

桌遊學數學

數學科 陳惠君老師

近幾年桌上遊戲(簡稱桌遊)很流行，不管過節聚會或是露營活動都會安排玩一下桌遊，寓教於樂！桌遊的種類非常多，而有不少的桌遊也會運用到數學理論及賽局理論，也適合於多元選修課程進行教學。那麼接下來就簡單介紹一款桌遊並說明遊戲中運用到的**機率、期望值**以及**賽局理論**。

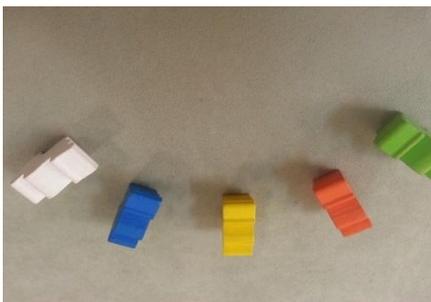
名稱：**駱駝大賽**（Camel Up）荷蘭版 支援人數：2~8 位 遊戲時間：30 分鐘
大家要下注哪隻駱駝會得到第一名，哪隻會最後一名，目標是成為錢最多的人。遊戲過程中充滿歡笑和驚奇，很適合多人同樂，一起來賽駱駝吧！

遊戲規則簡介

內容物

有 5 隻不同顏色木質駱駝。

15 個領先版塊（每色各 3 個）。



8 個綠洲／海市蜃樓板塊（對應每個玩家各 1）。



40 張玩家下注卡（每個玩家各 5 張，對應 5 隻駱駝）。



遊戲設置：

將遊戲圖版攤開置於桌子中央。



將領先版塊置於對應位置。



將硬幣和紙鈔置於版圖旁邊當作銀行。



每位玩家拿取同樣角色的下注卡 5 張和對應角色的綠洲版塊。每位玩家從銀行拿取 3 元。



決定一位起始玩家並給予起始玩家指示物。由起始玩家負責擲 5 個骰子，依照骰面數字設置駱駝的起始位置。



遊戲流程：

由起始玩家開始，遊戲順時針進行。輪到你的時候從**四個行動**中選一個來執行。

1、移動駱駝：

拿取金字塔版塊，並跟銀行領取1元，並從金字塔中骰出一顆骰子。



移動同色的駱駝。

如果移動的駱駝上方有疊其他駱駝，則會背著一起移動。之後將骰子放到同顏色的帳棚上。



2、拿取領先版塊：

猜測這一個回合第一名的駱駝，拿取對應顏色的領先版塊。回合結束會依照上面的圖示給予獎勵。



3、**放置綠洲版塊 (或海市蜃樓)**：放置時不能放到有駱駝的格子下面，也不能和其他玩家的綠洲版塊相鄰。



當有駱駝停留在綠洲版塊時（如果只是經過不算喔，要剛好停留。），立刻向前移動一格，同時放置該版塊的玩家向銀行領取 1 元。



當有駱駝停留在海市蜃樓版塊時，立刻向後移動一格，同時放置該版塊的玩家向銀行領取 1 元。如果是向後移動，後方的格子有駱駝的話，則放置到該駱駝下方，而非疊上去。

4、放置下注卡：

猜測最後第一名或最後一名的駱駝。

預測駱駝最後結束時的名次，將下注卡放到版圖上的第一名下注區或最後一名下注區，如果預測正確將獲得對應的獎勵。



等全部的骰子都被骰出，所有駱駝都移動過後回合結束，計算領先版塊的獎懲。
把所有的領先版塊放回去，由起始玩家的左邊成為新的起始玩家，開始新的一輪。

遊戲結束：

當有駱駝衝過終點線時，遊戲立刻結束！

這時會先計算當回合的領先版塊計分，接著翻開第一名和最後一名下注卡，依照版圖上的指示給予金錢和懲罰。最後由錢最多的玩家獲勝！



駱駝大賽實例分析

假設賽程已接近尾聲，其中紅、綠、黃（由上而下）駱駝在倒數第一格，白、藍（由上而下）駱駝在倒數第二格，如下圖。只剩白色及藍色骰子未擲出，終賽冠軍、吊車尾尚未壓注，分段賽冠軍圖板未取，求終賽冠軍及吊車尾的機率及賺錢策略。

終點

R	
G	W
Y	B

分析：

情況一：先擲出藍 1，再擲出白 1 或 2 或 3，則白冠軍，藍第二名，黃吊車尾，機率 $3/18$ 。

情況二：先擲出藍 2 或 3，則白冠軍，藍第二名，黃吊車尾，機率 $6/18$ 。

情況三：先擲出白 2 或 3，則白冠軍，紅第二名，藍吊車尾，機率 $6/18$ 。

情況四：先擲出白 1，再擲出藍 2 或 3，則藍冠軍，白第二名，黃吊車尾，機率 $2/18$ 。

情況五：先擲出白 1，再擲出藍 1，則藍分段冠軍且再賽一次分段賽後必為藍終賽冠軍，白第二名，黃吊車尾，機率 $1/18$ 。

所以終賽時

白冠軍機率為 $15/18$ ，第二名機率為 $3/18$ 。

藍冠軍機率為 $3/18$ （其中 $2/18$ 為直接冠軍， $1/18$ 為先分段賽冠軍，再終賽冠軍），第二名機率為 $9/18$ 。

紅第二名機率為 $6/18$ 。

黃吊車尾機率為 $12/18$ 。

藍吊車尾機率為 $6/18$ 。

進一步分析：所有勝負情況只有

情況 A：白冠軍，藍第二名，黃吊車尾的機率為 $9/18$ 。

情況 B：白冠軍，紅第二名，藍吊車尾的機率為 $6/18$ 。

情況 C：藍冠軍，白第二名，黃吊車尾的機率 $3/18$ 。

計算各種“動作”的期望值：

第一個白冠軍壓注的期望值為 $8 \cdot 15/18 + (-1) \cdot 3/18 = 117/18$

第二個白冠軍壓注的期望值為 $5 \cdot 15/18 + (-1) \cdot 3/18 = 72/18$

第三個白冠軍壓注的期望值為 $3 \cdot 15/18 + (-1) \cdot 3/18 = 42/18$

第四個白冠軍壓注的期望值為 $2 \cdot 15/18 + (-1) \cdot 3/18 = 27/18$

第五個以後白冠軍壓注的期望值為 $1 \cdot 15/18 + (-1) \cdot 3/18 = 12/18$

第一個藍冠軍壓注的期望值為 $8 \cdot 3/18 + (-1) \cdot 15/18 = 9/18$
第二個藍冠軍壓注的期望值為 $5 \cdot 3/18 + (-1) \cdot 15/18 = 0$
第三個藍冠軍壓注的期望值為 $3 \cdot 3/18 + (-1) \cdot 15/18 = -6/18$
第四個藍冠軍壓注的期望值為 $2 \cdot 3/18 + (-1) \cdot 15/18 = -9/18$
第五個以後藍冠軍壓注的期望值為 $1 \cdot 3/18 + (-1) \cdot 15/18 = -12/18$

第一個黃吊車尾壓注的期望值為 $8 \cdot 12/18 + (-1) \cdot 6/18 = 90/18$
第二個黃吊車尾壓注的期望值為 $5 \cdot 12/18 + (-1) \cdot 6/18 = 54/18$
第三個黃吊車尾壓注的期望值為 $3 \cdot 12/18 + (-1) \cdot 6/18 = 30/18$
第四個黃吊車尾壓注的期望值為 $2 \cdot 12/18 + (-1) \cdot 6/18 = 18/18$
第五個以後黃吊車尾壓注的期望值為 $1 \cdot 12/18 + (-1) \cdot 6/18 = 6/18$

第一個藍吊車尾壓注的期望值為 $8 \cdot 6/18 + (-1) \cdot 12/18 = 36/18$
第二個藍吊車尾壓注的期望值為 $5 \cdot 6/18 + (-1) \cdot 12/18 = 18/18$
第三個藍吊車尾壓注的期望值為 $3 \cdot 6/18 + (-1) \cdot 12/18 = 6/18$
第四個藍吊車尾壓注的期望值為 $2 \cdot 6/18 + (-1) \cdot 12/18 = 0$
第五個以後藍吊車尾壓注的期望值為 $1 \cdot 6/18 + (-1) \cdot 12/18 = -6/18$

第一個白分段賽冠軍圖板的期望值為 $5 \cdot 15/18 + 1 \cdot 3/18 = 78/18$
第二個白分段賽冠軍圖板的期望值為 $3 \cdot 15/18 + 1 \cdot 3/18 = 48/18$
第三個白分段賽冠軍圖板的期望值為 $2 \cdot 15/18 + 1 \cdot 3/18 = 33/18$

第一個藍分段賽冠軍圖板的期望值為 $5 \cdot 3/18 + 1 \cdot 9/18 + (-1) \cdot 6/18 = 18/18$
第二個藍分段賽冠軍圖板的期望值為 $3 \cdot 3/18 + 1 \cdot 9/18 + (-1) \cdot 6/18 = 12/18$
第三個藍分段賽冠軍圖板的期望值為 $2 \cdot 3/18 + 1 \cdot 9/18 + (-1) \cdot 6/18 = 9/18$

第一個紅分段賽冠軍圖板的期望值為 $5 \cdot 6/18 + (-1) \cdot 12/18 = 18/18$
第二個紅分段賽冠軍圖板的期望值為 $3 \cdot 6/18 + (-1) \cdot 12/18 = 6/18$
第三個紅分段賽冠軍圖板的期望值為 $2 \cdot 6/18 + (-1) \cdot 12/18 = 0$

擲骰子獲利期望值為 1

壓注策略：假設玩家只有甲、乙兩人

- 一、若以期望值賺最多來說，應該
1. 甲壓注白冠軍，期望值為 $117/18$
2. 乙壓注黃吊車尾，期望值為 $90/18$
3. 甲取第一個白分段賽冠軍圖板，期望值為 $78/18$
4. 乙壓注白冠軍(第二個)，期望值為 $72/18$

- 5.甲壓注的黃吊車尾(第二個)，期望值為 $54/18$
- 6.乙取第二個白分段賽冠軍圖板，期望值為 $48/18$
- 7.甲壓注藍吊車尾，期望值為 $36/18$
(注意：兩人都已壓注過白冠軍了，不可再壓)
- 8.乙取第三個白分段賽冠軍圖板，期望值為 $33/18$
- 9.甲擲骰子，期望值為 1，並祈禱不要擲到白 1。

二、假設現在甲有 15 元，乙有 7 元，以賽局的觀點來說：

A.若按照期望值的動作來進行：

情況 A：甲得 $8+5+5-1+1$ 元，最後金額為 33 元，
乙得 $8+5+3+2$ 元，最後金額為 25 元。

情況 B：甲得 $8+5-1+8+1$ 元，最後金額為 36 元，
乙得 $-1+5+3+2$ 元，最後金額為 16 元。

情況 C：甲得 $-1+1+5-1+1$ 元，最後金額為 20 元，
乙得 $8-1+1+1$ 元，最後金額為 16 元。

也就是甲必勝，乙必輸。但乙不想輸，一定會想辦法提升自己的獲勝機率。

B.乙可能改變策略，最有可能的做法是賭”藍”後來居上：
若

- 1.甲壓注白冠軍。
- 2.乙壓注黃吊車尾。
- 3.甲取第一個白分段賽冠軍圖板。
- 4.乙壓注藍冠軍(改變策略賭藍冠軍)。
- 5.甲壓注的黃吊車尾(第二個)。
- 6.乙取第一個藍分段賽冠軍圖板。
- 7.甲取第二個白分段賽冠軍圖板。
- 8.乙取第二個藍分段賽冠軍圖板。
- 9.甲取第三個白分段賽冠軍圖板。
- 10.乙取第三個藍分段賽冠軍圖板。
- 11.甲擲骰子。

按照如此進行：

情況 A：甲得 $8+5+5+3+2+1$ 元，最後金額為 39 元，
乙得 $8-1+1+1+1$ 元，最後金額為 17 元。

情況 B：甲得 $8+5-1+3+2+1$ 元，最後金額為 33 元，
乙得 $-1-1-1-1-1$ 元，最後金額為 2 元。

情況 C：甲得 $-1+1+5+1+1+1$ 元，最後金額為 27 元，
乙得 $8+8+5+3+2$ 元，最後金額為 33 元。

在情況 C 下，乙將獲勝，也就是乙把獲勝的機率從 0 提升到 $3/18$ 。

C.但甲也不想輸，甲也可相應乙改變策略：

- 1.甲壓注白冠軍。
- 2.乙壓注黃吊車尾。
- 3.甲取第一個白分段賽冠軍圖板。
- 4.乙壓注藍冠軍（改變策略賭藍冠軍）。
- 5.甲取第一個藍分段賽冠軍圖板（意識到乙想賭藍冠軍）。
- 6.乙取第二個藍分段賽冠軍圖板。
- 7.甲壓注藍冠軍（第二個）。
- 8.乙取第三個藍分段賽冠軍圖板。
- 9.甲壓注黃吊車尾（第二個）。
- 10.乙擲骰子。

按照如此進行：

情況 A：甲得 $8+5+1-1+5$ 元，最後金額為 33 元，
乙得 $8-1+1+1+1$ 元，最後金額為 17 元。

情況 B：甲得 $8+5-1-1+5$ 元，最後金額為 31 元，
乙得 $-1-1-1-1+1$ 元，最後金額為 4 元。

情況 C：甲得 $-1+1+5+5+5$ 元，最後金額為 30 元，
乙得 $8+8+3+2+1$ 元，最後金額為 29 元。

再度把乙的勝率降到 0。

但乙意識到甲也會改變策略，所以他必須再次改變策略……。

結語：

駱駝大賽可以讓學生盡情地演算各種機率、期望值，讓學生可以感受到數學的實用性，但在做各種”動作”的過程，涉及”逐步賽局理論”，能否找到最有利的策略呢？就要考驗參賽者的智慧了。在兩節課的進行中，讓同學們分組進行桌遊比賽的操作，一回合操作熟悉後，讓同學進行討論某種狀態下，各種策略的機率、期望值，來提升獲勝的可能性。

參考資料:

1. 「瘋桌遊部落格」文章: 駱駝大賽規則+心得.
2. 數學科陳正賢老師的駱駝大賽實例分析.