



分數單位量創意教學之探究~以小四學生為例

陳志明／彰化縣後寮國小教師

一、前言

猶記在某天上數學課時，有個小朋友提問：「在一個圓裡面，直徑是半徑的幾倍？」全班異口同聲的回答：「2倍。」該生進一步提問：「那麼反過來半徑是直徑的幾倍呢？」小朋友靜思幾秒鐘後，陸陸續續的回答：「應該只有一半、0.5倍。」研究者再問說：「有沒有其他的表示法？」只見兩三個學生很沒有信心的回答：「 $\frac{1}{2}$ 。」分數在生活中應用的例子不勝枚舉，但是從上述例子觀之，學生不擅長使用分數來表徵問題。在學習上，分數也常是他們容易產生迷思的一個概念。許多研究顯示，分數是學生學習數學的一個絆腳石，例如學生解題時，經常逃避使用分數。許多學生在代數上的困難，可回溯至他們早期分數概念了解的不完備（Dickson et al., 1984）。因此，分數概念是影響往後學生學習數學的重要關卡之一。本研究為了澄清學生的分數概念迷思，提升他們的學習成效，甚至對未來更高深的比例尺、代數等概念奠定良好的基礎。本研究採行動研究法針對小四學生，分析他們先前學習分數的經驗，並探討可能產生的迷思概念，研究工具乃研究者自編之生活情境題，並融入趣味性的元素來設計補救教學，期望學生能藉由這樣的教學活動，澄清原有的迷思概念，並提供未來相關教學之參考。

二、學生分數迷思概念的分析與探討

就文獻探討的部分，首先針對二至四年級的數學教材內容做分析，其次再從先前學

者的研究中歸納出小四學生的分數迷思概念，以做為設計教學活動的參考依據。內容分述如下：

（一）康軒版二~四年級分數教材分析

康軒版第四冊第七單元（認識單位分量一分母在10以內）

康軒版第五冊第八單元（分數的意義一分母在20以內的真分數）

康軒版第六冊第五單元（同分母真分數的合成與分解）

康軒版第七冊第三單元（認識真分數、假分數、帶分數的意義與互換）

（二）小四學生可能之分數迷思概念的探討

分數概念的不完備造成學生學習上的困難，也因而產生許多的迷思。探討先前學者對學生分數迷思概念所做的研究文獻繁多。研究者就小四學生先前學習分數的教材中分析、歸納出，學生具有的分數迷思概念分述如下，並整理如表1所示：

1. 分數概念

（1）等分概念不穩固

指將一連續量或離散量細分成好幾個部份，每一個部份都要一樣大。在連續量中，一般以幾何圖形來做等分割活動；在離散量中，是以集聚單位為單位量來做等分活動。多數學生只注意到平分的份數，卻忽略每一份的大小是否相同。

（2）對分數的意義有所誤解或無法體會

分數亦為一個數，但學生習慣以部份一整體的模式看待分數，也就是視 $\frac{a}{b}$ 的意義是分成b等分後其中的a份而受限制。或受到「子」「母」的字面意義影響，認為比較大的數為分母，比較小的數為分子。



(3) 單位量辨別困難

分數單位量概念又稱為整體量概念。當我們提到 $\frac{2}{3}$ 顆蘋果時，1顆蘋果就是單位量；如果是 $\frac{2}{3}$ 打的蘋果，則1打（12顆）蘋果才是單位量。學生常因為對單位量意義判別困難，造成整體量指認錯誤。例如：連續量中，學生忽略整體量是一整個披薩；離散量中，學生容易發生單位混淆，分子分母解釋錯誤（如1打12顆的 $\frac{2}{3}$ 認為只有2顆）。

(4) 不當比較分數之大小

分數依單位量（如顆、打）或單位及單位分量（1打12顆， $\frac{1}{2}$ 打和3顆哪個多？）的不同，其大小也不同。造成學生判別困難，而且容易使用不當策略來比較分數大小。

(5) 等值分數無法理解

一個分數量的等分割再等分割後，其分數值不變（如 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ 意指一物件分割成2等份中的1等份，同樣的物件也可以分割成4等份中的2等份）學生難以理解。

2. 分數的運算

(1) 單位分數概念薄弱使分數間的化聚容易產生錯誤

學生對於單位分數的概念薄弱，例如題

目問 $\frac{3}{5}$ 是幾個 $\frac{1}{5}$ ？學生很容易回答是 $\frac{3}{5}$ 個，如此迷思概念造成分數間的化聚產生錯誤。

(2) 分數形式（真分數、假分數、帶分數）轉換不易

學生判別真分數、假分數、帶分數的型式並不會有太大的問題，但是對於假分數和帶分數間的運算和轉換常錯誤百出，例如： $2\frac{1}{6}$ 換算成假分數是多少？ $\frac{13}{5}$ 換算成帶分數是多少？學生常感到轉換不容易。

(3) 以整數運算法則類推至分數算則

學生常會將視為是由兩個整數所組成的，未將分數視為一個數，因而在分數運算時產生錯誤，例如分數加法題： $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{3+4} = \frac{3}{7}$ 會把分子加分子、分母加分母的分數結果當答案。

(4) 對題意不清楚造成解題錯誤

學生在解分數文字題時若是對題意不了解，再加上分數概念的不穩固，解題就容易發生錯誤。

(5) 胡亂拼湊的解題策略

分數表徵對學生而言並不擅長使用，少數的學生一旦遭遇到分數算則時，則一律採用胡亂拼湊的策略來解題。

表1 小四學生分數迷思概念彙整

項目	迷思概念
分數概念	等分概念不穩固 對分數的意義有所誤解或無法體會 單位量辨別困難 不當比較分數之大小 等值分數無法理解
分數的運算	單位分數概念薄弱使分數間的化聚容易產生錯誤 分數形式（真分數、假分數、帶分數）轉換不易 以整數運算法則類推至分數算則 對題意不清楚造成解題錯誤 胡亂拼湊的解題策略

資料來源：研究者整理自林彥宏，2002；洪素敏，2004；許慧禎，2002；張熙明，2003；黃志敘，2005；曾靖雯，2003；游政雄、呂玉琴，2002；鄭崑瑜，2004。



三、分數單位量教學活動的設計與實施

本研究主要目的在於透過教學中的互動，幫助學生澄清他們的分數迷思概念。因此，教學活動以「分數單位量（離散量）概念」來做設計，以下說明整個教學動機與範圍、教學理念與目標、教學活動實施流程、教學結果與討論，並提出建議供未來相關教學之參考。

（一）教學動機與範圍

研究者有感於學生在學習分數時有諸多的迷思概念，但限於研究者本身亦為小四數學教師，為方便取樣僅能就國小四年級數學課程中有關於分數的單元來進行探究。歸納出學生可能具有的分數單位量迷思概念如下，並據以設計教學活動：

1. 學生常因為對單位量意義判別困難，造成整體量指認錯誤。忽略整體量和整體分數為1之間的關係，單純以 $\frac{a}{b}$ 中的a為答案（受分子影響）。
2. 解題過程中只考慮問題中分母的因數。
3. 分數亦為一個數，但學生習慣以部份一整體的模式看待分數，也就是視 $\frac{a}{b}$ 的意義是分成b等分後其中的a份而受限制。
4. 對分數的意義有所誤解或無法體會，造成錯誤解題。

（二）教學目標與設計理念

根據小朋友的迷思，研究者設計分數單位量的補救教學，主要有以下幾個考量面向：

1. 教學目標
學生能在「等分後單位分數內容物為多個個物」的情境下，了解與分量相對應的具體物是多少。
2. 相對應能力指標
N-2-5在等分好，整體1能明顯出現之具體情境中，能以真分數來描述單位

分數內容物為多個個物的幾份，進行同分母真分數的合成、分解活動，並理解等值分數。

3. 教學理念：

- （1）教學時可以喚起學生舊經驗—等分的概念。
- （2）釐清學生單位、單位量及單位分量之間的關係。
- （3）分數單位量概念又稱為整體量概念。透過操作具體物，讓學生了解整體量的概念，並可以明確的數出單位分數所對應的單位分量是多少。
- （4）適時融入等值分數的概念。
- （5）教學最後階段學生能脫離操作具體物，利用算式進行分數的運算，清楚表達自己的想法。

（三）教學活動流程

1. 研究參與者：研究者與所任教班級的小四學生。
2. 教學時間：96年12月19日（三）三節數學課。
3. 生活中引入分數單位量的問題：例如收集Hello Kitty磁鐵貼，每6個相同的放1盒，可以和其他同學交換（目的在於引起學生的學習動機及注意力），那麼當中的 $\frac{1}{2}$ 盒有（ ）個磁鐵貼？
4. 解說遊戲規則：（每組先發給若干張A4紙張），研究者請學生把1張A4紙張當作是1盒磁鐵貼，求 $\frac{1}{2}$ 盒有（ ）個磁鐵貼，先把A4紙張平分成2等分，其中1等分就是 $\frac{1}{2}$ 盒。（小組討論 $\frac{1}{2}$ 盒有多少個磁鐵貼，可以將圖像表徵或算式直接寫在A4紙張上）抽籤請小組派兩位同學甲、乙兩生上台演示小組討論的結果，甲生負責排列磁鐵貼分布的情形，乙生負責寫算式表達甲生的排列結果，如圖1所示：

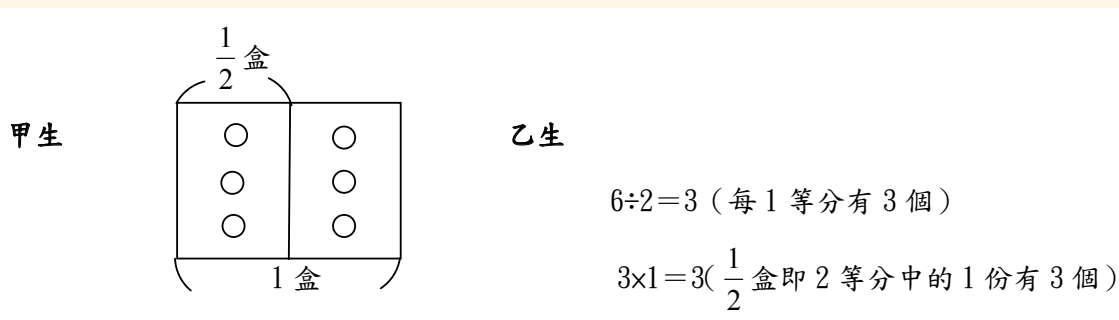


圖1 學生二人上台演示小組討論結果

教學者依甲、乙兩生表現情形，為小組在榮譽板上加格以示鼓勵。

5. 遊戲開始：依上所示步驟，教學者更換題目中1盒內的磁鐵貼數目（如12個、24個、36個、48個…），抽籤請兩位學生上台演示，且不能重複上台，以使每位學生都有表現的機會。（在幾次不同的題目演示之後，研究者鼓勵學生可以試著不要操作紙張或畫圖，直接用算式表示看看）
6. 紀錄學習單：兩節課後請學生紀錄學習單，評量學生在脫離操作具體物之後，是否能直接依據學習單上的分數單位量問題作答。

四、教學結果與討論

教學過程中研究者拍攝下整個教學活動

的流程，並蒐集學生在教學活動後所習寫的學習單，以做為精進教學的參考，經由教學活動及學習單的分析、整理後，研究者提出對整個教學活動的發現與教學結果如下：

（一）具體操作物協助學生發展平分與單位分量的概念

活動一開始，每一組的小朋友即將手邊的A4紙張依據題目的分數來等分，並且試圖將平分後每一等分的單位分量多寡用圖像表徵來呈現，學生看著小組的演示結果，再討論如何用算式來表達，學生在整個具體操作A4紙張的過程中，加快了分數的平分與單位分量概念。例如：學生運算1盒24個磁鐵貼， $\frac{2}{4}$ 盒有多少磁鐵貼時，能將A4紙張先平分成4等分，一一畫出每等分應該有6個磁鐵貼（ $24 \div 4 = 6$ ）， $\frac{2}{4}$ 盒就是4等分中的2等分，所以要將 $6 \times 2 = 12$ ，得出 $\frac{2}{4}$ 盒有12個磁鐵貼，如圖2所示。

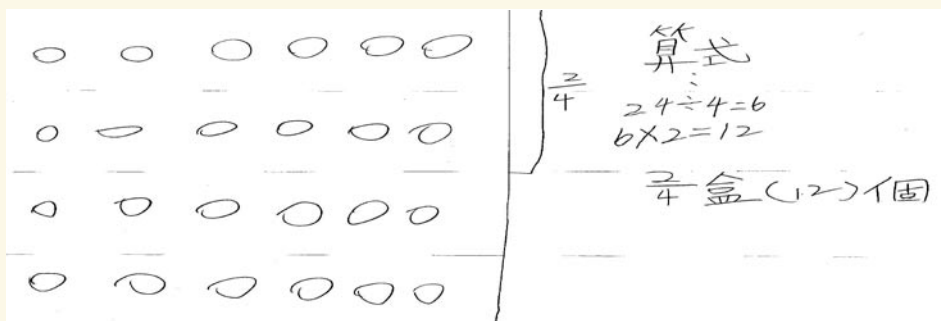


圖2 學生以繪圖輔助方式計算盒磁鐵貼數



(二) 九成學生能理解分數單位量的概念，並能正確解題

兩節課之後研究者請學生擺脫具體操作A4紙張，採用形式運思的方式，在學習單

上直接根據題目，用算式表達自己的解法，研究者發現九成的學生已經能夠理解分數單位量的概念，並正確解題，如圖3所示。

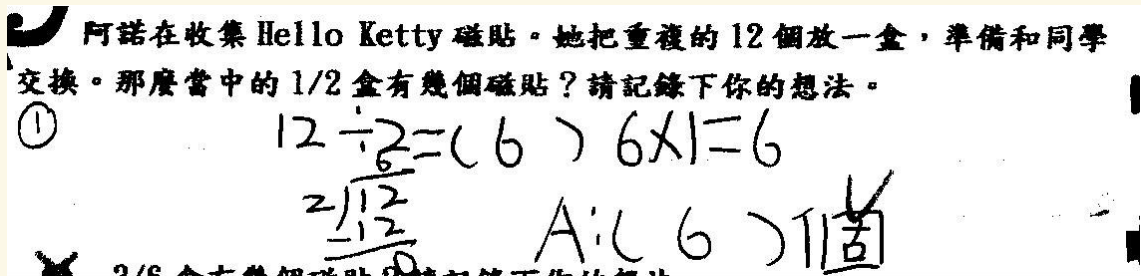


圖3 學生能用形式運思方式正確解題

(三) 少數學生對於分數單位量概念仍不夠穩固

研究者發現一、二位學生在學習單上的解題表現仍不理想。進一步進行訪談後瞭

解，學生解題錯誤的原因乃是分數單位量概念還不穩固，以致於造成解題錯誤，如圖4所示。

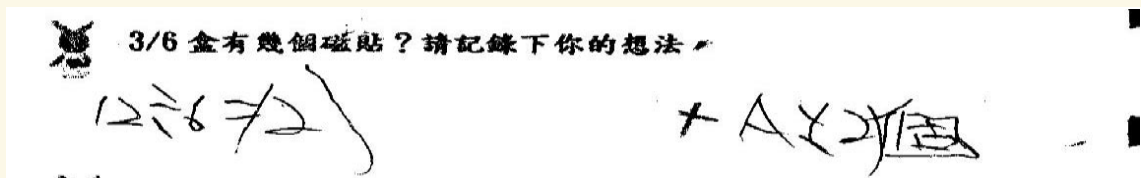


圖4 少數學生分數單位量的概念仍不穩固

(四) 部份學生能理解整數乘以分數的概念
在學生用算式表達解法的同時，研究者也試著將整數乘以分數的概念融入課程中，

從學習單上學生的解題表現中發現，五、六位學生已經能夠用整數乘以分數的算則來呈現，如圖5所示。

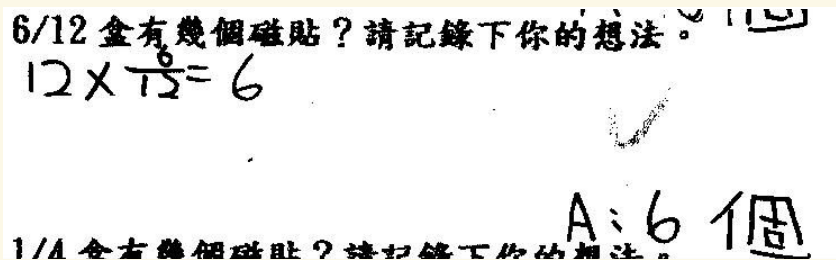


圖5 學生能延伸整數乘以分數的概念

從以上所紀錄的算式中，你有什麼發現？說說你的看法（越清楚越好喔）

發現 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{6}{12}$ 、 $\frac{2}{4}$ 答案都一樣

因為都是等值分數、約分

解在玩樂中學習，滿有義意。

要我們來造題目折一折，讓我們跟快了分數我本來不太了解，今天老師拿了一些組

②我覺得這節課很好玩又很有義意，因為

6530正決的答是30個柳丁。

這節課我才恍然大悟，原來是30-6=6

30-6=24答我就寫180個柳丁，後來上了

裝30個柳丁，還有幾個柳丁，結果我用

①本來我都以為……例如有一個盤子可以

第26卷第6期 98 · 12



五、教學的反思與建議

依據教學的結果與討論，研究者提出了以下幾點建議，供未來相關教學之參考：

（一）善用具體操作物，促進分數平分與單位分量概念的發展

教學中採用A4紙張、磁鐵貼等具體操作物，讓學生透過實際的操作，並運用圖像表徵來呈現小組討論的結果。觀察發現學生能經由具體物的操作，進一步將討論的結果寫成算式（如圖2），可知善用具體物將有助於學生分數平分與單位分量概念的發展。

（二）發展適應個別差異的補救教學方案，給予少數低成就學生更多的成功經驗

每位學生均是獨立的學習個體，從具體操作期過度到形式運思期的時間並不相同，在大班級的教學課室中，較難針對每位學生給予個別化的指導，在課堂中仍有三、四位低成就的學生，因為對於分數單位量的概念仍不穩固，常呈現錯誤解題的現象。因此，建議對於少數低成就的學生能先瞭解其分數概念不穩固的類型，再據以設計適合的補救教學方案，並採取異質性的分組，讓該生有觀摩學習的對象。

（三）可延伸整數乘以分數及等值分數概念的學習

在教學中研究者將整數乘以分數及等值分數的概念融入課程中，發現部份學生已能正確解題（如圖5），或寫出等值分數的意義。建議在日後分數單位量的教學單元中，可融入整數乘以分數及等值分數的概念，以延伸分數單位量的學習。

（四）生活化的題材，可提昇學生學習動機

本教學活動使用學生最喜愛的Hello kitty磁鐵貼做為教具，自學生的生活中取材，較能引發學生的學習動機，並進一步加強數學與真實生活的連結。在整個教學過程中學生都感到非常新鮮、有趣，對本單元的教學活動也有許多正向的回饋意見。基於此，本研究建議數學教學活動可多於學生生活情境中取材，以提昇學生學習數學的意願與成效。

六、結語

在這三節分數單位量的教學活動當中，研究者觀察到學生在小組裡表現了彼此溝通、反思、修正想法以及上台發表的數學能力，對此感到相當欣悅。從學生們在回饋單上的回應可以發現，學生們很喜歡這樣的上課方式，其實學生本是學習的主體，教師應多給予學生上台發表、與同學展開數學對話的機會，據以建構、拓展個人的數學知識。

另一方面，在整個活動中，研究者發現進步最多的應屬學習成就中等的學生，從原本的迷思概念中獲得成長；但是對於學習低成就的學生而言，在大班級的教學中，仍屬於沉默、被動的一群，不管是在具體操作思考亦或形式運思發展都顯得緩慢，學習的效果自然不彰。對於這些更需要老師伸出援手的學生，除了學習困難的診斷外，更應該依據診斷的結果為低成就的學生搭起學習的鷹架，設計一個適應個別差異的補救教學方案，衷心的期盼這些孩子對於數學不再只有感到失落，而是有更多的成功經驗。

參考文獻

- 林彥宏（2002）。國小五年級學童分數概念的診斷與補救教學。國立台南師範學院教師在職進修數學碩士學位班碩士論文。
- 洪素敏（2004）。國小五年級學童分數迷思概念補救教學之研究。國立嘉義大學教育學院數學教育研究所碩士論文。



許慧禎（2002）。國小學童等值分數概念的補救教學~以動態評量介入。國立台南師範學院國民教育研究所碩士論文。

張熙明（2003）。國小五年級學童分數表徵教學之研究。國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文。

黃志敘（2005）。資訊融入等值分數教學。國教天地，160，49-55。

曾靖雯（2003）。以表徵觀點看國小三年級分數教學之行動研究。國立台東師範學院教育研究所碩士論文。

游政雄、呂玉琴（2002）。台灣北部地區國小中年級學童分數概念之研究。國立台北師範學院學報，15，37-68。

鄭崑瑜（2004）。一位三年級在職教師實踐分數教學之行動研究。國立新竹師範學院數理研究所碩士論文。

Dickson,L., Brown, M.&Gibson,O. (1984).Children learning mathematics: A teachers' guide to recent research. London:Holt.



分數學習紀錄單

四年 班 號 姓名：



阿諾在收集 Hello Kitty 磁貼。她把重複的 12 個放一盒，準備和同學交換。那麼當中的 $\frac{1}{2}$ 盒有幾個磁貼？請記錄下你的想法。



$\frac{3}{6}$ 盒有幾個磁貼？請記錄下你的想法。



$\frac{6}{12}$ 盒有幾個磁貼？請記錄下你的想法。



$\frac{1}{4}$ 盒有幾個磁貼？請記錄下你的想法。



$\frac{2}{4}$ 盒有幾個磁貼？請記錄下你的想法。



$\frac{3}{4}$ 盒有幾個磁貼？請記錄下你的想法。



從以上所紀錄的算式中，你有什麼發現？說說你的看法〈越清楚越好喔〉。



教師評量：



分數單位量教學回饋單

姓名：

1. 上完這堂課，本來我…… 後來我學會了……

2. 我覺得這節數學課……