中小學科學概念統整與發展（數學科）

李虎雄、王建都

本研究的主題包括排列組合、機率與統計、微積分與三角。

機率與統計涉及隨機的概念，抽象不易瞭解，因此在國民小學到高中階段概念的詮釋宜由具體到抽象，由淺顯到深入。排列組合的概念在國民小學、國民中學階段運用一般的方法求其方法數，而不區分是排列或組合，各種排列組合的方法在高中才加以介紹。

微積分數列與函數的極限概念宜由具體而直觀的例子來詮釋，ε 、δ 的抽象化定義則到大學時始引進。導數的定義，它的幾何意義與在物理上的意義，有助於了解導數的概念。定積分利用上和、下和定義，積分的基本定理在微積分概念的發展亦甚爲重要。

領域	主題	概念	程度	概念內容
機率	機率	樣本空間	國小	以擲一個或二個硬幣、骰子或自袋中取球，說明其可能出現的所有的各種情形。
			國中	以擲一個或二個硬幣、骰子或自袋中取球，說明其可能出現的所有的情形，另外亦以擲圖釘、火柴盒說明其可能出現的情形。
			高中	一項試驗所有可能發生的結果所形成的集合叫樣本空間。樣本空間中的每一個元素（即每一可能發生的結果）稱爲一個樣本點或簡稱爲樣本。

領域	主題	概念	程度	概念內容
機率	機率	機率定義	國小	擲硬幣很多次或自袋中取球很多次，利用相對次數比值，詮釋機率的定義。
			國中	1.以擲硬幣、骰子很多次，由相對次數比值來定義機率。 2.若一試驗的每一種可能發生的情形發生的機會都相等，則以古典的機率定義事件發生的機率。
			高中	只考慮各基本事件出現的機會均等的情形，定義一事A發生的機率。 $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ 其中n(A)與n(S)分別表示A與S之元素個數。
		亂數表	國中	利用亂數表進行抽樣。
			高中	1.利用亂數表抽取的樣本爲隨機樣本。 2.利用亂數表來模擬隨機試驗。
排列組合	排列組合	排列組合	國小	1.擲一枚硬幣會出現的情形。 2.擲一枚五圓硬幣和壹元硬幣會出現的情形。不提排列、組合這兩個術語。
			國中	利用樹狀圖求一試驗的所有可發生的情形的總數，不刻意區分何者是排列何者是組合。
			高中	1.從n個事物中，選取m件，並排定次序。排列常因問題本質上的不同而有各種不同的型態。 2.從n個不同物件中，每次取m個不同物件爲一組，同一組內的物件若不計較其前後順序，每一組叫一種組合。 3.能區分是排列或組合，並會使用適當的排列或組合的合的方法求出排列或組合方法數。

領域	主題	概念	程度	概念內容
統計	資料整理	次數分配	國小	以日常生活中的具體事例蒐集得的資料，求次數分配及畫次數分配長條圖。
			國中	爲了了解事務蒐集到的大量資料常是雜亂的，必須做適當的整理，才比較容易了解這些資料。 資料的分組時，提示組距，整理得次數分配表，及畫次數分配長條圖、次數分配直方圖、次數分配折線圖。
			高中	蒐集來的原始資料常是一堆複雜混亂無系統的資料，必須加以整理使之簡單化、系統化以便於做統計分析。 編製一次數分配表係依下列步驟：求全距、定組數、定組距、定組限、歸類畫記、計算次數。也討論組數多寡，組距、組限、組中點等選定的原則。整理後之次數分配表可據以畫次數分配直方圖，求累積次數分配表或圖。
		相對次數分配與相對累積次數分配	國中	次數分配表中再求出每組個數占總個數的百分率即得相對次數分配表。 據此可畫相對次數分配直方圖、相對次數分配折線圖、相對累積次數分配折線圖。
統計	集中趨勢	算術平均數	國小	兩個以上同類數量等分，即總和除以個數得平均數。
			國中	算術平均數就是一組資料數值的總和除以此群資料的總數的值，常用它來顯示整個資料的集中趨勢。
			高中	算術平均數的意義，未分組資料及分組資料算術平均數的算法，算術平均數的特性。推廣的加權平均數。
		中位數	國中	一群數值資料由小而大排列，居中的數值即爲中位數。資料奇數個時，中位數爲中央的數值，資料偶數個時，中位數爲中央兩個數值的平均值。資料中有極端值時，有時中位數較平均數能表示出整組資料特性。

領域	主題	概念	程度	概念內容
統計	集中趨勢	中位數	高中	1.將一群數值資料按其大小順序排列後，位置居中的數稱為中位數。 2.未分組資料及分組資料中位數的求法。
		眾數	國中	一群值資料中出現次數最多數值為這群資料的眾數。於一群數值資料特別集中於某一數值時，眾數較有意義。
	抽樣	抽樣	國中	利用亂數表抽樣的方法。
			高中	介紹常用的抽樣方法：簡單隨機抽樣、系統抽樣、分層隨機抽樣、部落抽樣。
	差異量數	全距	高中	一群數值資料中，最大數與最小數之差稱為全距，全距之求法及特性。
		四分位差	高中	第 3 四分位數與第 1 四分位數的差的二分之一即為四分位差。未分組與分組四分位差的求法及其特性。
		標準差	高中	一群數值資料中各項數值與平均數差之平方的平均數即為變異數，而變異數的平方根為標準差。未分組與分組資料的標準差的求法及其性質。
		變異係數	高中	兩組或兩組以上的資料的差異，單比較標準差的大小是不夠的，需要一種相對的測度值作為比較的標準。變異係數就是一種相對的測度值，其定義如下： $\text{變異係數}=\dfrac{\text{標準差}}{\text{算術平均數}}\times 100\%$

領域	主題	概念	程度	概念內容
統計	相關	相關係數	高中	相關係數： $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{n\text{-}SxSy}$ $=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\quad\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{Y})^2}}$ 說明：爲何公式如此定義可界定直線相關的大小。
機率	機率	條件機率	高中	條件機率的意義，求法。貝士定理。
		獨立事件	高中	由條件機率的概念，導引出兩事件獨立的定義，進而界定三個事件或三個以上的事件獨立的定義。
		期望值	高中	事件的數學期望值與試驗的數學期望值。
微積分	極限	數列極限	高中	1.數列〈a_n〉，當n愈來愈大時，a_n會很接近a，則稱數列〈a_n〉的極限是a；當n愈來愈大時，a_n會比任何數都大，則稱數列〈a_n〉趨向無限大；當n愈來愈大時，a_n小於 0 ，且絕對值會比任何數都大時，則稱數列〈a_n〉趨向負無限大；除上述三種情形外，數列無法趨向任何值。 2.會利用上述定義求數列的極限。 3.了解數列極限的四則運算，及利用它來求數列的極限。

領域	主題	概念	程度	概念內容
微積分	極限	函數的極限	高中	1.對於函數f(x)，當x很接近a時，f(x)就很接近l，就稱x趨近a時，函數f(x)的極限是l，如果沒有一個具有上述性質的數l，則稱x趨近a時，函數f(x)沒有極限。 2.會利用上述定義求函數極限。 3.了解函數極限的四則運算，及利用它來求函數的極限。
	微分	導數、導函數	高中	1.了解函數f(x)在x=a處的導數f'(a)的意義： $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 2.了解導數f'(a)在幾何上表y=f(x)圖形上點(a, f(a))的切線的斜率。 3.了解導數在物理上的意義。 4.了解導函數的意義。 5.會求導數或導函數。 6.了解$\frac{d}{dx}x^r=rx^{r-1}$對於任何實數r均成立。 7.了解導數的四則運算。 8.知道三角函數、多項函數、指數函數、對數函數的導函數的求法。
		連鎖法則	高中	1.了解連鎖法則： f(x)與g(x)爲可微分函數，則合成函數g∘f也是可微分函數，且$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\,f'(x)$。 2.會利用連鎖法則求合成函數的導函數。
	導數的應用	遞增函數與遞減函數	高中	1.若$x_1>x_2$則$f(x_1)>f(x_2)$，稱f爲遞增函數，若$x_1>x_2$則$f(x_1)<f(x_2)$，稱f爲遞減函數。 2.若f(x)在(a,b)內每一點的導數都是負數，則在區間(a,b)上，f(x)是遞減函數。 3.若f(x)在(a,b)內每一點的導數都是正數，則在區間(a,b)上，f(x)是遞增函數。

領域	主題	概念	程度	概念內容
微積分	導數的應用	極大值、極小值	國中	1.利用配方法求二次函數的最大值或最小值。
			高中	1.了解最大值、最小值、相對極大值、相對極小值的意義與區別。 2.了解函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有極大值或極小值，而且 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，則 $f'(a)=0$。 3.了解函數 $f(x)$ 的極大值與極小值可能出現在下面這些點： (1)滿足 $f'(a)=0$ 的點a。 (2) $f(x)$ 不可微分的點。 (3) $f(x)$ 的定義域的端點。 4.若 $f(x)$ 在a點附近可微分，且 $f'(a)=0$ 則可利 $f'(x)$ 在a點左右的正負，判定 $f(x)$ 在 $x=a$ 是極大或極小。
	曲線的切線	切線	國中	1.直線L與圓O只交於一點P時，稱L爲圓O的切線，P點爲切點。
			高中	1.若 $f(x)$ 爲一函數，$P(a, f(a))$ 是 $y=f(x)$ 的圖形上的一點，而 $Q(x, f(x))$ 是圖形上任意一點，但 $Q \neq P$，割線PQ在Q點沿著 $y=f(x)$ 的圖形逐漸向P點靠近，割線PQ的極限直線存在時就稱極限直線是函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處的切線。 2.圓錐曲線上點 $(a, f(a))$ 的切線求法，可先求切線斜率 $f'(a)$，而得切線方程式爲 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$
	面積	面積	高中	1.若 $f(x)>0$，則由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ $(a<b)$ 與X軸所圍成區域的面積爲上和或下和的極限。 3.若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 是定義在閉區間 $[a, b]$ 上的函數，而且在 $[a, b]$ 上，$f(x) \geq g(x)$，則 $y=f(x)$，$y=g(x)$ 的圖形與直線 $x=a$，$x=b$ 所圍成區域的面積爲 $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$

領域	主題	概念	程度	概念內容
微積分	積分	定積分	高中	1.定積分定義爲上和與下和有共同的極限時的極限。 2.利用定義求定積分。 3.定積分的性質。 4.了解微積分學基本定理。
		微積分學基本定理	高中	1.若函數f(x)在區間〔a，b〕上連續，並令 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$，$a\leq x\leq b$則g(x)爲可微分函數，而且$g'(x)=f(x)$。 2.若函數f(x)在區間〔a，b〕上連續而h(x)是f(x)的任意一個反導函數，則有 $\int_a^b f(x)dx=h(b)-h(a)$。
三角	三角函數	三角函數	國中	銳角三角函數，三角函數的倒數關係、商數關係、平方關係、餘角關係，三角函數值表。
			高中	銳角、廣義角三角函數，三角函數的例數關係、商數關係、平方關係、餘角關係，三角函數值表，三角函數圖形。
		三角測量	國中	有關直角三角形角度邊長關係的問題。
			高中	利用三角形邊、角關係，解決有關測量問題。
		三角函數的性質	高中	和角、倍角和半角公式，和與積互化公式，正弦、餘弦函數的疊合。
		棣美弗定理	高中	複數n次方，複數的n次方根。