

數學教學轉化之探討——以一位有經驗教師 之面積初步概念教學為例

黃幸美

本研究根據有效的數學教學之理論，探討一位有經驗教師的圖形大小比較教學案例，分析教師如何使用教科書、數學布題、教學表徵與工具，以及學生解題討論的活動方式，處理教學轉化。研究發現：從樣本教師的數學布題可觀察其課程調整，且教師使用多種來源提供布題，包含：一、自編教學問題且延展教材內容，但是教科書單元設定的學習目標仍為重要的參考來源。二、學生在教學歷程中的學習反應與討論解題表現等形成性評量訊息。口語布題與說明、提供釘板、小白積木、平方公分板等教具操作，以及投影設備，是教師使用以輔助面積教學的表徵與工具。從樣本教師的自編問題，企圖連結學生數學想法與澄清迷失概念的問題提問等師生討論互動，可見其轉化處理。由課程實施中的教學轉化分析，可發現教師的數學學科知識及數學教學內容知識為其轉化處理的重要基礎。

關鍵詞：面積測量、教學轉化、課程實施

收件：2012年4月16日；修改：2012年8月3日；接受：2012年12月1日

An Exploration of Instructional Transformation of Mathematics Teaching: Teaching Basic Concepts of Area Measurement

Hsin-Mei E. Huang

This study examines aspects of instructional transformation based on theories of effective mathematics teaching and a video-taped lesson demonstrated by an experienced teacher for teaching basic concepts of area measurement. These aspects included the use of textbooks, problem posing, the use of instructional representations and aids, and approaches for engaging students in discussion. The findings suggest that the teacher tended to pose problems, which represented curriculum adaptation and tailoring to some extent, by referring to multiple sources. The sources included: a. Problems that the teacher invented coupled with extended materials closely related to learning goals set by the textbook. b. Student problem-solving performance evaluated from formative assessments. The teacher employed instructional representations and aids, verbal language for problem posing, manipulatives (geoboards, 1 cm^3 cubes, and grids), and project-equipment. The mathematics problems discussed for the lesson exhibited the instructional transformation, including the math problems and sub-questions used in an attempt to connect with mathematical thinking of students and to clarify any misconceptions. These aspects aforementioned seemed to connect with the teacher's subject matter knowledge of mathematics and pedagogical content knowledge of mathematics.

Keywords: Area measurement, instructional transformation, curriculum implementation

Received: April 16, 2012; Revised: August 3, 2012; Accepted: December 1, 2012

壹、緒論

教學轉化為課程實施的重心，其要務包含：教學者掌握課程目標，善用教科書或相關教材，評量學生學習成效並因學習狀況作適當轉化與修改（Goodlad, 1979）。轉化處理時常因學習者與教學情境之需求而轉變問題形式，使單元間與單元內的知識概念具連貫性，以促進學生的知識技能學習。從課程實施的歷程分析，教學轉化成為教師、教材（教科書）與學生思考交相激盪的互動歷程，具有動態與變化的性質（Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003）。

課程實施在早期的課程研究並未受重視（黃政傑，1991：395），其在數學課程與教學的研究也相當有限。近年來研究者檢視課程實施成果（例如：Tarr, Reys, Reys, Chavez, Shih, & Osterlind, 2008）及分析數學教學影帶（例如：王品心，2008; Givvin, Jacobs, Hollingsworth, & Hiebert, 2009），研究發現：教育改革成效顯著受課程實施時的教學活動影響，包含：課室環境、教學表徵與工具的使用、教師導引學生投入學習的方法，以及教學歷程中師生問答的語言互動。上述因素為數學課程與教學綱要所強調的教學內涵（例如：教育部，2010；National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Tarr et al., 2008），其亦呼應課程理論學者所闡論的教學轉化處理要素。

在面積測量的課程方面，認識面積的意義（知道所測量的是什麼）、直接比較，透過使用較小的平面（單位平面）將一個封閉的圖形區域的覆蓋活動，以描述平面區域範圍內所占有的量，為面積測量的初步概念（譚寧君，1997；Stephan & Clements, 2003），亦為二至三年級數學課程的重要內容（教育部，2010；NCTM, 2000）。學校的數學課程與教學顯著影響學生學習面積測量的成果（Huang & Witz, 2011），因此，探討有經驗教師如何教學轉化以導引低年級學生建構面積初步概念，有助瞭解

面積教學的重要問題討論應包含哪些內容，以及如何澄清學生迷失概念以建構測量概念與運算技能。此教學實務導向的研究成果，對師資培育及教師數學教學專業知能成長，具有參考意義。

課程研究學者 Goodlad (1979: 24) 認為描述性的概念結構，需植基於觀察與實徵資料的累積。因此，本研究根據數學課程理論及有效的數學教學研究與文獻，以 1 個二年級面積初步概念的教學案例，分析 1 位有經驗教師的教科書使用情形與教學轉化處理，期以從案例教師的布題、教學歷程與內容及活動形式等層面分析，論述教師如何使用數學教科書及分析其教學轉化的歷程。本文主要探討兩個問題：

(一) 教師使用什麼數學問題、教學表徵與工具，轉化教科書文本以進行面積測量初步概念的教學？

(二) 在導引二年級學生學習面積測量初步概念歷程中，教師如何使用教科書與學生解題表現作教學轉化？

貳、理論架構

一、課程實施與教學轉化的意義

所謂課程實施即將課程付諸行動以導引學生達成所欲達成的學習結果 (黃政傑, 1991)，而且整個課程實施的歷程，實為教學專業知能的轉化運作。教師從知道須教什麼、妥善安排教材內容的順序、形成教學的問題、使用教學表徵與工具，將學科知識與教學知能，轉變成切合學習者能力與學習特質的教學行動 (Shulman, 1987)。

在數學的課程與教學領域，上述課程實施歷程的教學轉化處理目標，亦符合當前東、西方國家的教師對有效的數學教學之共識——學生是課室主角，而教材內容是教學要素，教師的教學需讓學生有意義地學習數學，理解概念、使用語言與符號溝通想法，且能應用數學知識技能於解決生活問題 (Cai, Perry, Wong, & Wang, 2009; Givvin et al., 2009)。由

此可見，教學轉化的目標在於轉變教科書文本內容，以使學生可學習、有意義的理解概念與知能成長。

二、教學轉化的處理內涵

從課程實施於課室教學層面而言，將靜態的教科書文本內容（課程）透過課程實施，產出學生的知識技能學習成果（教學成果），中間的處理即為教學轉化。Shulman（1987）、Wilson、Shulman 與 Richert（1987）、Drake 與 Sherin（2006）指出教師的轉化處理包含下列 4 項要素：（一）批判的詮釋（critical interpretation）：教師一方面根據學科知識，瞭解課程內容，檢視單元內容是否適合學生先備知識、主題內容的概念與技能及其是否符合課程綱要與目標。此批判影響教師決定文本內容如何進行教學，以及預期學生的學習反應。（二）表徵（representation）：此為傳達課程內容的方法，教師根據單元內容的知識性質，以語言或文字提問相關問題、圖形展示、活動、例子、電子輔助工具與軟體等方式，擇取最能激發學生注意與思考的方式，傳達課程內容。（三）改編（或調適）（adaptation）：為切合學生的一般性特質與需求而改編課程，例如：因應學生的能力與先備知識、迷失概念等情形之需要，改變使用的陳述語詞、增加（或刪除或改變）教科書的問題、學生活動的方式（全班討論或分組合作或個別學習）、時間分配，以適合學生學習。（四）剪輯（tailoring）：為切合班級裡特定學生的需要而剪輯課程內容，例如：針對特定學生的迷失概念，修訂問題複雜度與解題步驟，或提供適合個別學生的問題與作業。而且，表徵、改編與剪輯處理，也常根據教師於教學歷程中對學生所施行的形成性評量結果，而做調整。由此可見，教學轉化重視因應學生的學習狀況而作切當的調整，以導向課程目標，此也彰顯教學的彈性（flexibility）特質。總之，教學轉化處理在於了解課程內容（包含：課程目標、基本能力與各領域的能力指標），將課程內容

轉變成教學問題與活動，並根據學生的學習成果評量，再調整課程與教學問題。而且，上述歷程環環相扣。

此外，Cohen、Raudenbush 與 Ball (2003) 發現：課程實施時，教師、教材與學生三方面建構出交相影響的動態關係，因此，探討教學轉化應從師生互動觀點作討論。亦即，在教學環境脈絡下，教師對課程的定義與內容之傳達、學生的學習表現，教與學兩方在教學歷程中產生交互作用。前項（教師對課程的定義）指教師瞭解課程目標、熟悉課程內容，將課程轉變成教學活動、問題討論與作業，使用教學策略讓學生可以理解（課程轉化處理）；後者（學生學習教師所提供的教材）指學生則需在教師所提供的教學情境，投入思考與操作活動，解決作業問題。從課室可觀察的教學活動與師生討論互動之語言與行為分析，教師的教材處理亦可從一些教學行為觀察而得，包含：教師使用哪些教學問題（或作業）與教學工具、師生討論解題的方式（全班或小組討論）、教學表徵與工具使用（例如：繪圖、手勢與肢體動作等），以及學生的反應行為（例如：解題的正確性、迷失概念等等形成性評量）。上述可觀察的行為，也是學者們探討教師課程轉化所關注的變項（例如：Drake & Sherin, 2006; Shkedi, 2009）。

三、數學教學轉化的國內、外相關研究

檢視國內外學者對於課程實施之探討，或有從教科書使用，分析教師轉變文本內容與教學（例如：Freeman & Porter, 1989; Remillard, 2000, 2005; Stodolsky, 1999）；或有從教師知識與專業發展的評鑑觀點，討論教師的學科與教學知識、如何使用課程及轉化教師知識於提高學生的學習表現（例如：Hill, 2004; Peressini, Borko, Romagnano, Knuth, & Willis, 2004）；或透過課室觀察與教學錄影之影帶分析，探討教師如何使用教材、師生的問題解決討論等教學行為，闡論教科書使用方式（例如：王品心，2008；孫德蘭，2006；Cohen et al., 2003）。上述研究，雖然未直接

分析數學的教學轉化，但是其所強調的教科書使用方式、教師課程實施歷程中如何提問問題、說明概念，以及評量學生的學習成果並進一步調整教學，皆提供建構教學轉化理論之基礎。

（一）教師的教科書使用與教學內容的關係

統整 Freeman 與 Porter (1989)、Stodolsky (1999) 根據教師於教學歷程——起始、發展、學生解題、回顧與複習階段，使用套裝課程（教科書內容、教學指引、習作練習）而教學的依循程度高低，可區分為 3 種教科書使用模式：1. 大部分依循教科書教學：教師的所有講述內容與學生讀題，皆直接引自教科書文本。2. 部分依循教科書：教師保留教科書的單元與順序安排但是修改部分文本內容，教學內容並非直接引述或涵蓋教科書所有問題。3. 改編教科書：改變教科書呈現的文本結構與單元順序，教學內容與問題皆非直接引自教科書文本。亦即，教學者改編教科書文本，自編教材。

Freeman 與 Porter (1989) 及 Stodolsky (1999) 等學者也發現，教師依循教科書的程度固然不同，有趣的是，即使依循程度高的教師，其教學內容亦非全然與教科書文本一致。而且，即使 2 位教師使用教科書的版本相同，他們在概念討論、運算解題與應用的時間，仍存有差異；只是依循教科書程度高的教師，其在教學內容所強調的主題與其教科書文本所強調的主題，兩者相關較高。同時，教師所呈現的教學問題，也常考量學生的學習能力與反應而調整 (Freeman & Porter, 1989)。

上述研究與論述顯示教師使用教科書的類型及其在課程轉化議題上的意義。然而，依循套裝課程教學的程度與轉化處理有關，但未能完全解釋課程轉化的處理機制，因為教師在教學轉化歷程中的決定，乃受教師教學專業知能及學生的學習表現影響 (Cohen et al., 2003; Drake & Sherin, 2006; Peressini et al., 2004)。

（二）教師的教學專業知能與教學轉化的關係

Shulman (1987) 與 Wilson 等人 (1987) 認為轉化屬於教師的教學內容知識 (pedagogical content knowledge)，而轉化課程的知能，實則植基於教師的教學專業知識——學科領域知識與教學知識的理解。教師的教學專業知能影響其教學考量——如何在有限的教學時間與環境資源，選擇課程的重要內容、提供教學問題、關鍵性的提問以澄清學生的迷失概念、適當地使用教學表徵與工具等教學決定 (Drake & Sherin, 2006; Peressini et al., 2004; Shkedi, 2009)。

就數學教學轉化而言，數學教科書雖是大多數教師教學的主要教材 (Remillard, 2005; Tarr, Chavez, Reys, & Reys, 2006)，但是教師的數學知識及對數學課程與教學的知識，乃潛在影響其轉化處理 (Penuel, Fishman, Yamaguchi, & Gallagher, 2007)。例如：教師具備豐富的數學學科知識與教學知識，也認知問題解決討論對於概念理解的重要性，則能針對單元主題的內容，說明與詮釋重要概念與提問關鍵性問題，一方面喚起學生先前的舊經驗，準備連結新課程的內容；另一方面，引發學生注意數學問題、從認知衝突的模糊中澄清概念。

從教師教學專業發展與評鑑的觀點 (Hill, 2004; Penuel et al., 2007)，教師的教學專業知能可以從課室教學實務，作系統性地觀察評量。就教學實務所觀察的核心類目，亦為教學轉化內涵，例如：將靜態教材轉變為教學問題、活動或作業，結合語言、表徵與工具使用等師生解題討論等可觀察的行為。

（三）教師與課程、學習者的動態互動關係與轉化行為分析

Cohen 等人 (2003) 及 Stein、Remillard 與 Smith (2007) 認為在教學情境脈絡下，教師與教科書、學習者的互動關係與學生於教學現場的反應，也是影響教師如何實施課程的來源。此種動態特性的展現，當教師察覺學生存有迷失概念，因應學生的理解程度與解題狀況，調整其教學

問題的提問、說明、討論時間長度，以及提供、檢核學生的作業演練，尤為明顯。

統整國內、外學者在課程實施、教師知識與專業發展、教學影帶之分析研究，以及教師—教材—學生互動之觀點，探討數學課室的教學轉化處理，需兼顧教師如何使用教科書，以及如何轉化教科書文本成為數學問題以導引學生投入數學討論。此外，教學工具的使用與活動方式，其為輔助轉化教學層次，包含：教師配合教學問題所使用的表徵、教具與教學工具，以及討論解題的活動形式等，皆不可忽視。教學表徵與工具指教師選用利於學生理解課程內容的語言、肢體動作、圖像、教具操作等傳達知識的方式。活動方式指教師用以輔助學生投入問題解決思考的活動方式，例如：教師獨自講述或進行小組解題討論等師生互動行為。上述輔助層次的類項，其性質雖然非屬於教師解讀與轉變教科書內容，但是其乃教師在計畫與決定課程實施時，判斷可以讓學生有效學習與達成教學目標之教學輔具與方法選擇。

參、研究方法

本研究參考王品心（2008）與 Stecher、Hamilton、Ryan、Robyn 與 Lockwood（2006）及 Stigler、Gonzales、Kawanaka、Knoll 與 Serrano（1999）的教學錄影帶研究之分類與編碼與建議，觀察 1 位樣本教師轉化教科書的單元內容的教學轉化處理，並分析教學歷程中師生互動的語言與行為。此外，為進一步瞭解提供教學影帶教學的樣本教師的數學教學想法，研究者並訪問樣本教師對此課程實施的教學想法，將晤談資料轉錄成逐字稿，以輔助分析。

一、教學影帶之樣本來源

本研究所分析的教學影帶樣本，取自學者李源順建構的數學教師知識庫——動態教學案例¹於 2001 年 12 月 13 日拍攝的一份國小二年級數學教學錄影資料，教科書的單元內容為南一版國小數學第三冊第七單元——「圖形和大小」（南一書局國小數學教科用書編撰委員會，2000）的第二節的後半段與第三節課內容，教學時間為 57 分 10 秒。教學演示之樣本教師為 1 位臺北市國小教師（22 年教學年資），其亦為數學教學輔導團的成員。

本研究所分析的教學轉化，乃針對影帶裡樣本教師的教學內容，對照其所使用的教科書單元文本的第二節後半段與第三節課內容作探討。主要數學內容為面積初步概念，包含：（一）利用不同數量的全等圖形板拼排圖形，然後比較大小；²（二）什麼是面和面積，以及（三）利用平方公分板實測圖形的面。³上述單元內容相對應的學習目標為：（一）利用不同數量的全等圖形板拼排圖形，並比較其大小；（二）面積的初步認識、直接比較，以及利用平方公分板量出圖形的大小，實測圖形的面。⁴教學影帶的二年級學生的先前學習經驗包含：認識基本圖形、圖形板（正方形與正三角形）與其外框形狀相同、利用圖形板拼排圖形與比較大小、什麼是面與面積、面的直接比較、覆蓋平面的技巧，以及使用個別單位覆蓋並計數數量與比較大小。

檢視本教學影帶所使用的教科書單元之文本內容，此單元編輯乃依據 1993 年國民小學課程標準（教育部，1993）設計；非依九年一貫課程綱要（教育部，2010）設計。經對照 1993 年課程標準、九年一貫課程綱

¹ 請參閱 <http://www.mtedu.tmu.edu.tw/tvgoo.asp>

² 參見教科書單元教學指引之第二節的第二個活動內容，以及其所對應的活動目標 2-2（南一書局國小數學教科用書編撰委員會，2000：111）。

³ 參見教科書單元教學指引之第三節活動內容，及其所對應的活動目標 3-1; 3-2; 3-3（南一書局國小數學教科用書編撰委員會，2000：112-113）。

⁴ 參見教科書單元之學習目標 2 與 3（南一書局國小數學教科用書編撰委員會，2000：110）。

要數學學習領域的基本能力指標（教育部，2010）及教科書單元學習目標（參見附錄 1 表 1），此單元學習目標亦符合與九年一貫課程綱要之基本能力指標。

二、數學教學轉化的要素與分類編碼

本研究在數學教學轉化要素分析方面，乃根據數學課程與教學之研究（例如：王品心，2008；Stigler et al., 1999）、教科書使用（Freeman & Porter, 1989；Stodolsky, 1999；Tarr et al., 2006）、Wilson 等人（1987）及 Drake 與 Sherin（2006）有關教學轉化的論述，建構教學轉化觀察的核心類項，包含：數學問題與內容、教學表徵與工具使用、教科書使用方式及問題解決討論活動方式，以使資料詮釋反映有效的理論基礎。

在數學問題與內容方面，指教師所提供的數學布題及相關的解題活動討論。課室教學歷程中的數學布題、作業及其解題所需的數學概念與技能之教學，為發展學生數學認知與解題思考的重要教學題材（Henningsen & Stein, 1997；Tarr et al., 2006），因此，教師的數學布題與解題討論，也是轉化課程目標與教科書文本的一種表現。本研究依數學問題的概念性質、解題所需的知識技能及問題之間的關聯性，區分為主要問題、次要問題及與單元無關的討論。（一）主要問題：指教師所布的問題包含該單元的學習活動與目標所需的概念與程序性技能，問題解決需求在於建構該單元預設的學習目標。（二）次要問題：指教師於提供主要問題後，因應學生回答與解題歷程的表現情況，再提問與主要問題具關聯的次要問題與說明，次要問題也常依附於主要問題。因此，次要問題與主要問題相關，但不包含解題討論中要求學生說明理由的「為什麼」、「如何」解題的提問，以及要求展示計數與運算的問題。（三）與單元無關的對談：討論的內容與課堂之前所提供問題的主題（或運算方式），彼此毫無關聯。

在教科書使用模式方面，根據樣本教師的數學布題內容依循教科書文本內容的程度，區分成以下 3 種：(一) 大部分依循教科書文本：當主要問題總數等於或超過 70% 以上的問題為直接取自教科書問題，歸於此類項。(二) 部分依循教科書文本：當主要問題直接取自教科書的總數介於 69% 至 30% 時，則歸於此類項。(三) 教師自編問題 (教材)：改變教科書單元文本的內容與順序，此類亦包含：在不改變單元主題的情況下，重新改編文本內容，包含提問的問題與提供學生演練的作業。當主要問題直接取自教科書的總數低於 30% 時，則歸於此類項。

在教學表徵與工具使用方面，指教師於數學布題及解題討論活動使用來表徵數學內容的方法，包含：語言表達、圖示、教具、板書、教學輔助工具等。在討論活動方式方面，根據學生於討論解題時是否分組討論或全班討論，或教師點請個別學生作解題展示與說明，來描述解題討論的活動方式。

由於愈受教師重視之教材，教師所花的教學時間也愈長 (Freeman & Porter, 1989; Stodolsky, 1999)，因此，在教學討論歷程中，分析教師在數學問題討論、歸納及與單元無關的對談所花費的時間，並比較其時間長度，可瞭解教師轉化教材內容時所關注的類項。本研究在教學討論片段的描述與教學時間計算方面，乃根據主要問題的性質與概念結構，以主要問題的完整討論為單位，區分討論片段，繼而分別計算每個片段的討論解題時間、作歸納的時間，以及與單元無關的對談時間。

三、教學轉化的資料處理

在轉化分析的資料處理方面，包含 3 個程序：(一) 教學影帶樣本的轉譯處理：先由 1 位小學教師研究生為分類人員，將教學影帶轉譯成逐字稿，再經第二位分類人員，其亦具小學教師資格，針對教學歷程中所有細節 (例如：教師手勢動作、眼神注視的方向等)，對逐字稿初稿做更精細校對與補充。(二) 於分析課程轉化處理時，研究者及 2 位分

析員，獨立對照教學演示所使用的教科書單元與指引，根據教師所布數學問題的結構與物件、概念性質，區分問題討論片段。2 位分類者根據分類項目定義與分類原則，分別對教學影帶與逐字稿，依上述各類項編碼細則做編碼與分類，繼而分析分類結果一致性。

肆、結果與討論

2 位分類人員在教科書使用模式、數學內容（主要問題、次要問題及無關數學的討論）、教學表徵方法與教學工具的使用、活動模式（小組或全班討論），分類結果之相互同意程度為 95%-100%。

分析教學影帶所討論的數學問題與解題活動，包含 4 個討論片段：（一）比較教師所圍出的 2 個圖形之大小；（二）比較由學生所圍出的 2 個圖形之大小；（三）介紹平方公分板、小白積木 1 個面的面積與 1 平方公分、製作 5 平方公分的圖形；（四）以教師及學生所圍出的圖形，討論單位面積 1 平方公分的大小。而且，所有的教學討論方式，皆為小組討論、教師點請個別學生解題及全班答題方式，交替進行。由於討論片段（一）與（二）的主要問題皆為「比較兩個圖形的大小」，後文亦將整合討論。茲將教師在各討論片段的數學布題、主要問題及討論內容摘述、歸納、與單元無關的對談、上述各類項的教學時間，以及教學表徵與教具使用情形，呈如表 1（及附錄 1 表 2）所示。教師於各教學討論片段的轉化處理，如下所述。

一、「比較兩個圖形的大小」之教學轉化處理分析

教師根據其數學學科知識——面積的意義（面積乃指平面圖形的內部區域）、平面單位的計數及圖形面積的間接比較概念，提供 2 個主要問題讓學生思考如何透過正確的計數圖形內平面單位數量，對 2 個無法直接比較的圖形面積做比較。

表 1 教師在四個教學討論片段的數學布題（主要問題）、教學時間及表徵與教具使用

討論 片段	數學問題及討論內容摘述		教學 時間	教學表徵與 教具使用
一	簡要回顧上節課之活動		43 秒	投影機、釘板、老師所圍出的圖形
	主要問題討論	教師自編問題——教師自製 2 個圖形，並要求比較大小 1. 計數 3x5 長方形、4x4 正方形內格子數 2. 計數圖形面積時，應數圖形內的點子數或方格子 3. 單位面積的累計加總	10 分 15 秒	
	歸納	1. 計數面積應計數小方格並做加總計數 2. 根據 2 個圖形面積的計數結果，比較大小	47 秒	
	與數學內容無關的對談			
二	主要問題討論	教師自編問題——援引學生製作的圖形做圖形比較大小 1. 3x6 長方形與三角形（底 8 高 4）圖形內未滿 1 方格的計數方式 2. 比較圖形大小的數量單位 3. 根據 2 個圖形面積的計數結果，比較大小	7 分 12 秒	投影機、釘板、老師所圍出的圖形
	歸納	面積的單位描述	50 秒	
	與數學內容無關的對談		2 分 27 秒	
三	主要問題討論	教師自編問題及討論習作問題 1. 展示介紹平方公分板； 2. 透過觀察小白積木、描繪、覆蓋等操作； 3. 介紹 1 平方公分的面積單位、平方單位的累加； 4. 介紹測量單位的加法性； 5. 應用計數長方形面積，計數 1 個多邊形的面積。	27 分 8 秒	1 平方公分的小白積木、平方公分板
	歸納	無	50 秒	
	與單元無關的對談		48 秒	

表 1 教師在四個教學討論片段的數學布題（主要問題）、教學時間及表徵與教具使用（續）

討論片段	數學問題及討論內容摘述		教學時間	教學表徵與教具使用
四	主要問題討論	教師自編問題——援引學生製作之圖形 1. 計數 3x6 長方形及教師展示的 1 個多邊形面積 2. 1 平方公分的大小、圖形內方格子與 1 平方公分的比較	5 分 3 秒	投影機、釘板、學生所圍出的圖形、塗色的 1 平方公分方格、數學課本
	歸納	1. 1 平方公分的正方形邊長與面有多大 2. 圖形面積的單位	1 分 27 秒	
	與單元無關的對談		30 秒	
總教學時間			57 分 10 秒	

教師口述布題，要求比較 2 個不同圖形（不能直接比較的 2 個圖形）的大小。第一個主要問題為比較教師提供的圖形大小——圖形內的單位小方格皆為完整的小方格，討論時間約為 10 分 15 秒；第二個主要問題則援引 2 組兒童在釘板上所圍出的圖形——圖形內包含不完整的小方格，要求比較大小，討論時間約為 7 分 12 秒。上述問題皆非取自教科書文本，但是其解題所需之概念、程序性知識及解題目標，符合教科書的單元內容與活動目標。同時，2 個主要問題的解題難度不同，布題順序為先簡易（計數與比較包含完整方格的圖形面積）而後複雜（計數與比較包含完整與不完整方格的圖形面積）。在教學表徵與工具的使用方面，教師以口語與手勢解說題意，輔以投影機、釘板與圖形展示。

在次要問題的提問方面，教師常針對學生的回答與解決主要問題的表現，提問後續的相關問題，或援引學生提出的答案或迷失概念（錯誤答案），提問次要問題以進一步激發學生批判錯誤的答案與說明理由，企圖幫助學生澄清面積概念與計數方法。例如：在第一討論片段，學生計數釘板上所圍出圖形的面積，產生計數圖形內的「點子」而非「方格

子」數量的困惑，教師進一步提問「計數圖形面積時，應數圖形內的點子數或方格子數」與討論，要求學生說明數學想法，呈如例隅一所示。

G2037T（老師）：「爲什麼？妳怎麼知道正方形比較大？」

G2045T（老師）：「有人說什麼，有人說『不數點點，數格子』。」

G2060T（老師）：「有，那剛才她是數方塊，你是數點點，到底我們應該數點點，還是數方塊呢？」

此外，在第二討論片段，針對某位學生將圖形內未滿 1 方格者皆計數爲 1 個方格子，教師亦提問次要問題，要求全班討論不完整格子的計數方法。由此可見，教師對於澄清學生迷失概念的重視。教學歷程中學生所產生的迷失概念，亦成爲教師後續布題與討論的問題來源。

此片段的教學反映出教師轉化其數學學科知識，透過布題、表徵與工具，討論圖形面積的間接比較——欲比較 2 個圖形的內部區域之大小，可使用相同的單位作覆蓋與計數，圖形內部範圍所包含的單位數量愈多，面積愈大；當圖形內包含 2 種單位時，⁵可以透過切割與重新組合圖形（組合不完整的單位成完整的單位），然後計數其單位數量與比較大小。

二、「百格板、1 平方公分與製作 5 平方公分的圖形」之教學轉化分析

從表 1 可見，介紹面積的標準單位「平方公分」與「平方公分板」、製作指定大小的圖形，爲此片段的重要問題。教師使用 1 立方公分小白積木（具體實物）及統合視覺、觸摸、繪製等多重感官與操作活動，提問「小方塊是否有面」、「有多少個面」與「面是什麼形狀」等問題，導引學生從具體物的觀察與觸摸（小白積木的面是什麼形狀）、描繪與將 1 平方公分的面塗色，以認識其半具體表徵，進而形成 1 個平方單位的量感（1 平方公分有多大）。

⁵ 完整（1 個方格）與不完整 1 格（半個方格）。

比較上述的數學布題與教科書文本內容——「什麼是面和面積」(南一書局國小數學教科用書編撰委員會, 2000: 112), 可發現: (一) 教師改變教科書文本——「使用小三角形為面積單位, 貼滿 1 個長方形的面」、「直接比較 2 條手帕的面積」, 轉化為觀察、觸摸與描繪 1 立方公分小白積木的 1 個面, 以及將小白積木覆蓋在先前於數學本子上所描繪與塗色的面 (1 平方公分) 上, 繼而介紹 1 平方公分。教師介紹與使用小白積木的解題討論活動, 乃為與面積測量相關的延伸內容。同時, 教師要求學生操作「將小白積木覆蓋在所描繪與塗色的面 (1 平方公分) 上」, 觀察塗色的面與小白積木的 1 個面完全疊合, 確認所描繪 (或塗色) 的方格區域與小白積木的 1 個面一樣大, 此操作與教科書文本的「疊合兩條手帕, 直接比較大小」, 具有異曲同工之意義。(二) 教師要求學生描繪小積木的 1 個面並塗色塗滿此正方形內部的區域, 期以透過描繪 1 個封閉的圖形 (正方形) 並塗滿其內部區域, 認識 1 個圖形面積乃指「封閉圖形內部的區域」。此與教科書文本要求在長方形與正方形內部塗滿顏色的活動相似。(三) 教師要求學生使用 1 平方公分為單位, 製作 5 平方公分的圖形, 透過圖形的製作讓學生認識面積單位的加法性質。此亦為展延的問題。(四) 在教學表徵與工具使用方面, 教師援引學生繪製的圖形、平方公分板與 1 立方公分的小白積木的使用, 以口語說明、導引學生觀察與操作, 介紹 1 平方公分的定義, 以及使用它為單位來測量與計算圖形的面積。

針對本片段的教學轉化處理, 其主要問題並非依循教科書文本內容, 教師所強調的數學學科知識, 除了面積的意義以外, 尚包含: 認識常用 (普遍) 單位——1 平方公分的定義、圖形表徵及其語詞, 並複製此單位以測量 1 個圖形內部區域。教師的教學考量乃希望讓學生透過多元的感官經驗與操作, 認識面積的普遍單位, 方能有意義地理解面的大小比較。誠如教師在晤談中表示:

我會強調面在哪裡的原因是，第一個：我們知道面積就是這個周界所圍起來的區域的面。可是我們不能用這樣的話跟小朋友講，因為後面要形成面積這個概念，所以要在前面理解我現在講的是哪一個區域。……「面」在哪裡要先確定，才能夠去談「面積」。……這個孩子對於「面積」是沒有概念的，所以這些經驗就告訴我說：所以我們在一開始二年級，要他們感知那個面，以及我要跟你談誰比較大的時候，是在比什麼。

此外，教師於本討論片段亦擷取數學習作問題（參見附錄 1 表 2）作布題，讓學生比較圖形的面積，並建議使用平方公分板覆蓋在圖形上，以計數格子。此主要問題及其次要問題在於讓學生進行 2 圖形面積的間接比較，以及利用平方公分板為工具解題，為實施教科書的教學建議「用平方公分板實測圖形的面」（南一書局國小數學教科用書編撰委員會，2000：113）。教師於學生製作 5 平方公分圖形時，行間巡視檢視學生的製作結果與解決習作問題的表現，提醒學生使用「平方公分」的面積單位及修正錯誤單位「公分」，繼而擷取與展示學生製作的圖，提問次要問題「圖形不同，面積各是多少」，期以導引學生注意等積異形——「圖形不同，但是面積可能相同」的現象，例隅如下。

G2283T（老師）：OK 了，現在這麼多的圖形，圖形的樣子，長得一不一樣？

G2284E（全班）：不一樣。

G2285T（老師）：面積一不一樣？面積都是多少啊？

三、「單位面積概念的澄清」之教學轉化分析

從表 1 可見，教師援引先前的主要問題是——學生圍出的圖形，再討論圖形面積的計數方法及平方單位的使用。2 個主要問題皆為教師自編，目的在於檢視學生是否能使用平方公分描述圖形面積，及提供具批判思考性質的問題，讓學生應用先前所觀察與認識的 1 平方公分，討論附有格子的圖形其方格子是否都和 1 平方公分一樣大。

為導引學生檢視外觀相似的方格大小，教師再使用先前塗色的 1 平方公分小方格與圖形內的正方形方格做比較，提醒學生注意：雖然 1 平方公分方格與圖形內的方格，兩者皆為正方形，但是大小不同。繼而進一步強調：使用「方格」為單位來描述 1 個圖形面積時，其所描述的單位大小，未必都為「1 平方公分」。

分析此討論片段的教學轉化處理，教師使用口述布題及先前使用過的工具與教具作輔助，除了點請個別學生回答問題以外，多進行全班討論。同時，教師根據其對學生學習數學可能發生的誤解現象之瞭解——根據圖形的直觀而誤判面積——提醒學生不宜單純依據圖形外觀判斷平面單位的大小。

四、教學時間的分配

從表 1 可見教師分別以約 17 分 27 秒及 1 分 37 秒討論與歸納圖形的大小比較；以約 27 分 8 秒介紹面積單位（1 平方公分）；以約 5 分 3 秒及 1 分 27 秒分別討論圖形內方格的計數、單位描述與歸納。雖然教學歷程中包含約 3 分 45 秒與單元無關的對談，教師的數學討論與歸納占整節課教學時間的 93.4%。從教學時間的分配，亦可發現：教師強調的數學學科知識為「面積意義與單位的認識」與「如何比較圖形的大小」（直接與間接比較）。

統整上述 4 個討論片段的內容分析，在教科書使用模式方面，教師提供了 10 個數學主要問題，其中 7 題為自編問題（70%）、2 題取自學生的解題表現（20%）、1 題取自教科書所附的習作（10%）。因此，教師的數學布題乃根據教科書單元的教學重點，教師個人對學生學習面積初步概念、可能產生的誤判與迷失概念的認知，自編問題並加入面積概念相關的展延問題（例如：使用 1 平方公分製作給定面積的圖形），結合口語說明與面積測量的教具操作（例如：釘板、小白積木、平方公分板），作為傳達面積概念的表徵工具。另一方面，教師綜合小組解題討論、全

班討論、點請個別學生說明展示數學想法，以及行間巡視學生的答題表現（例如：製作的圖形）等形成性評量之訊息，成為提問後續的次要問題與解說概念的來源，導引學生認識圖形的面積意義及單位計數。

在數學問題內容方面，教師布題的來源展現多元性，除了符應教科書單元學習目標的自編問題，以及教科書習作問題以外，尚包含 2 個來源：（一）學生的解題表現或迷失概念，為教師援引討論或進一步澄清概念的問題來源。例如：學生的圖形製作、迷失概念——「計數圖形內的格子或點點」、「圖形內不完整格子的計數方法」及「附有格子的圖形，圖裡的方格子是否都是 1 平方公分」等問題。（二）教師認為重要且具概念展延的相關問題，例如：1 立方公分的小白積木及藉學生製作的 5 平方公分圖形，提醒學生注意「圖形看起來不同，但是所包含的格子數量相同」的等積異形概念，這些問題皆非教科書文本內容。

從上述布題來源，可見教師的布題乃植基於數學學科知識及對該課程單元的教學重點之瞭解，此現象亦可從學生於討論過圖形大小比較與 1 平方公分的介紹後，被要求解決習作上的問題「兩圖形大小比較」窺知。由此可見，教師在課程實施歷程中，教科書是教學內容的重要參考來源（Stodolsky, 1999）。本研究發現樣本教師在實踐單元目標導向下，自編教學問題與補充內容，此也符應孫德蘭（2006）的研究結果，而且有經驗與資深教師比初任教師傾向改編教材。

此外，從附錄 1 表 2 可見教師布題與教科書之關聯性、師生與生生之間的解題討論，以及次要問題的內容，顯示：教師、教科書、學生，三者之間在教學轉化具有關聯性，也呼應教學互動理論的觀點（Cohen et al., 2003; Stein et al., 2007）。此動態關係可見之於教學現場——教師提問次要問題以連結學生數學想法與澄清迷失概念，並從學生的回答與正確性，檢核學生的理解，上述的討論互動展現 Cohen 等學者所闡述的導向有意義數學學習之問答討論特性。此種課程實施歷程中產生的動態互動與轉化處理，有時並非盡包羅於教學前的計畫。呈如樣本教師針對學生

點數圖形內點子的迷失概念，表示：

我當時只是純粹的，第一它是方格，因為我想借助於它的方格，帶到下一階段就是標準單位的計數，那只是利用方格紙或是釘板的東西。但我其實也沒有想到學生會數點，這是我過去教學經驗裡沒有察覺的。

教學者能察覺學生的解題困難與迷失概念，需對學生學習某數學概念之理解能力、策略與解題困難等有所認知（Remillard, 2005）。從教師提問的次要問題、提醒單位的使用，以及「雖然圖形內的方格子皆為正方形，但是其大小未必為1平方公分」等等教學，顯示：本樣本教師認知學生的面積初步概念學習情形，覺察學生容易產生混淆概念之所在。

針對上述教師的布題、教學表徵與教具及學生學習反應分析，從三方面提出討論：首先，教學指引建議使用正方形或正三角形紙片為單位面積拼排圖形（南一書局國小數學教科用書編撰委員會，2000），要求學生使用圖片（全等圖形的具體實物）為單位面積並組合圖形，再數算單位面積的數量，以認識「計數圖形面積為累加圖形內部所鋪蓋的單位面積數量」。上述建議常可見之於面積概念的初步教學（例如：Schifter, Bastable, Russell, & Woleck, 2002）。相對地，本樣本教師使用釘板及計數其所圍出圖形的格子數，當學生觀察釘板上的圖形時，需將釘板內的點子作心理抽象化處理——能看到釘板上的「點子行列」與「4個點圍成1個小方格子，每個小方格子的大小相同」，並能認知釘板所框圍出來的圖形（圖形內包含全等的正方形小格子），與使用圖片拼排的圖形具有類比關係。上述的心理表徵之建構，猶如將「具體的圖片拼排圖形」抽象化並類比釘板之圖形表徵，其所需的認知處理比較複雜。此複雜度亦可從本影片的學生產生的迷思（計數圖形內部的點子數量）窺知。

雖然學者建議提供釘板或點子圖，以幫助具有面積初步概念的三至五年級學生作面積測量的歸納推理教學（例如：Barody, 1989）或面積公式的推理（Burns & Brade, 2003），但是比較「直接使用面積單位組合圖形」的操作與「釘板圖形」的辨認，兩者的複雜度不同，對低年級學

生處理圖形大小比較時的理解難度是否存有差異，需要實徵研究進一步檢驗。

第二，教師使用 1 立方公分的小白積木，介紹積木的其中 1 個面是 1 平方公分，並以布題要求學生描繪 1 個面、塗色與覆蓋檢驗此小方格是否為 1 平方公分，此教學內容為：介紹 1 個面積的單位，並用以複製並檢驗所描繪的面大小。上述教學符合低年級幾何教材的「運用各種工具和方法繪製基本圖形」及以觀察、複製與描繪實物形體或其表面（劉好，1994：98）。在面積教學的教具使用方面，除了平方公分板以外，邊長 1 公分的正方形紙片（方瓦）直接可表徵 1 平方公分，亦建議於介紹面積單位時使用。相對地，1 立方公分的小白積木為學生熟悉的教具，此積木為立方體，較容易拿取操作，亦常被使用於介紹中年級學生認識「1 平方公分的面」（Huang & Witz, 2011）。值得注意的是：使用小白積木介紹「1 平方公分的面」時，教師需強調積木其中的 1 個面，而非整個立體，以避免學生對「1 平方公分」與「1 立方公分」產生混淆。另一方面，使用 1 立方公分積木的 1 個面來介紹 1 平方公分，對低年級學生是否可能產生立體與平面的轉換疑惑，值得後續研究做探討。

此外，教師上述的教學問題處理並非如教科書建議——「使用平方公分板覆蓋在圖形上，並計數格子數量，兩者呈現差異」。使用平方公分板覆蓋與計算圖形內的格子數，學生可以看到圖形上所覆蓋的格子並直接計數具體的圖片數量，以報讀格子數量；但是本樣本教師傾向要求學生計數釘板上所圍出圖形內的方格子數量，強調小白積木的 1 個面為 1 平方公分及其面大小之確認。因此，教師布題與教科書內容呈現差異，此差異是否有效助益學生對於圖形大小與對圖形面積的初步概念之建構，亦需後續研究進一步探討。

第三，面積保留概念是學習測量的重要認知（Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960），學生需能瞭解某圖形的面積大小，不因位移或方向改變而改變其大小。此概念的發展與圖形轉換及其面積量的不變性之學習

關係密切（譚寧君，1998）。Piaget、Inhelder 與 Szeminska（1960）的研究發現，7 至 8 歲的學生方能瞭解圖形經切割再組合，其面積不會改變，學生的面積保留概念的發展，約於 7 至 9 歲完成。在本研究所分析的教學影帶，樣本教師在第二討論片段提供的主要問題，涉及圖形內包含半個格子的情境；如何將半格位移，以與另一半格組合成 1 格，再計數格子數量等討論。欲解決上述問題，學生需具備面積保留概念；但是未見教師檢核學生的面積保留概念或提出此概念的相關討論。導致上述疏漏現象的原因可能包含兩方面：第一，本研究分析的影帶為此單元教學的後半段，樣本教師於前半段的面積個別單位測量教學時，以及於此後半段教學中，有學生能展示如何「將 2 個半格組合成 1 個格子」，觀察到學生的保留概念。第二，在教學時間有限的情況下，教師認為學生已具有保留概念而未進一步檢視。根據譚寧君（1998）對 60 名三年級學生、215 名四年級學生進行面積保留概念的評量，發現約 30% 的三年級學生及 50% 的四年級學生，已發展面積保留概念。另一方面亦顯示部分中年級學生尚未完全具備保留概念。因此，教師對低、中年級學生於進行面積概念教學時，不宜忽略檢視學生的面積保留概念。

此外，就各討論片段教學時間的長短分析，可發現教師多專注於主要問題與次要問題之解題討論，此現象亦符應王品心（2008）的研究結果，布題與解題討論時間量占有課堂教學時間最高比例。

伍、結論與建議

一、結論

本研究分析 1 位有經驗教師使用教科書的方式、數學布題、教學表徵與工具及師生互動討論歷程之教學案例，探討數學教學轉化。研究發現教師自編教學問題，但是教科書單元的教學重點（學習目標）仍為重要的參考來源。而且，教師使用多樣教具以輔助面積教學，包含釘板、

小白積木與平方公分板。從教師的自編問題，以及因應學生於教學歷程中產生的數學想法與迷失概念而提問的問題，其皆非教科書預設的內容，顯示教師根據其數學學科知識及教學專業知能，處理教學轉化。

二、對未來研究之建議

本研究取用公開於數學教師知識庫的教學示範影帶，分析教師實施課程的教學轉化，比較教師教學問題內容與教科書文本的差異，論述其轉化文本內容以發展學生面積初步概念的教學適當性。本研究雖然針對教學影帶內容晤談教師，但是並非如孫德蘭（2006）與 Shkedi（2009）於教學之前，晤談教師的教科書解讀，或於教學歷程與教學結束時，分別訪問教師於每個教學討論片段布題、提問相關問題之理由、決定、反思與建議，此為本教學影帶分析之缺憾。欲收集有關教師解讀教科書及實施課程的決定等更豐富的資料，未來研究應於教學前及教學歷程中，針對不同時間的課室活動與教學行為，晤談教師的教學考量與觀點。

此外，本研究乃聚焦於教師的課程實施，分析其轉化處理。然而，學生乃接受課程教學之主要對象，教師的教學轉化是否適當，學生的學習反應與效果評量亦應納入考量（Tarr et al., 2008）。因此，未來研究，除了晤談教師上述問題以外，亦可收集學生之學習反應與課後評量，以瞭解教學轉化後的產出成果——學生的學習成效，使教學轉化之探討更完整。

參考文獻

- 王品心（2008）。臺北縣國小四年級數學教學錄影分析研究。臺北市立教育大學數學資訊教育學系碩士論文，未出版，臺北市。
- 南一書局國小數學教科用書編撰委員會（2000）。國民小學數學（第三冊）教學指引（二上）。臺南市：南一。
- 孫德蘭（2006）。國小教師解讀數學教科書～以分數乘法教材為例。國立新

- 竹教育大學應用數學系碩士論文，未出版，新竹市。
- 教育部（1993）。國民小學課程標準。臺北市：臺捷。
- 教育部（2010）。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域（三版）。臺北市：作者。
- 黃政傑（1991）。課程設計。臺北市：東華。
- 劉好（1994）。國民小學數學科新課程中幾何教材的設計。載於臺灣省國民學校教師研習會（主編），國民小學數學科新課程概說（低年級）（頁98-108）。臺北縣：臺灣省國民學校教師研習會。
- 譚寧君（1997）。面積與體積的教材分析。載於臺灣省國民學校教師研習會（主編），國民小學數學科新課程概說（中年級）：協助兒童認知發展的數學課程（頁175-192）。臺北縣：臺灣省國民學校教師研習會。
- 譚寧君（1998）。國小兒童面積迷失概念分析研究。國立臺北師範學院學報，11，573-602。
- Baroody, A. J. (1989). *Fostering children's mathematics power. An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Burns, B. A., & Brade, G. A. (2003). Using the geoboard to enhance measurement instruction in the secondary school mathematics. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 year book* (pp. 256-270). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cai, J., Perry, B., Wong, N.-Y., & Wang, T. (2009). What is effective teaching? A study of experienced mathematics teachers from Australia, the Mainland China, and Hong Kong-China, and the United States. In J. Cai, G. Kaier, Perry, B., & N.-Y. Wong (Eds.), *Effective mathematics teaching from teachers' perspectives: National and cross-national studies* (pp. 1-36). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. L. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 25(2), 119-142.
- Drake, C., & Sherin, M. G. (2006). Practicing change: Curriculum adaption and teacher narrative in the context of mathematics education reform. *Curriculum Inquiry*, 36, 154-187.
- Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? *American Educational Research Journal*, 26, 403-421.
- Givvin, K. B., Jacobs, J., Hollingsworth, H., & Hiebert, J. (2009). What is effective mathematics teaching? International educators' judgments of mathematics lessons from the TIMSS 1999 video study. In J. Cai, G. Kaier, Perry, B. & N.-Y. Wong (Eds.), *Effective mathematics teaching from teachers' perspectives: National and cross-national studies* (pp. 37-69). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Goodlad, J. I. (1979). The scope of the curriculum field. In J. I. Goodlad (Ed.), *Curriculum inquiry—The study of curriculum practice* (pp. 17-41). New York: McGraw-Hill Book Company.

- Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 524-549.
- Hill, H. C. (2004). Professional development standards and practices in elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, 104, 215-231.
- Huang, H.-M. E. & Witz, K. G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment. *Learning and Instruction*, 21 (1), 1-13.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Penuel, W. R., Fishman, B. J., Yamahuchi, R., & Gallsgher, L. P. (2007). What makes professional development effective? Strategies that foster curriculum implementation. *American Educational Research Journal*, 44, 921-958.
- Peressini, D., Borko, H., Romagnano, L., Knuth, E., & Willis, C. (2004). A conceptual framework for learning to teach secondary mathematics: A situative perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 67-96.
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry* (E. A. Lunzer, Trans.). London: Routledge and Kegan Paul.
- Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text. *Elementary School Journal*, 100, 331-350.
- Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75, 211-246.
- Schifter, D., Bastable, V., Russell, S. J., & Woleck, K. R. (2002). *Measuring space in one, two, and three dimensions: Case book*. Parsippany, NJ: Dale Seymour Publication.
- Shkedi, A. (2009). From curriculum guide to classroom practice: teachers' narratives of curriculum application. *Journal of Curriculum Studies*, 4, 833-854.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-21.
- Stecher, B., Le V., Hamilton, L., Ryan G., Robyn, G., & Lockwood, J. R. (2006). Using Structured classroom vignettes to measure instructional practices in mathematics. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 28(2), 101-130.
- Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). Howe curriculum influences student learning. In K. F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Gweenwich, CT: Information Age.
- Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement. 2003 year book* (pp.3-16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stigler, J. W., Gonzales, P., Kawanaka, T., Knoll, S., & Serrano, A. (1999). *The TIMSS videotape classroom study: Methods and findings from an exploratory research project on eighth-grade mathematics instruction in Germany, Japan, and the United*

- States, NCES 99-074*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office.
Retrieved from <http://nces.ed.gov/pubsearch/pubsinfo.asp?pubid=1999074>.
- Stodolsky, S. S. (1999). Is teaching really by the book? In M. J. Early & K. J. Re-
hage (Eds.), *Issues in curriculum: A selection of chapters from past NESSE year-
books. Ninety-eighth yearbook of the National Society for the Study of Education* (pp.
143-168). Chicago, IL: National Society for the Study of Education.
- Tarr, J. E., Chavez, O., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2006). From the written to the
enacted curricula: The intermediary role of middle school mathematics
teachers in shaping students' opportunity to learn. *School Science and Mathe-
matics, 106*(4), 191-201.
- Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chavez, O., Shih, J., & Osterlind, S. J. (2008).
The Impact of Middle-Grades Mathematics Curricula and the Classroom
Learning Environment on Student Achievement. *Journal for Research in Math-
ematics Education, 39*(3), 247-280.
- Wilson, S. M., Shulman, L. S., & Richert, A. E. (1987). '150' different ways of
knowing: representations of knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.),
Exploring teachers' thinking (pp. 104-124). London: Cassell Educational Limited.

附錄 1

表 1 本樣本使用之教科書單元學習目標與九年一貫課程綱要數學學習領域之基本能力指標、1993 年課程標準在面積初步概念的對照

九年一貫課程綱要之基本能力指標	1993 年課程標準	教科書之單元學習目標與活動目標
--	--	利用相同數量的全等圖形板，拼排不同形狀的圖形
S-2-01 能認識平面圖形內部、外部及其周界與周長 N-2-21 能認識面積常用單位，並做面積比較與計算	1. 某量的初步概念 (1) 某量的初步認識	面積的初步認識(利用塗顏色的活動，知道圖形「面」的意義)
--	(2) 某量的直接比較	1. 透過疊合的活動，認識全等的圖形和意義 2. 利用全等圖形板，拼排圖形並直接比較兩個圖形「面」的大小
	(3) 使用以某量為刻度單位的工具	--
	2. 某量的間接比較 (1) 某量的間接比較	面積的直接比較
	(2) 某量的個別單位比較與實測	利用相同數量的全等圖形板，拼排圖形並比較其大小
	3. 某量的普遍單位比較 (1) 認識某普遍單位量的意義	--
N-2-26 能做量的簡單估測	(2) 以某普遍單位量為單位，進行實測及估測的活動	用「平方公分版」實測圖形的面

表 2 教科書的問題內容與教師於各教學討論片段所布的主要問題與次要問題之對照比較

討論片段	教科書內容	教師的教學問題	異同比較
<p>片段一： 圖形大小比較</p>	<p>活動目標： (一) 利用同數量／不同數量的全等圖形板拼排圖形，然後比較大小；</p>	<p>(一) 主要問題： Q1. 比較兩個圖形的面積，哪一個比較大</p> <p>(二) 次要問題： 1. 計數圖形面積時，應數圖形內的點子數或方格子數 2. 提出直觀的錯誤答案，以激發學生批判錯誤的答案與辯證 3. 單位面積的累計加總</p>	<p>(一) 相同： 1. 比較圖形大小 2. 圖形包含完整與不完整方格</p> <p>(二) 差異： 1. 教師使用釘板圍出圖形，非以全等圖形板製作圖形</p>
<p>片段二： 學生製作的圖形大小比較</p>	<p>問題： 1. 用 8 塊全等的圖形板，排排看 2. 使用習作的三角形圖形板，拼排圖形，然後比較大小</p>	<p>(一) 主要問題： Q2. 比較「兒童圍出的」兩個圖形的面積，哪一個比較大</p> <p>(二) 次要問題： 1. 這個圖形是由幾個小方格拼起來的及如何計數圖形內的方格子數量 2. 這個圖形是由幾個正方形「圍出的」 3. 針對學生展示的不同計數的結果，要求展示點數方法與過程，並讓全班同學針對展示過程與結果做檢核</p>	<p>2. 討論計數釘板上的圖形面積，應點數圖形內小方格或點點 3. 討論包含不完整方格圖形的面積計數方法 4. 教師援引學生製作的圖形作布題</p>

表 2 教科書的問題內容與教師於各教學討論片段所布的主要問題與次要問題之對照比較 (續)

討論片段	教科書內容	教師的教學問題	異同比較
片段三： 平方公分板、1 平方公分與 5 平方公分圖形的製作	(二) 什麼是面和面積 使用小三角形貼在塗顏色的面上、計數所貼的小三角形張數、比較面積的大小、比較兩條手帕的大小、哪一個圖形用的三角形最多？哪一個圖形最大？	(一) 主要問題： Q3. 介紹平方公分板並要求觀察、觸摸、描繪小白積木 1 個面 Q4. 將描繪的小方塊塗色 Q5. 將小白積木覆蓋在塗色的方塊，觀察兩者是否大小一樣、1 平方公分的介紹與平方單位的累加 Q6. 製作 1 個 5 平方公分的圖形並描述面積的單位 Q7. 2 個圖形的大小比較 (引自習作問題) Q8. 計數教師所展示的 1 個多邊形的面積	(一) 相同： 1. 介紹平方公分板 2. 觀察、觸摸、描繪 1 平方公分的方格 3. 1 平方公分的介紹 4. 2 個圖形的大小比較 (二) 差異：
	(三) 利用平方公分板，實測圖形的面 1. 「平方公分板」是量「面」的工具，就像尺一樣， 2. 把透明的平方公分板放在圖形上測量 3. 量量看，右圖 (多邊形) 是幾平方公分 4. 配合習作第 32 頁	(二) 次要問題： 1. 觀察小白積木的面與面的數量 2. 描繪小白積木的 1 個面與塗色，再將小白積木覆蓋於所繪的圖上 3. 小白積木的 1 個面有多大，並介紹平方公分的意義 4. 1 至 3 平方單位的累加與 1 平方公分的再確認 5. 製作 1 個 5 平方公分的圖形 6. 2 個圖形的大小比較 (引自習作問題) 7. 計數教師所展示的 1 個多邊形的面積。	1. 介紹 1 立方公分小白積木的 1 個面為 1 平方公分 2. 描繪小白積木的 1 個面與塗色，再將小白積木覆蓋於所繪的圖上 3. 平方單位的累加 4. 製作給定面積量 (5 平方公分) 的圖形

表 2 教科書的問題內容與教師於各教學討論片段所布的主要問題與次要問題之對照比較 (續)

討論片段	教科書內容	教師的教學問題	異同比較
片段四： 單位面積概念的澄清	(三) 利用平方公分板，實測圖形的面 1. 「平方公分板」是量「面」的工具，就像尺一樣 2. 把透明的平方公分板放在圖形上測量 3. 量量看，右圖(多邊形)是幾平方公分 4. 配合習作第32頁	(一) 主要問題： Q9. 計數圖形內的方格(取用Q2的3x6長方形) Q10. 計數教師所展示的一個多邊形的面積 (二) 次要問題： Q9-1. 18方格可說是18平方公分嗎 Q9-2. 1平方公分的大小是多少 Q9-3. 使用尺測量小白積木每個面的邊長並檢驗在數學簿上塗的面是不是1平方公分 Q10-1. 比較投影螢幕上圖形裡的1個方格與1平方公分的大小是否一樣	(一) 相同： 1. 計數圖形內的方格子數 (二) 差異： 1. 教師援引學生製作的圖形作布題，非以全等圖形覆蓋而成的圖形 2. 討論圖形內的方格子的數量，非三角形數量 3. 圖形內的1個方格是否為1平方公分