

美國當代小學幾何課程發展及其對台灣幾何教學之啟示

黃幸美*

摘要

台灣與美國的小學幾何教育目標，皆因國家社會發展之所需、數學教育研究與理論轉變社會文化價值，幾何課程與教學隨之幾經修訂。綜觀美國近百年來的幾何課程發展，反應深受政治與社會壓力影響的「危機—改革—反動」問題解決歷程，同時，在數學、心理與教育學者的理論思潮影響下，推進幾何課程地位的發展，從被忽視與附屬地位，成為數學課程重要主題領域。當前的幾何教學，強調考量兒童的幾何認知與思考層次，從生活具體事物的觀察與操作，發展幾何概念與空間推理。此轉變現象，在台灣的小學幾何課程與教學亦然。有視於數學、心理與教育學者之研究與教育思潮，對政治社會團體的教育改革決策具有不容忽視的影響潛力，學者需投入有系統的幾何課程研究，明確地解釋課程綱要論述的各種課程理念、能力指標，並轉化成導向學生建構幾何認知的具體可行之策略，繼而根據實證研究結果，發展有效的幾何課程與教學。本文並討論當前課程綱領的幾何課程與教學，提出提升兒童幾何知能的課程與教學建議。

關鍵詞：小學、幾何、課程與教學

*黃幸美，台北市立教育大學課程與教學研究所教授

電子郵件：hhuang22@gmail.com

來稿日期：2010年1月5日；修訂日期：2010年1月28日；採用日期：2010年2月23日

The Development of Geometry Instruction in Elementary School in the United States in the 20th Century and Its Implications to Geometry Instruction in Taiwan

Hsin Mei E. Huang^{*}

Abstract

Geometry instruction in the United States and Taiwan schools has been modified over times, due to new findings, the demand for national education, and social values. Actually the development of geometry curriculum in the U. S. has been pursued to deal with problem and to overcome national crises caused by political-social force. Thanks to this force and the new finding of the effects of mathematics, psychology, and education, geometry is elevated to the core of mathematics..Moreover, current instructions stress on the development of children about geometry knowledge and spatial reasoning by means of observation and manipulations of physical objects. The progress of geometry also happened in Taiwan's elementary education. More attention to the effectiveness of geometry curriculum is needed..

Keywords: elementary school, Geometry, curriculum and instruction

^{*} Hsin Mei E. Huang, Professor, Graduate School of Curriculum and Instruction, Taipei Municipal University of Education

E-mail: hhuang22@tmue.edu.tw

Manuscript received: January 5, 2010; Modified: January 28, 2010; Accepted: February 23, 2010

壹、前言

幾何概念的學習與發展起始於嬰、幼兒時期的日常生活，此為數學教育學者的共識（Lappan, 1999），但是在傳統的小學數學教育，幾何課程被重視的程度，遠不及數與計算領域（林秀瑾、張英傑，2005；Garrett & Davis, 2003; Lappan, 1999）。二十世紀中期以降，隨著國際性數學學習成就評量的推動與評量結果比較，各國將國民數理科學知能視為其國家未來競爭力的表徵，紛紛推動課程改革，強化國民教育階段學生的數理科學知能（吳韻儀，1995）。在我國與美國，課程改革觸動推進小學幾何課程逐漸受重視的現象，可見之於1980年以後的學校數學規準或課程綱要，明述需將幾何形體及其關係、變換、幾何的模式化與空間推理等概念，包含於學校幾何課程（教育部，2003；Clements & Battista, 1992; National Council of Teachers of Mathematics 1989, 2000）。雖然幾何課程非一項被獨立改革的行動，其卻深受整體教育改革影響，而教育改革則深受政治與社會因素影響（周祝瑛，2003）。

我國小學幾何課程的發展歷程，與全國性的教育改革同步邁進，從十九世紀至二十世紀初，教育改革的目標在於以學習西方的實用知識與科學技術，解決內憂外患釀成的社會危機、內修國政、富國強兵（毛禮銳、邵鶴亭、瞿菊農，1989），二十世紀中期以來，更為順應世界潮流、國家社會發展之需要、提升國民素質與國家競爭力之需求（教育部，1993，2003），幾何課程從一個被學校數學缺漏的領域，進而附屬於測量領域，繼而發展成為一個重要的數學課程主題。

美國小學的幾何課程的發展，雖然國情異於我國，但是其課程地位的轉變，卻與我國的情況相似。觀察美國小學幾何課程發展史，實反映其國家政治與社會團體在國際競爭下的角力，結合學術專業團體的智慧，將目標體現於學校數學所展現出的「危機—改革—反動」的一連串教育運動（Fey & Graeber, 2003; Garrett & Davis, 2003）。因此，探討一個國家小學幾何課程發展，瞭解此課程在數學教育改革行動下所潛藏的政治社會推動力，剖析其課程結構與教學目標內涵，方能建構完整的了解（Fasanelli, 2000）。

縱然幾何課程的發展受政治社會因素影響，但是數學、心理與教育研究者的研究與理論思潮，卻也是政治與社會團體形成政策與教育決定的重要專業諮詢對象（McDonnell, 1995），此也顯示學者們學術研究的影響與意義。檢視中

外的小學數學教育，長期以來將幾何課程歸屬於測量領域教材，鮮少被視為核心領域議題以討論其課程。近年來，幾何課程日益受重視，國內學者在幾何教育方面的研究，有如雨後春筍般地蓬勃發展，有學者針對幾何教材內容分析及其與九年一貫課程綱領之能力指標作比較（李豪文，2008；林秀瑾、張英傑，2005；莊月嬌、張英傑，2006；張英傑、陳創義，2003），或論述Hiele的幾何思考發展模式（劉好，1994，1998），以及根據上述理論模式探討學生的幾何概念等（盧銘法，1995）。上述研究或有論述美國小學幾何課程內涵與教學取向（莊月嬌，2005）；但是其內容多為描述學校數學的幾何主題概念結構，對於激發小學幾何教育改革的社會脈絡與教育思潮，及此潛在影響力對幾何課程與教學的意義與啟示，探討相當匱乏。

有視於履踐課程目標之重要性，以及補足幾何課程與教學議題探討之缺憾，本文期以提供研究者一個瞭解美國近一百年來小學幾何課程發展的窗口，並將聚焦於1950年以來其課程受政治社會壓力影響而轉變的過程，以及在課程改革歷程中，數學、心理與教育學者在幾何認知與學習理論的研究貢獻，並析述其理論將幾何課程從一個「被遺忘的課程」（Lappan, 1999），推展成為學校數學課程的一個核心領域的影響。同時，從分析美國幾何教育的目標，對照與省思我國小學幾何課程與教學，期以藉助他山之石，提出具前瞻性的建議，以裨益我國小學幾何課程與教學的發展更上層樓。

課程改革的終極目標，在於增進國民的素質與國家競爭力，提升學生的學習成果（教育部，2003；鍾靜，2005）。美國的幾何課程內容，於1960年~1975年之間大量增加且穩定，並結合相當多的資訊科技融入幾何課程與教學（謝如山、謝名起、謝名娟譯，2002），而且全美數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）所發行的《學校數學原則與標準》（Principles and standards for school mathematics）（National Council of Teachers of Mathematics, 2003）對幾何課程與教學提出具參考價值的論述，其教育觀點也深獲世界先進國家數學課程與教學學者支持（Kilpatrick, Martin, & Schifter, 2003）。反觀我當前九年一貫課程綱領中的幾何主題，猶存有急待改善的問題（李豪文，2008；林秀瑾、張英傑，2005；莊月嬌、張英傑，2005）。因此，從研閱具代表性的台、美數學課程與教學等相關文獻資料，針對小學幾何課程與教學，以提出具洞察力的思考議題，藉以拋磚引玉，激發更多的數學教育學者、課程與教學研究者的關注，投注研究心力以使幾何課程發展益臻理想，為本文之目的。

貳、十九—二十世紀美國的教育學者對小學幾何課程發展的影響

一、十九—二十世紀初年美國的幾何課程概覽

十九世紀末期及二十世紀初期，工業化、都市化與移民議題是美國社會關注的公共議題，雖然數學教育具有養成科技人才的價值，幾何課程多為中學階段的教材範圍，其在基礎教育階段的小學數學，教材份量與重要性相對被輕忽（Donoghue, 2003）。

根據Michalowicz 與 Howard（2003）分析美國數學教材，指出：十九世紀初期至中期，數學教育目標注重心智的鍛鍊（exercising the mind）與社會實用，在偏重規則（計算算則，包含運算與記憶算則）、歸納（從具體教具的操作，展示與歸納數概念）、分析（將解題方法作詳細分析）的教學取向下，算術與代數課程成為主要內容；相對地，幾何與測量教材是被忽略的。幾何學通常不被列入教材，即使少數問題被含括於數學課程，例如：簡單的形狀與特性介紹、周長、面積與體積教材，其多與測量問題並置；多邊形及其性質的教材則被摒除於外。

及至十九世紀末期近二十世紀，隨著幾何教科書的發行：Wentworth與Smith出版《平面幾何》（plane geometry）與《立體幾何》（solid geometry）兩本獨立發行的幾何教材（引自Donoghue, 2003），數學課程討論幾何問題方呈增加的趨勢，例如：將圓、三角形與梯形的面積問題；圓錐體、柱體、三角錐、球體的體積問題，納為教材問題；但是此教材多為七年級以上的學校數學教材（Donoghue, 2003）。有關幾何形體的性質與定義、歐基里得的幾何假設（the postulates of Euclidean geometry）與公理的課程與教學，幾乎是高中階段的課程（Chazan & Yerushalmy, 1998；Clements, 2003；Donoghue, 2003）。此時期，雖然中學階段有幾何教科書為教材，但是小學階段的幾何問題卻仍多與測量教材聯結。

由此觀之，十九世紀至二十世紀初期，在強調數的運算與生活實用技能的課程目標下，算術課程表徵基礎數學之核心，幾何教材相當微少。同時，受社會實用（social-utility）取向影響，幾何教材內容，也僅選擇與生活應用相關的測量問題，幾何教科書所討論的平面幾何，多為學生日常生活可接觸的基本圖

形與立方體，以及其面積與體積的測量課程。雖然數學學者Moore曾批判幾何教科書的獨立發行，質疑此舉乃將幾何視為假設性的論證，無助於解決真實的生活問題（引自Donoghue, 2003），但是並未對幾何學在基礎教育階段的意義多作評論。

二、1910—1940年美國教育學者對幾何課程發展的影響

1910—1940年代，受到社會實用思潮、第二次世界大戰所導致的經濟蕭條及愛國主義的影響，數學教育的目標，著重科技人才的培養，以達成社會應用目標。在政治社會層面，國家軍事設備與工業化技術的發展倍受關注，數學教育被視為培養現代化公民與養成就業技能之途徑，因此，數理人才教育須植基於數學知能（Donoghue, 2003）。

同時，當時學者的教育哲學與心理學研究，對「數學具有強化社會現代化效益」信念，具有推波助瀾的效果，進而影響當時的數學教育。例如：James（1842-1910）的「有用者為真」（what works is true）的觀點及J. Dewey（1859-1952）的實用主義（pragmatism），闡述教育是改進社會的主要動力，以進步運動（progressive movement）推動課程改革（引自伍振鸞，1992；葉學志，1985）。在教學心理學方面，行為主義思潮與E. Thorndike（1874-1949）所主張的刺激與反應連結理論—練習與練習結果的連結，可以推進學校教育基本技能的學習引自（Leahey & Harris, 1997），亦顯著地影響美國小學數學課程與教學（高廣孚，1989；陳梅生、吳德邦、李源順，1987）。

Donoghue（2003）指出，此時期的幾何教育理念，乃將幾何學習視如一種大腦的訓練，藉著訓練可促進「愈鍛鍊愈結實」的肌肉鍛鍊之效，而且，邏輯推理與論證能力透過課程訓練，其能力可以遷移於幾何證明解題。幾何課程在於訓練邏輯推理、論證，以及使用精確的幾何語言，此門學科知識更可直接應用於物理世界、商業或其他行業工作。受上述政治社會壓力與教育思潮之激發，高中階段的幾何學與三角學（trigonometry）課程，因而大受重視。

值此數學的社會效能觀瀰漫之際，數學教育學者積極建議：數學教學需結合算術、初淺的幾何與代數，提供學生應用上述知識技能解決問題的經驗；但是學者們的建議，仍未普遍撼動深植於社會大眾與家長的信念「除了算術以外，數學別無所需」（Garrett & David, 2003）。因此，除了高中階段的幾何課程內容擴增以外，小學的幾何課程仍然多以介紹基本的概念為主，例如：幾何圖形的命名、以符號表徵簡單的幾何概念，使用簡單的工具與公式作幾何

形、體的測量（體積與面積的測量）（Donoghue, 2003; Lappan, 1999; Porter, 1989）。

此時期雖有學者質疑社會效能觀與進步運動的教育理念，批判其對數學課程地位具有負面威脅（Donoghue, 2003），尤其Brownell更提出有意義地學習數學計算，批判「刺激—反應」連結與反覆練習的數學教學觀，反對記憶算則與機械式地算術運算（Brownell, 1947）。縱然如此，學者們與學校教師對數學課程的注意力，仍多在算術領域，幾何課程與教學仍未獲關注。

三、1950—1960年代美國社會背景與教育學者對小學幾何課程發展的影響

第二次世界大戰之後，美國與蘇俄兩國的冷戰關係，形成軍武競賽的兩大壁壘。尤其於1957年因蘇聯發射第一顆人造衛星「史波尼克號」（Sputnik），激起美國社會的高度覺醒，徹底檢討學校課程的軟弱無能，更體認「優良的數學教育為高科技軍備競賽之基礎」，尤其重視大學的科學與工程人才之培育（Fey & Graeber, 2003）。此時，數學教育學者也深入檢視各教育階段學校數學課程與教學，且數學的社會效能價值亦被推崇，進而醞釀強化數理科學教育的課程改革（伍振鷺，1992；陳梅生等，1987；Price, 1960）。

1950年代肇始於大學數學教育改革的「新數學」（new math.）計畫，逐漸往高中數學課程改革推進，例如：1952年的數學學者Max Beberman成立「伊利諾大學數學教師委員會」（The University of Illinois Committee on School Mathematics, UICSM）推動「新數學」與「現代數學」（modern mathematics），強化高中數學的幾何結構性知識與證明（Fey & Graeber, 2003; Garrett & Davis, 2003; Woodward, 2004）。1950年代晚期，此波「新數學」改革受到美國國科會（National Science Foundation, NSF）的重視，並提供研究經費補助（Lappan & Wanko, 2003），數學課程改革也擴展至初中及小學，數學學者E. G. Begle於1958年成立「數學研究小組」（School Mathematics Study Group, SMSG），並編寫幼稚園到高中（K-12）的數學教材。SMSG學者批判：幾何課程在小學教育被遺忘，乃為嚴重的失誤，幾何需成為基礎數學教材之一。因此，幾何也被列為小學四—六年級的數學課程（Coxford, 2003; Payne, 2003; SMSG, 1961a, 1961b）。

1960年代SMSG所推動的數學課程改革，也是當時唯一受國科會經費補助的課程研究（Payne, 2003）。SMSG課程最大的特色，為注重結構、證明、通

則化與抽象化（陳梅生等，1987），就幾何概念的結構化組織而言，一方面將幾何概念與幾何語言，透過點、線、面、體的概念介紹，系統化地呈現於小學教材，強調基礎的幾何概念，需建立於個人對空間知覺與探索的直覺經驗，認識幾何的概念系統，另一方面，將幾何與測量教材結合，增加幾何內容，幾何與算術學習需並重（Jackson, 1960; SMSG, 1960, 1961a, 1961b）。檢視SMSG的四年級數學課程內容，幾何教材即占有1/3的份量（Payne, 2003），幾何課程被重視的情況可見一斑。

SMSG對幾何教育的哲學觀，主張數學能力的培養，可以根據數學的原理原則，依據數學家的思考與建議觀點，將教材作系統化組織，從基礎到較高層次概念作排列，透過結構化的課程與訓練達成課程目標（陳梅生等，1987）。因此，數學教育標的，在於將數學結構化呈現與學生的理解學習，基礎數學的學習包含：幾何語詞、公理與定義。而且，只要學生學習幾何語詞，理解幾何概念的定義、定理與證明，他們也可以發展出類似於數學家的幾何想法（SMSG, 1960）。Jackson（1960）闡述幾何學習為一種心智訓練，幾何學習的效果類比肌肉鍛鍊之效。學生必須從日常生活的觀察，熟悉幾何圖形，進而組織其對二維與三維空間幾何形體的觀察，了解其關係。幾何學習歷程，即從具體的幾何形體觀察，將所習得的幾何性質作進一步的精緻化組織，形成抽象的數學概念系統。

基於上述數學教育理念，SMSG的小學幾何課程十分重視幾何語詞的介紹。根據Jackson（1960）與SMSG（1961a）的闡述，幾何內容包含注意、比較及測量等三大方面：（一）注意：指四年級的幾何單元，在於引起學生注意幾何的特性，例如：檢驗各種圖形、命名、處理二維與三維形體物件，以建立物件形體所包含的抽象幾何性質與概念；（二）比較：此為一種較高階的幾何學習，四年級學生需學習使用圓規，認識與區辨各種三角形，檢驗圖形是否全等。透過直覺的理解（intuitive understanding），學生可以認識全等的意義（Coxford, 2003）。五－六年級學生則需透過比較與定理、全等定義之學習，建構三角形與其他多邊形的幾何概念，例如：以全等的概念為基礎，學習等腰三角形的性質。（三）測量：此概念為擴展面積定義（覆蓋在一個平面上的平方單位數量）與比較作自然連結，將幾何概念與數量運算技能作結合，即為學習測量的基礎。

針對SMSG在小學數學課程發展的影響之評論，數學專業團體肯定該研究小組在四－六年級數學教科書，提供結構性的數學內容的努力，此貢獻是成功

的 (Payne, 2003)。MSG所重視的形體的性質與關係，以及對稱等議題，仍可見之於全美數學教師協會的小學幾何重要議題 (National Council of Teachers of Mathematics, 1989, 2000)。而且，當時美國舉辦的全國教育評量 (National Assessment of Educational Progress, NAEP)，也隱約暗示應用數學語言的重要性，例如：1973年在全國教育評量測驗中的幾何問題，皆與幾何語詞的使用有關 (Carpenter, Coburn, Reys, & Wilson, 1976)。除了上述的肯定評論以外，MSG預期提升學生數學成就的改革目標卻功敗垂成 (Coxford, 2003; Fey & Graeber, 2003; Payne, 2003)。導致其失敗的因素，可歸納如下所述。

(一) 學校數學教育目標的衝突：1. MSG過度強調抽象的數學結構與概念，大受數學教育學者與實務工作者的批評，尤其是中等教育階段教師的反彈聲浪最大 (Coxford, 2003; Payne, 2003)。雖然MSG的學者推崇心理學者所建議的心智發展與概念的形成觀點 (Stone, 1961: 20)，但是其理念仍潛存行為主義的形式訓練，教學強調學生被動地接受與認識具結構性的數學概念的程度，而非考量學生的認知發展。

(二) 幾何教材內容尚不充足：MSG雖然重視幾何課程，但是所包含的幾何教材尚嫌疏漏不足，例如：空間視覺化與空間推理問題，其為當前幾何課程重視的教材，未見受MSG課程重視。而且，幾何教學連結解題溝通 (National Council of Teachers of Mathematics, 2002)，亦未受重視。

(三) 提供教師推展新數學課程與教學的訓練不足：中、小學教師對於新數學課程的認識與訓練不足，教科書裡許多數學語詞也未充分了解，導致教學困難。雖然新數學課程特性重視「概念結構」輕忽「應用」，也建議採發現教學法進行數學教學，但是許多小學教師在訓練不足的情況下，仍偏重實用性的數學內容，例如：十進位數系的概念與運算，而且使用直接教學法，而非發現教學法、實物操作或歸納法 (Coxford, 2003; Fey & Graeber, 2003; Payne, 2003)。由此可見，數學課室的教學實況，與新數學課程目標存有相當大的差距，教師的教學困擾也對新數學產生反彈 (Payne, 2003)。

(四) 家長對新數學的課程理念了解不足：大多數家長認為算術運算技能的培養為學校數學的核心，而且他們對新數學的課程理念了解不足，仍然相信數概念、四則運算與心理運算與測量技能，是數學學習的基礎，也是最實用的數學能力 (Payne, 2003)。因此，家長對於幾何學習與發現教學法對於學生數學學習的意義，支持度不如預期。

(四) 教科書出版商的偏好與MSG的教育理念迥異：教科書出版商多將

教材焦點置於運算技能，將幾何概念以傳統所熟悉的模式作組裝，並非充分履踐MSG的幾何課程發展理念（Coxford, 2003）。

綜合美國1960年代的新數學改革，其將數學概念依其概念結構，依序編製成系統性的教科書，尤其揭示將幾何課程的重要性，誠為顯著的貢獻；但是其課程內容過度強調抽象的數學概念與數學語言，導致學生難以理解；在教學方面，「教學需植基於兒童心智發展」與施行「發現教學法」的口號雖被高喊，實則行為主義「教師直接傳輸，學生被動學習」與「練習效果」仍為教學現場之主導。值得一提的是，小學幾何課程與教學，亦未如MSG學者所預期地被推廣（Carpenter, et al. 1975, 1976）。因此，綜觀課程教材、教師與教法、社會輿論的批判，MSG的新數學改革績效不如預期（陳梅生等，1987），此改革失敗的檢討，也引發1970年代的「返回基本」（back to basic）運動。

四、1970—1980年代美國教育學者對小學幾何課程發展的影響

美國數學教育品質除了長期倍受政治社會關注以外，國際性與NAEP的數學評量在1970—1980年代舉辦，其評量成果報告也形成一股影響數學教育的來源，尤其當政治與社會團體將學生的數學評量成果與國家競爭力指標連結時，這些數學成就評量在政治與社會壓力的加權下，影響力與日遽增，終而醞釀成新一波課程改革的推動力。

（一）國際性教育評量

教育成就評量的國際協會（International Association for the Evaluation of Educational Achievement, IEA）於1967年成為正式的機構（Foshay, 1962），並於1964年、1980—1982年分別舉辦第一次國際數學調查（The first international mathematics survey, FIMS）與第二次國際數學調查（The second international mathematics survey, SIMS）（Brown, 1996），並提供學生的成績分析比較。這些教育評量的初始目的，在於提供師長瞭解學生學習情形，但是經政治社會團體關切後，評量結果的解讀被賦予複雜的意義。第一，學生的數理科學成就，表徵一個國家國力與發展潛力，再則，國際間的學生學習成就比較，猶如國家爭取國際領導權的「賽馬」競爭（Schmidt & McKnight, 1995），此外，處理此大規模學習成就評量的主辦機構，皆接受國家政府的經費贊助，其評量結果資料對於政治社會政策的規劃，具有重要意義（Brown, 1996; Weiss, Knapp, Hollweg, & Burrill, 2001; Schmidt & McKnight, 1995）。因此，這些大規模的教育成就評量的意義與性質，隨著創辦時間的累增，其寓含的政

治社會意義也愈趨複雜。

根據Brown (1996) 分析FINS與SIMS的國際評量，此兩份測驗皆是針對13歲學生的數學成就作評量，其結果顯示：美國學生的數學成就表現遠落後於許多國家。雖然有不少學者批判此種國際測驗存有諸多效度干擾的問題，例如：國際間的課程差異、評量試題的翻譯問題，以及文化差異等問題，皆可能影響各國學生的成就分數之排名 (Brown, 1996; Freudenthal, 1975)，但是美國學生數學成就表現不理想的現象，再度引發政治與社會團體對國家競爭力衰退的焦慮。

(二) 全國教育評量

美國全國教育評量乃以各領域課程教材內容為基礎所設計的學習評量測驗，目的在於提供學生的學習成果訊息—應學會什麼且已具備的能力為何。全國教育評量的數學評量也於1973年首次舉辦。此大規模的評量成果報告，猶如提供檢核全國教育的成績單，其評量效度與信度亦普獲各界好評，繼而於1978年、1982年、1986年、1990年、1992年、2000年、2003年與2007年皆舉辦 (Kenney & Kloosterman, 2007; National Center for Education Statistics, 2004, 2005)。

NAEP的數學評量檢視全美的數學教育成果，其成果報告分析中、小學階段學生數學成就表現，也倍受數學教育學者及政治社會團體矚目 (Kenney & Kloosterman, 2007; Pellegrino, Jones, & Mitchell, 1999)。許多政治社會人士且認為此評量可以有效地提供公眾瞭解教育成果，亦可據以規劃政策 (Weiss, Knapp, Hollweg, & Burrill, 2001)。由於中小學生在國際性的數理成就評量與NAEP數學評量表現低落，而且幾年以來未見成績提升，此種國民數理科學能力薄弱的嚴重性，甚至被認為是國家陷入危機的一種信號 (Stevenson et al., 1990)。尤當一份以美國學生數學成就低落而發出的危機警告文件《國家在危機中》(A nation at risk) (National Commission on Excellence in Education, 1983) 發表以後，NAEP的評量成果報告，成為政治社會團體據以責成學校數學教育進步的施壓工具 (Pellegrino et al., 1999)。迄今，美國教育部 (U. S. Department of Education) 及其所屬的全國教育統計中心 (National Center for Education Statistics, NCES) 除了支持各種跨國際的教育評量成果比較以外，NAEP也成為美國國會核定的一項教育計畫 (NCES, 2005)。由此可見，三十多年來的NAEP及其成果報告，其單純的教育評量目的，逐漸在政治社會團體的關注下，被賦以檢驗國家競爭力的期待，NAEP所承受的壓力，不可同日而

語。

（三）教育學者對學生的數學低成就之回應

數學教育學者分析各級學生在1972—1973年NAEP的表現，以評鑑1960年代的新數學改革成效。研究結果發現：接受新數學課程的學生，其數學理解表現比傳統班級高，但是學生的計算技巧，顯有退步跡象（陳梅生等，1987）。而且，根據Carpenter、Coburn、Reys與Wilson（1975, 1976）分析第一次NAEP評量結果指出：在小學數學課程，幾何主題相對於其他主題，顯然被忽視。大部分接受評量的9歲學生不瞭解基本平面圖形的幾何關係，亦不熟悉平行線、直徑及直角三角形的名詞。

有視於新數學改革的挫敗、學生數學能力低弱的困境，美國國科會補助「全國數學教育顧問委員會」（National Advisory Committee on Mathematics Education, NACOME），檢視自幼稚園到十二年級數學教育，研究報告指出：學校數學教材過於抽象，學生的數學能力未見提升。於1976年，「全國數學協會」（National Committee on School Mathematics, NCSM）定下「返回基本」口號（陳梅生等，1987）。在此波「返回基本」運動下，雖然幾何與計算技能、實測、圖表的讀法、解釋與繪製等等，同列為需強化的十項基本技巧，但是因幾何不如計算技能重要，而且其含有「新數學」的意味，幾何在學校數學的地位反而被淡化（Payne, 2003）。

為提供更明確的數學教育方向，全美數學教師協會於1980年出版一份重要文告《數學行動綱領》（Agenda for action），將問題解決（problem solving）與使用電算器的能力培養，與1976年所舉的十大基本技巧，同列為數學教育核心（陳梅生等，1987；NCTM, 1980）。惟幾何課程的重要性，並未於此份文告被強調。值此之際，數學與教育研究者積極檢討新數學改革的成效，也投注心力訪查歐洲及其他國家的數學教育，分析其數學課程結構。自此至2000年之間，擷取心理與數學教育學者的幾何認知發展與教學理論模式，融入學校數學教材，期以提升數學教育品質與學生數學能力。有關數學、心理與教育學者之幾何認知發展與學習理論對幾何課程改革之影響，容後論述。

五、1980年迄今的美國幾何課程發展的政治社會背景

1983年《國家在危機中》的危機警告，觸發美國「為國民教育設訂課程規準與提高學生的學習成就的需求」呼聲高漲，政府也設定「美國學生的數理科學成就將於2000年前躍登全世界第一」的努力目標（Brown, 1996; Steen, 1994）。1989年，NCTM與數學教育專業團體因應社會期待，參酌數學、心理與教育學者之研究理論與實務，發行第一份國家層級的教育標準之文件《學校數學課程與評量標準》（Curriculum and evaluation standards for school mathematics）（NCTM, 1989），以及後續的《學校數學評量標準》（Assessment standards for school mathematics）（NCTM, 1995）及《學校數學原則與標準》（Principles and standards for school mathematics）（NCTM, 2000）回應全國對提升數學教育品質的關切（Hiebert, 2003; Steen, 1994; Weiss et al., 2001）。在上述文件，幾何課程被列為學校數學內容的五大主題之一（數與計算、代數、幾何、測量、資料分析與機率），而且增加其教材份量（NCTM, 2000）。幾何課程被視為一門探討空間物件（spatial objects）、幾何關係（geometric relationships）、變換（transformation）與表徵上述幾何關係的數學公理（axiomatic mathematical systems that have been constructed to represent geometric relationships）的知識（Clements, 2003）。同時，近年的NAEP的評量亦將幾何與空間感（geometry and spatial sense）列為數學評量內涵之一（Kenney & Kloosterman, 2007）。有關幾何課程與教學在NCTM的學校數學課程規準相關文件的論述，以及其所依據的理論模式，容後討論。

1990年代，在強化學生數學成就的呼聲下，愈來愈多學者分析國際性評量FIMS與SIMS的部分議題—數學教育的學習機會（opportunity-to-learn），討論美國學生的數學學習機會，及其與數學成就表現優異國家的學生數學學習機會之差異（McDonnell, 1995）。例如：Stevenson、Lee 與Stigler（1990）比較中國、美國與日本學生的數學成就、課程與教學差異，包含比較這幾國學生的幾何知識，其研究發現：在幾何繪圖、視覺判斷及心理折疊（mental folding）的問題解決表現上，美國學生的表現略遜於中國學生，但是卻顯著落後於日本學生（Stevenson et al. 1990）；再者，日本與中國學生比美國學生有較多的學習幾何機會，中、日兩國的小學數學教授幾何基本概念的機要比美國小學高，而且幾何教材在中、日兩國的數學教科書份量，佔有的比率比美國小學教科書高。Westbury（1992）也認為美、日兩國的幾何課程在學校數學所占的份量差

異，是造成兩國學生數學成就落差的因素之一。

在舉國找尋強化學生數學成就解藥的熱潮裡，有關「學生的幾何能力應如何提升」及「小學幾何課程如何有效地教學」等實質議題，是否真正被政治社會團體關注？根據Brown（1996）的觀察，多數政治社會團體與部分學者，似乎更有興趣於辯證含括幾何在內的數學教育成效之通泛性議題，幾何課程與教學並未因而多獲青睞，例如：他們關心全美數學教師協會所公布的國家層級的數學課程標準，此非符合美國地方分權制度特性，進而熱中辯論有關課程標準的「統一」與「多樣」，孰優孰劣。而且，全國教育評量成果報告，也淪為少數有心人士用以炒熱議題的工具。

綜合上述，1980－1990年代，數學與教育學者從檢討以往學校數學品質中，再度發現幾何課程在學校數學的失落，進而積極擷取歐洲數學教育學者與心理學者對兒童幾何思考發展、幾何課程與教學理論模式，融合於K-12學校數學課程規準（NCTM, 1989, 2000）。自此，幾何課程為學校數學主題內容之一的定位，愈趨穩定與重要。雖然政治社會輿論產生失焦，但是幾何課程在小學數學的定位，也使數學教育在1980－1990年代的改革行動顯露進步的意義。

參、1950－1980年代重要的心理與幾何學習理論對美國幾何課程與教學的啟示與影響

1950年代，心理學者批判行為主義者輕忽學生的認知思考與有意義學習，並且致力於探討兒童幾何認知與思考的發展（Piaget & Inhelder, 1956; Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960; Hiele, 1986），值此之時，荷蘭也在中小學推展真實數學教育（realistic mathematics education），其幾何課程發展即植基於兒童幾何思考發展理論（Freudenthal, 1971, 1973, 1983; Gravemeijer, 1990, 1994, 1998）。正當美國數學教育學者探求提升學生數學成就解藥之際，上述幾何教育理論對美國幾何課程與教學皆產生顯著的啟發作用。本節將摘述Piaget（1896－1980）、Hiele及RME理論，討論其對美國幾何課程與教學的啟示，並評論NCTM的學校數學規準文件對美國小學幾何課程的影響。

一、心理與幾何學習理論對美國幾何課程與教學的啟示

（一）Piaget與其同僚的研究及其對美國幾何課程的啟示

Piaget與Inhelder（1956）發現：兒童對空間的理解並非僅是知覺的直接產物，乃需透過感覺－動作（sensori-motor）等操作活動，將他們對圖形、物體及其在空間移動等觀察、操作所產生的認知（perception），形成內在的心理表徵。透過感覺－動作等操作的活動，兒童方能將從觀察、操作物體的特性之活動，發展出幾何直覺，此發展與命名或指認物件，乃大異其趣。Piaget的研究並指出，兒童幾何概念發展的順序為：先理解拓樸幾何關係（topological relations），繼而投影幾何（projective）與歐氏幾何（Euclidean）概念。Piaget從心理學觀點所提出的「拓樸為先」（topological primacy theory）的發展順序理論（Clements & Battista, 1992），駁斥歷史上來對於幾何發展順序的觀點（莊月嬌，2005）。

Piaget的理論對美國的幾何課程與教學所產生的啟發影響，可見之於全英數學教師協會的學校數學規準等文件之論述。Piaget理論對NCTM文件的啟示意義，分別說明如下。

1.兒童透過各種探索幾何活動，能主動地建構歐氏幾何空間的參照結構（Piaget & Inhelder, 1956）。亦即，教學者提供兒童切合其認知發展階段的適當教學環境，兒童即能建構幾何知識。此建議啟示數學教育與課程發展學者：兒童也有能力建構幾何認知，幾何課程應提供給各教育階段的學生，而非僅是中學生的專屬課程。全英數學教師協會的文件，強調「幾何是幼稚園至四年級（K-4）數學課程的重要內容」（NCTM, 1989: 48）。而且，在K-12學校數學課程規準，將幾何主題與教學建議延伸至幼稚園（NCTM, 2000）。

2.Piaget認為兒童建構空間幾何的表徵，需透過主動地操作其生活環境中的物件，並將問題解決經驗內化（Piaget & Inhelder, 1956）。因此，傳統幾何課程所強調的物件命名與記憶形體的特性，不足以讓兒童建構幾何概念。在NCTM文件的幾何課程與教學建議，呼應Piaget的上述觀點包含：（1）建議「調查、實驗、與探索日常物件與具體材料」為幾何學習之必要活動（NCTM, 1989: 48）；（2）兒童的幾何知識需藉由課室教學的「探索與調查」活動來擴展（NCTM, 2000: 97）；（3）Piaget所強調的視覺（visualization）、繪圖及從不同位置比較形體等練習（Piaget & Inhelder, 1956），亦被建議納入幾何課程與教學（NCTM, 1989, 2000; Grande & Morrow, 1993; Gavin et al., 2001）。

針對Piaget的兒童的幾何認知發展理論，不少歐美數學教育學者亦驗證其理論之合理性。例如：Clements 與 Battista（1992）與Clements（2003）檢驗教具操作對兒童學習幾何概念的影響，其研究結果支持Piaget的觀點，兒童的幾何概念發展乃需植基於具體物的操作與觀察，從對具體物的幾何特性之認識，進而發展抽象的概念結構。因此，探索與調查，乃為有效的幾何教學之必要活動。Liben（1978），Mackay、Brazendale 與 Wilson（1972），及Thomas 與 Jamison（1975）的研究亦支持Piaget的觀點：透過豐富的幾何探索活動，兒童能主動建構歐氏幾何空間概念的參照架構。Piaget的認知建構觀點，亦為van Hiele發展幾何思考的發展層次與教學模式之重要參考（Hiele, 1986）。

相對地，Piaget以心理學為基礎所發展的幾何認知理論，亦有學者提出批判。例如：Clements 與 Battista（1992），Clements（2003），Pegg 與 Davey（1998）認為幾何概念的發展，未必循Piaget所提的「拓樸為先」（topological primacy theory）發展順序。而且，Hiele亦指出Piaget研究的缺憾，例如：兒童如何學習幾何、語言在兒童發展幾何概念的功用與影響等議題，皆被Piaget的研究所忽視（Hiele, 1986）。

（二）Hiele的幾何思考發展與教學理論及其對美國幾何課程的啟示

van Hiele的幾何思考發展理論的研究背景，也是源自於1950年代的荷蘭幾何教育困境，批判其傳統的歐氏幾何教學困難（Gravemeijer, 1998），Hiele夫婦以格式塔心理學式（Gestalt-like）的視覺層次認知、Piaget的建構論與發展層次理論為基礎，結合他們對於幾何思考發展層次的觀點，投注心力探討幾何教學當如何與兒童的幾何思考發展連結（Hiele, 1986; Pegg & Davey, 1989, 1998）。

統整Hiele（1986, 1999）及其他學者的相關研究（例如：劉好，1998；Crowley, 1987; Fuys, Geddes & Tischler, 1988; Pegg & Davey, 1989, 1998），幾何思考的發展包含五個層次，教學亦可相應於此發展層次，包含五個階段。以下茲簡要論述其五個思考層次的特徵：1.層次0，視覺期。此階段的學生根據視覺觀察，認識物件的外表特徵與圖形輪廓；但是無法利用圖形的特徵或組成要素，來分析幾何圖形。2.層次1，描述與分析期。此階段的學生能分析圖形的特徵與組成要素，但是不能解釋特徵之間的關係，亦無法根據幾何定義解釋不同圖形之間的包含關係。3.層次2，非形式化演繹期。此階段的學生能瞭解圖形特徵的內在關係，運用構成圖形的各種要素與性質條件，作圖形包含關係的簡單推論；但是他們尚無法根據前提進行演繹證明。4.層次3，形式演繹期。此階段

的學生能瞭解不同圖形性質的內在關係，根據幾何定義與公設系統，使用演繹法，證明結果是否成立。5.層次4，嚴密的邏輯法則期。此階段的學生能理解、比較與分析公設系統之間的關係，使用各種演繹推論方法，推論各種抽象的幾何假設。

根據Hiele（1986）的觀點，上述幾何層次的發展，低階層次為發展高階層次之基礎，且其發展乃受教學之知識學習之影響而循序漸進，並非因年齡或生理成熟而推進其發展層次。而且，在幾何思考裡，符號與幾何表徵亦扮演重要角色。於第一階段，層次0－1與層次1，學生需學習使用幾何語言來命名與稱呼物件；於第二階段，層次1－2，學生需學習使用符號，來討論不同圖形之間的關係，例如：全等、相似與平行等；於第三階段，層次3－4，學生需學習使用形體的定義與幾何性質條件，以討論假設之演繹。在發展學生幾何思考的教學方面，學校的幾何課程與教學具有關鍵性的影響。教學者需提供包含幾何概念的結構化教材，透過詢問、引導探索、解釋說明、自由探索，以及整合等五個教學階段，以發展學生的幾何思考（Crowley, 1987, Hiele-Geldof, 1984; Hiele, 1986; ）。

Hiele根據其對於中學生幾何思考的研究，對其理論的幾何思考發展的前三層次，描述詳盡；但是由於中學生的幾何思考少見發展到其理論的最高層次，Hiele討論最高層次的幾何思考也較少（Crowley, 1987; Pegg & Davey, 1998）。雖然如此，Hiele的理論提供美國幾何課程與教學的啟示，可從NCTM的學校數學規準之文件得到印證。

第一，幾何教學需植基於學生的幾何知識，亦即直覺的知識與發展層次（Hiele, 1986）。據此，NCTM的文件強調「兒童對於二維與三維形、體的直覺與洞察力」是發展空間知覺重要的內涵（NCTM, 1989: 48），而且「學生需從圖形的整體外觀輪廓開始學習」（NCTM, 2000: 97）。幾何課程的發展與教學，需考量幾何思考「層次」（NCTM, 1989）與「自非形式思考進展到抽象思考」的幾何理解的心智特質（NCTM, 2000: 41）。在現代數學教科書的幾何教材部分，也根據Hiele的幾何發展層次理論設計活動（The University of Chicago School Mathematics Project, 2001a）。

第二，教學與教材的組織，必須包含幾何的基本觀念，因為這些基礎觀念的建構，將影響後續幾何思考層次的發展（Hiele-Geldof, 1984）。據此，NCTM建議：有效的幾何教學應包含「重要的數學概念」（NCTM, 2000），教師應「提供適當的材料與具結構性的學習環境」，以引導學生的幾何學習

（NCTM, 2000: 41）。此外，近年NCTM所出版的各種幾何教學活動，也可見其應用Hiele理論（例如：Grande & Morrow, 1993; Gavin et al., 2001）。

第三，語言對於概念性理解幾何的發展，是一個重要的影響因素（Hiele-Geldof, 1984; Hiele, 1986）。亦即，使用口語語言與溝通，可以促進兒童幾何概念的理解，進而提升幾何思考層次的發展。據此，NCTM的文件強調「數學是一種溝通」與使用符號與語言溝通數學概念（NCTM, 1989）、課室內的「討論」（NCTM, 2000），皆呼應Hiele的教學觀點。

van Hiele的理論對於小學至大學學生的幾何思考發展之論述，普遍獲得新近研究正向的肯定與支持（Burger & Shaughnessy, 1986; Clements & Battista, 1992; Clements, 2003），例如：

幾何思考的發展具有層次（Clements & Battista, 1992），而且幾何思考層次的區分，並非因年齡或生理成熟度，而是根據學生的幾何思考特質而區分（Burger & Shaughnessy, 1986; Crowley, 1987）。

相對地，學者們亦批判van Hiele對於幾何發展層次的描述，過於粗略，尤其對於年齡較小的兒童描述的精確度不足（Clements & Battista, 1992; Burger & Shaughnessy, 1986; Fuys et al., 1988; Pegg & Davey, 1998; Clements, 2003）。而且，Pegg 與 Davey（1998）及Fuys、Geddes與Tischler（1998）提出：在Hiele所提的第一個思考層次—視覺期發展之前，應有一個更基礎的發展階段。

（三）荷蘭RME的幾何課程對美國幾何課程與教學的啟示

RME發展於1970年代的荷蘭，其哲學觀乃植基於H. Freudenthal（1905-1990）的觀點——數學是人類的生活活動（Gravemeijer, 1994, 1998），其亦呼應van Hiele的理論（Gravemeijer, 1990, 1994, 1998）。Freudenthal（1971, 1973）認為數學活動是人類解決問題、尋找問題與數學化的活動，數學教育應從對兒童具有真實意義的問題著手，進行數學化活動。在1970年代的RME幾何教學，猶如對傳統的中等學校歐氏幾何課程的反動，1980—1990年間，RME取向的課程與教學，方往下延伸到小學。

RME的幾何教育核心理念——「以幾何的觀點看世界」，在於統整真實生活經驗與可經驗地真實情境來學習幾何（Gravemeijer, 1998）。幾何教學需與日常生活情境問題密切關連，因為幾何感（geometric sense）的發展，源自於兒童的理解，其乃統整自日常生活事物的觀察與經驗，例如：視線、影子、心理影像、側視、俯視與地圖等關係之結構（Gravemeijer, 1998）。因此，學生需透過數學的察覺、概念與程序的再創造，將數學知識與問題解決程序數學化

(Gravemeijer, 1990)。幾何課程與教學即踐履上述理念(Gravemeijer, 1990, 1994, 1998)：(一)以真實生活問題讓學生數學化；(二)教材需結合學生的日常生活與幾何發展層次，並將教材作良好組織，提供給學生；(三)學生的非形式性的知識或策略可以成為其幾何學習與空間推理的基礎。

RME對美國幾何課程的啟迪，可見之於許多幾何教學活動與建議。例如：根據NCTM的學校數學規準設計的三－五年級的幾何活動設計，皆可顯見Freudenthal(1973)的觀點

「幾何為空間的瞭解……即兒童所居住、呼吸及移動的空間。為了能在此空間居住、呼吸及移動得更好，兒童需學習去認識、探索與征服它」。(引自Gavin et al., 2001: vii)

。此外，數學教育學者所發展的一系列五－八年級的《情境中的數學》(Mathematics in Context Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8)教材(National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Freudenthal Institute, 1997-1998)，以及教科書《情境中的現代數學》(Contemporary mathematics in context—A unified approach)(Core-Plus Mathematics Project, 2003)皆植基於RME的教育理念而設計。

1950－1980年代，Piaget與van Hiele的幾何思考發展理論及荷蘭RME的幾何教育，其理論的共識：兒童的幾何思考雖非形式化，但具有主動學習空間的能力，因此，幾何教學需考量兒童的幾何認知與思考，從生活具體事物的觀察操作著手認識空間與形體，提供具結構性符合兒童幾何思考層次的教材，皆啟迪NCTM所發行的幾何課程與教學文件，強調幾何形體與關係、位置與空間關係、形變與對稱，以及視覺與空間推理，建議幾何教學需以問題解決、推理、溝通與連結(NCTM, 2000)。

二、NCTM的學校數學規準文件對美國小學幾何課程的影響與評論

自1990年代至二十一世紀早期，所發行的學校數學規準文件，幾乎成為美國數學課程與教學改革的基礎，其對幾何課程的影響與批判，分別析述如下。

(一)在推動小學幾何課程與教學方面，NCTM的努力與影響，可見之如下：1.為確實有效地幫助教師落實上述幾何教學目標，NCTM提供各種幾

何活動設計作為參考（例如：Grade & Morrow, 1993; Gavin et al., 2001）。2.NCTM的幾何教學建議，被多家教科書出版公司採納，並參考設計以幾何教學活動（例如：Mathematics Plus, 1992; Heath Mathematics Connections, 1994; UCSMP, 2001a, 2001b, 2001c, 2001d, 2002）。3.愈來愈多的學者根據NCTM的幾何教學理念，結合電腦科技與動畫軟體，設計各種幾何教學方案（Clements, Battista, Sarama & Swaminathan, 1997; Clements, Battista, Sarama, Swaminathan, & McMillen, 1997），推展幾何教師的培育計畫（Swofford, Jones, & Thornton, 1997）。4.NCTM的文件，亦透過各種國際交流與國際學術研討會，提供國際數學教育學者與課程發展學者參考（莊月嬌，2005；鍾靜，2003）。

（二）支持NCTM文件的論述觀點之實證研究不足：NCTM文件建議的課程與教學觀點，並非皆完全被實證研究支持（Hiebert, 2003），而且對於各數學主題所提的規準與數學能力論述，是否適當，其數學能力能否被確實評量，需要進一步的研究檢驗（Lesh, Lovitts, & Kelly, 2000），其中包含論戰最激烈的「數學戰爭」，批判NCTM所提的問題解決與真實生活問題，對數學抽象推理能力培養效果（Schoenfeld, 2004）。

（三）中小學生的幾何學習成就仍未見顯著提升：1990年以來，美國中小學生在國際數學成就評量上，幾何成就未見顯著提升。Mullis等（1997）分析1995年的TIMSS（Trends in International Mathematics and Science Study）評量結果，發現美國三－四年級學生在辨認二至三維形體的名詞、屬性，以及使用視覺確認，圖形經翻轉後是否全等；但是在一些運用視覺的問題，則表現不理想，例如：找出一個立方體的邊數等。而且，美國八年級學生在1999年的國際數學與科學趨勢研究的再檢視的幾何成績，也只近於參與評量的38個國家的國際平均分數。因此，學生的空間推理尚待有效的幾何課程與教學來培養（Kouba et al., 1988; Mullis et al., 1997），加強與檢視教師的幾何教學知能尚待研究。

肆、我國小學幾何教育發展及近代美國幾何課程發展的啟示

我國自1922年制訂小學教育修業為6年的「壬戌學制」，算術為小學數學之課目（王鳳喈，1977），繼而於1929年教育部頒布《小學課程暫行標準》（教育部，1993）。為使課程順應世界潮流與時代需要、切合兒童身心發展之需要，小學課程標準分別於1931年、1936年、1942年、1948年、1962年、1968年、1975年、1993年、2000年及2003年作修訂。

在小學幾何課程方面，綜覽我國近90年來的小學數學課程標準，1942年、1962年及1968年的國民學校課程標準的算術課程標準，幾何主題並未被明列於課程目標（教育部，1952，1962，1968），1961年以前的小學算術課程標準，偏重「數」的內容主題，形的概念乃被融入實測的領域。1968年版的課程標準，幾何教材份量低且偏重平面圖形之探討（林秀瑾、張英傑，2005），至1975年，「圖形與空間」的主題方被明列於國小數學課程標準（教育部，1975）。亦即，小學幾何的主題與「數」與「量」的領域主題並重，始於1975年的課程標準。

在教育思潮方面，1920年代，我國教育制度與理念，受美國學制與杜威的實用主義思想影響深刻（毛禮銳等，1989），幾何課程亦非小學數學課程被重視的主題。1968年的課程修訂，數學課程與教學深受美國MSG數學課程影響（王克蒂、譚克平，1997），例如：集合基本觀念的介紹；在實測的教材包含幾何內容，包含：三角形與圓的畫法；比較具體實物之形狀；垂直、水平、直角的意義、並繪製長方形與正方形；利用量角器畫角；直角三角形、平行四邊形、梯形及高之認識與畫法；長方體、正方體及圓柱體之認識等（教育部，1968）。此套課程仿美國MSG課程，由內容過度抽象，導致施行困難（莊月嬌，2005），其在教學實務上的窒礙難行，亦類似於美國MSG教學實務之困難。

1975年，教育部公布六十四年版的課程標準，並由國立編譯館統一發行數學教科書。此套數學教材雖然將幾何列為課程主題之一，但是根據陳梅生等（1987）的分析，計算的分量占有相當大的比例（34.1%），幾何只占16.3%，而且與1980年美國Boston市小學幾何課程所包含的概念作比較，一些幾何概念包含於美國教材但卻未包含於我國教材者，例如：封閉區域的裡外；

在某一參考點「之上」、「之下」、「之內」等字；判別上、下、左、右；相似圖形等（陳梅生等，1987）。此外，此套課程標準在教材與教學建議上，參考Piaget 與教育心理學者Bruner的認知發展理念（Bruner, 1960），強調重視兒童的認知思考發展，教材安排從具體操作到半具體，繼而到抽象表徵的學習（王克蒂、譚克平，1997）。但是在學校教學實務上，多數教師反應此套教材過多，部分教材偏難與生活情境脫節，運算技能的熟練仍為數學教學之重心，學生非常熟練計算技巧，也善於記憶數學公式與事實知識（周筱亭，1994）；但是有關幾何知識應如何根據上述心理學理論作教材設計，提供符合學生幾何思考發展的教材等議題，受到關注的程度仍相當有限。

在1993－2003年之間，數學課程標準修訂、數學教科書由國立編譯館統一編製（統編版），開放民間廠商編製（審定版）、民間團體推行教改，繼而教育部又頒布九年一貫暫行綱要（教育部，2000），數學課程變化快速且缺乏審慎的試驗研究，可謂數學改革與變動的複雜期（黃幸美，2005；鍾靜，2005）。1993年版課程標準的國小幾何課程與教學，參研美國NCTM的幾何課程規準（NCTM, 1989）、Piaget及Hiele的理論，強調兒童本位的幾何教學（劉好，1994；1998）。幾何教材內容包含：形體外觀之辨識、二維與三維形體的建置與轉換、形體之構成要素及其關係、形體性質之探究及應用推理解題，以及空間方位（林秀瑾、張英傑，2005；莊月嬌，張英傑，2006）。

檢視1993年版課程標準的幾何課程與教學，可謂符合時代潮流，但是幾何教材在各審定版數學教科書所占的分量，也因版本不同而呈現差異。林秀瑾與張英傑（2005）依據不同時期小學數學課程標準設計的幾何教材在數學課程所占分量的分析，1958年版的幾何教材，在數學教科書中所占的比例為8.87%，1975年版的幾何教材占 14.37%，1993年版的幾何教材只占10.26%。由此可見，在數學教科書由國立編譯館統一編印時期，幾何教材自1968－1975年呈顯著增加的現象；但是弔詭的是，在1993年，幾何教材卻減少相當大的比例，此重現象與國際發展的趨勢相左。

1993年版的國小數學課程標準與審定版的教科書，使用經過數年，受到學界與民間團體教改的推力，教育部於2000年公布九年一貫暫行綱要，並於2003年底，公布數學領域正式綱要（鍾靜，2005）。此九年一貫的課綱，將幾何列為數學五大核心主題之一，而且幾何教材內容與教學觀點與1993版課程標準相似，此外，並列舉各階段學生的能力指標（教育部，2003）。

相較於過去的小學數學課程標準，幾何教材與能力指標明示在九年一

貫課綱，誠顯示此主題課程的被重視與其地位的確定。根據莊月嬌與張英傑（2005）針對九十三學年度教育部審定合格之四家教科書版本——康軒、南一、牛頓與翰林版本作分析，當前根據九年一貫課綱發展的小學幾何課程，在「形體性質之探究並應用其性質解題」與「形體組成要素之辨識、發現與應用」約佔有將近30%以上的份量，而且至少有40%以上的教材內容取自生活情境，顯示當前幾何課程所強調的幾何概念，符合Van Hiele對小學階段幾何教材設計的建議——視覺辨識與分析是小學兒童幾何發展的重要階段。而且，李豪文（2008）針對九十四、九十五、九十六學年度教育部審定合格的四個版本——康軒、南一、國家教育研究院籌備處與翰林版本的一—三年級數學教科書，分析其幾何教材組織，及其與九年一貫課綱的幾何主題符合性的程度，研究指出：教科書的幾何教學活動與內容設計，依循Piaget的幾何認知理論及Van Hiele的幾何思考層次發展理論，提供系列性的結構，幾何內容隨著年級的遞增，多統整實作與測量，活動內容也與學生經驗關連。據此研究，依九年一貫數學課程綱領發展的小學幾何課程，誠強調以學生為學習主體、生活經驗為重心，此與課程與教學理念與美國NCTM的幾何課程規準（NCTM, 2000）相呼應。

相對地，深究當前的九年一貫課程綱領內涵，其論述乃倉促成軍，缺乏實證研究支持，產生諸多理解歧異與解讀紛爭（張芬芬、陳麗華、楊國揚，2009），而且，根據九年一貫課綱發展的幾何課程與教學，猶存有值得檢視之批判如下：

第一，相較於1993年版偏重理解與認知發展的數學課程，九年一貫數學課程領域偏重計算能力（鐘靜，2005），雖然幾何形體的特質辨識在教材中占有高比例，但是在教學實務，是否流於幾何形體性質的記憶，培養兒童對圖形與空間具知覺性、操作性、構圖性、論述性的了解，掌握空間基本性質與幾何形體論證能力等目標（教育部，2001），是否真正落實，值得後續研究檢視。

第二，當前審定版教科書之幾何教材，空間方位與空間視覺化的概念所占百分比皆低於10%，而且內容偏重方位教材或柱體與錐體的視圖、透視圖，以及製作展開圖（莊月嬌、張英傑，2005）。此減少空間概念的現象，異於美國NCTM的幾何學習目標。在各國益加重視幾何教學的情勢下，九年一貫的幾何課程減少空間概念的現象，是否影響兒童的空間視覺能力，需要進行實證研究。

第三，九年一貫的幾何課程與教學建議，多所參考數學教育學者與國外幾

何課程理論與文獻（李豪文，2008；張英傑、陳創義，2003），國內有關幾何教材的研究仍相當少（台灣省國民學校教師研習會，1995），缺乏我國學童幾何思考的實證研究支持，而且，教師對於施行幾何課程與教學的知能訓練，猶有不足之憾（鍾靜，2003）。此問題與美國數學教育學者對全美數學教師協會的學校數學規準文件之批判類似。

第四，九年一貫課程將小學幾何課程分成三個學習階段，也明訂能力指標（教育部，2003）。但是，自課程施行至今，尚未針對各階段學生是否具備所設定的能力作評量，而且，各學習階段所訂定的能力指標，是否切合課程目標與相關的實證研究，皆須進一步檢視。美國以全美數學教師協會對四年級學生評量學習成果，此評量對於升學考試文化盛行的台灣未必適合，但是如何設計與使用公正客觀的評量，檢驗學生的能力養成情形，值得學者積極研究探討。

回顧近代我國的幾何課程發展，其變革乃隨著全國性的教育改革節奏變動，每波教育改革背後的政治操控力量不容忽視。例如：台灣自1987年政治解嚴以來，短短22年間（1987－2009年），教育部長更換了5人，此政治決策人事更迭之影響，可見一斑（張芬芬等，2009）。由此可見，幾何課程發展承受政治社會壓力影響，無論是變法圖強或解救危機，此股壓力在我國與美國皆存在。然而，當政治與社會團體只關心數學教育的表象，而非實質地改善學生的教育機會（Westbery, 2003），或課程與教學的質與量的分配（莊月嬌、張英傑，2005），對幾何教育的品質恐非提升，反可能招致負面影響（周祝瑛，2003；張芬芬等，2009）。

統整我國與美國於1950年以後小學幾何課程的地位、教材之重要內容、兩國幾何課程發展趨向之比較，整理成表一所示。從附錄表1的兩國幾何課程內涵與比較，可見我國與美國的小學幾何課程的發展，其皆是從被忽視、附屬於測量教材，進而成為數學課程的主題領域。就幾何課程設計與教學理念而言，兩國皆重視兒童的幾何思考發展，強調教學活動需與學生的生活經驗相關連。兩國的小學幾何課程發展，最顯著的差異在於：美國將幾何課程改革，視如解決國家危機的一種解藥（Fey & Graeber, 2003），進而採取更積極的改革行動，例如：增加幾何課程的份量（莊月嬌，2005），提供在職教師的幾何教學知能訓練，以及以全國性的教育評量，檢視課程與教學的成效。雖然我國的國情異於美國，但是細究1993年版的課程標準與2003年的九年一貫課程，幾何教材的份量卻呈減少的現象。產生此差異的原因，可能由於我國學生歷年來在國際性的數學評量，皆有優異的成就表現，因此，幾何課程與教學非數學課程改革

的焦點。但是，細究我國學生在國際測驗上的解題表現，學生們在幾何概念與測量問題的解題表現，相較於其他領域問題的解題表現，其分數常為最低落者（林碧珍、蔡文煥，2003；Mullis, Martin, & Foy, 2008），而且學生對圖形的定義記憶清楚，可是對圖形彼此間的關係卻不清楚（台灣省國民學校教師研習會，1995）。此現象亦提醒，我國的幾何教育不應僅滿足於當前的學生成就表現，幾何課程與教學尚須根據實證研究，加強質與量的課程設計。

除此以外，近年來美國為強化其國民數理科學知能，在課程改革的推動下，幾何課程日益受重視，教材份量遞增，並鼓勵落實以發展兒童幾何思考為基礎的教學。由此可見，幾何概念與空間推理能力，誠為培養數理科學知能的要素。為提升我國國民教育階段之幾何教育品質，小學幾何教材之份量比例、內容及教學取向，當與美國並駕齊驅，並進一步強化教師的幾何教學專業知識與能力。

伍、結論與對幾何課程與教學的建議

課程改革首重回顧過去的發展軌跡、檢視現在的設計與施行問題，方能規劃與展望未來的課程。從研閱文獻，可發現幾何教育的目標，在我國與美國皆因國家社會之發展所需，以及學術研究對社會文化價值的轉變，其課程與教學亦幾經修訂。雖然政治與社會深刻影響數學教育改革，但是數學、心理與教育研究者所提供的實證研究成果與理論訊息，卻是政治與社會團體據以辯證討論的參考依據。我國與美國從1920年迄今的數學教育改革，深受數學、心理與教育學者之研究與教育思潮影響，此顯示研究者對於社會進步與教育革新的責任與影響力。雖然政治與社會團體未必通盤瞭解教育實質問題，也常以通泛性與口號式的語言喚起注意力，卻常造成各說各話的爭議，例如：培養學生「帶著走」的能力（教育部，2003），在幾何課程與教學，意指哪些能力；幾何主題的「能力指標」與「基本能力」之間如何精確區分等等議題，皆是有待研究結果再予確定。縱然如此，學者根據實證研究所提供的明確、精細的資料訊息，卻可以澄清政治與社會團體的認知之重要來源。因此，數學、心理與教育學者需以長期、有系統的研究，提供精確的研究成果與建議，以助益政治與社會團體確實瞭解教育實況問題，發展有效改善的政策。

此外，針對增進學生幾何思考能力，幾何課程與教學當需努力的方向包含

以下三點：第一，幾何課程是數學課程重要的領域，課程的發展與設計原則，首需含括充分的幾何知識，例如：幾何形體的性質、物理空間、視覺、空間關係及理論分析與證明，次則課程設計需植基於兒童的心智發展與實證研究，所發展的教學方案方能確實幫助學生學習。第二，數學、心理與教育學者需投入有系統的幾何課程研究，一方面擴展其專業領域視野，並根據實證研究結果，修訂當前的課程綱領不適當之處，此也是解決課程綱領缺乏實證支持之弊的法門。而且，學者們當根據實證研究，確實將課程綱要與規準的各種理念、能力指標，釋義其內涵，並轉化成導向學生建構幾何認知的具體可行之策略，並發展具公正客觀的幾何教育評量工具。第三，教師是課程的執行者，幾何課程能否有效地施行於數學課室，教師的幾何知識與幾何教學能力乃為影響關鍵（Swafford, Jones, & Thornton, 1997）。因此，加強師資幾何課程與教學的知能訓練，以及數學教育學者、課程與教科書設計者與教學實務工作者的多元對談，讓透過在職訓連與多元溝通，幾何教育理論得以落實於課室教學，是為當務之急。

參考文獻

- 王鳳喈（1977）。**中國教育史**（台十五版）。台北市：正中。
- 王克蒂、譚克平（1997）。國小數學課程發展回顧。載於國立台灣師範大學科學教育研究所（主編），**趙教授金祈榮退學術研討會論文集：我國科學教育的回顧與前瞻**（頁451-472）。台北市：國立台灣師範大學科學教育研究所。
- 毛禮銳、邵鶴亭、瞿菊農（1989）。**中國教育史**。台北市：五南。
- 伍振鷺（1992）。**教育哲學**（四版）。台北市：師大書苑。
- 李豪文（2008）。從課程組織探討一到三年級數學教科書之幾何內容。台北市立教育大學課與教學研究所碩士論文，未出版，台北市。
- 吳韻儀（1995）。澳洲教改——能力導向。**天下雜誌**，**171**，126-172。
- 林碧珍、蔡文煥（2003）。四年級學生在國際教育成就調查試測的數學成就表現。**科學教育月刊**，**258**，2-20。
- 林秀瑾、張英傑（2005）。台灣地區三十年來國編版小學幾何教材內容範圍分析研究。**國立台北教育大學學報**，**18**（2），65-92。
- 周筱亭（1994）。數學新課程的趨勢。**研習資訊**，**11**（3），28-50。
- 周祝瑛（2003）。誰捉弄了台灣教改。台北市：心理。
- 高廣孚（1989）。**教育哲學**。台北市：五南。
- 莊月嬌（2005）。九年一貫課程小學幾何教材內容分析研究。國立台北師範學院數理教育研究所碩士論文，未出版，台北市。
- 莊月嬌、張英傑（2006）。九年一貫課程小學幾何教材內容與份量之分析。**國立台北教育大學學報**，**19**（1），33-66。
- 教育部（1952）。**國民學校課程標準**。台北市：商務印書館。
- 教育部（1962）。**國民學校課程標準**。台北市：商務印書館。
- 教育部（1968）。**國民學校課程標準**。台北市：商務印書館。
- 教育部（1975）。**國民小學課程標準**。台北市：正中。
- 教育部（1993）。**國民小學課程標準**。台北市：教育部。
- 教育部（2003）。**國民中小學九年一貫課程綱要——數學綱要**。台北市：作者。
- 陳梅生、吳德邦、李源順（1987）。**中美國民中小學數學課程比較**。台北縣：

台灣生國民學校教師研習會。

黃幸美（2005）。連結生活化情境與生產性練習的數學教學之探討。**教育資料與研究**，64，89-101。

張英傑、陳創義（2003）。九年一貫數學學習領域綱要諮詢意見——幾何篇。**教育部九年一貫數學學習領域綱要諮詢意見小組**。2010年2月2日取自，http://140.122.140.4/~cyc/_private/mathedu/me9/nineyear/index.htm

張芬芬、陳麗華、楊國賜（2009）。課程改革理念、課程綱要與教科書轉化議題—台灣觀點。載於台北市立教育大學舉辦之「東亞地區課程改革脈絡下課程轉化議題國際學術研討會—2009年課程改革理念、課程綱要與教科書轉化議題會議手冊」（頁7-38），台北市。

葉學志（1985）。**教育哲學**。台北市：三民。

台灣省國民學校教師研習會（1995）。數學科新課程「量與實測」及「圖形與空間」教材設計架構。輯於台灣省國民學校教師研習會舉辦之「八十三年度國民小學新課程數學科研討會論文暨會議實錄專輯」（頁189-222），台北縣。

鐘靜（2003，10月）。論九年一貫課程數學領域之暫行綱要。論文發表於國立台灣師範大學課程綱要實施檢討與展望研討會，台北市。

鐘靜（2005）。論數學課程近十年之變革。**教育研究月刊**，133，125-134。

謝如山、謝名起、謝名娟（譯）（2002）。C. A. Riedesel, J. E. Schwartz, & D. H., Clements著。**數學科教材教法**（Teaching elementary school mathematics）。台北市：五南。

劉好（1994）。國民小學數學科新課程中幾何教材的設計。載於台灣省國民學校教師研習會主編，**國民小學數學科新課程概說（低年級）**（頁98-108）。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。

劉好（1998）。平面圖形教材的處理。載於台灣省國民學校教師研習會（主編），**國民小學數學科新課程概說（高年級）**（頁194-213）。台北縣：台灣省國民學校教師研習會。

盧銘法（1995）。國小中高年級學生幾何概念之分析研究——以 van Hiele 幾何思考水準與試題關聯結構分析為探討基礎。國立台中師範學院國民教育研究所碩士論文，未出版，台中市。

Brownell, W. A. (1947). The place of meaning in the teaching of arithmetic. *The Elementary School Journal*, 47, 256-265.

- Brown, M. (1996). FIMS and SIMS: The first two IEA international mathematics surveys. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 3, 193-212.
- Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 31-48.
- Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Carpenter, T. P., Coburn, T., Reys, R. E., & Wilson, J. W. (1975). Results and implications of the NAEP mathematics assessment: Elementary school. *The Arithmetic Teachers*, 22, 438-450.
- Carpenter, T. P., Coburn, T., Reys, R., & Wilson, J. (1976). Notes from National Assessment: Recognizing and naming solids. *Arithmetic Teacher*, 23, 62-66.
- Chazan, D., & Yerushalmy, M. (1998). Charting a course from secondary geometry. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 67-90). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). NY: Macmillan.
- Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., & Swaminathan, S. (1997). Development of students' spatial thinking in a unit on geometric motions and area. *The Elementary School Journal*, 98, 171-186.
- Clements, D. H., Battista, M. T., Sarama, J., Swaminathan, S., & McMillen, S. (1997). Students' development of length concepts in a Logo-based unit on geometric paths. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 70-95.
- Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Crowley, M. L. (1987). The Van Hiele model of the development of geometry thought. In A. P. Shulter & M. M. Lindquist (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12. 1987 Yearbook* (pp. 1-16). Reston, VA: National Council of

Teachers of Mathematics.

- Coxford, A. F. (2003). Mathematics curriculum reform: A personal view. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 599-621). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Core-Plus Mathematics Project (2003). *Contemporary mathematics in context—A unified approach, Course 1*. NY: McGraw-Hill
- Del Grande, J., & Morrow, L. (1993). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics addenda series, grades K-6: Geometry and spatial sense*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Donoghue, E. F. (2003). Algebra and geometry textbooks in twentieth-century America. In G. M. A. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics* (pp. 329-398). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fasanelli, F. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. Van Mannen (Eds.), *History in mathematics education—An ICMI study* (pp. 1-38). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Fey, J. T., & Graeber, A. O. (2003). From the New Math to the agenda for action. In G. M. A. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics* (pp. 521-558). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Foshay, A. W. (1962). Brief history of IEA. In A. W. Foshay, R. L. Thorndike, F. Hotyat, D. A. Pidgeon, & D. A. Walker (1962). *Educational achievement of thirteen-year-olds in twelve countries*. Hamburg: UNESCO Institute for Education. Retrieved October 30, 2007, from http://www.iea.nl/brief-history_of_iea.98.html
- Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413- 435.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, the Netherlands: Riedel.
- Freudenthal, H. (1975). Pupils' achievements internationally compared—the IEA. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 127-186.
- Gravemeijer, K. P. E. (1990). Realistic geometry instruction. In K. P. E.

- Gravemeijer, M. van den Heuvel, & L. Streefland (Eds.), *Contexts free productions tests and geometry in realistic mathematics education*. Utrecht, the Netherlands: Researchgroup for Mathematical Educational Education and Educational Computer Centre, State University of Utrecht.
- Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, the Netherlands: CD β Press.
- Gravemeijer, K. P. E. (1998). From a different perspectives: Building on students' informal knowledge. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 45-66). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Gavin, M. K., Belkin, L. P., Spinelli, A. M., St. Marie, J., Cuevas, G. J., & House, P. A. (2001). *Principles and standards for school mathematics navigations series: Navigating through geometry in grades 3-5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Garrett, A. W., & Davis, Jr, O. L. (2003). A time of uncertainty and change: School mathematics from world war II until the new math. In G. M. A. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics Vol. 1*, (pp. 493-519). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Heath Mathematics Connections (1994). *Connections, —K-8 Level 4*. Washington, DC: Heath and Company.
- Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM Standards. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 5-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- van Hiele-Geldof, D. (1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. In D. Fuys, D., Geddes, & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and P. M. van Hiele. Prepared as part of the research project: An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. Brooklyn, NY: Brooklyn College. (ERIC Document Reproduction Service No. ED287697)
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight—A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

- van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play (Geometry and geometric thinking). *Teaching Children Mathematics*, 5, 310-317.
- Jackson, S. B. (1960). Geometrical concepts for the elementary school child. In School Mathematics Study Group (Ed.), *Report of an orientation conference for SMSG experimental centers* (pp. 27-31). New Haven, Conn: Yale University Press.
- Kenney, P. A., & Kloosterman, P. (2007). The 2003 NAEP mathematics assessment: An ending and a beginning. In P. Kloosterman & F. K. Lester Jr. (Eds.), *Results and interpretations of the 2003 mathematics assessment of the national assessment of educational progress* (pp.1-22). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kilpatrick, J., W., Martin, W. G., & Schifter, D. (2003). *A research companion to principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kouba, V. L., Brown, C. A., Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Silver, E. A., & Swafford, J. (1988). Results of the fourth NAEP assessment of mathematics: Measurement, geometry, data interpretation, attitudes, and other topics. *Arithmetic Teacher*, 35, 10-16.
- Lappan, G. (1999 December, 3). Geometry: The forgotten strand. *NCTM News Bulletin*.
- Lappan, G., & Wanko, J. J. (2003). The changing roles and priorities of the federal government in mathematics education in the United States. In G. M. A. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics*, Vol. 2, (pp. 897-929). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Leahey, T. H., & Harris, R. J. (1997). *Learning and cognition*. (4th ed). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Lesh, R., Lovitts, B., & Kelly, A. (2000). Purpose and assumptions of this book. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp.17-33). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Liben, L. S. (1978). Performance on Piagetian spatial tasks as a function of sex, field dependence, and training. *Merrill-Palmer Quarterly*, 24, 97-110.

- Mackay, C. K., Brazendale, A. H., & Wilson, L. F. (1972). Concepts of horizontal and vertical: A methodological note. *Developmental Psychology*, 7, 232-237.
- Mathematics Plus (1992). *Mathematics plus. grade 5*. NY: Harcourt Brace Jovanovich, Inc.
- McDonnell, L. M. (1995). Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 17, 305-322.
- Michalowicz, K. D., & Howard, A. C. (2003). Pedagogy in text: An analysis of mathematics texts from the nineteenth century. In G. M. A. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics*, Vol. 1, (pp. 77-109). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Beaton, A. E., Gonzalez, E. J., Kelly, D. L., & Smith, T. A. (1997). *Mathematics achievement in the primary school years: IEA's third international mathematics and science study (TIMSS)*. Chestnut Hill, MA: Boston College, Center for the Study of Testing, Evaluation Policy.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (with Olson, J. F., Preuschoff, C., Erberber, E., Arora, A., & Galia, J.)(2008). *TIMSS 2007 international mathematics reports: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. Retrieved November 9, 2009, from <http://timss.bc.edu/timss2007/mathreport.html>
- National Commission on Excellence in Education (1983). *A nation at risk: The imperative for educational reform.—A report to the Nation and the Secretary of Education, United States Department of Education*. Washington, DC: Author.
- National Center for Educational Statistics (NCES)(2004). *Highlights from the trends in international mathematics and science study (TIMSS) 2003*. Retrieved June 2, 2007, from <http://nces.ed.gov/pubsearch/pubsinfo.asp?pubid=2005005>
- National Center for Educational Statistics (NCES)(2005). *NAEP questions*. Retrieved March 1, 2007 from <http://nces.ed.gov/nationsreportcard/itmrls/>
- National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action*. Reston, VA: Nuthor.

- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Center for Research in Mathematical Sciences Education (NCRMES) & Freudenthal Institute. (1997-1998). *Mathematics in context: A connected curriculum for grades 5-8*. Chicago: Encyclopædia Britannica Educational Corporation.
- Payne, J. N. (2003). The new math and its aftermath, grades K-8. In G. M. A. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics* (pp. 550-598). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pegg, J., & Davey, G. (1989). Clarifying level descriptors for children's understanding of some basic 2-D geometric shapes. *Mathematics Educational Research Journal*, 1, 16-27.
- Pegg, J., & Davey, G. (1998). Interpreting students understanding in geometry: A synthesis of two models. In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp.109-135). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Pellegrino, J. W., Jones, L. R., & Mitchell, K. J. (1999). *Grading the nation's report card: Evaluating NAEP and transforming the assessment of educational progress*. Retrieved October 30, 2007 from http://www.nap.edu/catalog.php/record_id=6296
- Price, G. B. (1960). The revolution in mathematics. In School Mathematics Study Group (Ed.), *Report of an orientation conference for SMSG elementary school experimental center* (pp. 5-11). New Haven, Conn: Yale University Press.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1956). *The child's conception of space*. F. J. Langdon & J. L. Lunzer trans.). London: Routledge & Kegan Paul. (Original work published in 1948)
- Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. NY: Basic Books.

- Porter, A. (1989). A curriculum out of balance: The case of elementary school mathematics. *Educational Researcher*, 18, 9-15.
- Schmidt, W. H., & McKnight, C. C. (1995). Surveying educational opportunity in mathematics and science: An international perspective. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 17, 337-353.
- School Mathematics Study Group (MSG) (1960). *Report of an orientation conference for MSG experimental centers*. New Haven, Conn: Yale University Press.
- School Mathematics Study Group (MSG)(1961a). *Mathematics for the elementary school [Grade 4-6]*. New Haven, Conn: Yale University Press.
- School Mathematics Study Group (MSG)(1961b). *Report of a conference on future responsibilities for school mathematics*. Stanford, CA: The Board of trustees of the Leland Stanford Junior University.
- Schoenfeld, A. H. (2004). *The math wars*. *Educational Policy*, 18, 253-286.
- Steen, L. A. (1994). *Standards for school science and mathematics: Background, purposes, and goals, principles*. Retrieved October 31, 2007, from <http://www.stolaf.edu/people/steen/papers/standards.html>
- Stevenson, H. W., Lee, S.-Y., Chen, C., Stigler, J. W., Hsu, C.-C., & Kitamura, S. (1990). Contexts of achievement. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 221 (55), 1-2.
- Stevenson, H. W., Lee, S. Y., & Stigler, J. W. (1990). *Mathematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Stone, M. H. (1961). The nature of school mathematics in the United States. In School Mathematics Study Group (MSG)(Ed.), *Report of a conference on future responsibilities for school mathematics* (pp. 19-21). Stanford, CA: The Board of trustees of the Leland Stanford Junior University.
- Swafford, J. O., Jones, G. A., & Thornton, C. A. (1997). Increased knowledge in geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 467-483.
- Thomas, H., & Jamison, W. (1975). On the acquisition of understanding that still water is horizontal. *Merrill-Palmer Quarterly*, 21, 31-44.

- The University of Chicago School Mathematics Project (2001a). *Grades K-3 everyday mathematics: Teachers' reference manual*. Chicago, IL: Everyday Learning Cooperation.
- The University of Chicago School Mathematics Project (2001b). *First grade everyday mathematics*. Chicago, IL: Everyday Learning Cooperation.
- The University of Chicago School Mathematics Project (2001c). *Second grade everyday mathematics*. Chicago, IL: Everyday Learning Cooperation.
- The University of Chicago School Mathematics Project (2001d). *Third grade everyday mathematics*. Chicago, IL: Everyday Learning Cooperation.
- The University of Chicago School Mathematics Project (2002). *Fourth grade everyday mathematics*. Chicago, IL: Everyday Learning Cooperation.
- Treffers, A. (1991). Innumeracy at primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 309-332.
- Weiss, I. R., Knapp, M. S., Hollweg, K. S., & Burrill, G. (2001). *Investigating the influence of standards: A framework for research in mathematics, science, and technology education*. Washington, DC: National Research Council.
- Westbury, I. (1992). Comparing American and Japanese achievement: Is the United States really a low achiever? *Educational Researcher*, 21, 18-24.
- Westbury, I. (2003). Evaluating a national curriculum reform. In P. Haug & T. A. Schwandt (Eds.), *Evaluating educational reforms—Scandinavian perspectives* (pp. 189-207). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Woodward, J. (2004). Mathematics education in the United States: Past to present. *Journal of Disabilities*, 37(1), 16-31.

附錄

表1 我國與美國幾何課程於不同時期的地位、影響課程來源及發展趨向比較表

年代	美國		我國		發展趨向比較
	影響課程來源	課程地位	影響課程來源	課程地位	
1950 以前	社會實用思潮。	附屬於測量問題。	1948年以前之小學課程標準。	附屬測量問題。	幾何皆被忽視。
1950 1970	數學研究小組課程。	1.基礎幾何概念、幾何語言與探索的直覺經驗受重視。 2.幾何與測量連結。	1948年、1962年及1968年之小學數學課程標準。	1.形的主題未被明列於課程標準，乃融入測量問題。 2.形的分量低且偏重平面圖形。	形的概念已在美國小學課程被重視；在我國則尚未重視。
1970 1980	返回基本運動。	幾何為十大基本數學技巧之一，但其地位較數學研究小組課程時期被淡化	1975年之小學課程標準。	1.圖形與空間明列於課程標準。 2.數概念仍為課程重心，形的分量比例仍低。	幾何皆被列為學校數學主題之一。
1980 迄今	全美數學教師協會的學校數學規準。	1.幾何為學校數學五大主題之一。 2.幾何教材內容：探討空間物件、幾何關係、變換公理，以及空間感。	1.1993年小學課程標準。 2.2000年九年一貫課程綱要。	1.幾何教材在1993年課程標準版之教科書呈分量減少之現象。 2.幾何與能力指標明示在九年一貫課綱。 3.幾何教材內容：探討形體外觀之辨識、二維與三維形體的建置與轉換、形體之構成要素及其關係、形體性質之探究及應理解題，以及空間方位。	1.相較於美國課程，我國課程的空間概念不足。 2.兩國的課程規準或綱要之目標或能力指標，皆須進一步實證研究的支持。

