教學活動中，其不僅為佈題者，更需從學生的數學討論中（從行間巡視或解答發表分享時），瞭解學生的數學想法，對學生的錯誤迷思及時提出討論與反省，並從學生的討論中所收集的訊息，再組織作為後續教學活動之材料。數學新課程的教學，即期待教師能根據其所認知的學生的數學知識，統整與反省教學活動實務，成為教學知識的創造者。

四、結語

良好的數學教學應植基於兒童所認知的數學知識，讓兒童從理解與解題活動中，自我組織經驗，察覺數學的關係結構。學生常視事物為各殊獨立的物件，不容易察覺物件相互之間的潛在關係，教師所扮演的角色，即充分瞭解兒童的數學思考，並運用有效的教學工具（例如：鼓勵小組的討論溝通、提供例行性與非例行性的佈題，以及教材教具的充分運用等），幫助兒童建構概念。

長期以來的數學教學，誤導一般人對數學學習的認知，誤以為「多算，多練習，必能瞭解」，此將導致數學解題的「知其然不知其所以然」弊病，數學概念模糊不清，推理思考也因而被忽視。數學新課程與教學目標，期以兒童的認知為基礎，鼓勵教師讓兒童運用語言進行數學討論，並以問題解決為目標導向，導引學生推理思考與活用知識是為數學教育之鵠的。



數學新課程與教學目標，期以兒童的認知為基礎，鼓勵教師讓兒童運用語言進行數學討論。

參考書目

一、中文部份：

黃敏晃 （民 83）。國民小學數學新課程之精神。輯於國民小學數學科新課程概說（低年級），頁 1-19 。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。

甯自強 （民 84）。五個區分對數與計算教材設計的影響。輯於八十三學年度國民小學數學科研討會論文暨會議實錄專輯，頁 63-90 。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。

二、英文部份：

Hicks, D. , (1996). Discourse, learning, and teaching. In M.W. Apple (1996). Review of research in education, Vol. 21, Chapter 2, p.49-95. American Educational Research Association.

King, A. , (1994). Guiding knowledge construction in the classroom: Effects of teaching children how to question and how to explain. American Educational Research Journal, 31(2), 338-368.

Kamii, C. & Ewing, J. K., (1995). Basing teaching on Piaget's constructivism. Childhood Education, 72(5), 260-264.

Simon, M. A. ,(1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. Journal of Research in Mathematics Education, 26 (2),114-145.

Steffe, L. P. & D'Ambrosio, B. S., (1995). Toward a working model of constructivist teaching: A reaction to Simon. Journal of Research in Mathematics Education, 26(2), 146-159.