

數學的思考方式與特質

洪劍能

國立臺北藝術大學兼任講師

一、前言

眾所皆知，對於任何一門學問或理論而言，並沒有所謂的簡單方法或是有速成班的存在，也就是說研究任何學問都有其困難度。數學這學科內容較其它學科為抽象，其困難度更易造成一般大眾大都對它敬而遠之，而無法一窺理論之堂奧，實為可惜。為了彌補這個缺憾，教育普及與科普引介，便成了搭起艱深學說與一般大眾之間的橋樑。本文便希望能為大眾釋疑或往後面對生活上數學問題時，能夠比較從容、有條理的思考，在處理日常生活中碰到需要數學推理時，不要便因畏懼純粹理論論述，而喪失了進入審閱數學大觀園美麗的機會，我們反而應該更積極的學習數學的思考方式與了解其特有性質，進而應用它並提升自己的生活品味。

二、數學的思考方式

讓我們先從一個問題談起：假設我們手上有兩個沒有任何刻度與記號的水桶，已知其中一個水桶裝滿水為 5 公升，另一個水桶裝滿水為 3 公升。水是無限制供應。請問：（1）請調配 4 公升的水、（2）請猜一部電影。

我先解答第 2 個問題好了。這是一個數學問題，但這個問題出自於一部電影：終極警探 3（Die Hard with a Vengeance）。電影中的反派出了這樣的數學問題當作解除炸彈的關卡。

再來看看問題本身。下列的思考方式大概就是我們思索數學問題從一開始的切入到最終完結一個問題的歷程。

（一）了解問題

水桶沒有刻度與記號，當然是指無法依目測或體感來量取水的數量。因為這種方式太自由心證了，人多多少少會有誤差而導致失真。再者當我們進一步觀察便會發現水桶只有裝滿水與倒空兩種狀態，用數學說法即為大水桶 = 0 或 5；小水桶 = 0 或 3。

（二）實際操作

經過一番動手操作，大部分的人對題目會開始有想法。諸如解題的順序或是什麼步驟是不必要的。而這些小細節終可累積成解答的關鍵。相信經過嘗試之後，上述問題已經有了答案。解答如下：先將 5 公升的水桶裝滿水，之後倒入 3 公升的水桶，此時大水桶 = 2；小水桶 = 3。然後倒掉小水桶的水，再將大水桶剩下之 2 公升水倒入小水桶，此時大水桶 = 0；小水桶 = 2。再將 5 公升的水桶裝滿，再倒入已有 2 公升水的小水桶，此時大水桶 = 4；小水桶 = 3。如此一來大水桶的水即為所求的 4 公升，而為了單純的 4 公升水，會將小水桶剩下的 3 公升水倒掉，此一步驟會在求一般解時顯現其考慮之必要性。

大家是不是對於這種純文字的解說看的頭昏眼花，所以數學是非常需要圖表或圖形來加以解說的。上述解法請看下列表格：

表一

	大裝滿	大倒入小	小倒掉	大倒入小	大裝滿	大倒入小	小倒掉
大水桶 5 公升	5	2	2	0	5	4	4
小水桶 3 公升	0	3	0	2	2	3	0

實際操作這個環節是解決問題中很重要的步驟。數學不是用看的，能夠將想法落實成步驟一定要動手做，這恰巧也是一般人無法掌握數學脈絡的重要原因。Just Do It.

（三）其他解法

有了答案絕對不是研究的終點，一定要追問：有沒有其他解法？永遠要將尋找其他解法銘記在心。而這其他解法的線索往往也可由已知解法取得。

觀察表一，有沒有發現都是大水桶倒入小水桶，難道沒有小水桶倒入大水桶的方法嗎？又到了實際操作的步驟了。經過努力終於有了以下表格：

表二

	小裝滿	小倒入大	小裝滿	小倒入大	大倒掉	小倒入大	小裝滿	小倒入大
大水桶 5 公升	0	3	3	5	0	1	1	4
小水桶 3 公升	3	0	3	1	1	0	3	0

（四）數據更改

到目前為止，上述題目不但已經解決，而且用了兩種不同的方法。但是真正的數學似乎尚未出現。我們會繼續追問：只能 5 公升與 3 公升調配 4 公升嗎？可不可以 5 公升與 3 公升調配 1 公升？又或者 8 公升與 3 公升調配 4 公升？數

字一般化的更改怎麼辦？難不成數字一旦更改我們一切又要從頭實際操作演練一次？於是問題變成了：我們能否找到一種一般性的結果，針對任何數據都可以操作？

（五）引入數學以求一般化結果

這是數學最迷人但也是困難與挑戰的所在了。我們從表一發現大水桶裝滿 2 次，小水桶倒掉 2 次。這似乎有某種數學關係。的確，假設裝滿 n 次為 $+n$ ，倒掉 m 次為 $-m$ ，再配合大小水桶的容量，於是表一有了如下的算式：

$$5 \times 2 + 3 \times (-2) = 4$$

有點道理了，趕快檢查表二的算法，得到小水桶裝滿 3 次，大水桶倒掉 1 次：

$$5 \times (-1) + 3 \times 3 = 4$$

而且又發現水桶只負責一種動作：只有裝滿或者只有倒掉。

所以 5 公升與 3 公升水桶調配 4 公升水的一般算式為：

假設 x 為 5 公升水桶裝滿或倒掉的次數

假設 y 為 3 公升水桶倒掉或裝滿的次數

調配 4 公升水的算式為：

$$5x + 3y = 4, \text{ 求此二元一次方程式之整數解}$$

所以 $5 \times (-4) + 3 \times 8 = 4$ 也是一種解，只不過不太有效率吧！

（六）聯想

假設大水桶容量 88 公升，小水桶容量 48 公升，如何調配 4 公升的水？如果在一開始我們就處理這個問題，大家有可能在一陣忙亂的試算中失去信心而打了退堂鼓，所以數學一向是以簡馭繁，先處理簡單的、單純的，然後才處理一般狀況。

現在我們可以處理這些大數字了。

假設 x 為 88 公升水桶裝滿或倒掉的次數

假設 y 為 48 公升水桶倒掉或裝滿的次數

調配 4 公升水的算式為：

$$88x + 48y = 4, \text{ 求此二元一次方程式之整數解}$$

$$\text{上式整理之後得到：} 8(11x + 6y) = 4$$

$$\text{所以 } 11x + 6y = 1/2$$

在 x 與 y 皆為整數情形下， $11x + 6y = 1/2$ 無解，也就是說 88 公升與 48

公升無法調配出 4 公升的水。

從上述無解的說明中，你聯想到什麼？ $88x + 48y = 8(11x + 6y)$

8 為 88 與 48 之最大公因數，而 $11x + 6y$ 必須為整數，所以 88 公升與 48 公升可以調配出最大公因數 8 的倍數量的水，整理如下表：

表三

$11x + 6y =$	1	2	3	4	5	6
可調配公升數	8	16	24	32	40	48
$x =$	-1	-2	-3	2	1	0
$y =$	2	4	6	-3	-1	1

當然，上述例子還可以往上調配，而且，對於 x, y 的解法又與輾轉相除法有關。不過，因為篇幅關係就不詳述了。

三、數學的特質

數學是一門非常倚賴邏輯思考與推理的科學，因此一個步驟與一個步驟之間有著相當嚴謹的順序，無法模稜兩可或者大概就好，這也使一般民眾在接觸數學時有距離感而顯得難以親近。因此要懂數學在敘述些甚麼就必須先了解其特性，掌握數學的特質後才方便了解數學之架構，進而能夠對數學產生興趣。

下列有幾個很重要的特質供大家參考。

（一）數學很重視先後順序

大家可以想像五個人打籃球時是一起上場比賽，並無所謂誰先上場、誰後上場，但是打棒球時誰打第一棒、誰打第二棒等等，就可能影響得分甚至整個比賽結果。而數學就像棒球比賽時的打序，誰先誰後是會影響整個理論的成立與否。運算的先後順序是要很嚴格的遵守。

譬如 $2 - 5$ 就不能寫成 $5 - 2$ ，誰是被減數誰是減數不能混為一談。當然 $2 + 5$ 與 $5 + 2$ 就毫無差別，那是因為加法有交換律的結果。

（二）數學的可重複性

當我們喜歡一個偶像時會喜歡多久？我不否認有人會喜歡偶像一輩子。但恐怕大多數人的偶像是與時俱進的。回想一下，小時候的偶像是蝴蝶姊姊還是柯南？中學時可能變成周杰倫或王建民？那現在呢？是哪個企業家還是陳樹菊？因為人是有感情因子存在，所以喜歡的、討厭的、害怕的等等感情因素是會隨著人事時地物的改變而改變。

但數學不吃這一套。小時候 $2 + 5 = 7$ ，長大後 $2 + 5$ 還是 7。工作賺錢很高興時 $2 + 5 = 7$ ，失戀分手難過時 $2 + 5$ 還是 7。臺灣人算 $2 + 5 = 7$ ，美國人算 $2 + 5$ 還是 7。原因何在？人是理性感性交匯的動物，而感性是會因著環境改變而有不同選擇的；但數學是純理性思考，不論情勢環境如何變遷，都不影響其作為理性科學架構下的已知結果。

換一種說法，如果臺灣人算 $2 + 5 = 7$ ，美國人算 $2 + 5 = 6$ ，如此的不可重複，那商家又要如何地買賣做生意呢？

（三）數學的單純性

數學的單純，單純到即使是孩童也有可能處理數學。

舉個例子來說：十歲的小孩子是文學天才？可以寫出驚天地泣鬼神，傳頌後代的曠世文章。十歲的小孩子是經濟天才？知道如何挽救失業率，還可以看懂一堆經濟數據以做出正確判斷。十歲的小孩子是政治天才？處理兩岸外交事務，還懂得人與人之間的爾虞我詐。十歲的小孩子是數學天才？靠自修跳級進入大學，並開始解決某些數學問題。

其實，上述情形都是非常困難的。但是數學理論的思考，因為其純理性判斷，所以不需要人際關係，社會歷練，管理專才；因此，相較於其他學科更適合單純天真的小孩子來思考。而且有時候愈是初學者，其創見愈是可以跳脫一般學者認知已久的盲點。

（四）數學過程與結果並重

假設由甲地到乙地有 2 種走法、由乙地到丙地有 3 種走法，那麼由甲地到丙地不走回頭路的話共有幾種走法？

我們都知道總共有 6 種走法。但數學會接著問：6 種走法是怎麼得到的？因為 $1 + 5 = 2 \times 3 = 8 - 2 = 30 \div 5 = 6$ ，6 的算法千千百百種，哪一種才是對應這個题目的算法？

而依照排列的乘法原理 $2 \times 3 = 6$ 才是正確的算法。所以在求解的步驟中，如果沒有正確的過程，即使算出來答案也是 6 其實都是錯誤的。再者，如果在解題中已經應用了乘法原理的觀念，但答案算成 $2 \times 3 = 5$ ，這個錯誤相較於前者其實是比較輕微的。因為數學的思考重視邏輯性，如何推理到下一步的過程才是重要的。

四、結語

經過以上討論，希望能釐清一般大眾對數學的成見。個人認為數學的確有其困難度，但這種困難度會隨著投入研究的時間增加後而一一被克服的。只要懷有正確的態度與認知，一般人也可以悠遊在數理科學中無限的思考與想像中。

