

## 以不同觀點分析問題探討 芬蘭國小數學教科書

鍾靜 林鳴芳 白玉如

本研究係以連結觀點探討芬蘭國小數學教科書，並對國內研究芬蘭數學教科書的相關論文進行文獻分析；研究對象為芬蘭 WSOY 出版的 *Laskentaito* 英文版國小數學教科書一至六年級共 12 冊，以及芬蘭國小數學教科書相關之 13 篇碩士論文與 5 篇期刊論文。研究發現，以問題表徵型態以及解決問題的認知與知識作為分析類目時，數學問題多為無情境及數學型態的表徵、數學解題多為無意義連結及程序性知識；以連結觀點探討問題時，具有多元的數學概念連結、隱藏的數學概念布局、呈現真實世界中的數學、從數學課本認識全球、強化邏輯推理與數學感知等五項特色。總體而言，芬蘭國小數學教科書雖有七至八成的無情境問題，但是重視數學思考及推理能力的培養；有情境的數學問題雖然只有三成左右，但是具有豐富的真實世界或國際觀。

關鍵詞：芬蘭教科書、數學教科書、連結、國民小學

收件：2013年9月7日；修改：2014年3月3日；接受：2014年3月31日

---

鍾靜，國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系教授，E-mail: jingc@tea.ntue.edu.tw

林鳴芳，國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系碩士生

白玉如，國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系碩士生

## A Study of Math Textbooks Used in Finnish Elementary Schools Analyzed from Various Perspectives

Jing Chung   Ming-Fang Lin   Yu-Ju Pai

This study explores textbooks used by Finnish elementary schools, employing connections and document analysis on research on Finnish textbooks in Taiwan. Study is carried out on the English version of *Laskutaito*, a set of elementary school math textbooks published by WSOY, consisting of 12 volumes for grades 1-6, thirteen master's theses, and five studies from journals on Finnish textbooks. The study indicates that mathematical tasks are mostly non-contextual when categorized by problem representations, cognitions and knowledge of problem solving. Besides, mathematical representations mainly require procedural knowledge and meaningless connections. In addition, when investigated from the perspective of connections, it is found that Finnish textbooks contain five features: diversity of mathematical intra-connections, hidden layout of mathematical concepts, presentation of real-world mathematics, knowing the world through textbook and reinforcing logic reasoning and mathematical perception. As a whole, the mathematics textbooks used in Finnish elementary schools contain seventy to eighty percent non-contextual tasks, while emphasizing the development of mathematical thinking and reasoning. As only thirty percent of tasks are contextual, they are rich in international views and authentic world information.

Keywords: Finnish textbook, mathematics textbook, connection, elementary school

Received: September 7, 2013; Revised: March 3, 2014; Accepted: March 31, 2014

---

Jing Chung, Professor, Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education, E-mail: [jingc@tea.ntue.edu.tw](mailto:jingc@tea.ntue.edu.tw)

Ming-Fang Lin, Master's Student, Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

Yu-Ju Pai, Master's Student, Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

## 壹、前言

經濟合作暨發展組織（Organization for Economic Co-operation and Development, OECD）為評價會員國各國學生，在不同領域的知識及技能學習表現，每三年舉辦一次「國際學生能力評量計畫」（the Programme for International Student Assessment, PISA），每次調查以一個領域為主進行深度了解，另二個領域為輔；2000 年以閱讀為主、2003 年以數學為主、2006 年以科學為主，以此循環。芬蘭 15 歲的學生，在 PISA 中的施測結果（表 1），顯現芬蘭學生在各科學業成就以及國家整體教育政策上的表現令人驚豔，包含數學在內的各科學業整體表現良好；相較於芬蘭，臺灣僅在數學方面表現突出。這樣的好成績，引起世界各國教育界好奇芬蘭教育成功的秘訣；吳祥輝（2006）認為這傑出的表現要歸功於芬蘭基礎教育的執行最高策略：「不讓一人落後」（left no-one behind）。

芬蘭和臺灣一樣都是九年義務教育，但根據 OECD 的調查，芬蘭 15 歲的學生平均每週花費 30 小時在課業上，低於 OECD 所調查的平均時數 35 小時；就數學科目而言，芬蘭學生平均每週花 4.5 小時在數學的學習上，而 OECD 調查此項目的平均數是每週 7 小時（蕭富元，2007）。芬蘭學生的唸書時間比其他國家的孩子少，卻能達到更好、更均衡、更普及的高水準教育成果。

表 1 芬蘭與臺灣的 PISA 成績

| 項目   | 2000 年  | 2003 年  | 2006 年  |          | 2009 年  |          |
|------|---------|---------|---------|----------|---------|----------|
|      | 芬蘭      | 芬蘭      | 芬蘭      | 臺灣       | 芬蘭      | 臺灣       |
| 閱讀素養 | 546 (1) | 544 (1) | 547 (2) | 496 (16) | 536 (3) | 495 (23) |
| 數學素養 | 536 (4) | 544 (2) | 548 (2) | 549 (1)  | 541 (6) | 543 (5)  |
| 科學素養 | 538 (3) | 548 (1) | 563 (1) | 532 (4)  | 554 (2) | 520 (12) |
| 問題解決 | —       | 548 (2) | —       | —        | —       | —        |

註：表格中數字代表平均分數（名次），「—」表示未實施測驗。

蕭富元（2007：52）提出「教育，已成為芬蘭最成功的出口產品；人口不到臺灣的四分之一，芬蘭憑什麼摘下教改桂冠？」，並提及在 2007 年 8 月，世界前三大新聞通訊社路透社轉載俄羅斯電臺影片，刊登了兩張俄羅斯潛艇在北極海底下插國旗的照片；但芬蘭少年透過資料比對，證實照片是翻拍自電影《鐵達尼號》裡面的一個片段，使得路透社被迫認錯道歉。因此，蕭富元（2007：52）認為「小孩會主動想、主動問、主動找答案」是芬蘭教育為什麼能連年驚豔全球的原因。

芬蘭優異的表現引起大家的好奇，基於教科書可以反映學童要學什麼與要如何學習？我國很多學者對芬蘭國小數學教科書進行研究。國內目前對芬蘭國小數學教科書皆以學習內容作為研究主題，分別從幾何、代數、分數與小數方面的數學問題呈現方式來探討芬蘭教科書。九年一貫課程數學領域包含數與量、幾何、統計、代數、連結等五大主題，顯示國內的數學教育不僅重視兒童基本數學內容的習得，也開始重視連結能力的養成，但卻少有從連結觀點分析教科書的研究。涉及芬蘭教科書的研究中，則以數學內容為主，並無連結觀點的研究分析。

芬蘭國民教育階段中，新的國家核心課程有五點特色：尊重各族群與強調多語學習的語言課程、符合興趣的音樂與藝術課程、尊重個人信仰的宗教／倫理課程、依照學生興趣的選修課程與統整、跨課程主題的實施（魏曼伊，2008）。其中的跨課程主題強調在教學中，呈現外顯與潛在的基礎價值，並依據課程特性、學生發展階段，落實於課程及學校的共同活動中，也運用在學校的運作文化和學習文化中。陳之華（2009）表示芬蘭數學教科書真實呈現了芬蘭本土實際地理知識，從河川、橋樑到隧道，從動物作息到千禧年男女生姓名等，都是真真實實、貼近每個人的生活事務，芬蘭課本精彩的不是數學題目出得多深奧，而是它的內容，從數學科進入了活潑、有趣的跨科目學習天地，其中整合的元素已經大幅度跨越本學科的知識，讓教學符合芬蘭國家教育委員會設計基礎教育核心課程的宗旨「全人的發展」（growth as a person）。基於我國九

年一貫課程數學領域中，數與量、幾何、統計、代數等主題屬內容目標，而連結主題則屬過程目標。內容目標關心的是學生學些什麼，可藉由問題的呈現方式來了解，而過程目標關心學生怎麼學，可藉由題目間的關連及安排來掌握。

教科書以數學問題來進行編排，因此，本文從數學問題的呈現觀點和連結觀點兩部分來進行芬蘭國小數學教科書相關的文件分析，前者以量化分析的問題呈現觀點，整理現有的 13 篇碩士論文及 5 篇期刊論文；後者則以質化分析的問題連結觀點，針對芬蘭數學教科書找案例。期望以數學問題呈現的觀點了解芬蘭教科書題目類型之鋪陳，再以連結的觀點探討題目和數學或生活間之關連，達到全面地了解芬蘭國小數學教科書的特色。

## 貳、連結的理論

有關數學教科書中問題呈現觀點的「問題表徵」、「解題認知」等，其所涉及的相關理論除可參考徐偉民（2013）、徐偉民與曾于珏（2013）、張敬苓（2012）、徐偉民與黃皇元（2012）與徐偉民與董修齊（2012）外，本文在彙整相關資料時也會提及。本節僅討論問題連結觀點的相關理論。學童應有許多觀察數學和其他學科以及日常生活社會相互關連的機會，從整體學習來說可以統整所有學科的課程標準，這樣的方式可讓學童知道數學觀念可以幫助他們了解其他概念，並解決其他科目的問題、針對真實世界現象進行描述（林素微、謝堅，2010）。芬蘭課程中的統整與跨課程主題的實施及基礎教育核心課程的宗旨「全人的發展」，就是希望提供學生足夠的本科目、跨學科知識到演練機會，讓未來成長與生活中可能遇到的事物，都盡可能在學校課堂中先涵蓋到（陳之華，2009）。Baroody 和 Coslick（1998）認為，學生除具備對數學學習與應用要有正向的學習態度與在探討數學解題的過程中，能有追根究底的能力。還有

對數學能有深入的了解，數學的課程能與生活結合，能連結至其他的學科，並能與其他的數學內涵結合，以培養數學力。上述學者皆認為學習除了連貫數學間的概念外，也必須達到學科間的統整並能運用於生活之間，若具備這些能力，一方面可增進學生在日常生活方面的數學素養，能廣泛地應用數學，提高生活品質；另一方面也能加強其數學式的思維，有助於個人在生涯中求進一步的發展。上述學者似乎都認為須透過數學概念間的連結與其他科的統整，因而推論應用在生活問題，這與在生活情境中引導出數學問題有著不同的先後概念，亦或是統整與應用是平行前進的。

美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics），2000）在《數學課程標準和原則》（Principles and Standards for School Mathematics）中提出有關連結的三個標準：（1）認識數學概念，並且具有連結這些數學概念的能力；（2）能夠瞭解數學概念相互連結的關係，並藉此建立一個連貫的數學體系；（3）在數學之外的生活情境中能夠認識並運用數學概念。中國大陸教育部（2011）公布《基礎教育課程改革綱要》數學課程標準中有「綜合與實踐」領域，主要目的在於培養學生綜合運用有關的知識與方法解決實際問題，培養學生的問題意識。荷蘭的真實數學教育（Realistic Mathematics Education, RME）有兩個重要的觀點：（1）數學必須與真實情境連結；（2）數學是人類的活動（Freudenthal, 1991; Treffers, 1991）。強調教育應該「引導」學生經由作數學而有「再發明」數學的機會，所謂的發明是指學生在學習過程中一步步所獲得的數學概念；數學是「數學化」的過程，其中包含水平數學化與垂直數學化，RME 理論水平數學化是指真實情境的數學化，希望學生能利用數學工具組織和解決真實生活的問題；垂直數學化也就是數學知識的數學化，希望學生在數學系統本身，將知識重新組織的過程。鍾靜（2005）認為水平的數學化是與外部連結有關，而垂直的數學化則與內部連結相關。九年一貫課程提出數學能力的發展應始於流利的基礎運算和推演、對數學

概念的理解，然後懂得利用推論去解決數學問題，包括理解和解決日常問題，以及在不熟悉解答方式時，懂得自尋解決問題的途徑，將連結主題的地位與數與量、幾何、代數、統計四項主題並列，強調連結包含察覺（recognition）、轉化（transformation）、解題（problem solving）、溝通（communication）、評析（evaluation）等五項能力。各國在課程安排與目標上皆先以數學概念間的連結統整，再利用推論生活中的數學問題。

連結主題包括內部連結和外部連結，鍾靜（2005）提及數學內部的連結是在數與量、圖形與空間、代數、統計與機率等 4 個主題中交錯發展，強調的是解題能力的培養；數學外部的連結則是在生活及其他領域中形成或應用數學問題。因為，連結是在數學學習的過程中，培養學生的學習能力，連結可依學習數學的前後經驗、數學內容之間的統整，可稱為數學的內部連結；將數學與生活、數學與其他領域間的統整，可稱為數學的外部連結（鍾靜，2012），配合統整課程的六類要素整理如圖 1。

上述這些國家的數學課程都非常重視問題解決、數學運用方面；尤其連結是數學中的過程目標，讓學生在數學與真實世界的事件中、在數學與各主題概念間產生概念上的連結，學生的數學學習要藉由內部的連

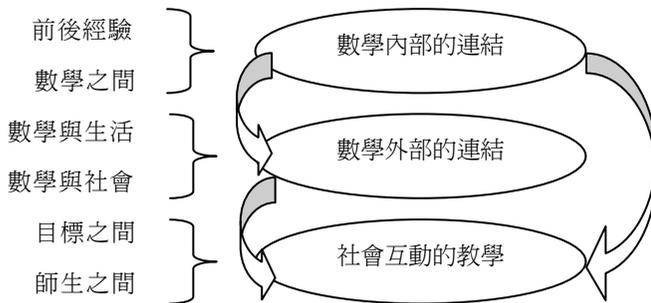


圖 1 統整課程要素與連結主題

結來掌握數學的方法，增進數學的知識，並藉由外部的連結來廣泛地應用數學，加強數學的用途。因此，本研究以數學概念間的連結、前後經驗的連結作為內部連結觀點；數學與生活的連結、數學與其他學科間的連結做為外部連結觀點對芬蘭國小數學教科書進行探討。

## 參、研究方法與設計

研究針對數學教科書中數學問題呈現觀點的部分，係以全國碩博士論文及期刊論文中涉及芬蘭國小數學教科書者，進行文獻分析。在臺灣碩博士論文網以「芬蘭」搜尋相關之碩士論文，並選取與教科書相關共 14 篇，其中鄭兆珊（2010）分析臺灣與芬蘭國小階段教科書中電學教材，因為此碩士論文並非分析數學教科書故不納入討論分析；其餘 13 篇（詳表 2）中含有 5 篇幾何、3 篇代數、2.5 篇分數與 1.5 篇小數，以及李牧桓（2010）以布魯姆修訂版分析一年級教科書；其中因黃新勝（2011）的論文同時分析分數與小數，故各算 0.5 篇。這 13 篇碩士論文中游天明（2010）分析五、六年級，李牧桓（2009）分析一年級外，其餘皆分析全年級。從臺灣期刊論文索引系統搜尋與「芬蘭」相關之期刊論文，僅有 5 篇與芬蘭數學教科書相關，其中 4 篇為徐偉民與黃皇元（2012）、徐偉民與董修齊（2012）、張敬苓（2012）、徐偉民與曾于珏（2013）與碩士論文研究成果相關，徐偉民（2013）則與其指導之柯富淦（2013）、曾于珏（2012）與黃新勝（2011）碩士論文相關。因此，本研究主要以 13 篇碩士論文（含 5 篇期刊論文）分析的研究結果來彙整問題表徵與解決問題。

表 2 與芬蘭國小數學教科書相關之 13 篇碩士論文

| 作者（年分）    | 研究主題                         | 相關期刊論文                      |
|-----------|------------------------------|-----------------------------|
| 柯富淪（2013） | 臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書幾何教材之分析比較    | 徐偉民（2013）                   |
| 曾于珏（2012） | 臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書代數教材之分析比較    | 徐偉民（2013）、<br>徐偉民與曾于珏（2013） |
| 林育成（2012） | 臺灣、芬蘭與大陸小一至小六幾何課程之比較研究       | —                           |
| 黃新勝（2011） | 臺灣、芬蘭與新加坡小學數學教科書分數與小數教材之分析比較 | 徐偉民（2013）                   |
| 翁玟琦（2011） | 臺灣與芬蘭國小代數教材之比較分析             | —                           |
| 張敬苓（2011） | 臺灣、芬蘭與中國大陸小學階段代數教材內容之分析比較    | 張敬苓（2012）                   |
| 林英秀（2011） | 臺灣與芬蘭國小數學教科書小數教材內容之分析比較      | —                           |
| 游天明（2010） | 臺灣、新加坡與芬蘭國小五、六年級幾何教材內容之研究    | —                           |
| 魏銀香（2010） | 臺灣、芬蘭國小分數教材內容之比較分析           | —                           |
| 黃皇元（2010） | 臺灣與芬蘭國小數學教科書分數教材內容之比較分析      | 徐偉民與黃皇元（2012）               |
| 董修齊（2010） | 臺灣與芬蘭國小數學教科書幾何教材內容之分析比較      | 徐偉民與董修齊（2012）               |
| 彭惠群（2009） | 芬蘭國小數學教科書之幾何教材研究——以 w 版為例    | —                           |
| 李牧桓（2009） | 以布魯姆修訂版分析芬蘭、臺灣一年級數學教科書       | —                           |

註：「—」表示沒有相關的期刊論文。

這 13 篇碩士論文（含 5 篇期刊論文）的數學問題呈現方式是以不同的表徵形式來呈現，是屬於「如何說」類目（王石番，1991）中的敘述形式類目；採用 Lesh 與 Lemon（1992）對數學問題表徵的分類，將問題分為真實情境與無情境兩類，以及 Zhu 和 Fan（2006）對數學問題型態的分類，將問題呈現的表徵型態分為數學型態、文字、圖像和聯合 4 個型態。而數學問題的類型涉及到教科書中意圖學生數學學習的目標與焦點，屬於「說什麼」類目（王石番，1991）中的價值類目；採用 Stein、Smith、Henningsen 與 Silver（2000）對數學問題類型分類的標準，依解題時所需的認知需求將數學問題分為記憶型、缺乏意義連結程序型、意義連結型以及作數學 4 類型，以及 Hiebert 等人（2003）將數學知識分為概念性知識問題、程序性知識問題與連結性知識問題，以進行問題呈現觀點分析。

本研究針對數學教科書中數學問題連結觀點的部分，係以 8 次焦點座談針對芬蘭國小數學英文版教科書進行文件分析。本研究第三作者於 101 年度在基隆市某國小組織「芬蘭國小數學教材研究」教師學習社群（詳表 3），並擔任社群召集人；社群目的為：（1）分析芬蘭數學教科書之教材內容，以提升教師數學設計能力；（2）研究芬蘭數學教科書中各領域學習素材融入數學學習之舉例。

表 3 「芬蘭國小數學教材研究」101 年度教師學習社群人員介紹

| 成員 | 職稱          | 教學年資 | 數學輔導員年資 |
|----|-------------|------|---------|
| R3 | 教務主任兼任數學輔導員 | 27年  | 8年      |
| T1 | 總務主任兼任數學輔導員 | 23年  | 11年     |
| T2 | 低年級導師       | 15年  | —       |
| T3 | 中年級導師       | 11年  | 8年      |
| T4 | 資源班教師       | 12年  | —       |
| T5 | 閱讀推動教師      | 11年  | —       |
| T6 | 低年級導師       | 11年  | —       |

註：年資計算到 101 學年度，「—」表示未擔任數學輔導員。

該社群教師針對芬蘭 WSOY 出版的 *Laskutaito* 英文版數學教科書進行 8 次焦點座談（詳表 4），一次芬蘭教材簡介、六次為分年級進行教材特色分析與討論和一次統整芬蘭教科書特色。本研究為突顯芬蘭數學教科書特色，採質性研究，為求質性研究的信效度與嚴謹性，採取組員回饋單、每次討論結果由 3 位作者共同進行檢核並確認，以瞭解芬蘭國小數學教科書的特色。

表 4 焦點座談場次分配與出席人員

| 場次 | 日期         | 焦點座談議題         | 主持人  | 出席人員 |    |    |    |    |    |    |
|----|------------|----------------|------|------|----|----|----|----|----|----|
|    |            |                |      | R3   | T1 | T2 | T3 | T4 | T5 | T6 |
| 1  | 2012/04/02 | 專書研討《芬蘭驚豔》     | 所有成員 | ✓    | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  |    |
| 2  | 2012/04/16 | 芬蘭教科書一年級教材探索   | T4   | ✓    | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  |    |
| 3  | 2012/05/21 | 芬蘭教科書二年級教材探索   | T2   | ✓    | ✓  | ✓  | ✓  |    | ✓  |    |
| 4  | 2012/06/11 | 芬蘭教科書三年級教材探索   | T1   | ✓    | ✓  | ✓  |    |    |    |    |
| 5  | 2012/09/20 | 芬蘭教科書四年級教材探索   | T5   | ✓    | ✓  |    | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  |
| 6  | 2012/10/18 | 芬蘭教科書五年級教材探索   | R3   | ✓    | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  |
| 7  | 2012/11/29 | 芬蘭教科書六年級教材探索   | T3   | ✓    | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  |
| 8  | 2012/12/20 | 芬蘭教科書各主題連結教材探索 | 所有成員 | ✓    | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  | ✓  |

註：「✓」表示出席。

## 肆、國內研究對芬蘭教科書的看法

目前有關芬蘭教科書研究的 13 篇碩士論文（含 5 篇期刊論文）中，李牧桓（2009）以教學活動為分析單位，根據布魯姆修訂版對芬蘭與臺灣一年級數學教科書進行分析；彭惠群（2009）則以學習目標與教材目標做為分析單位，進行芬蘭課程中的幾何學習目標與教材目標之間的關係分析。除李牧桓（2009）、彭惠群（2009）外，其餘 11 篇皆以「問題」作為分析單位，題數的計數原則判定以題目之敘述僅包含一主要問題者，計數一題；題組式的題目則分別以各小題計數為一題，以圖 2 為例，記為 10 題。11 篇中，除董修齊（2010）對臺灣與芬蘭兩國教科書的幾何教材能力指標與教材進行分析比較，其餘 10 篇，皆以問題表徵、型態與知識屬性等作為分析類目，依問題型態與解決問題的分類整理如表 5。

|                            |                                |
|----------------------------|--------------------------------|
| 3. Write the decimals.     |                                |
| a) nine point seven _____  | f) three and five tenths _____ |
| b) zero point five _____   | g) one tenth _____             |
| c) six point three _____   | h) one and zero tenths _____   |
| d) twelve point nine _____ | i) two and three tenths _____  |
| e) eight point zero _____  | j) five and five tenths _____  |

圖 2 芬蘭題組式問題舉例

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006f: 37)。

表 5 芬蘭相關教科書內容分析之分析類目分類及研究主題

| 作者 (年)     | 問題本身的表徵型態 |      | 解決問題的認知或知識 |      | 研究主題  |
|------------|-----------|------|------------|------|-------|
|            | 問題表徵      | 問題型態 | 解題認知       | 數學知識 |       |
| 柯富渝 (2013) | ✓         | ✓    | ✓          |      | 幾何    |
| 曾于瑀 (2012) | ✓         | ✓    | ✓          |      | 代數    |
| 林育成 (2012) | ✓         | ✓    |            |      | 幾何    |
| 黃新勝 (2011) | ✓         | ✓    | ✓          |      | 分數、小數 |
| 翁玟琦 (2011) | ✓         | ✓    |            |      | 代數    |
| 張敬苓 (2011) | ✓         | ✓    |            | ✓    | 代數    |
| 林英秀 (2011) | ✓         |      |            | ✓    | 小數    |
| 游天明 (2010) | ✓         | ✓    |            | ✓    | 幾何    |
| 魏銀香 (2010) | ✓         | ✓    |            | ✓    | 分數    |
| 黃皇元 (2010) |           | ✓    |            | ✓    | 分數    |

## 一、數學問題多為無情境及數學型態的表徵

除黃皇元 (2010) 外，有 9 篇在問題表徵方面皆根據 Lesh 與 Lemon (1992) 提出真實的數學活動，強調真實 (realistic) 不單僅在真實世界存在，更應該是真實存在於學生的心智，並主張數學學習活動是一個適應文化 (enculturation) 的歷程，教學應提供貼近學生的真實生活經驗的範例，讓學生能置身於與每日生活情境相關連的真實生活情境中學習，促使學生在真實情境中使用所學數學知識與技能，因此將問題表徵方式分為真實情境和無情境作為分析。

除林英秀 (2011) 外，有 9 篇在問題型態方面皆參考 Zhu 與 Fan (2006) 針對中國大陸與美國教科書之問題型態的表徵型式比較研究中，將問題分為七類：(1) 例行性問題與非例行性問題；(2) 傳統問題與非傳統問題；(3) 開放性問題與閉鎖性問題；(4) 應用問題與非應用問題；(5) 單步驟問題與多步驟問題；(6) 充足條件問題或無關條件問題與條件不足問題；(7) 數學型態問題、文字型態問題、視覺型態問題與聯合型態

問題。這 9 篇論文皆選擇第 7 類做類目分析，其中數學型態定義為問題的主軸只包含數學符號的表徵，也稱為符號型態；文字型態定義為問題的主軸全為文字敘述者；視覺型態定義為問題的主軸簡明地由插圖、圖像、圖表、曲線圖、表、圖示、地圖等來表徵者；聯合型態則定義為問題的主軸呈現出兩種或三種之上述型態者則歸類為聯合型態。因此，此 10 篇碩士論文依其研究主題，彙整於表 6。

表 6 芬蘭國小數學教科書的問題表徵與問題型態之研究結果

| 主題        | 作者<br>(年)     | 題數    | 問題表徵 (%) |         | 問題型態 (%) |          |          |          |
|-----------|---------------|-------|----------|---------|----------|----------|----------|----------|
|           |               |       | 真實<br>情境 | 無<br>情境 | 數學<br>型態 | 文字<br>型態 | 視覺<br>型態 | 聯合<br>型態 |
| 幾何        | 柯富淪<br>(2013) | 1,028 | 25.29    | 74.71   | 9.63     | 22.08    | 60.22    | 8.07     |
|           | 林育成<br>(2012) | 1,098 | 15.21    | 84.79   | 1.20     | 14.80    | 52.10    | 32.00    |
|           | 游天明<br>(2010) | 613   | 11.90    | 88.10   | 15.50    | 30.80    | 52.20    | 1.50     |
| 代數        | 曾于珏<br>(2012) | 910   | 14.62    | 85.38   | 73.85    | 5.16     | 11.21    | 9.78     |
|           | 翁玟琦<br>(2011) | 589   | 30.00    | 70.00   | 34.00    | 4.00     | 29.00    | 33.00    |
|           | 張敬苓<br>(2011) | 1,521 | 14.30    | 86.50   | 78.00    | 10.10    | 4.60     | 7.20     |
| 分數與<br>小數 | 黃新勝<br>(2011) | 2,510 | 31.20    | 68.80   | 56.64    | 15.48    | 13.17    | 14.68    |
|           | 林英秀<br>(2011) | 1,308 | 24.08    | 75.92   | —        | —        | —        | —        |
|           | 魏銀香<br>(2010) | 1,241 | 2.00     | 77.00   | 53.00    | 16.00    | 19.00    | 12.00    |
|           | 黃皇元<br>(2010) | 1,229 | —        | —       | 56.40    | 14.60    | 22.30    | 6.80     |

其中幾何主題，因游天明（2010）研究範圍為五、六年級，故在分析題數上只有 600 多題與柯富渝（2013）、林育成（2012）研究一至六年級題數約有 1,050 多題有明顯差異。至於代數主題，則因為芬蘭教科書並無獨立代數單元，代數內容是融在各單元中；因各研究者所界定代數內容有所差異，而導致曾于珏（2012）分析約 900 題、翁玟琦（2011）約 500 題與張敬苓（2011）約 1,200 題在分析的題數上有明顯不同。分數與小數主題中，魏銀香（2010）與黃皇元（2010）為小數主題，題數僅差 12 題，均約 1,200 題；林英秀（2011）為分數主題約 1,300 題，因黃新勝（2011）同時分析分數與小數，其題數共約 2,500 題，相當接近分數、小數題數總和。因此本研究認為雖然題數略有差異，但皆在可接受範圍內，以下分別就不同主題問題做說明：

#### （一）幾何問題舉例

在幾何內容的問題表徵方面，林育成（2012）研究結果表示無情境問題占 84.79%與游天明（2010）研究結果中的 88.10%相近；而柯富渝（2013）特別提出情境問題方面在一年級使用較多的情境問題，占了 61.11%，除了一年級外，其餘各年級比例相差不大，皆占兩到三成，因此無情境問題占 74.71%（詳表 6）。整體而言這 3 篇論文的幾何內容以無情境問題為主約占七到八成。在問題型態上，柯富渝（2013）結果顯示 60.22%的視覺型態、林育成（2012）與游天明（2010）研究結果皆為 52%的視覺型態，3 篇論文中的問題型態皆為視覺型態為主，約有五至六成，圖 3 為無情境的視覺型態問題。

56. Calculate the area of the shaded region by first calculating the area of its parts.

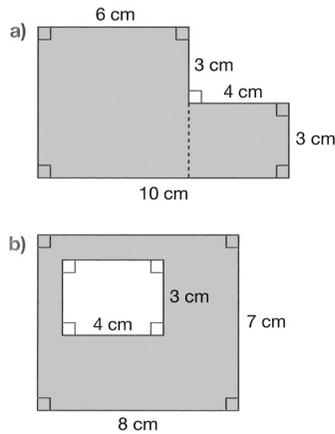


圖 3 芬蘭 5A 之 Geometry

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007a: 79)。

## (二) 代數問題舉例

在問題表徵方面曾于珏（2012）、張敬荅（2011）的研究均表示 85% 左右為無情境問題；而翁玫琦（2011）則為 70%。整體而言在代數問題中以無情境問題為主，約占七、八成之多。數學型態問題方面，曾于珏（2012）、張敬荅（2011）的研究均表示 75% 左右為數學型態，而翁玫琦（2011）則平均分布在數學型態、視覺型態與聯合型態三方面，皆約占 30% 左右（詳表 6）。問題以大量的計算題為主，目的應為希望透過大量練習能夠達到精熟的程度。由此得知芬蘭教科書在代數單元偏重非情境與數學型態呈現布題，如圖 4，該題亦為練習題；由此可發現練習題的數學型態數量很高，因此不同分析範圍會導致百分比不一致。

### Notebook exercises

Choose two equations from each group and solve them for  $x$ .

109. a)  $18 + x = 32$

b)  $25 + x = 55$

c)  $46 + x = 61$

d)  $57 + x = 82$

110. a)  $x + 23 = 36$

b)  $x + 37 = 55$

c)  $x + 35 = 62$

d)  $x + 46 = 73$

111. a)  $40 - x = 28$

b)  $60 - x = 39$

c)  $52 - x = 43$

d)  $63 - x = 38$

112. a)  $x - 16 = 27$

b)  $x - 23 = 35$

c)  $x - 36 = 58$

d)  $x - 26 = 43$

113. a)  $66 + x = 78$

b)  $79 + x = 93$

c)  $x + 58 = 84$

d)  $x + 49 = 94$

114. a)  $71 - x = 25$

b)  $84 - x = 48$

c)  $x - 48 = 52$

d)  $x - 35 = 53$

22

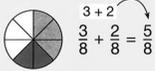
### 圖 4 芬蘭 6A 之 Fraction

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007c: 22)。

#### (三) 分數與小數問題舉例

在分數與小數內容中的問題表徵方面，林英秀（2011）研究結果顯示在小數內容中無情境問題占 75.92%；魏銀香（2010）研究表示在分數內容中，無情境問題占 77%，這與黃新勝（2011）同時研究分數與小數內容的無情境問題的 68.80%有些許差異，但仍在相近範圍內。可以發現分數與小數內容以無情境問題表徵為主，占總比率七成上下，同時魏銀香（2010）與黃皇元（2010）皆表示在分數內容數學型態占 54%上下，與黃新勝（2011）研究的分數與小數內容中占 56.64%沒有顯著差異，可以發現分數與小數內容的數學型態表徵都占半數以上，圖 5 為無情境的數學型態問題。魏銀香（2010）認為非情境問題大致分為分數圖形，多數分布在分數的基本定義當中，另外一種是純符號的運算，大多分布在分數計算，可見芬蘭教材相當重視學童能否從圖形當中，彈性地思考部分與整體的關係，以及分數符號運算的精熟度。

**Adding fractions with common denominators**



$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$$

Add the numerators. The common denominator becomes the denominator.



$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$$

If the numerator becomes greater than the denominator, the fraction is converted to a mixed number.

Add the fractions and convert the answer to a mixed number if necessary.

- |  |  |
|--|--|
| <p>1.</p> <p>a) <math>\frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} =</math> _____</p> <p>b) <math>\frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7} =</math> _____</p> <p>c) <math>\frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} =</math> _____</p> <p>d) <math>\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{3}{9} =</math> _____</p> | <p>3.</p> <p>a) <math>\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} =</math> _____ = _____</p> <p>b) <math>\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} =</math> _____ = _____</p> <p>c) <math>\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} =</math> _____ = _____</p> <p>d) <math>\frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{5}{10} =</math> _____ = _____</p> |
|--|--|

圖 5 芬蘭 4B 之 Fractions

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006h: 38)。

從上述碩士論文結果中可以看出，芬蘭教科書在問題表徵方面，在各個單元內容皆為無情境表徵為主，且高達七至八成。在問題型態部分，除了需要大量以圖形表現概念的幾何內容是以視覺表徵為主，約占五至六成外；在代數、分數與小數內容皆以強化數學計算熟練的數學型態表徵為主，約占五至七成。

## 二、數學解題多為無意義連結及程序性知識

在解題認知方面，有 3 篇碩士論文參考 Stein、Smith、Henningsen 與 Silver (2000) 對於學生解題時所需的認知需求來看，將數學問題 (mathematics tasks) 分成 4 類，記憶型 (memorization) 是屬於概念性的題目，偏重定義、概念的理解；無意義連結程序型 (procedure without connections) 是要學生了解四則運算，或某單一觀念，這類問題的目的，是希望學生能更了解基本概念；有意義連結程序型 (procedure with

connections) 是要學生做概念間的連結；作數學 (doing mathematics) 是要學生探索和理解數學性質。

在數學知識方面，有 5 篇使用 Hiebert 等人 (2003)、美國國家評量督導委員會 (National Assessment Governing Board) 在國家教育進展評量 (National Assessment of Educational Progress) 之研究分類方式，將數學知識分為概念性知識問題、程序性知識問題與連結性知識問題，連結性知識同時涵蓋了概念性知識與程序性知識來進行問題解決。研究結果彙整於表 7。

表 7 針對芬蘭國小數學教科書解決問題的認知或知識之研究結果

| 主題    | 作者<br>(年)     | 題數    | 解題認知 (%) |            |            |         | 數學知識 (%) |       |           |
|-------|---------------|-------|----------|------------|------------|---------|----------|-------|-----------|
|       |               |       | 低認知需求    |            | 高認知需求      |         | 概念性      | 程序性   | 連結性<br>知識 |
|       |               |       | 記憶<br>型  | 無意義<br>連結型 | 有意義<br>連結型 | 作數<br>學 |          |       |           |
| 幾何    | 柯富渝<br>(2013) | 1,028 | 29.67    | 46.30      | 24.03      | 0.00    | —        | —     | —         |
|       | 游天明<br>(2010) | 613   | —        | —          | —          | —       | 40.80    | 46.50 | 12.70     |
| 代數    | 曾于瑀<br>(2012) | 910   | 0.99     | 86.59      | 16.42      | 0.00    | —        | —     | —         |
|       | 張敬苓<br>(2011) | 1,521 | —        | —          | —          | —       | 0.00     | 98.10 | 2.60      |
| 分數與小數 | 黃新勝<br>(2011) | 2,510 | 14.72    | 75.91      | 9.35       | 0.00    | —        | —     | —         |
|       | 林英秀<br>(2011) | 1,308 | —        | —          | —          | —       | 35.40    | 42.35 | 22.25     |
|       | 魏銀香<br>(2010) | 1,241 | —        | —          | —          | —       | 28.00    | 52.00 | 20.00     |
|       | 黃皇元<br>(2010) | 1,229 | —        | —          | —          | —       | 29.30    | 51.00 | 19.70     |

有關表 7 中題數之異同，在表 6 之後已做說明；在此為突顯分析結果，我們以解題認知、數學知識性分別討論：

(一) 解題認知多為無意義連結型

在解題認知方面，曾于珏（2012）研究顯示代數內容高達 86.59% 為低認知需求的無意義連結型，黃新勝（2011）研究分數與小數的結果為 75.91% 為無意義連結型；由此可知代數、分數與小數內容中的解題認知皆以無意義連結型為主，如圖 6，約占有七至八成。柯富渝（2013）研究表示，芬蘭教科書在幾何單元多為先說明定義、公式或是解題技巧，之後學生只需要按照定義或是公式便能解決問題，強調熟悉公式記憶、定義和規則的重要性，因此在幾何單元中記憶型的題目比例較高，使得解題認知方面結果較為平均，其中低認知需求的記憶型與高認知需求的有意義連結型皆為 25% 上下，但仍為低認知需求的無意義連結型為最高比例占 46.30%，如圖 7 為幾何的無意義連結型問題。另外，這三篇論文皆顯示沒有高認知需求的作數學類型。

另有，徐偉民、黃新勝、柯富渝、曾于珏（2011）國科會計畫的研究結果也顯示在芬蘭教科書所有單元中，共有 12,018 題，其中無意義連結就占了 70.60%，只有 5 題作數學，由此可以更全面、完整的看到整個教材以無意義連結型最多。

113. a)  $66 + x = 78$

b)  $79 + x = 93$

c)  $x + 58 = 84$

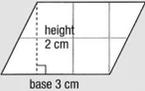
d)  $x + 49 = 94$

圖 6 芬蘭 6A 之 Revision and Practice

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007c: 22)。

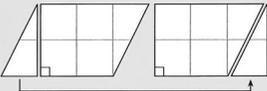
**The area of a parallelogram**

The height of a parallelogram is the length of a line segment which starts at a vertex and meets the opposite side at a right angle.



base 3 cm  
height 2 cm

It is possible to change any parallelogram into a rectangle with the same base and height as the parallelogram.



The area of a parallelogram is base length multiplied by height.

$$3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$$

62. Write the expression to calculate the area of each parallelogram.

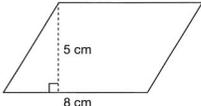
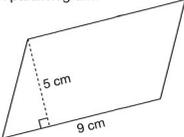
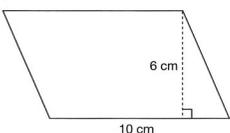
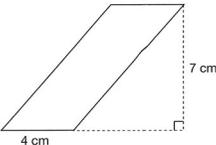
|  |  |
|--|--|
| <p>a)</p>   | <p>c)</p>   |
| <p>b)</p>  | <p>d)</p>  |

圖 7 芬蘭 5A 之 Geometry

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007a: 80)。

(二) 解數學問題所需的數學知識以程序性為主

曾于珏（2012）提及在單元教學和簡單相關的練習結束後，會出現比較需要思考、觀察和推理的有意義連結程序型問題，但其問題數量還是遠少於無意義連結程序型。張敬苓（2011）認為芬蘭教科書提供大量計算練習題，因此布題的知識屬性當然多以程序性知識呈現，甚至高達 98.10%，將近百分百；研究分數內容的魏銀香（2010）與黃皇元（2010）研究結果為 50%屬於程序性問題、30%為概念性問題與 20%的連結性問題；游天明（2010）提出芬蘭教科書在其研究的幾何單元，因為在二頁篇幅的規劃下，要介紹一個數學概念，因此在布題上，著重「概念性知

識」問題；小數單元內容也藉由點數格子來建立概念，如圖 8。因此可以解釋游天明（2010）的程序性問題占 46.50%、林英秀（2011）程序性問題為 42.35%，相較於代數內容的 98%與分數內容 52%的「程序性知識」問題比例較低；以小數教材為例的程序性問題，如圖 9；因此，有很多數學問題都是讓學生在解決問題中加強其數學概念；相對而言比較少「連結性知識」問題。

根據上述分析可知，芬蘭 *Laskutaito* 數學教科書的編排意圖是要讓學生有足夠練習的機會，並且透過問題的演練使學生熟練定義與運算技巧，因此在大量練習題的設計之下出現幾何、代數與數的單元內都以數學型態的程序性知識為主，並且多數例題與練習題皆以達到熟練為目的的無情境數學問題為主。

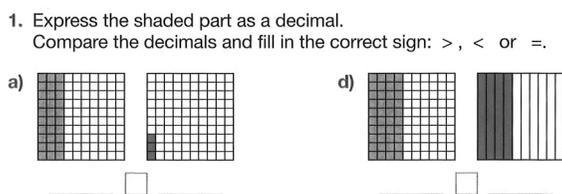


圖 8 芬蘭 4B 之 Decimal

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006h: 62)。

- a)  $0,5\text{ m} + 0,7\text{ m} =$  \_\_\_\_\_  
 b)  $0,8\text{ m} + 0,6\text{ m} =$  \_\_\_\_\_  
 c)  $0,9\text{ m} + 0,8\text{ m} =$  \_\_\_\_\_  
 d)  $0,7\text{ m} + 0,8\text{ m} =$  \_\_\_\_\_  
 e)  $0,9\text{ m} + 0,9\text{ m} =$  \_\_\_\_\_

圖 9 芬蘭 4B 之 Decimal

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006h: 71)。

## 伍、以連結觀點看芬蘭教科書

芬蘭 *Laskutaito* 數學教科書中，國小階段該教科書每年級分爲 A、B 兩冊，一至六年級共有 12 冊，芬蘭數學課程內容方面涵蓋「數與計算」、「代數」、「幾何」、「測量」和「資料處理與統計」五大主題 (Finnish National Board of Education, 2004)。但，在單元名稱中沒有任何與「代數」相關的名稱，也僅有一個與「資料處理與統計」相關，故在彙整文末附錄 1、2 時將主題分爲數、量、形三方面。每一冊中會用不同的顏色頁面來代表不同的學習功能，白色是每個單元的教學布題與練習題；黃色是每個單元之後，有培養孩子思考與推理能力的問題。其中白色頁面會因單元內容不同，有較大的差異約在 20 頁上下；而黃色頁面爲增設的題目，較不受教學內容多寡影響，大多爲 4 頁。在這些單元中有複習 (revision)、複習與應用 (revision and application)，大多出現在低、中年級；還有複習與練習 (revision and practice)、選修題材 (optional themes) 出現在高年級。每一冊最後三分之一或四分之一左右，會出現藍色與紅色的頁面，是額外的單元練習題 (additional tasks) 及回家作業 (homework)。

本研究根據「芬蘭國小數學教材研究」教師學習社群的 8 次焦點座談，每次討論與分享一個年級的教材，再全面探索教材特色。針對數學問題從連結觀點的分析，在過程中及最後均由 3 位作者共同檢視，以確認符合內、外部連結概念的案例。

### 一、內部連結觀點

學生數學能力的深化，奠基在銜接舊有的直觀和新的觀念或題材；啓發學生在不同數學概念之間做連結，本節將以內部連結，包含數學內容之間的統整、數學前後經驗來探討芬蘭教科書。

## (一) 多元的數學概念連結

數學的學習注重循序漸進的邏輯結構，大多數國內外的數學教材的演進，都遵循此邏輯結構，以保證數學教學的穩定性。芬蘭的數學教材每學期雖然只有4或5個單元，但是一個單元裡常包含了相關的多重概念，例如：芬蘭2B的第四單元「測量與估算」就包含了錢幣的換算、長度、重量與容量4種概念，在國內則會以各自獨立的4個單元來介紹這些教材。這種編排方式不僅強化數學的內部連結，也因教材多元能保持學童學習的注意力。又如圖10中的這類題型，學童不僅學習數與量，並透過圖示比較以培養量感，同時也跨領域認識了鯨魚的種類、數量和環境保護議題。

幾何教材裡，常融入其他數學主題進行布題，例如幾何與統計圖表做結合；以計數各物體數量的方式來完成長條圖，如圖11；從複合圖形中找出各類圖形並統計數量在表格中，如圖12。這些教材的目標雖然放在幾何形體的分類，但分類後並不是讓學生直接以填充題的方式回答點數後的答案，而是要將答案轉化成統計圖或統計表。這連結到低年級的數與計算能力，也符合PISA數學試題重視生活中常使用的圖表學習的想法，以強調學生須學會解讀資訊的能力，進而解決生活中的問題。

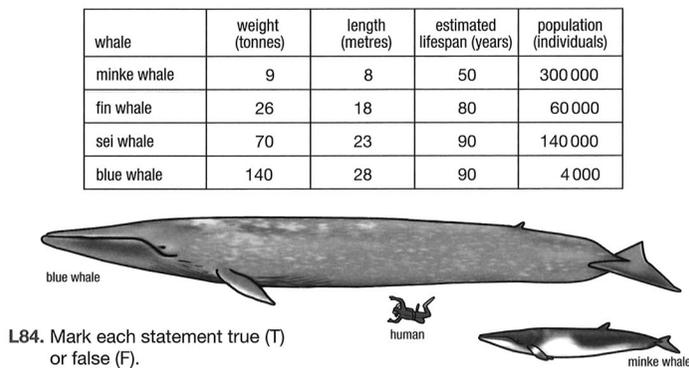


圖 10 芬蘭 5A 之 Additional tasks

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007a: 129)。

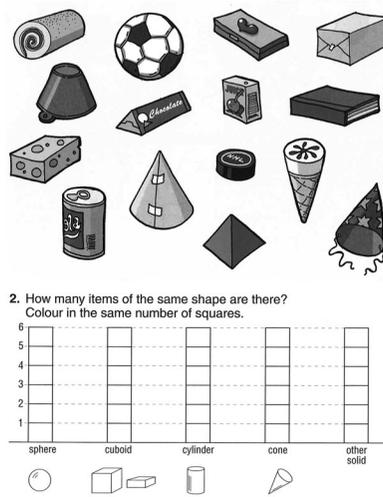


圖 11 芬蘭 1B 之 Geometry and measuring

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006b: 65)。

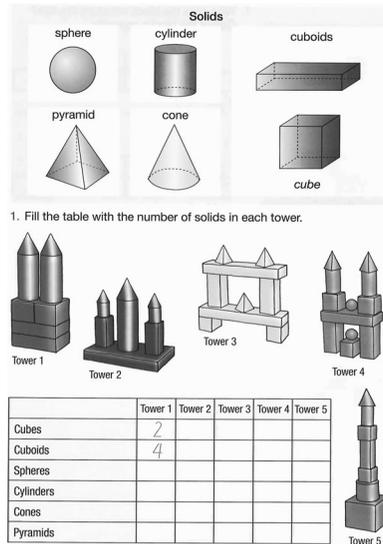


圖 12 芬蘭 3A 之 Geometry

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006e: 90)。

## (二) 隱藏的數學概念布局

在生活中，時間是重要的一環，芬蘭數學課本時間的報讀或計算等概念與分數、小數等概念做內部連結。例如在 2B 的教科書中並未安排與時間概念相關的單元，卻在此冊的第一單元「直式加法」(addition in columns)、第二單元「直式減法」(subtraction in columns)、第五單元「複習 (revision)」都運用了「星期」來做情境布題，但不強調「星期」的概念 (例如：一星期有 7 日)，故即使沒學過「星期」的時間概念，仍可進行解題。另外，在第五單元的「Jane 的五天露營」(Saarelainen, 2006d) 出現了探討時間量的布題，其情境內容為「Jane 和她的朋友在星期五 3:00 pm 一起出發去露營，公車開了 3 小時才到營地。星期五當天的 10:00 pm 就寢，星期六 7:00 am 起床。」與時間相關的問題為「Jane 到達營地的時間為何？」、「在星期六醒來前參加者共睡了幾個小時？」從中可使用撥鐘或生活經驗來了解時間量與時刻的概念，並運用加法求得答案。

數學學習中，代數課程也扮演重要的角色，雖然芬蘭教科書沒有任何與代數相關的單元名稱；但是進一步分析芬蘭教科書，卻發現很多單元都融入代數概念，在低年級多將代數概念放在黃色頁中，讓學生可透過簡單邏輯開始培養代數概念。以「察覺規律」來看，不同年級會放入不同難易度的察覺規律練習；一年級，只需要找出規律並完成作圖可，如圖 13；二年級，開始注意多種圖型與顏色間的規律；到三年級時，必

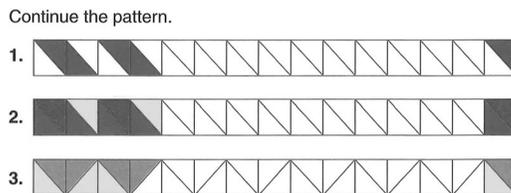


圖 13 芬蘭 1A 之 Numbers 10~16

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006a: 82)。

須先觀察規律後，再預估後面的圖形，如圖 14。這樣的圖型與顏色的規律訓練都是可以培養數列的規律；預估後面圖形的訓練也可以類推到數列的一般化。

除此之外，在未知數的多元表徵更是豐富。二年級時，先提供圖形與數字的配對，告知什麼圖形代表多少，並以圖形進行運算；在三年級時，提供更多的未知數練習，像是找出英文字母與圖形元素的兩種符號配對，如圖 15，這樣的安排可讓學生知道未知數的多樣化，且未知數在不同的情況下會對應到不同的數值，這都是代數很重要的環節；到了四

The leaf lines repeat the same pattern.

1.

What colour is the

15<sup>th</sup> leaf \_\_\_\_\_ 22<sup>nd</sup> leaf \_\_\_\_\_

20<sup>th</sup> leaf \_\_\_\_\_ 24<sup>th</sup> leaf? \_\_\_\_\_

2.

What colour is the

15<sup>th</sup> leaf \_\_\_\_\_ 22<sup>nd</sup> leaf \_\_\_\_\_

20<sup>th</sup> leaf \_\_\_\_\_ 24<sup>th</sup> leaf? \_\_\_\_\_

圖 14 芬蘭 3A 之 Division

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006c: 64)。

The signs have names written in a secret code. Write the names underneath each panel.

3.

ADA \_\_\_\_\_

NORA \_\_\_\_\_

LENA \_\_\_\_\_

JOAN \_\_\_\_\_

DEAN \_\_\_\_\_

DAN \_\_\_\_\_

JOE \_\_\_\_\_

ALAN \_\_\_\_\_

NEAL \_\_\_\_\_

RON \_\_\_\_\_

圖 15 芬蘭 3A 之 Addition and subtraction

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006c: 87)。

年級便開始以圖形元素進行計算，如圖 16，這隱含了解方程式的概念，甚至類推到聯立方程式。透過題目在無形中融入其他數學概念，使學生以所需知識來認識其他數學概念，讓學生在自然的情境下認識新概念。

## 二、外部連結觀點

數學與其他學習領域的連結，可讓學生深切體驗數學是生活的重要工具，讓「學習數學是一種快樂的經驗」。本節將以數學與其他領域、數學與生活間的統整，來探討芬蘭教科書的外部連結。

### (一) 呈現真實世界中的數學

九年一貫課程強調以學習者為主體，以知識完整面為教育主軸，以終身學習為教育的目標。提供學生做有意義及有效率學習的機會，使學生能學好重要的核心數學題材；而這些重要的數學概念和精熟的演算能力，正是九年一貫所強調「帶著走」的能力。在芬蘭的數學教科書中，處處可見數學和真實世界的連結。

國內常見的「計算從甲地到乙地有多遠？」，在芬蘭卻是給個真實世界的地圖，讓孩子規畫一個旅行，不僅用了真實的情境，也把學習的選擇權還給了孩子，如圖 17。此外，透過圖表顯示各國的暑假實施情形，

Work out what number each symbol stands for. Then add up the vertical rows.

1.

|   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|----|
|   | + | + | = |    |
| ● | ● | □ |   | 19 |
| + | ♥ | □ | ● | 16 |
| + | ● | ● | ● | 18 |
| = |   |   |   |    |

2.

|   |   |   |  |    |
|---|---|---|--|----|
| ■ | ■ | ◡ |  | 17 |
| ■ | ● | ■ |  | 11 |
| ◡ | ◡ | ◡ |  | 27 |
|   |   |   |  |    |

圖 16 芬蘭 4A 之 Addition and subtraction 0-9999

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006g: 26)。

讓學習更具國際觀，如圖 18；利用行星間的關係，讓學生有意義的學習應用大數，如圖 19；數學例題也使得數學和城市歷史連結，如圖 20；在數學課本中也可以了解最夯的交通工具，如圖 21；藉由比較 2000 年和 2050 年的人口年齡層分布，體會人口老化的嚴重性，如圖 22。

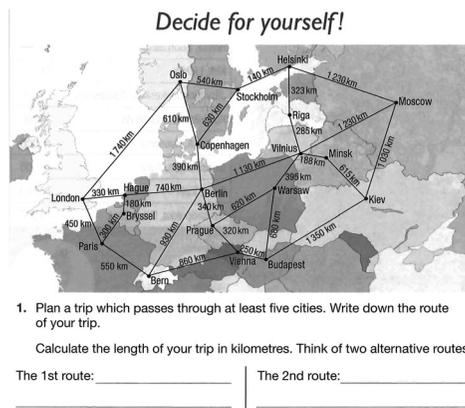


圖 17 芬蘭 4A 之 Expending the number field to 99999

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006g: 50)。

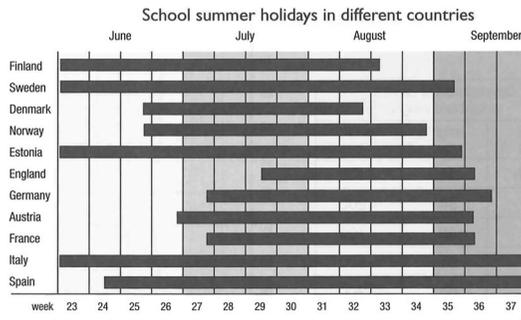
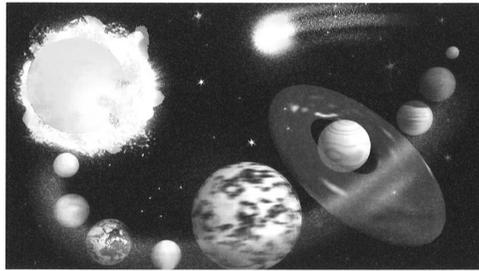


圖 18 芬蘭 4B 之 Units of measurement and coordinate

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006h: 88)。



153. The table contains average distances between planets and the Sun in kilometres. Round the numbers to the nearest million and ten million kilometres.

| planet  | distance rounded to the nearest 10 000 km | distance rounded to the nearest million km | distance rounded to the nearest 10 million km |
|---------|---|--|---|
| Mercury | 57 910 000                                | 58 million                                 | 60 million                                    |
| Venus   | 108 200 000                               |  |   |
| Earth   | 149 600 000                               |  |   |
| Mars    | 227 940 000                               |  |   |
| Jupiter | 778 330 000                               |  |   |
| Saturn  | 1 429 400 000                             |  |   |
| Uranus  | 2 870 990 000                             |  |   |
| Neptune | 4 504 300 000                             |  |   |

圖 19 芬蘭 5A 之 Basic calculation with natural numbers

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007a: 29)。



**Notebook work**  
Write the expression for each problem.

6. How many years older is Stockholm than Oslo?
7. How many years older is Copenhagen than Helsinki?
8. How many years old was Reykjavik in the year 2000?
9. It is a 1 009 km flight from Helsinki to Murmansk and a 890 km flight from Helsinki to Copenhagen. How many kilometres longer is the distance to Murmansk than to Copenhagen?
10. A return flight from Helsinki to Reykjavik costs 550 euros. One night in a hotel costs 140 euros. How much does the flight ticket and two nights in a hotel cost altogether?



圖 20 芬蘭 4A 之 Additional and subtraction 0-9999

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006g: 17)。

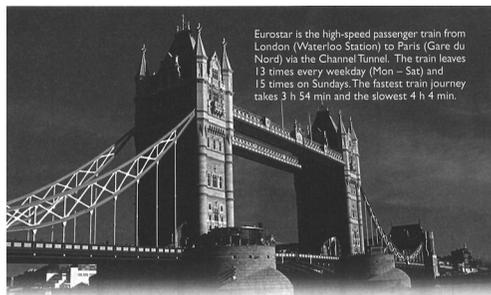


圖 21 芬蘭 4B 之 Units of measurement and coordinate  
 資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006h: 89)。

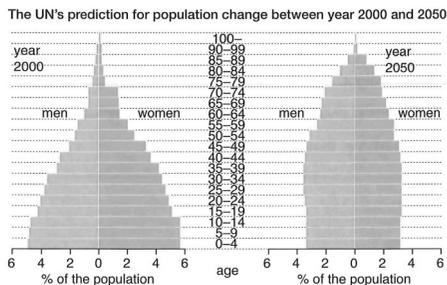


圖 22 芬蘭 5B 之 Data handling and probability  
 資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007b: 43)。

芬蘭的數學教材不僅取材多元，也能抓緊學童的心，引導學生愛上數學：學童在探索世界的過程中，大自然的世界是有趣且引人入勝的。在芬蘭數學教科書中，我們可以看到許多動物入題的教學材料；除了大家熟知的小狗、小貓、毛毛蟲等小動物做為計數與插圖外，記錄小狗的成長，如圖 23；規劃養一缸魚，如圖 24；都是貼近學童的生活數學，也使數學變得有趣又溫馨；認識夜行性動物，如圖 25；認識各種動物的體型和成長速度，學習重量的計算，如圖 26；讓數學也充滿新奇。陳之華（2009）也認為這樣的安排，宛如走出數學以外的自然閱讀世界。

77. A litter of Border terriers consists of four puppies. The smallest and largest puppies' weight gains over the first 20 days have been entered in the table. Draw a line graph representing Roy's and Rena's weight gain.

| age      | Roy's weight | Rena's weight |
|----------|--------------|---------------|
| at birth | 0,25 kg      | 0,15 kg       |
| 5 days   | 0,40 kg      | 0,20 kg       |
| 10 days  | 0,65 kg      | 0,30 kg       |
| 15 days  | 0,75 kg      | 0,45 kg       |
| 20 days  | 1,00 kg      | 0,60 kg       |

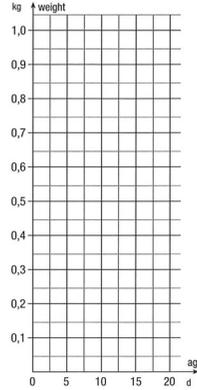
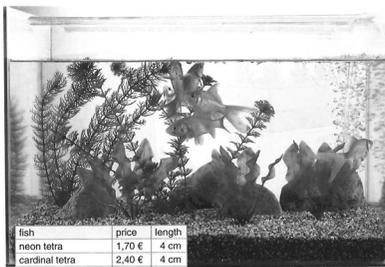


圖 23 芬蘭 5A 之 Geometry  
資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007a: 89)。

Keeping an aquarium as a hobby



| fish                | price  | length |
|---------------------|--------|--------|
| neon tetra          | 1,70 € | 4 cm   |
| cardinal tetra      | 2,40 € | 4 cm   |
| black tetra         | 2,50 € | 6 cm   |
| swordtail           | 3,40 € | 11 cm  |
| kissing gourami     | 4,30 € | 12 cm  |
| zebra fish          | 2,60 € | 4 cm   |
| suckermouth catfish | 7,20 € | 20 cm  |

*When buying fish, it is good to remember that fish need a litre of water per centimetre of length.*

- 102. An aquarium costs 59 euros. Home delivery costs 19 euros. How much does it cost in total to buy an aquarium and have it home delivered?
- 103. The volume of an aquarium is 80 litres. How many suckermouth catfish could be bought for this aquarium?
- 104. Black tetras should be kept in shoals of six or more. How much would six black tetras cost?
- 105. An aquarium holds 60 litres of water. A quarter of the water is changed every fortnight. How much water is changed at a time?
- 106. A set of ten neon tetras costs 15 euros. How much cheaper is one neon tetra when bought in a set than separately?

圖 24 芬蘭 6A 之 Geometry  
資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007c: 88)。

The zoo at night

There is a zoo in Singapore which opens at 19.30 and closes at midnight. The animals are kept in conditions which are as natural as possible. Very few animals are in cages. The greater noctule bats are in a very tall cage which people can enter to observe them. It is always dark at that time of night in Singapore and nocturnal animals are at their most active.

The zoo can be toured in a jeep which completes a 3.1 km long west circuit and a 3.3 km east circuit. In total the journey lasts 40 minutes. The first tour leaves at 20.00. Part of the zoo can also be toured on foot by taking one of the following paths:

|                     |        |
|---------------------|--------|
| Fishing Cat Circuit | 0.7 km |
| Hyena Path          | 0.9 km |
| Leopard Circuit     | 1.1 km |
| Giraffe Path        | 0.3 km |
| Tiger Path          | 1.2 km |
| Giant Forest Path   | 0.7 km |



圖 25 芬蘭 5A 之 Decimals

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007a: 55)。

Animal Young

**An elephant calf** weighs 110 kg at birth. It gains weight during the first couple of years at the rate of 25 kg a month.

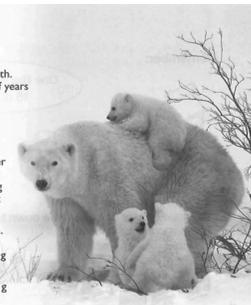
**A blue whale calf** weighs 7250 kg. It grows quickly because it suckles 620 litres of milk a day.

**A polar bear cub** is born in the winter in a den of snow. At birth it weighs only 800 g. Its weight increases by 350 g a week. When the cub leaves the nest it already weighs 5 kg.

**A seal pup** is also born in a snow cave. Even at birth it weighs 4 kg 500 g. The pup's weight increases by 3 kg 200 g per week because of fatty milk.

**A giant panda's cub** weighs only 100 g at birth.

**A fruit bat** weighs 950 g and its baby weighs 250 g.



3. According to the text above, which of the animal young is

a) the lightest at birth \_\_\_\_\_

b) the heaviest at birth? \_\_\_\_\_

4. By how much does an elephant calf's weight increase during eight months?

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Answer: \_\_\_\_\_

Additional tasks on page 162 45

99

Homework on page 187 45

Notebook work

90. How many litres of milk does a blue whale calf drink in one week?

91. By how much does a seal pup's weight increase in eight weeks?

92. A female bat carries its young with it when it flies. How much does a female fruit bat weigh with her newborn baby?

93. How much does a six-week-old

a) polar bear cub weigh

b) seal pup weigh?

圖 26 芬蘭 3B 之 Measuring

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006f: 99)。

## (二) 從數學課本認識全球

芬蘭教科書在連結全球視野這部分得到許多學者的認同，吳祥輝（2006）就曾提到在芬蘭三年級的數學教科書中，一張比較各國高塔或建築物的圖示裡，如圖 27，出現了 2008 年即將完工座落於高雄的臺灣亞洲大廈（the Asia Plaza），這對當時的臺灣人可是沒有幾個人知道的。還有，可藉由芬蘭數學教科書認識全球的物種分布，如圖 28。

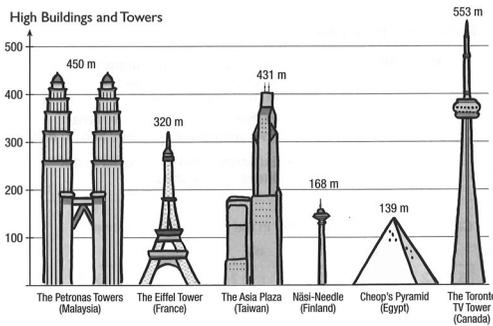


圖 27 芬蘭 3A 之 Addition and subtraction

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006e: 81)。

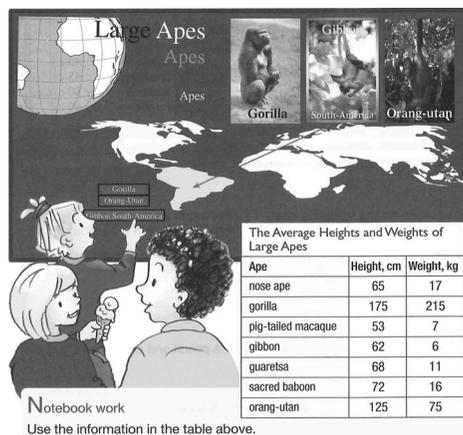


圖 28 芬蘭 3A 之 Addition and subtraction

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006e: 73)。

不僅如此，更可以從國旗認識世界各地，如圖 29；並認識飛行器的發展歷史，如圖 30；世界各地的高山，如圖 31；世界著名的建築物，如圖 32；臺北 101 入題，是另類的臺灣之光。

陳之華（2009）認為芬蘭數學課本中的數學不只是計算算式或熟記公式，而是變身為跨越學科的教育平臺，讓學生和老師一起藉由生動活潑與實用的數學課，共同浸浴在國際化的複合式教學中。

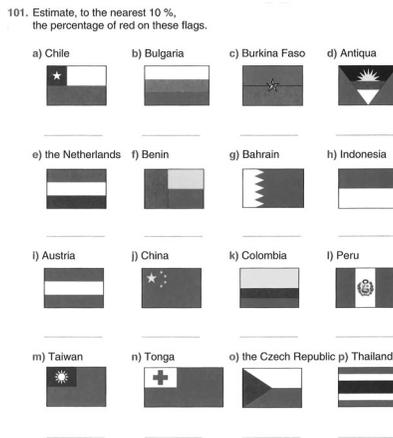


圖 29 芬蘭 6B 之 Percentage  
資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007d: 45)。

The history of aviation

The history of aviation began when a French marquis and his scientist friend flew a hot air balloon in Paris on the 21st of November 1783. The journey was 9 km long and lasted for **25 minutes**.

The Wright brothers from the United States built the first aeroplane in **1903**. The plane stayed up in the air for only a few seconds.

Six years later aeroplanes were so functional that Frenchman Blériot flew over the English Channel. The flight was 38 km long and it lasted **37 minutes**.

Just 18 years after Blériot had crossed the Channel, Charles Lindbergh flew solo across the Atlantic Ocean from New York to Paris. The distance was 5 800 km and the trip took **33 and a half hours**.



圖 30 芬蘭 3B 之 Expending the number field to 9999  
資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006f: 68)。

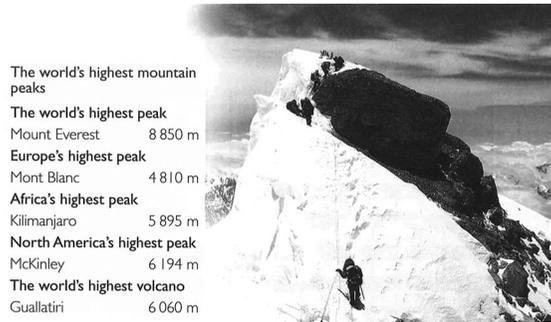
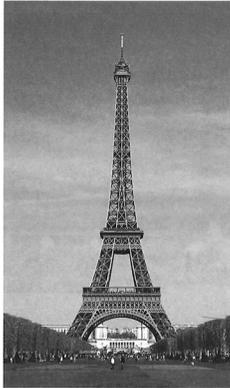


圖 31 芬蘭 3B 之 Measuring

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006f: 93)。

The Eiffel Tower was named after its architect Gustave Eiffel. The tower was completed in Paris in 1889. It stands 301 m high.



The Taipei 101 Tower in Taiwan was named after the city and the number of storeys it has. The tower was completed in 2004.

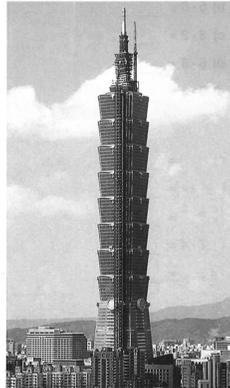


圖 32 芬蘭 5A 之 Basic calculations with natural numbers

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007a: 9)。

### (三) 強化邏輯推理與數學感知

雖然在芬蘭的數學教材中沒有任何一個單元名稱與此相關，但從 1A、1B 到 6A、6B 共 12 冊教科書中處處可見芬蘭數學教育學者的用心。

一年級的邏輯訓練即提供多餘的元件，讓學童學習取捨，如圖 33；相當生活化的代數思考，如圖 34；及目前國內網路上流傳的科技公司選才考試題型，是芬蘭的學生從國小就開始的邏輯思考訓練題，如圖 35；還有文字敘述的邏輯推理，如圖 36。透過觀察、分類、評析和整合的思考歷程，享受解決問題的樂趣，更是有系統強化學生數學感知能力的策略。

從連結觀點分析芬蘭國小數學教科書，確實看到多彩多姿、豐富多元的數學教材。其實，數學是人類天賦本能的延伸；人類出生之後，即具備嘗試錯誤、尋求策略、解決問題的生存本能，並具備形與數的初等直覺；經過文明累積的陶冶與教育，使這些本能得以具體延伸為數學知識，並形成更有力量的思維能力。吳祥輝（2006）認為芬蘭的教科書，從封面到內頁的每一頁，文字和表格工工整整，配上生動多彩的精緻插圖和封面設計，顯然經過高度的整合；這就是教育，每一本教科書都可以成為設計和美學品味的初級教本。從此，可驗證數學教學落實於統整與跨課程主題，確實達到芬蘭國民教育階段所重視的核心課程。

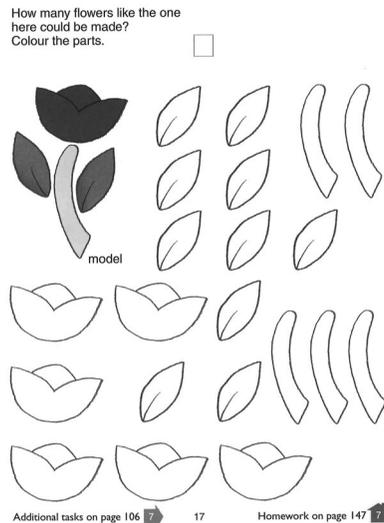


圖 33 芬蘭 1A 之 Number 0-5

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006a: 17)。

11. Work out the prices and mark them on the price list.

Price List

|  |   |      |      |
|--|---|------|------|
|  | € |      |      |
|  | € |      |      |
|  | € | 10 € | 18 € |
|  | € |      |      |
|  | € | 17 € | 16 € |
|  | € |      |      |
|  | € |      |      |
|  | € | 20 € | 18 € |
|  | € |      |      |
|  | € | 40 € | 29 € |
|  | € |      | 26 € |

圖 34 芬蘭 2A 之 Multiplication  
資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006: 75)。

Which clown has the following traits?

5.

- There are two buttons on his shirt.
- He has five balls.
- There is blue in his costume.
- His hat is the same colour as his trousers.

6.

- He has more than 5 balls.
- His shirt and hat are the same colour.
- His trousers and balls are the same colour.
- His trousers are not yellow.

7.

- He has three times as many balls as buttons on his shirt.
- His balls and hat are the same colour.
- There is yellow in his costume.
- His trousers are not yellow.

8.

- His gloves are not red.
- His trousers are not blue.
- His hat is not red.
- His shirt is not yellow.

Additional tasks on page 154

85

Homework on page 181

圖 35 芬蘭 3A 之 Addition and subtraction  
資料來源：Saarelainen (Ed.) (2006: 85)。

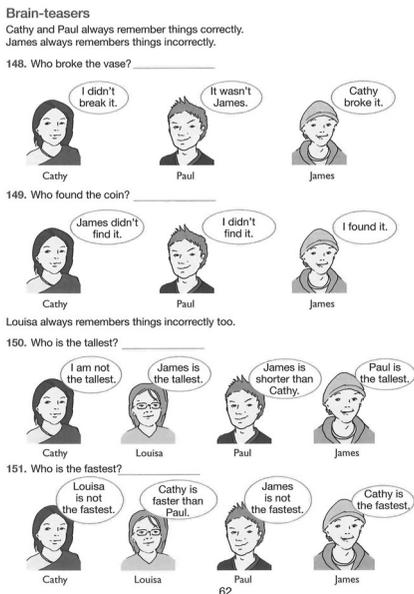


圖 36 芬蘭 5A 之 Decimals

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007a: 62)。

## 陸、結論

本文以「國內研究對芬蘭教科書的看法」一節來回應量化分析問題的呈現觀點、「以連結觀點看芬蘭教科書」一節來回應質化分析問題的連結觀點。根據這二節的研究發現顯示，以問題表徵型態以及解決問題的認知與知識作為分析類目時，數學問題多為無情境及數學型態的表徵、數學解題多為無意義連結及程序性知識；以連結觀點探討問題時，具有多元的數學概念連結、隱藏的數學概念布局、呈現真實世界中的數學、從數學課本認識全球、強化邏輯推理與數學感知等五項特色。由此提出下面三點整合性結論：

## 一、問題雖以無情境為主，但以例題發展概念，其中也隱含著數學內部連結

芬蘭 *Laskutaito* 數學教科書整體約有七至八成的無情境問題，但也透過概念性問題的例題使學生發展概念(如圖 8)，也有直接宣告(如圖 5)，再以程序性問題加強熟練(如圖 9)。芬蘭教科書皆為大單元，在單元內只要相關的教材都可以放入，使得教材內涵豐富，較容易做到內部連結，如圖 37，在小數單元，在宣告小數位數的名稱後藉由數線的概念來瞭解小數意涵，在這些無情境的練習題中，卻涵蓋著數線與距離等其他數學內容。而且習題中，不限該單元主要內容，也有內部連結的設計。從彭惠群(2009)分析一至五年級的幾何教材目標未能完整符合學習目標外，卻增加了幾何與測量、幾何與計算等連結教材目標的結果，可得到印證。芬蘭教科書每單元的白色頁面約 20 頁上下，設計以一頁先作小概念講解與大量練習，接著一頁以情境或與應用布題為原則，以此循環至單元內概念結束，有時會依內容再增加深入且活用的真實情境問題。

**2 Decimals**

**Remember**

Every digit in a number has its own place.

The next digit to the left has 10 times the value of the previous digit.

whole numbers: decimal parts

hundreds    tenths    hundredths

4 | 5 | 2 | 8

0.05 0.15 0.25 0.35 0.45 0.55 0.65 0.75 0.85 0.95  
0 0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.70 0.80 0.90 1

1. Write down the number that is

a) 2 tenths greater than 0.22 \_\_\_\_\_

b) 3 hundredths greater than 0.55 \_\_\_\_\_

c) 6 tenths greater than 0.4 \_\_\_\_\_

d) 7 hundredths greater than 1.23 \_\_\_\_\_

e) 3 greater than 1.3 \_\_\_\_\_

f) 2 greater than 10.22 \_\_\_\_\_

g) 5 tenths greater than 0.55 \_\_\_\_\_

h) 5 hundredths greater than 0.65 \_\_\_\_\_

i) 1 hundredth greater than 0.99. \_\_\_\_\_

2. Write down the number that is

a) 6 hundredths less than 0.66 \_\_\_\_\_

b) 6 tenths less than 1.66 \_\_\_\_\_

c) 12 hundredths less than 0.22 \_\_\_\_\_

d) 15 hundredths less than 0.55 \_\_\_\_\_

e) 12 tenths less than 1.3 \_\_\_\_\_

f) 18 tenths less than 2.91 \_\_\_\_\_

g) 2 hundredths less than 0.1 \_\_\_\_\_

h) 5 hundredths less than 0.2 \_\_\_\_\_

i) 9 hundredths less than 1.1. \_\_\_\_\_

3. Find the letter which corresponds to each number on the number line.

0.16 →     0.13 →     1.13 →     1.17 →   
0.01 →     0.08 →     1.26 →     1.04 →   
0.26 →     0.23 →     1.09 →     1.29 →   
0.35 →     1.11 →     1.19 →   
0.03 →     1.29 →     1.01 →     1.19 →   
0.21 →     1.29 →     1.07 →   
0.11 →     1.21 →     1.24 →   
0.29 →     1.15 →     1.19 →   
0.33 →     1.18 →     1.31 →   
0.18 →     1.33 →   
0.06 →     1.07 →

L C S U I S L O E A N O T L E  
S F E N K B E O H R A T I N

0 0.05 0.10 0.15 0.20 0.25 0.30 0.35  
1.00 1.05 1.10 1.15 1.20 1.25 1.30 1.35

Additional exercises on page 121 14 35 Homework on page 154 14

圖 37 芬蘭 5A 之 Decimals

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007a: 34-35)。

## 二、有情境的問題雖然不多，但含有豐富且多元的外部連結

學生要能將數學運用在日常生活中，學習欣賞數學，從而發展探究數學以及與數學相關學科的興趣。芬蘭教科書各單元編排大致為宣告概念、大量熟練、加以應用，若以計數題數的概念，屬於應用的情境題約占 30%。因為無情境布題的練習題，整頁題數可達 27 題；而情境布題的練習題，整頁題數只達 6 題；同樣都是一頁，若以題數計算比重，則高達 4 倍之多，如圖 38。若加以外部連結觀點探討這 30% 有情境的問題，可發現芬蘭教科書非常強調「真實世界中的數學」，如圖 17 至圖 26；「從數學課本認識全球」，如圖 27 至圖 32。芬蘭的國小數學教科書從真實世界提取數學學習的元素，不過度的簡化情境，保留適度的閱讀挑戰，培養學童長篇文字閱讀的習慣；絕不小覷學童的問題解決能力，讓學童在挑戰中享受解決問題的喜悅；整合生活中的數學應用情境，讓學生體悟生活中處處有數學，更理解數學學習對於生活的重要性。

Metre and kilometre

Remember

|                |                  |    |       |      |   |
|----------------|------------------|----|-------|------|---|
| 1 km = 1 000 m | 600 m = 0.6 km   | km | 100 m | 10 m | m |
| 0.1 km = 100 m | 5,7 km = 5 700 m | 0  | 6     | 0    | 0 |
| 0.01 km = 10 m |                  | 5  | 7     | 0    | 0 |
| 0.001 km = 1 m |                  |    |       |      |   |



Convert to the given unit.

88. a) 6 000 m = km  
b) 1 700 m = km  
c) 2 850 m = km

89. a) 7 km = m  
b) 3.4 km = m  
c) 0.1 km = m

90. a) 5 km 200 m = m  
b) 5 km 200 m = km  
c) 5 km 20 m = m

91. a) 300 m = km  
b) 640 m = km  
c) 298 m = km

92. a) 2.05 km = m  
b) 8.04 km = m  
c) 0.07 km = m

93. a) 3 km 10 m = m  
b) 3 km 10 m = km  
c) 0.07 km = m

94. a) 80 m = km  
b) 65 m = km  
c) 4 m = km

95. a) 7 002 km = m  
b) 0.070 km = m  
c) 0.006 km = m

96. a) 3 km 200 m = m  
b) 5 km 200 m = km  
c) 5 km 20 m = m

97. a) 2 km 7 m = m  
b) 2 km 7 m = km  
c) 2 km 70 m = km



7. Give the answer in centimetres.

a) 1 m = 20 m = \_\_\_\_\_  
b) 1 m = 15 m = \_\_\_\_\_  
c) 1 m = 85 m = \_\_\_\_\_  
d) 1 m = 0.05 m = \_\_\_\_\_  
e) 1 m = 0.01 m = \_\_\_\_\_

8. Give the answer in centimetres.

a) 2 m = 1.50 m = \_\_\_\_\_  
b) 2 m = 1.25 m = \_\_\_\_\_  
c) 2 m = 0.90 m = \_\_\_\_\_  
d) 2 m = 0.15 m = \_\_\_\_\_  
e) 2 m = 0.05 m = \_\_\_\_\_

9. Give the answer in centimetres.

a) 0.5 m + 0.7 m = \_\_\_\_\_  
b) 0.8 m + 0.6 m = \_\_\_\_\_  
c) 0.9 m + 0.8 m = \_\_\_\_\_  
d) 0.7 m + 0.8 m = \_\_\_\_\_  
e) 0.9 m + 0.9 m = \_\_\_\_\_

Notebook work

Try to write the expression as well. Give the answers in centimetres.

80. A giant panda is 1.5 m tall when standing. A brown bear is 1.4 m taller than a giant panda. How tall is the brown bear?

81. A spectacled bear is 1.8 m tall when standing. It is 1.4 m shorter than a male polar bear. How tall is the polar bear?

82. A female polar bear is 2.1 m tall and its cub is 0.9 m tall. How many centimetres must the cub grow before it is its mother's height?

83. A grizzly bear is 2.9 m tall when standing. A black bear is 0.7 m shorter than a grizzly bear. John is 0.8 m shorter than a black bear. How tall is John?

圖 38 芬蘭 5B 之 Measuring

資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007b: 70-71)。

### 三、芬蘭教科書的單元內有豐富的延伸應用，並安排銜接與統整的單元

芬蘭教科書每單元的黃色頁面以 4 頁為原則，含有訓練思考的開放性問題 (open question)，讓學生自己決定問題；挑戰腦力 (brain-teasers)，活用每個數學概念；選修性題目 (optional exercises)，含有計算練習與情境應用。此部分不僅「強化邏輯推理與數學感知」的能力，也透過不斷的複習與預習其他教學內容，達到延伸與應用的目標。另外，芬蘭國小數學教科書的編排方式，在單元上不斷的在數的加減、分數、小數、幾何循環出現，這樣的安排不僅可不斷重覆練習，在適時的複習後增加深度及廣度，除了單元的重覆出現外，也直接加入「複習」、「複習與應用」、「複習與練習」、單元，作為銜接概念的橋樑，在五、六年級的最後單元都放入「選修題材」，這樣單元設計為以兩面為一主題，透過情境與簡單敘述讓學生在生活情境中發現數學問題，如圖 39，為印刷工廠主題，當中的數學問題包含頁數的換算、頁數與重量、印刷速率等多方面

In the printing house

36. If a book has 40 pages it has 20 leaves. How many leaves does a book have if it has

- 120 pages
- 280 pages?

37. Books are printed on big sheets of paper from which 16 or 24 pages are made. How many pages are made from

- three 16-page sheets
- three 24-page sheets?

38. This book was printed on sheets of 24 pages. Check how many pages this book has.

- Decide how many sheets were needed to print this book.
- What page numbers are on the centre page spread of this book?
- Which page was the first one to be printed on the fifth sheet?

**Notebook exercises**

39. This book was printed on 24-page sheets, each weighing 54.65 g. Additionally, the cardboard cover weighs about 12 g per book. How much

- does one book weigh
- do 50 students' books weigh
- do 50 1000 books weigh?

40. A sheet of thick paper weighs 54.65 g. Thinner paper weighs 45.54 g. How much lighter would a 7-sheet book be if it was printed on the thinner paper, rather than the thicker paper?

41. The length of a sheet is 101.2 cm and the width is 60 cm. The height of a page in a book is 24 cm and the width is 18.5 cm.

- What is the area of the sheet in square centimetres?
- What is the area of the page in square centimetres?
- How many square centimetres of the sheet would be left over if 12 pages were printed on each side?

42. "Laskutaito 5" is printed at a rate of 250 copies per hour. How long does it take to print

- 500 books
- 1000 books
- 25 000 books?

43. The thickness of the inner section of this book, without the covers, is calculated using the following formula:

number of leaves in the book - 117 : 1000

Using the formula, calculate how thick the inner section of the book is, if it has 100 pages. Give the answer to the nearest millimetre.

44. The books are stored on racks that are 120 cm long and 100 cm wide. Work out how many copies of this book would fit on one layer on the rack. Draw a 12 cm - 10 cm rectangle in your notebook and then draw the books on the rectangle.

45. The books are sent to customers in boxes. The bases of the boxes is 50 cm long and 38 cm wide. The height of the boxes is 25 cm. The books are packed flat.

- How many copies of this book fit in one layer?
- How many copies of this book fit into the whole box?

圖 39 芬蘭 5A 之 Optional themes  
資料來源：Saarelainen (Ed.) (2007a: 104-105)。

的數學概念。除單元的安排外，在每個單元中芬蘭教科書都將教學概念宣告完畢後，藉由大量的練習題目，約所有題目的 70%將數學概念與計算能力熟練後，再以多元豐富的生活情境出現。由整體的單元設計與單元內的熟練與應用設計，可讓學生在瞭解數學概念間的相互關係與數學可應用之處。

總體而言，芬蘭國小數學教科書雖有七至八成的無情境問題，但是重視數學思考及推理能力的培養。有情境的數學問題雖然只有三成左右，但是具有豐富的真實世界或國際觀。

## 參考文獻

- 中國教育部（2011）。*全日制義務教育數學課程標準*。北京市：北京師範大學出版社。
- 王石番（1991）。*傳播內容分析法——理論與實證*。臺北市：幼獅。
- 李牧桓（2009）。以布魯姆修訂版分析芬蘭、臺灣一年級數學教科書，國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東市。
- 吳祥輝（2006，3月21日）。國際學生評量芬蘭奪冠「不讓一人落後」拼出全球第一。*中國時報*，A6版
- 林育成（2012）。臺灣、芬蘭與大陸小一至小六幾何課程之比研究，國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文，未出版，嘉義市。
- 林素微、謝堅（2010）。數學連結能力教學設計。載於洪碧霞（主編），*呼應能力指標的教學與評量設計*（頁 131-158）。臺北市：心理。
- 林英秀（2011）。臺灣與芬蘭國小數學教科書小數教材內容之分析比較，國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東市。
- 柯富渝（2013）。臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書幾何教材之分析比較，國立屏東教育大學應用數學系碩士班碩士論文，未出版，屏東市。
- 徐偉民（2013）。國小數學教科書數學問題類型與呈現方式之比較分析——以臺灣、芬蘭、新加坡為例。*科學教育學刊*，21（3），263-289。
- 徐偉民、黃新勝、柯富渝、曾于瑀（2011）。國小數學教科書中數學問題之內容分析：臺灣、新加坡和芬蘭之比較研究成果報告（精簡版）。行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告（NSC 99-2511-S-153-011）。屏東市：國立屏東教育大學數理教育研究所。
- 徐偉民、黃皇元（2012）。臺灣與芬蘭國小數學教科書分數教材內容之分析。

課程與教學季刊，15（3），75-108。

徐偉民、董修齊（2012）。國小數學幾何教材內容之比較：以臺灣與芬蘭為例。當代教育研究季刊，20（3），39-86。

徐偉民、曾于珏（2013）。臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書代數教材之比較。教科書研究，6（2），1-35。

陳之華（2009）。每個孩子都是第一名。臺北市：遠見天下文化。

翁玟琦（2011）。臺灣與芬蘭國小代數教材之比較分析，國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文，未出版，嘉義市。

國民中小學九年一貫課程暫行綱要（2000）。

國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域（2003）。

國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域（2008）。

張敬苓（2011）。臺灣、芬蘭與中國大陸小學階段代數教材內容之分析比較，國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文，未出版，嘉義市。

張敬苓（2012）。臺灣、芬蘭與中國大陸國小一至六年級數學教科書代數布題表徵之研究。臺灣數學教師電子期刊，30，35-52。

黃皇元（2010）。臺灣與芬蘭國小數學教科書分數教材內容之分析比較，國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東市。

黃新勝（2011）。臺灣、芬蘭與新加坡小學數學教科書分數與小數教材之分析比較，國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東市。

游天明（2010）。臺灣、新加坡與芬蘭國小五、六年級幾何教材內容之研究，國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文，未出版，嘉義市。

曾于珏（2012）。臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書代數教材之分析比較，國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東市。

彭惠群（2009）。芬蘭國小數學教科書之幾何教材研究——以 W 版為例，國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東市。

鄭兆珊（2010）。我國與芬蘭國小階段教科書中電學教材內容及教師意見調查，臺北市立教育大學自然科學系教學碩士班碩士論文，未出版，臺北市。

董修齊（2010）。臺灣與芬蘭國小數學教科書幾何教材內容之分析比較，國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文，未出版，屏東市。

鍾靜（2005）。論數學課程近十年之變革。教育研究月刊，133，124-134。

鍾靜（2012）。運用數學步道或數學繪本活化教學。教師天地，176，8-15。

魏銀香（2010）。臺灣、芬蘭國小分數教材內容之比較分析，國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文，未出版，嘉義市。

魏曼伊（2008）。理解芬蘭——從國民教育、國家核心課程到 PISA 測驗成果。中等教育，59（2），52-69。

- 蕭富元 (2007)。一個也不能少：芬蘭教育世界第一的秘密。天下雜誌，384，52-58。
- Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematics power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Finnish National Board of Education. (2004). *National Core Curriculum for Basic Education 2004*. Retrieved from [http://www.oph.fi/english/publications/2009/national\\_core\\_curricula\\_for\\_basci\\_education](http://www.oph.fi/english/publications/2009/national_core_curricula_for_basci_education)
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chiu A. M.-Y. et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lesh, R., & Lemon, S. J. (Eds.). (1992). *Assesment of authentic performance in school mathematics*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
- National Council of Teachers of Mathematics.(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Saarelainen, P.(Ed.). (2006a). *Laskutaito 1A in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarelainen, P.(Ed.). (2006b). *Laskutaito 1B in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarelainen, P.(Ed.). (2006c). *Laskutaito 2A in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarelainen, P.(Ed.). (2006d). *Laskutaito 2B in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarelainen, P.(Ed.). (2006e). *Laskutaito 3A in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarelainen, P.(Ed.). (2006f). *Laskutaito 3B in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarelainen, P.(Ed.). (2006g). *Laskutaito 4A in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarelainen, P.(Ed.). (2006h). *Laskutaito 4B in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarelainen, P.(Ed.). (2007a). *Laskutaito 5A in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarelainen, P.(Ed.). (2007b). *Laskutaito 5B in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarelainen, P.(Ed.). (2007c). *Laskutaito 6A in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Saarelainen, P.(Ed.). (2007d). *Laskutaito 6B in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. NY: Teacher College Press.
- Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (Ed.) *Realistic mathematics education in primary school* (pp.11-20). Utrecht, the Netherlands: CD-βPress / Freudenthal Institute, Utrecht University.
- Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626.

附錄 1 芬蘭國小數學教科書 A 冊之主要內容

| 年級 | 單元名稱          | 白色頁數 | 黃色頁數 | 主題 |   |   |
|----|---------------|------|------|----|---|---|
|    |               |      |      | 數  | 量 | 形 |
| 一  | 數字 0~5        | 14   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 加減法           | 12   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 數字 6~9，加減法    | 24   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 數字 10~16      | 14   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 數字 17~20，加減法  | 12   | 4    | ✓  |   |   |
| 二  | 複習與應用         | 17   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 加減法，數字 0~100  | 16   | 6    | ✓  |   |   |
|    | 乘法            | 26   | 6    | ✓  |   |   |
|    | 數字 0~1000，加減法 | 22   | 3    | ✓  |   |   |
| 三  | 2~9 乘法表       | 30   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 除法            | 24   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 加減法           | 18   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 幾何            | 12   | 4    |    |   | ✓ |
|    | 複習            | 11   | 0    | ✓  |   |   |
| 四  | 0~9999，加減法    | 20   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 擴大數字到 99999   | 22   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 乘法            | 24   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 幾何            | 14   | 4    |    |   | ✓ |
|    | 複習與應用         | 11   | 0    | ✓  |   |   |
| 五  | 自然數的基本運算      | 26   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 小數            | 26   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 幾何            | 28   | 4    |    |   | ✓ |
|    | 選修題材          | 10   | 2    | ✓  | ✓ | ✓ |

(續)

附錄 1 芬蘭國小數學教科書 A 冊之主要內容 (續)

| 年級 | 單元名稱  | 白色頁數 | 黃色頁數 | 主題 |   |   |
|----|-------|------|------|----|---|---|
|    |       |      |      | 數  | 量 | 形 |
| 六  | 複習與練習 | 26   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 小數    | 28   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 幾何    | 22   | 4    |    |   | ✓ |
|    | 選修題材  | 14   | 0    | ✓  | ✓ | ✓ |

附錄 2 芬蘭國小數學教科書 B 冊之主要內容

| 年級 | 單元名稱      | 白色頁數 | 黃色頁數 | 主題 |   |   |
|----|-----------|------|------|----|---|---|
|    |           |      |      | 數  | 量 | 形 |
| 一  | 0~20的加減法  | 16   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 接近10的加法   | 16   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 接近10的減法   | 16   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 幾何與測量     | 12   | 4    |    | ✓ | ✓ |
|    | 數字0~100   | 24   | 4    | ✓  |   |   |
| 二  | 直式加法      | 16   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 直式減法      | 16   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 幾何        | 16   | 4    |    |   | ✓ |
|    | 測量與估算     | 20   | 4    |    | ✓ |   |
|    | 複習        | 14   | 2    | ✓  |   | ✓ |
| 三  | 直式乘法      | 14   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 分數與小數     | 26   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 擴大數字到9999 | 22   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 測量        | 24   | 4    |    | ✓ |   |
|    | 複習與應用     | 11   | 0    | ✓  | ✓ |   |
| 四  | 除法        | 24   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 分數        | 18   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 小數        | 22   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 測量單位與座標   | 18   | 4    |    | ✓ | ✓ |
|    | 複習        | 11   | 0    |    | ✓ |   |
| 五  | 分數        | 20   | 4    |    | ✓ |   |
|    | 資料處理與機率   | 26   | 4    |    |   |   |
|    | 測量        | 30   | 4    |    | ✓ |   |
|    | 選修題材      | 20   | 0    | ✓  | ✓ | ✓ |

(續)

## 附錄 2 芬蘭國小數學教科書 B 冊之主要內容 (續)

| 年級 | 單元名稱  | 白色頁數 | 黃色頁數 | 主題 |   |   |
|----|-------|------|------|----|---|---|
|    |       |      |      | 數  | 量 | 形 |
| 六  | 分數    | 20   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 百分比   | 24   | 4    | ✓  |   | ✓ |
|    | 時間與比例 | 22   | 4    | ✓  |   |   |
|    | 選修題材  | 21   | 0    | ✓  | ✓ |   |

