



吳正新、林裕峯、吳添寶 —— 著

# 素養 好問題

素養導向評量研發指南



# 素養好問題： 素養導向評量研發指南

Literacy-Based assessment research and  
development guide

吳正新、林裕峯、吳添寶 —— 著

本書經雙向匿名審查通過



# 序

三年前，因為工作的關係開始接觸素養導向試題的研發，在蒐集、分析國內外相關的文獻後，整理了一些可能的試題研發方法，並將結果發表在中等教育季刊。在文章中，介紹了一些命題方法並使用許多範例作為說明，然而這些範例多數是引用別人研發或公告試題，對於自己所介紹的命題方法實用性為何，也沒有十足的把握。在之後的三年中，陸續執行了「國小語文與數學素養長期追蹤前導計畫」、「臺灣學生成就長期追蹤評量計畫（TASAL）第四學習階段數學素養長期追蹤計畫」以及全國性的命題培訓計畫「素養導向試題研發人才培訓計畫」第一期、第二期。在執行的過程中，研發了許多國小、國中不同年段的試題，也逐一驗證了當時介紹的命題方法。為了完備命題方法與內容，本書重新彙整了中等教育季刊的文章與這三年研發試題的心得，一方面將文章中提到的命題方法重新整理與補充，並直接利用這些方法所研發出來的試題作為範例與命題解說；另一方面則是將這三年的實際修、審試題的經驗與過程，彙整成一個固定的程序，提供給老師、命題人員或研究人員作為參考。此外，我們也與現場教師合作，將素養導向評量的精神轉換、建立一套素養導向教學的方式，協助教師在課室中落實素養導向教學。

素養導向試題的研發非常不容易，因此經驗的交流、傳承顯得格外重要。希望本書的內容能提供實際的協助，幫助讀者理解素養導向評量的精神、素養導向試題的特色、素養導向試題的研發方式，進而投入素養導向試題的研發。期待未來有更多優秀的素養導向試題研發專家，一起分享與討論。

吳正新

2021/07/30

# 作者介紹

**| 吳正新 |** 現 職：國家教育研究院測驗及評量中心助理研究員  
專 長：數學素養導向評量、測驗統計、試題反應理論、結構方程模組  
學 歷：淡江大學數學系博士  
經 歷：國立臺南大學PISA國家中心博士後研究員、國立臺灣師範大學心測中心研究員、國立臺灣師範大學心測中心題庫組組長  
撰寫內容：第一～七章

**| 林裕峯 |** 現 職：桃園市仁和國民小學教務主任  
專 長：數位學習、數學探究課程設計  
學 歷：中央大學網路學習科技研究所博士生  
經 歷：桃園市國民教育輔導團國民中小學教專實踐小組輔導員、生活課程專任輔導員、遠見天下第二屆【未來教育 臺灣100】團隊主持人、親子天下第一屆教育創新100領袖、國家教育研究院數學科研究教師  
撰寫內容：第五、七章

**| 吳添寶 |** 現 職：新北市昌福國民小學教師  
專 長：跨領域統整課程  
學 歷：聖約翰科技大學碩士  
經 歷：數學領域教師、自然與生活技科領域教師、資訊教師、國家教育研究院數學科研究教師  
撰寫內容：第五、七章

# 目次

<b>001</b>	<b>第壹章 什麼是素養導向評量？</b>	
	第一節 自我檢測	001
	一、自我檢測 1	001
	二、自我檢測 2	005
	第二節 素養導向評量要素	007
	一、素養導向「紙筆測驗」評量要素	007
	二、問題解決的歷程	008
	三、素養導向評量要素	010
<b>013</b>	<b>第貳章 為什麼需要素養導向評量？</b>	
	第一節 引導教學	013
	第二節 提升學習興趣	017
	第三節 建立學生學習數學的習慣與態度	017
	第四節 建立學習遷移能力	019
	第五節 培養核心素養、學習表現與學習內容	019
	第六節 達成課程目標	021
<b>023</b>	<b>第參章 傳統試題分析</b>	
	第一節 概念理解與程序執行	023
	第二節 解題推論	024

## 027 第肆章 素養導向試題命題方法介紹

第一節	從數學內容出發	027
	範例 1	加法課習題修改 028
	範例 2	時間加減課習題修改 029
	實作練習 1	032
	範例 3	畢氏定理課習題修改 033
	範例 4	直線方程式課習題修改 035
	補充說明 1	問題解決歷程與題組題 037
第二節	從生活情境出發	040
	範例 5	樂樂棒球 042
	範例 6	365存錢法 046
	實作練習 2	049
	補充說明 2	情境／主題的選取 051
	補充說明 3	這不是素養導向試題 052
	實作練習 3	055
	補充說明 4	數學建模 058
	範例 7	名畫挑選 059
第三節	在學術與學習脈絡情境中發現數學	063
	範例 8	發現溫度轉換公式 065
	範例 9	發現統計量 067
	範例 10	發現「公差」 068
	補充說明 5	評量即學習 070
	實作練習 4	071
	補充說明 6	引導式發現學習 072

## 075 第五章 試題修審

第一節	試題檢核	075
	範例 11 試題檢核範例	077
第二節	好問題的特徵	079
	一、不同層次的試題特徵	079
	範例 12 CD 唱片販售	083
	實作練習 5	085
	二、詮釋評估類型試題的特徵	087
	(一) 促進數學概念理解、運用數學能力的範例	089
	範例 13 職棒選手	089
	範例 14 雨量	090
	範例 15 怎麼買最省錢	090
	範例 16 七巧板	091
	範例 17 安全舒適的游泳空間	092
	範例 18 防疫社交距離	093
	範例 19 你健康嗎？	094
	(二) 提供數學溝通、數學探究與詮釋評估機會的範例	095
	範例 20 視力檢查	095
	範例 21 值日生	096
	範例 22 製作六面骰	097
	範例 23 迪士尼樂園的門票價格	098
	範例 24 電費計價	099
	範例 25 火紅歌曲	100
	範例 26 當骰子遇到疊疊樂	101

第三節	團隊修審與討論流程	102
第四節	常見的命題問題	103
	一、閱讀負荷量過大	103
	二、情境與問題無關	104
	三、學生作答與預期不相符	105
	實作練習 6	107
	四、只有計算題或程序性問題	108
	五、題材或問題太相似	111
	實作練習 7	113
第五節	試題修改歷程	113
	範例 27 表面積	114
	範例 28 排隊	117
	範例 29 電費帳單	121
	實作練習 8	125
	實作練習 9	128

## 131 第陸章 評分規準

第一節	建立評分規準	131
	範例 30 「數值簡化」暨評分規準	134
	範例 31 「雨水撲滿」暨評分規準	136
	實作練習 10	139
第二節	使用評分規準的好處	145

## 147 第柒章 因應素養導向評量的數學教學建議

### 第一節 ARPC 高階思考養成歷程 149

範例 32 ARPC 教案 1：「誰先吃桃子？」（數學繪本） 152

範例 33 ARPC 教案 2：「等值分數」（教具操作） 158

實作練習 11 164



# 第壹章 什麼是素養導向評量？

什麼是素養導向評量？在開始介紹前，先進行一下自我檢測，以了解目前你對素養導向評量的看法。檢測後，在第二節我們再提出素養導向評量要素，與你的想法進行對照，讓你更容易理解素養導向評量。

## 第一節 自我檢測

### 一、自我檢測 1

下列有二道試題，請在看完試題後，進行試題評估、撰寫試題分析表。請先閱讀第一道試題「雨水撲滿」：

#### 雨水撲滿

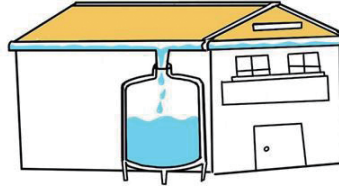
臺灣地區的降雨量雖然超過世界平均值，卻因為降雨多集中於夏秋二季，加上山高水急的地形，讓雨季的降雨難以保留，導致冬春二季往往成為枯水期。現今全球氣候變遷的情況下，臺灣每年夏季雨水主要的來源～颱風，在近30年來逐漸出現「輕颱減少，強颱增加」的趨勢。全年總雨量雖然沒有減少，但總降雨日數卻減少，則代表著降雨強度的增加，以及長時間不下雨的可能性提高。面對這種降雨模式，臺灣被歸類於未來可能發生旱災的地方，我們該如何增加可運用的水資源？

什麼是「雨水撲滿」？我們可以利用屋頂作為收集雨水的汲水面，讓雨水沿著屋簷流到水管中，經過過濾及沉澱的過程，將雨水收集在水撲滿中。我們可以把收集到的雨水取代自來水用在澆灌花木、清洗地板或作為小型的消防儲水槽使用，以達到資源再生及節約自來水的目的（引自工業技術研究院，[https://top.energypark.org.tw/children/coolhouse/classroom/rain\\_bank-e.htm](https://top.energypark.org.tw/children/coolhouse/classroom/rain_bank-e.htm)）。

下雨的時候，  
落在屋頂上的雨水，會順著  
屋簷流到預先裝設的溝渠裡。



再經由連接好的水管管線，  
將雨水導入雨水撲滿裡。



水資源就可以再利用囉！

### 問題 01

小恩家想在家設置「雨水撲滿」，利用屋頂作為收集雨水的汲水面，屋頂汲水面恰為長方形，長為12公尺、寬為6公尺。請問汲水面面積為多少平方公分？

- A 72平方公分                       B 7,200平方公分  
 C 720,000平方公分               D 72,000,000平方公分

### 問題 02

小恩家利用長為12公尺、寬為6公尺的長方形屋頂作為收集雨水的汲水面。近日適逢梅雨季，依據中央氣象局雨量統計，今天上午10時~11時，小恩家該地區時雨量為25毫米。請問小恩家可收集多少公升的雨水？

- A 18公升       B 180公升       C 1,800公升       D 180,000公升

### 問題 03

小恩家利用廢棄的不鏽鋼密閉式汽油桶當作水撲滿，一個水撲滿約可裝200公升的雨水。在連日梅雨季過後，依據氣象局雨量統計，推估可收集到的雨水體積為4.65立方公尺。請問小恩家收集到的雨水可裝滿幾個水撲滿？

- A 2個       B 123個       C 232個       D 2,325個

資料來源：素養導向試題研發人才培訓計畫學員作業。

在看完這道試題後，你覺得它像你心目中的素養導向試題嗎？如果是，你的理由是什麼？如果不是，你的理由是什麼？請在思考後，完成下列的表格。

試題	像是素養導向試題的理由	不像是素養導向試題的理由
雨水撲滿	(請盡可能的描述)	(請盡可能的描述)

請再閱讀下列的「數值簡化」試題：

### 數值簡化

數值簡化又稱數字簡化是指在進行具體的數字運算前，按照一定的規則確定一致的位數，然後捨去某些數字後面多餘的尾數的過程，常用於商店的折扣後的價格的簡化。

所謂五捨六入，計算方式是若所取位數的位次後一位小於等於5，則捨去；反之，若大於等於6，則進位，也就是超商中最小貨幣單位是1元，若有小於1元部分，就利用此方式計算。

過年期間超商折價如下：

餅乾類	 <b>第2件6折</b> <small>(以五捨六入計算)</small>
飲料類	 <b>第2件6折</b> <small>(以五捨六入計算)</small>
禮盒類	 <b>任選2件95折</b> <small>(以五捨六入計算)</small>

#### 問題 01

建榮買了二瓶16元的奶茶，請問要付多少元？

問題 02

雅婷買了一包35元的洋芋片，一包24元的泡芙，請問雅婷需付多少元？

問題 03

媽媽買了二個禮盒，二個禮盒價位分別是399元和511元，請問媽媽要付多少元？

資料來源：素養導向試題研發人才培訓計畫學員作業。

在看完這道試題後，你覺得它像你心目中的素養導向試題嗎？如果是，你的理由是什麼？如果不是，你的理由是什麼？請在思考後，完成下列的表格。

試題	像是素養導向試題的理由	不像是素養導向試題的理由
數值簡化	(請盡可能的描述)	(請盡可能的描述)

在分析完這二道試題後，**請先暫停一下，回想**你剛剛是怎麼判定試題是否是素養導向試題的？

- ✓ 有人名？（小恩、建榮、雅婷）
- ✓ 有地名？（臺灣、超商）
- ✓ 有食物？（洋芋片、蛋捲、泡芙）
- ✓ 有一段敘述或說明？（數值簡化又稱數字簡化是指在進行具體的數字運算前……）
- ✓ 有優惠折扣？（指定商品任選，第二件六折）
- ✓ 還是有科普知識？（臺灣地區的降雨量雖然超過世界平均值……）

除了上述這些因素之外，你還考量了什麼？

## 二、自我檢測 2

以下是「雨水撲滿」與「數值簡化」的修改版本。請在閱讀後，比較這二道試題前後二個版本的差異，並記錄在試題分析表。

### 雨水撲滿（第二版）

為了有效利用水資源，我們可以在學校製作雨水撲滿，收集雨水再加以利用。  
雨水撲滿的製作方式與概念如下：



下雨時，雨水會沿著屋簷流入溝渠，最後接到雨水撲滿裡。

#### 問題 01

快樂國小在長為10公尺、寬為6公尺房屋屋簷旁，裝設了集水溝渠，收集雨水。

依據中央氣象局資料顯示，今天上午學校所在地區降雨量為25毫米。

請問今天上午學校的雨水撲滿可收集多少公升的雨水？請列出你的計算過程。

（註：1公尺=100公分，1公分=10毫米，1公升=1,000立方公分）

#### 降雨量小百科

降雨量本質上是水的體積，但生活中常以「降雨量總體積」除以「雨水落下面積」所得到的「高度」來形容降雨量的多寡。

#### 問題 02

學校利用收集到的雨水，作為廁所馬桶沖水用。

根據統計，學校平均每人每天在校上廁所三次，每次沖水量約為6公升。

一桶體積為5立方公尺的雨水撲滿，收集滿一桶後是否足夠全校250位師生一天的廁所沖水量？請說明你的理由。（註：1立方公尺=1,000公升）

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

## 數值簡化（第二版）

某些商家的收費方式是採用**五捨六入**的方式，也就是結帳金額的小數點後第一位若小於或等於5，則捨去；反之，若大於或等於6，則進位。例如：如果結帳金額是40.5元，只需付40元；若結帳金額是40.6元，則需付41元。

### 問題 01

請問**四捨五入**和**五捨六入**這二種收費方式，哪一種方式比較有利於消費者？請說明你的理由。

### 問題 02

建榮和同學到某家使用五捨六入收費方式的超商買飲料。

超商正在週年慶，飲料的優惠方式是：「**同系列的商品第二件五折**」

建榮他們購買了同系列產品奶茶和紅茶各一瓶，其中奶茶是15元，紅茶也是15元。

請問他們一共要付多少元？

### 問題 03

畢業旅行即將到來，秉宏和陳靜到某家使用五捨六入收費方式的超商買零食。

超商售有五種餅乾，價錢分別如下：

洋芋片	蛋捲	捲心酥	泡芙	點心酥
88元	33元	44元	77元	55元

超商正在週年慶，餅乾的優惠方式是：「**第二件六折（以價低者折扣）**」

秉宏選了一包洋芋片和一包蛋捲；陳靜選了一包捲心酥和一包泡芙。

請問他們在結帳時，如何重新配對餅乾進行結帳，可以更省錢呢？

請說明你的理由。

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

看完「雨水撲滿（第二版）」與「數值簡化（第二版）」之後，你覺得第二版本試題與第一版試題有什麼不同？請將不同處寫下來。

試題	與第一版不同之處
雨水撲滿（第二版）	（請盡可能的描述）
數值簡化（第二版）	（請盡可能的描述）

※二版本差異的參考答案在第11頁。

綜合上表的分析結果，你現在覺得什麼是素養導向評量？

## 第二節 素養導向評量要素

新課綱強調學以致用，重視運用所學知識解決日常生活中遭遇的問題、以及未來的挑戰。符合新課綱的素養導向評量要有什麼特色、要有包含什麼元素？以下從紙筆測驗評量要素與問題解決歷程進行說明，再根據這些說明統整出素養導向評量要素。

### 一、素養導向「紙筆測驗」評量要素

任宗浩（2018）根據新課綱提出以下二項素養導向試題命題的基本要素：

- （一）佈題強調真實的情境與真實的問題：以往的紙筆測驗多著墨於知識和理解的層次的評量，素養導向則較強調應用知識與技能解決真實情境脈絡中的問題。除了真實脈絡之外，素養導向試題應儘可能接近真實世界（包含日常生活情境或是學術探究情境）中會問的問題。
- （二）評量強調總綱核心素養或領域／科目核心素養、學科本質及學習重點：
  1. 跨領域核心素養係指如總綱所定義三面九項中所指出之符號運用、多元表徵、資訊媒體識讀與運用以及系統性思考等跨領域／科目的共同核心能力，並非專指跨領域／科目的題材。
  2. 各領域／科目的素養導向評量強調「學習表現」和「學習內容」的結合，並應用於理解或解決真實情境脈絡中的問題。

要點（一）中的真實情境泛指在日常生活、學習脈絡或學術探究中可能遭遇的問題情境；包括學生親身經歷過的、未來可能經歷的，或是他人的經驗但值得參考的各種問題情境。有些基本知識或能力被視為是素養培育的重要基礎，因此領域／科目評量不一定完全採素養導向的情境題，但應儘可能避免需透過機械式記憶與練習之題目。

處理複雜訊息不僅是因應未來世界的重要能力，也是素養導向學習的目標之一。真實世界的訊息，並非都是簡單明瞭的訊息，尤其是在數位時代的學習，面對各種未過濾的資訊，人們必須能夠從中判斷重要的資訊、篩選正確的訊息以解決問題。因此，相較於傳統試題，素養導向試題的題目通常會比較長；然而，經適當設計，素養導向的題目也可以利用簡短或少量的訊息，引發核心素養的練習。

## 二、問題解決的歷程

新課綱強調問題解決（problem solving），運用數學解決日常生活問題的程序可以區分成三個部分：理解「真實問題」、處理「數學問題」、獲得並應用「數學結果」，如圖1所示。此過程也稱為數學歷程（mathematical process）。在問題解決或數學歷程中需要應用多項的數學能力，PISA將這些能力分成「形成」、「運用」與「詮釋評估」三類（Organisation for Economic Cooperation and Development, 2016），其中：

「形成」是指將現實生活中遭遇的問題轉換成具數學結構、表徵、或數學特異性的問題。

「運用」是指應用數學概念、事實、程序與推論解決問題，獲得結果。

「詮釋評估」是指反思解法、答案或結論的合理性，並在真實生活中進行做合理的詮釋。

因此，要完整評估學生運用數學解決問題的能力時，試題需要結合生活情境，並儘可能包含「形成」、「運用」與「詮釋評估」這三種不同類型的題目。

另一種在學習脈絡情境和學術探究情境的問題解決的過程與數學知識的學習和建立有關。數學家在發展或建立數學知識時，多數是從問題或事實出發，然後逐步

圖 1  
數學歷程

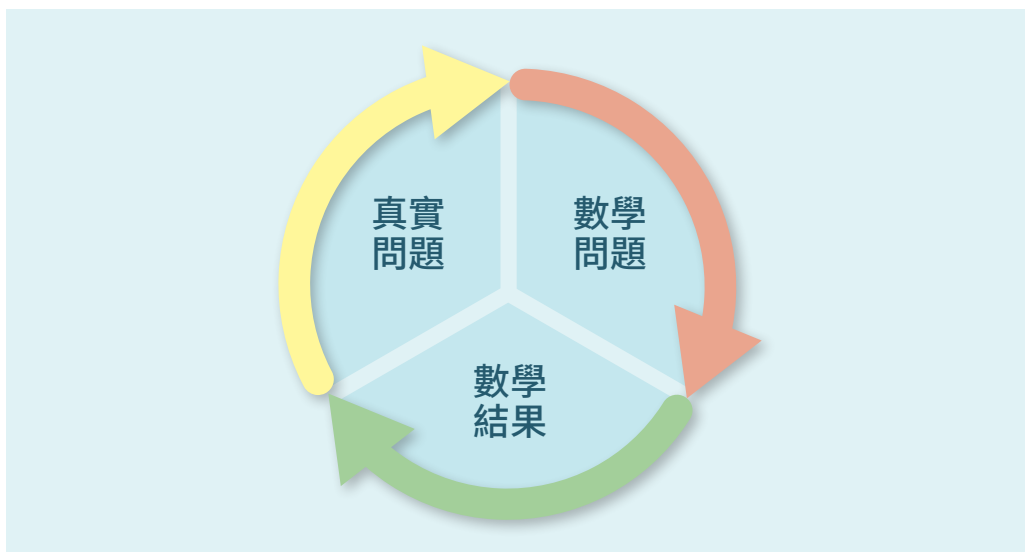
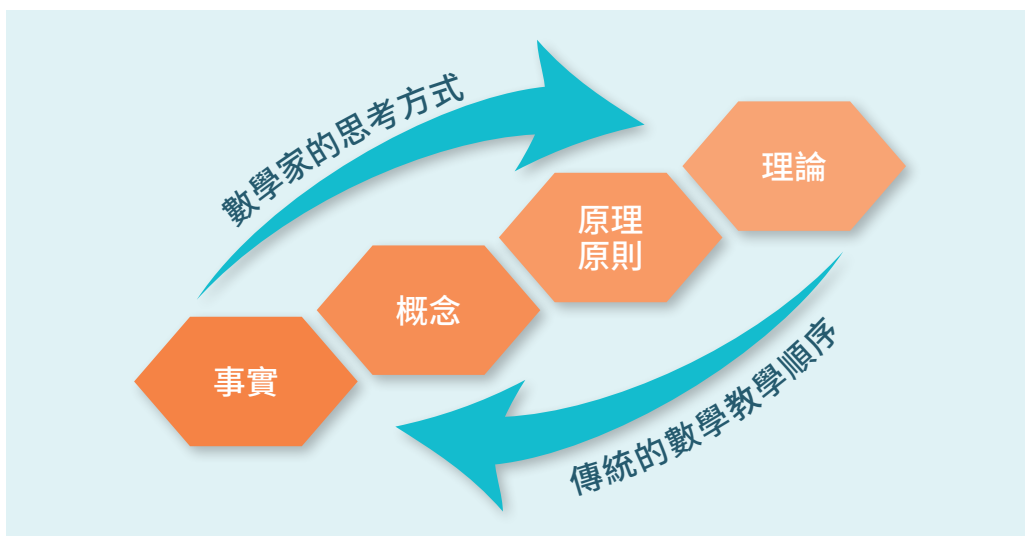


圖 2  
傳統數學教學與數學家思考方式的比較

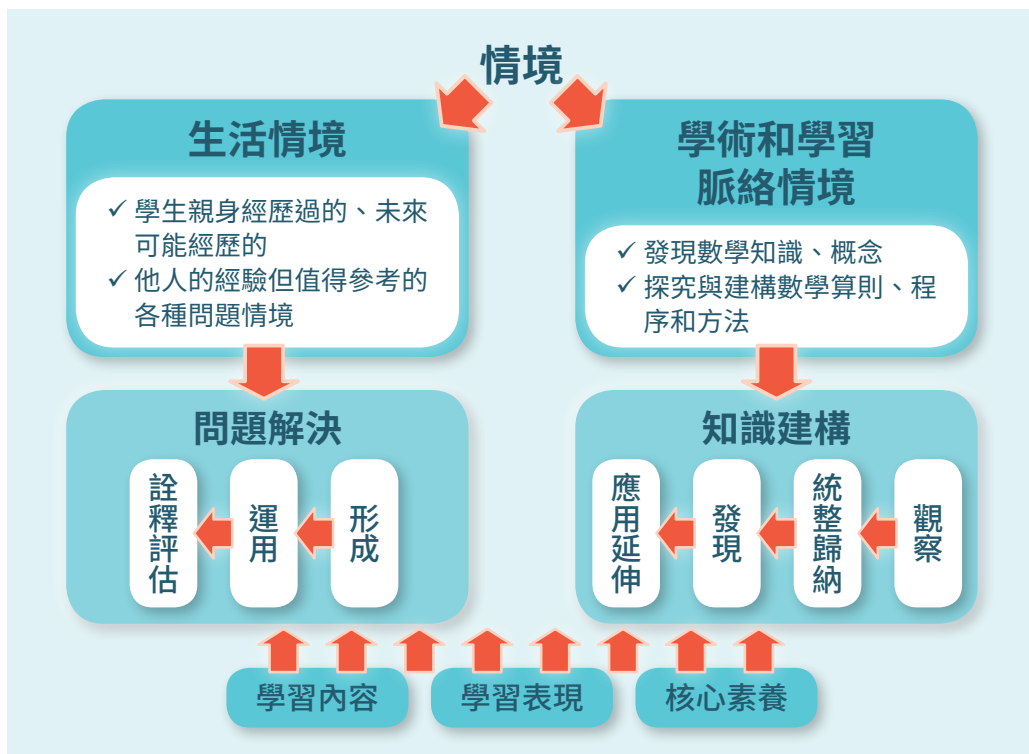


的建立數學概念、原理原則，最後形成理論（如圖2）。從事實、概念、原理原則、最後到理論的過程中包含幾項重要的元素：「觀察」、「統整歸納」、「發現」、「應用延伸」。歷經這個探究的歷程，數學家不但發現、創造出許多數學知識和理論，更重要的是在探究過程中，培養紮實的數學論證的能力（李國偉，1978）。

### 三、素養導向評量要素

「核心素養」重視學生在面對問題時的知識、能力與態度，它強調的是一個整合能力，因此，不論教學或試題都需要把情境脈絡、問題、數學核心能力結合在一起，才能培養出學生的核心素養。如果只是將知識或能力逐條、逐項單獨抽離出來進行教學和評量，將無法達到新課綱的目的。因此，完整的素養導向評量要素要包括：情境、問題、數學核心能力三項。整合上述的分析，情境可分為生活情境、學術和學習脈絡情境二大類。其次，問題要真實，而且要能引發學生不同層次的思考。在生活情境中要包含形成、運用、詮釋評估三種不同階段的問題；在學術與學習脈絡情境中要包含觀察、統整歸納、發現、延伸應用四種不同階段的問題。最後，評量的數學核心能力要同時包括核心素養、學習內容與學習表現。圖3為據此繪製的素養導向評量架構圖。

圖3  
素養導向評量架構



以下是第7頁自我檢測2的參考答案：

參考答案	
試題	與第一版不同之處
雨水撲滿 (第二版)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 精簡題幹文字</li> <li>2. 問題與校園生活相關</li> <li>3. 提供單位換算方式</li> <li>4. 多元解題策略</li> <li>5. 利用非選擇題（需提供計算過程、理由）評量學生的表達能力</li> </ol>
數值簡化 (第二版)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 精簡題幹文字</li> <li>2. 清楚的說明五捨六入取概數法</li> <li>3. 問題更貼近學生生活</li> <li>4. 彰顯數學的價值與實用性</li> <li>5. 利用數學比較不同方法的優劣</li> <li>6. 運用數學思維分析問題</li> <li>7. 同時包含計算、說明、分析與推論的試題</li> </ol> <p>※使用五捨六入計算價錢的超商商品  <a href="https://reurl.cc/GmA5ep">https://reurl.cc/GmA5ep</a>、<a href="https://onelifetw/a/16441">https://onelifetw/a/16441</a>、  <a href="https://reurl.cc/O0v5vR">https://reurl.cc/O0v5vR</a>、<a href="https://onelifetw/a/16298">https://onelifetw/a/16298</a>。</p>



## 第貳章 為什麼需要素養導向評量？

在傳統的東方教育中，考試一直是引領著學校教學的重要指標，因此若能善用考試制度，可以引導現場教師的教學方式，達到教育改革的目標。同樣的，素養導向評量以新課綱為基礎，旨用以評估、回饋與引導素養導向課程與教學之實施，期望透過適當的評量實務，引導並落實能夠培養學生核心素養和領域／科目核心素養的課程與教學（任宗浩，2018）。此外，素養導向評量強調真實的情境與真實的問題，因為利用真實情境與真實問題可顯著提升學生學習的動機與興趣，並在解決問題的過程中，培養學生學習數學的習慣、態度，在累積各式問題解決的過程中，潛移默化的建立學生的學習遷移能力，為未來的生活與工作奠定重要的核心能力。因此，若能善用素養導向評量，將可發揮下列六項功能：1.引導現場老師的教學；2.提升學生的學習興趣；3.建立學生學習數學的習慣與態度；4.建立學習遷移能力；5.培養學生的核心素養；6.達成新課綱的課程目標。以下的章節將逐一進行說明。

### 第一節 引導教學

Greer (1997) 指出，許多學生在解應用問題或文字題時，通常會依照圖4的綠色（實線）路徑，他們會跳過分析問題、思考問題、選擇適當的解題策略和方法的程序（虛線步驟①和步驟②），直接根據應用問題或文字題題幹提供的數字、文本中的關鍵字詞進行計算。他曾利用下列的問題測試學生：

---

有一位牧羊人有125隻羊和五隻狗。請問牧羊人今年幾歲？

---

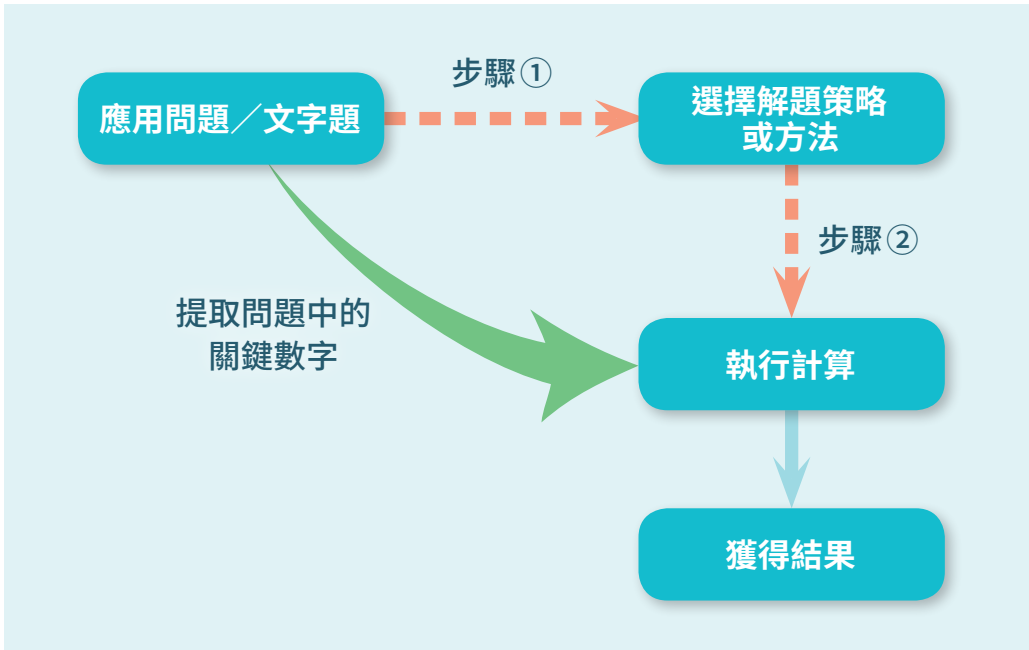
他發現很多學生會這樣回答：

---

125+5=130，這樣太大；125-5=120，還是太大；  
如果用乘的，會更大；如果是125÷5=25，這樣差不多。  
我想牧羊人今年25歲

---

圖 4  
常見的應用問題錯誤解題流程



資料來源：改編自Greer (1997)。

這些學童僅利用問題中的數字進行計算，試圖找出一個合理的答案。許多學生認為，以前的學習經驗告訴他們，通常這樣計算就可以得到正確的解答。

使用關鍵字解應用問題會造成很多學習問題 (Dixon et al., 2016; Drake & Barlow, 2007)，例如：關鍵詞往往具有誤導性、學生並沒有真正理解問題、如果學生只會使用關鍵詞解題，他們將不會分析問題、思考解決問題的策略。此外，關鍵詞也不適用於二步驟以上的問題或複雜的情境問題，甚至某些簡單的文字題也無法使用這種方法獲得答案，例如：「書架上有 $s$ 本書，管理員又放上了一些書之後，書架上總共有20本。請問管理員放了幾本書到書架上？」

素養導向評量是以**核心素養** (圖5) 為基礎進行試題研發，希望從評量的過程中，引導學生分析、思考，進而展現學生的知識、能力以解決問題。具體而言，素養導向評量從試題設計方面著手，利用貼近學生生活的情境，引導學生投入問題的思考，設計對學生而言是有意義、有目的或有需求的問題，讓學生在過

程中，逐步習得言之有據、據理說明的分析與推理能力，逐步養成學生應用數學知識、能力解決問題的習慣與態度。

圖 5  
核心素養

核心素養是指：「一個人為適應現在生活及面對未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度。核心素養強調學習不宜以學科知識技能為限，而應關注學習與生活的結合，透過實踐力行而彰顯學習者的全人發展」（教育部，2014）。它分為「自主行動」、「溝通互動」、「社會參與」三個面向，每個面向都包含三個項目，如下所示。



資料來源：引自洪詠善（2018）。

以第一章的「數值簡化（第二版）」為例，它的問題1利用購物情境，引導學生比較傳統的四捨五入取概數法與五捨六入取概數法的差異，並釐清使用不同方法的優缺點。學生無法直接從問題中擷取數字或關鍵字進行作答，要能應用核心素養的「A2系統思考」、「A3溝通表達」才能正確的回答問題。問題2為計

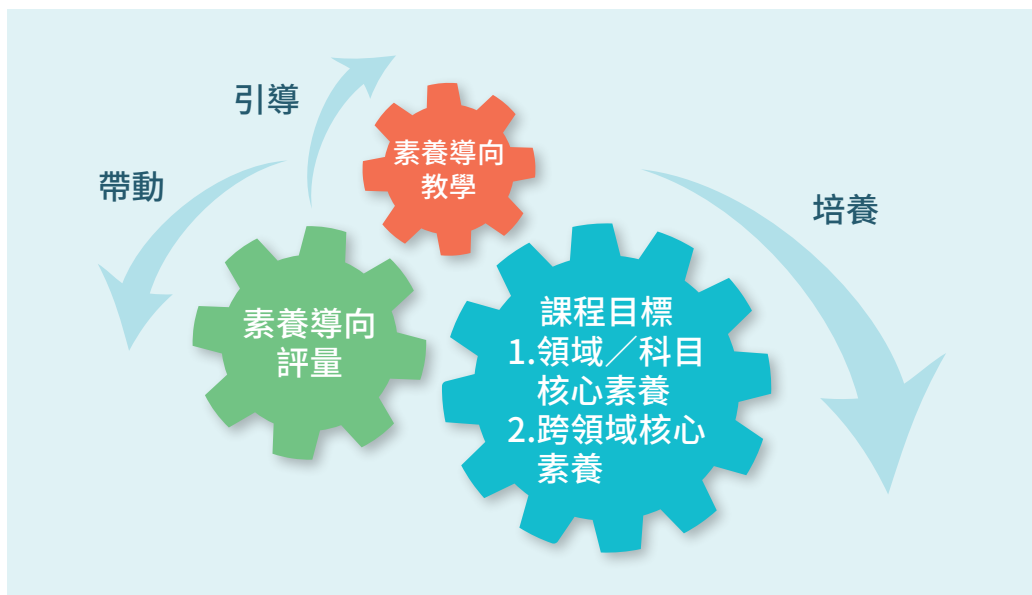
算題，學生要先理解並應用五捨六入取概數的方法，即學生需要具備核心素養的「B1符號運用」能力，才能正確計算出優惠價格。問題3加入了分析元素，學生需要分析二位購買不同商品的顧客，在結帳時，如何重新配對餅乾進行結帳，才能更省錢。學生要能理解優惠方式「第二件六折（以價低者折扣）」，並能應用此優惠方式達到省錢的目的。因此學生要能靈活運用「A2系統思考」、「A3規劃執行」、「B1符號運用與溝通表達」核心能力，才能正確的回答問題。

素養導向試題無法直接利用文本中的關鍵字詞或數學，進行計算解題，它需要使用核心素養，從問題的分析與理解、解題策略或方法選用（圖4 步驟1），再根據選用的策略或方法進行計算解題（圖4 步驟2），避免學生未經思考，僅根據問題中的數字胡亂計算、求解。真實情境中的**真實問題**可以激發一系列數學思維和學習反應，而問題解決過程中不同階段的問題，則能釐清學生學習的問題，進而了解學生的學習成效。

一旦評量需要核心素養能力，教學**自然就會**調整，重視核心素養能力的培養。如此一來，素養導向評量在考試領導教學風氣盛行的臺灣社會，便能發揮帶動的功能，引導現場教學，達到培養學成習得核心素養的成效（圖6）。

圖 6

帶動素養導向教學、培養核心素養的轉動圖



資料來源：引自任宗浩（2018）。

## 第二節 提升學習興趣

在實際教學現場可發現，學習興趣高的學生比較能自主學習，即使遇到困難也較不易放棄，因為學習興趣會直接影響學生學習時的注意力、認知策略的使用、學習表現……等，它是學習過程中相關的重要因素。此外，學習興趣高的學生也比較享受學習的樂趣、喜歡學習。

興趣可區分為「個人興趣」與「情境興趣」二類，其中個人興趣是指穩定持久且較不易隨情境改變的個人狀態；而情境興趣是指受情境環境刺激而感覺有趣，它是短暫的。研究指出，這二者並非互斥，它們的發展是彼此互相影響，而且情境興趣是個人興趣發展的主要成分（Renninger et al., 1992）。因此，如果教師能刻意營造或安排適當的情境，例如：經由教材選擇編排、課程活動設計、課室情境安排、評量的設計……等，便能影響或甚至創造學生的情境興趣，進而建立學生對數學學習的興趣。

許多學者提出情境會影響學生的學習，例如：Brown等人（1989）提出情境認知理論的學習模式，主張知識來自學習者主動與環境當中情境脈絡互動而建構產生。讓學習者置身於教學情境中，其過程是參與行動學習、反思探索與回饋，其目的在於使學習者在多元環境中互動，能適性發展而建構出自身的知識能力。心理學家皮亞傑（Piaget, 1970）認為兒童是在與周圍環境相互作用的過程中，逐步建構起關於外部世界的知識，從而使自身的知識得到發展。

總而言之，有效的情境教學與評量可以激發學習者的學習興趣，提升學生主動參與學習，促使學生積極主動地去想像、思考、探索，解決問題。因此，任宗浩（2018）指出，素養導向評量強調透過選擇合理且適當的問題情境、讓學生了解所學與其生活或職涯發展的關係，以正向引導學生的學習動機。透過素養導向試題，可讓學生體會到學習是有用的，進而提升學習的興趣，而不合理或不必要的問題情境可能導致學生質疑學習的必要與重要性。

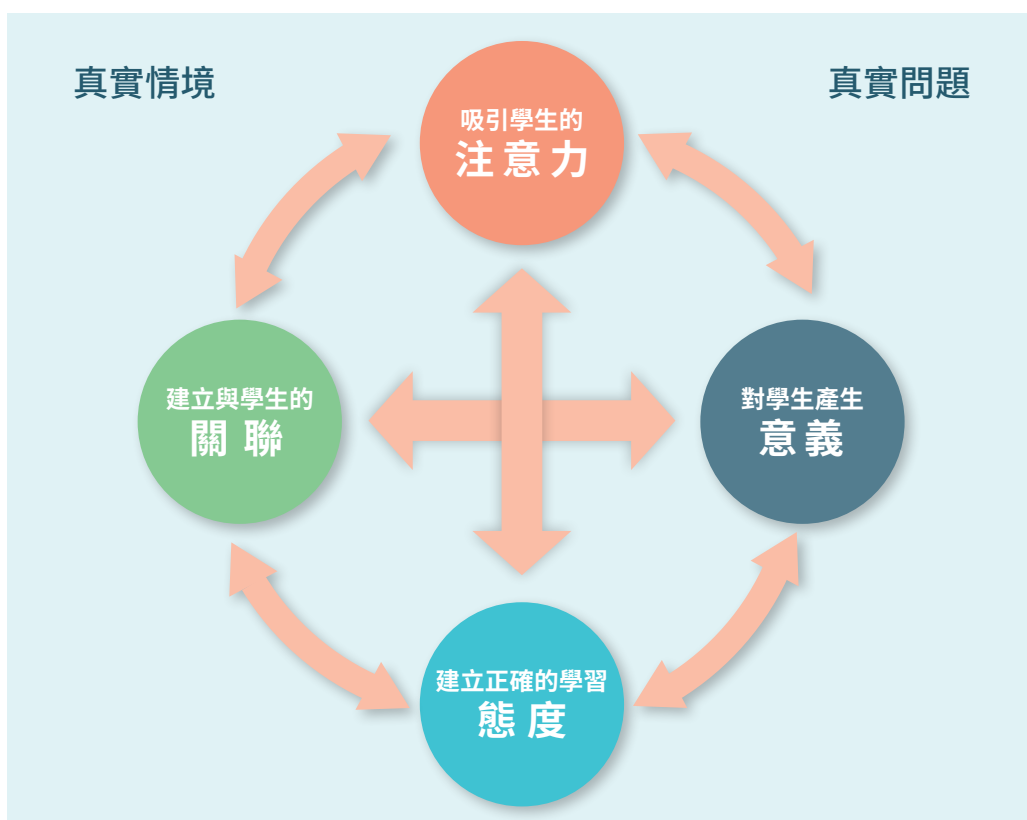
## 第三節 建立學生學習數學的習慣與態度

有別於舊課綱，新課綱特別強調「態度」，並明訂於課程目標中，數學教

學需要「培養使用工具，運用於數學程序及解決問題的正確態度」。「態度」是指個體對人、對事、對周圍世界所持有的一種具有持久性與一致性的傾向（張春興，1989）。素養導向評量如何培養學生正確的態度？首先，它讓學生發現數學的價值。當評量的材料來自學生的日常生活，不但能吸引學生的注意力，還能提供學生利用數學解決生活問題的機會，並讓學生從中發現學習數學的價值（Ministry of Education Singapore, 2019）。其次，素養導向評量以真實情境中的真實問題作為題材，很容易拉近或建立學生與問題之間的關聯，讓問題的探索與解答對學生產生意義。一旦問題對學生有意義、具備目的性或需求性，便能激發學生思索，建立學生思考、分析問題的習慣。良好的習慣建立後，便能慢慢的改變學生學習數學的態度，建立學生正確的思考、探索、解決問題的能力（如圖7）。因此，素養導向評量可以逐步建立或改變學生學習數學的習慣與態度。

圖 7

建立數學學習態度的方式



## 第四節 建立學習遷移能力

遷移 (transfer) 是指是將某一情境中學習到的知識、技能，轉移到另一個情境中使用 (Sternberg, 2009)，它是教學重要的目的，也是21世紀素養強調的重點能力之一 (Pellegrino, 2017)。然而，若要學生能將習得的知識、技能應用到新情境，教師在進行教學或評量時，就要涵蓋各式不同的情境 (Slavin, 2005)。特別是在學生大量累積不同的問題解決經驗後，才能有效提升學生運用這些學習經驗，將知識轉移至新問題或新情境中，增進學生面對新問題時的回應或解決能力 (Mayer, 2010)。此外，平時也要訓練學生理解數學何時應用、如何應用、以及為什麼可以應用。

素養導向評量的目的在於培養學生的解決不同問題的能力。Schoenfeld (1983a) 指出，問題解決可以：

- ✓ 訓練學生「創造思考」和發展他們的「問題解決」能力，特別是培養學生的啟發式 (heuristic) 策略；
- ✓ 讓教師有效引導學生進行啟發式教學；
- ✓ 學習特定領域的技術，例如：不同領域的數學建模技術；
- ✓ 作為低能力學生補救數學 (基本技能) 的新方法，或作為訓練高能力學生的「批判性思維」或「分析性推理」技能。

因此若能善用素養導向評量，便能使學生增加問題解決的經驗，提升並建立學生的遷移能力。

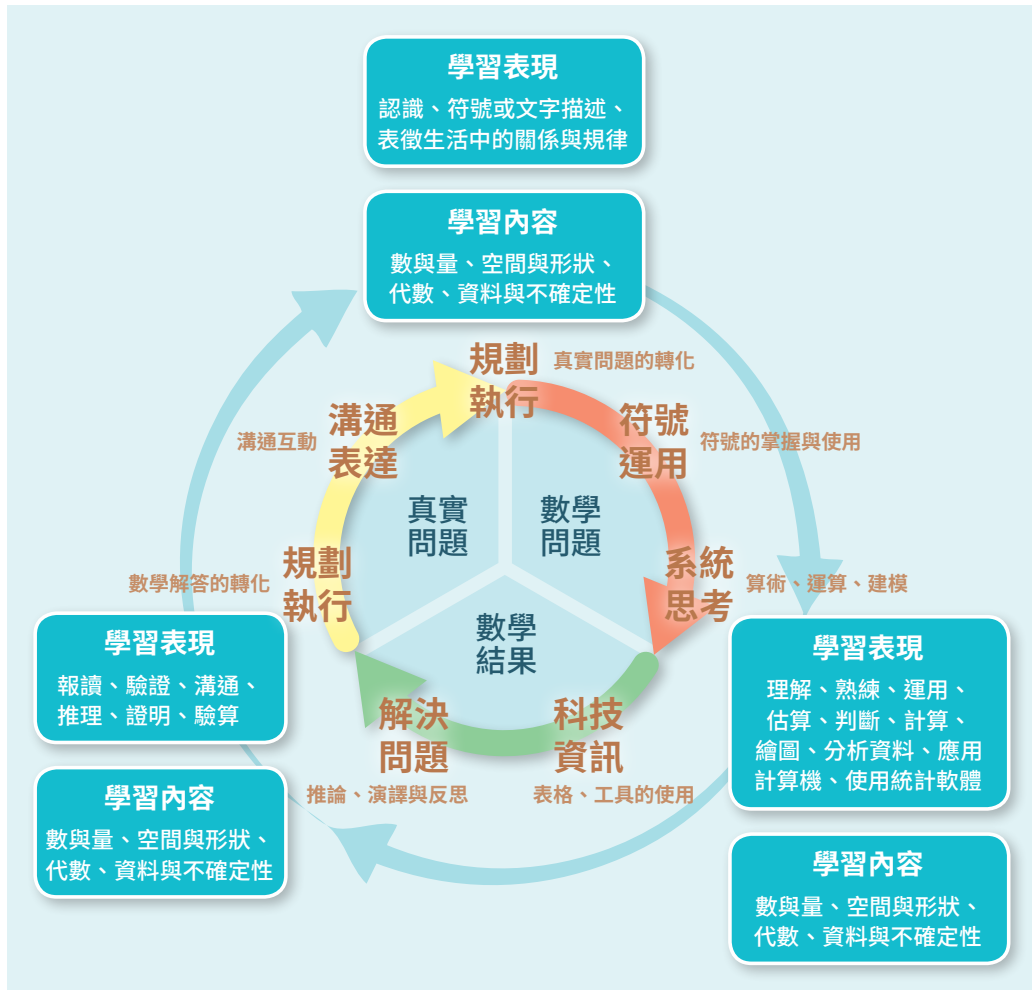
## 第五節 培養核心素養、學習表現與學習內容

運用數學解決問題包含不同歷程：連結真實問題轉化成數學問題、從數學問題獲得數學結果、再從數學結果詮釋真實問題，而這些過程所需的能力，正是新課綱中的核心素養、學習表現和學習內容。

如圖8所示，在面對真實問題時，需要具備整體的規劃執行與符號應用能力 (核心素養A3、B1)，要能認識問題、描述問題、表徵生活中的關係與規律

(學習表現)，以及展現這些能力時需要的相關數學知識(學習內容)。當真實問題轉換成數學問題後，接著要能解決數學問題。此時，需要能系統思考、輔以科技資訊(核心素養A2、B2)，再加上理解、運用、計算等不同能力的表現(學習表現)，才能獲得數學結果。要完成此階段的作業，特別需相關的數學知識(學習內容)作為支撐才能完成。在解決數學問題後，要具備規劃執行、溝通表達能力(核心素養A3、B1)，要能展現驗證、溝通、驗算等不同的表現(學習表現)，才能真正的將數學結果應用在日常生活解決問題。因此，在使用素養導向評量的過程中，也會同時培養學生的核心素養、學習表現與學習內容。

圖 8  
數學歷程與核心素養、學習表現、學習內容的關係



## 第六節 達成課程目標

問題解決也是現今數學教育中相當重要的一個項目，Schroeder與Lester（1989）認為問題解決：

- ✓ 是一種教學目的（teaching for problem solving）、
- ✓ 是一種技能（teaching about problem solving）、
- ✓ 是一種教學方法（teaching through problem solving）。

因此，許多國家將問題解決能力列為課程目標（Ministry of Education Singapore, 2019），或是作為數學教育的目標（Stacey, 2005；Stacey & Turner, 2015）。在臺灣的新課綱中，問題解決也是數學領域強調的重點項目之一。表1為十二年國民基本教育課程數學領域課程目標，可以發現，課程目標的第二至第四項都與問題解決有關。因此，若能有效的利用素養導向教學與評量，可以直接達成這三項課程目標。

許多研究（Barell, 2007；O'Brien et al., 2011；Roh, 2003）指出，利用設計良好的問題來引導教學，可以提高學生學習興趣、產生較深層的理解、有助於訊息和概念的保留或遷移、讓學生有處理複雜認知過程的機會，也可以讓學生與知識進行多重的接觸與複雜的互動，在多樣且不同情境脈絡中運用知識、技能與形成態度。因此，透過問題解決或問題導向教學，還可以同時培養學生達成課程目標的其他三項指標（表1的第一項、第五項及第六項）的能力。總言之，使用素養導向教學與評量是達成十二年國民基本教育課程數學領域課程目標重要的方法與手段。

**表 1**

十二年國民基本教育課程數學領域課程目標

- 一、提供學生適性學習的機會，培育學生探索數學的信心與正向態度。
- 二、培養好奇心及觀察規律、演算、抽象、推論、溝通和數學表述等各項能力。
- 三、培養使用工具，運用於數學程序及解決問題的正確態度。
- 四、培養運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力。
- 五、培養日常生活應用與學習其他領域／科目所需的數學知能。
- 六、培養學生欣賞數學以簡馭繁的精神與結構嚴謹完美的特質。

資料來源：教育部（2018）。



## 第參章 傳統試題分析

為什麼傳統試題無法達成評量學生學習新課綱的成效？本章從傳統試題的試題評量內容進行簡要的說明與分析。傳統試題主要分成「概念理解」、「程序執行」、「解題推論」三類，其中概念理解是指學生對數學知識或內容概念的理解程度；程序執行是指數學計算或演算的程序和步驟的知識；「解題推論」主要是評量數學內部推論、應用問題或文字題（word problem）。以下分別列舉並說明這三類試題的特色。

### 第一節 概念理解與程序執行

「概念理解」與「程序執行」這二類的試題多數是偏重評量學科內容和知識，例如：

#### 問題 01

方程式  $\frac{9x+2}{12} - \frac{x-3}{3} = 1$  的解，與下列哪一個方程式的解相同？

- A**  $\frac{9x+2}{12} - \frac{x-3}{3} = 1$       **B**  $\frac{3(3x+2)}{12} - \frac{4(x-3)}{3} = 1$   
**C**  $9x+6-4x-12=1$       **D**  $9x+6-4x+12=1$

#### 問題 02

請寫出「斜率為2，y軸截距為100」的方程式，並繪製圖形。

這二類型的試題有一些共同的特徵，例如：它們通常會使用大量的數學符號或專有名詞，多數的試題內容都是簡潔、且條件明確的數學問題。由於內容都與

數學知識有關，因此這二類試題通常能有效區辨學生對數學知識的熟悉程度。然而，因為內容過於枯燥、不具實用性、也沒有與生活連結，如果反覆地學習這些單調的數學知識，很容易降低學生的學習數學興趣與動機，容易造成許多為了在考試上獲取高分的學生，以背誦或記憶的方式學習數學。最後，演變成許多學生都不喜歡數學。

## 第二節 解題推論

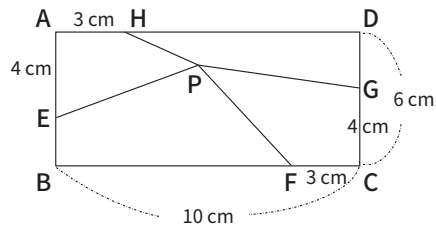
第三類的傳統試題為「解題推論」。解題推論一般可以再細分為二種：數學內部的推論問題，以及應用問題或文字題。

一、數學內部的推論問題：這類型的試題通常會比較難，因為在解題時需要額外的技巧，或需要運用特殊方法。倘若沒有相關的經驗或事先練習，學生通常會不知如何解題。例如：

如右圖，P為長10公分、寬6公分的長方形ABCD中的一點。

E、F、G、H為長方形4個邊上的點，其中 $\overline{AE}=4$ 公分、 $\overline{AH}=3$ 公分、 $\overline{CF}=3$ 公分、 $\overline{CG}=4$ 公分。

請問四邊形AEPH和四邊形PFCG的面積和是多少平方公分？



二、應用問題或文字題：傳統的應用問題會與生活情境有一些關聯，多數試題會針對評量內容選用一個生活情境包裝。但在許多傳統試題用來包裝試題的生活情境，通常是可有可無的，即使刪掉試題中的情境，也不太會影響評量的內容，例如：

連日的大雨造成蘇花公路有二處出現坍方現象。修復蘇花公路的團隊勘查後表示，修復第一坍方處需5小時25分，修復第二坍方處需2小時40分。請問修復這二處坍方總共需要多少時間？

在上述的試題中，它的評量目的是檢測學生的時間加減能力，而試題結合公路坍方與道路修復作為情境。由於評量重點僅是單純的時間加減，使得用來包裝試題的情境形同是多餘的，只是徒增試題的閱讀量。

傳統的應用問題或文字題還有另一個特點：只有唯一的正解。因此當評量使用這類型的題目時，為了正確計算出答案獲得分數，學生會被教導或訓練擷取問題中的關鍵字或數字，例如：上述範例中的「共」、「5小時25分」及「2小時40分」。因為關鍵字「共」告訴學生這題要使用加法，所以只要將「5小時25分」與「2小時40分」相加即可。如此一來，很容易造成學生在解應用問題時，使用錯誤的解題流程（圖4）。因為當學生僅專注在關鍵字的擷取與應用熟悉的計算程序，而未嘗試去理解或連結情境與問題間的關係，很容易造成不完整或深度不夠的學習。一旦問題或情境變得稍為複雜後，學生可能就會束手無策，或是僅能隨便計算，獲得一個自己也不知道合不合理的答案。

此類型試題的第三個特點是：它的條件與問題之間的已知、未知關係，呈現一個不符合邏輯的現象，例如：

下表為臺灣國中七年六班5位學生，第一次數學平時測驗的得分與全班平均分數80分的比較。

學生	大雄	靜香	小夫	小杉	胖虎
得分－全班平均	-4	+7	-2	+10	-6

- (1) 請問大雄得幾分？\_\_\_\_\_。
- (2) 請問小杉得幾分？\_\_\_\_\_。
- (3) 這五位同學的平均可記為？\_\_\_\_\_。

在上述的範例中，全班的「平均分數」80分以及「學生得分－全班平均」都已知，代表每位學生的成績均已知。但問題1~3卻把學生的成績當成未知，要進行計算，整個試題的情境鋪陳非常不合邏輯。這樣的數學問題，很容易誤導學生學習數學的用途與價值。

這些偏重知識與程序執行的傳統問題，通常不利於刺激學生思考問題或分析問題，雖然部分數學推理的問題需要學生進行一些推論，但多數是需要技巧的試題，而應用問題則多為評量特定學習內容而設計的，學會這些解法也無法應用、

延伸或解決學校之外的數學問題。如同Wiggins（1990）指出，這樣的評量只需要學生能辨識、記憶，或是將知識或技能“plug in”在脫離真實情境的問題中。長久下就形成了一個數學學習的怪現象：學生很會寫題目，但學習數學興趣低落、不喜歡數學（Mullis et al., 2020）。因此，評量不能只有傳統試題，評量內容應該更加重視：學生要能尋求解決方法、要能探索規律或模式、要能提出懷疑、猜想，而不是僅評量學生是否記住公式或執程序。

## 第肆章 素養導向試題命題方法介紹

傳統試題可以評量學生的基本知識，素養導向試題則可以進一步評量學生應用數學知識解決問題的能力。素養導向試題能評量學生全方面的數學能力，因為結合生活情境的素養導向試題，不但需要覺察數學可用之處、轉換真實問題到數學問題、解決數學問題，甚至需要說明、比較或解釋、評估結果。讓學生展現這些能力、運用數學創造價值，他們才會更喜歡數學、對數學更有興趣。

如何研發這種類型的素養導向試題？根據第一章「素養導向評量要素」，本章將介紹三種研發素養導向試題的略策與方法，包括：從數學內容出發、從生活情境出發、在學術與學習脈絡情境中發現數學。

### 第一節 從數學內容出發

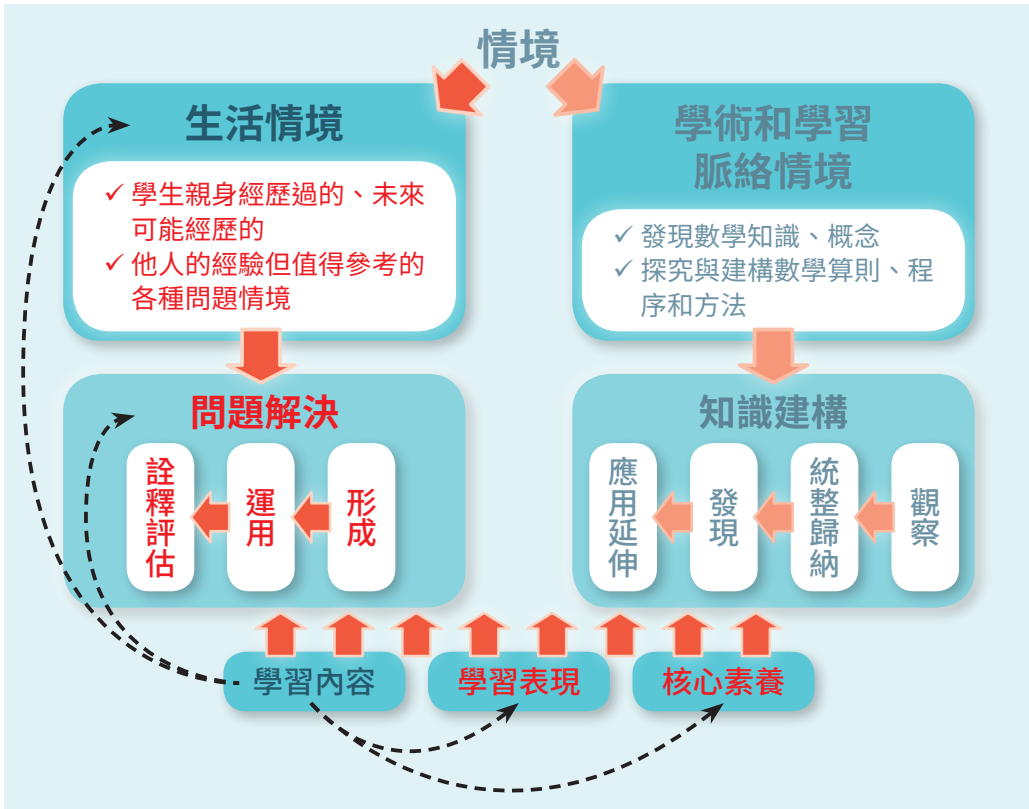
老師最常接觸的試題是課習題，大部分課習題著重在概念理解、程序執行與數學內容，因此從這些試題出發，再進行適當的修改與調整，是最方便的方式。如果從數學內容出發，還需要納入學習表現、核心素養、考量問題的真實性、發展不同層次的試題、以及引入**適當的情境**，才能符合素養導向試題的要素（如圖9）。

根據圖9，將課習題修改成與生活情境相關的素養導向試題，包含下列有三個基本的步驟（吳正新，2019）：

- 步驟 I 增加生活語詞，取代數學術語
- 步驟 II 賦予問題意義，增加需求或目的
- 步驟 III 增加學生說明、詮釋或選擇的機會

其中步驟 I 和步驟 II 可以增加試題的生活情境，讓問題貼近學生生活，步驟 III 可以提高問題的層次，評量學生詮釋評估的能力及高層次的思考能力。一旦問題是

圖 9  
從學習內容出發的命題策略



真實問題且又是高層次問題時，學生在解決問題時，就必須應用學習表現、核心素養能力。因此上述策略的重點是：引用真實的情境、使用真實的問題。以下列舉幾個修改的範例：

### 範例 1 加法課習題修改

「 $6+3=?$ 」這是一道小學一年級的傳統數學加法試題，評量學生從具體轉抽象符號的能力，同時也是評量學生是否熟悉加法程序的試題。如何修改成素養導向試題？首先，我們需要增加生活語詞，取代數學術語，例如：

「小明有六個椒鹽脆餅，小華有三個椒鹽脆餅，二人共有幾個椒鹽脆餅？」

然而，這還不夠的，因為計算二個人共有幾個脆餅，對學生而言沒有實質的意義，也就是學生為什麼還要關心小明和小華有多少個椒鹽脆餅？而且它與傳統的加法試題差異不大，學生只要能擷取關鍵的數字和關鍵字詞就能回答，並不會讓學生有進一步的思考、分析、選擇或規劃。因此，我們可以再調整問題，讓計算出來的答案對學生來說是有意義的。

如何引入適當的情境，可以先試想一下，「誰需要知道椒鹽脆餅個數？」  
 「什麼情況下要計算椒鹽脆餅個數？」例如：你要參加野餐，你想為家人準備野餐食物，就會需要計算椒鹽脆餅個數，就會需要知道椒鹽脆餅的個數。以下是一個可能的提問：

「你正在準備明天野餐所需的椒鹽脆餅個數，請問你總共需要準備幾個？」

學生要如何回答？在回答前他們可能需要考慮很多事情，包括：觀察、統整資料與分析資料，例如：

- 家裡有幾個人？
- 明天誰會去？
- 每個人可以吃幾個脆餅？
- 有誰不吃椒鹽口味？

為了確認野餐所需的椒鹽脆餅個數，需要釐清上述各項問題，並且針對每個小問題都要做出判斷，才能運用數學的加法運算，獲得最後的結果。

學生不一定具備資料收集、統整、分析的經驗和能力。因此，在教學或命題時可以逐步地給予一些線索，或是透過引導問題或提問協助學生搭建解決問題的鷹架。例如：明天有四人（爸爸、媽媽、哥哥、我）會一起參加；爸爸可以吃四個、媽媽可以吃三個、哥哥可以吃三個、我可以吃二個；哥哥不吃椒鹽口味。

## 範例 2 時間加減課習題修改

以下是一道四年級的試題，主要是評量時間加減。

## 第一版試題內容

連日的大雨造成蘇花公路有二處出現坍方現象。修復蘇花公路的團隊勘查後表示，修復第一坍方處需5小時25分，修復第二坍方處需2小時40分。

### 問題 01

請問修復這二處坍方總共需要多少時間？

### 問題 02

請問修復第一處比修復第二處要多花多少時間？

此試題已搭配一個不錯的生活情境，但問題本身僅針對學習內容「時間加減」進行提問，強調的是計算能力，並未實際運用時間加減解決可能的真實問題。因此本題缺乏步驟II與步驟III要素，也就是問題缺乏意義，也未提供學生說明、詮釋的機會。

「誰會對修復公路的時間感興趣？」「修復時間對什麼人會有意義？」「誰需求計算修復公路的時間？」釐清這些問題，能創造出符合此情境且具需求、目的或意義的問題。以下是增加步驟II與步驟III要素後的一個修改範例：

## 第二版試題內容

連日的大雨造成蘇花公路有二處出現坍方現象。修復蘇花公路的團隊勘查後表示，修復第一坍方處需5小時25分，修復第二坍方處需2小時40分。

如果修復團隊預計在下午7：00天黑前完成這二處的修復，他們早上最晚何時要開始進行修復？修復團隊需要考量：

- 二坍方處相距約80公里，交通時間需1小時35分
- 中午要保留一小時休息時間，休息時不工作

資料來源：吳正新（2019）。

第二版的試題增加了問題的目的，賦予了問題實質意義，也加入「規劃執行」的元素，並利用「問題解決」的方式增加學生說明、詮釋的機會，讓問題更

真實、更能吸引學生投入。在第二版的試題中額外增加了二項條件：「二坍方處相距約80公里，交通時間需1小時35分」、「中午要保留一小時休息時間，休息時不工作」。增加的這些條件，一方面能更真實的呈現生活情境，另一方面同時限制真實情境的複雜性，避免問題過於發散。

要解決第二版的問題，學生要展現的能力包括：**學習表現**「n-II-10 理解時間的加減運算，並應用於日常……」以及**核心素養**「A3規劃執行……」，而不再是原本單純的計算或擷取關鍵數字即可求得答案。對學生而言，這樣的試題會變得比較難，會比較難的主要原因是目前的教學和評量比較少這類型的試題，多數課習題都是類似第一版。

為了避免學生不知從何作答或解題，可以增加一些引導問題，如下：

### 引導問題

#### 問題 01

請問修復這二處坍方總共需要多少時間？

#### 問題 02

下午13：00開始修復，可以在19：00前完成嗎？為什麼？

#### 問題 03

「要在19：00前要完成，何時要開始進行修復」，你要考量哪些因素？

#### 問題 04

這些因素對工程的影響是什麼？

引導問題的功用主要是讓學生逐步的熟悉問題情境，同時評量學生的基本數學知識，循序漸進的搭建學生對情境的認知鷹架，另一方面則是引導學生作答，逐步展現並學習較高層次的推論思考能力。一旦學生完成整個題組的問題，便能獲得時間規劃的成功經驗。當學生能成功的規劃時間，便能增加或建立學習遷移的可能性。倘若無法完成所有試題的作答，仍然可以從作答過程中了解規劃的步

驟與要素，逐步培養核心素養能力。

從學習內容出發，很容易被特定學習內容綁住，使用了可有可無的包裝情境，出現不恰當命題方式。以下為幾個從學習內容出發，雖然使用生活情境，但仍不算是素養導向試題的題目。這些問題是以評量學習內容「N-4-13解題：日常生活的時間加減問題。跨時、跨午、跨日、24小時制。含時間單位換算」出發，設計的題目。

- I. 小華跑400公尺，花了143秒，是幾分幾秒？（評量「時間單位換算」）
- II. 士元從上午8時50分開始上國語課，到上午9時30分下課，國語課的時間有多久？（評量「跨時的時間加減問題」）
- III. 小陳花了3小時20分從淡水騎車到桃園，到達桃園時是下午2時50分，請問他是上午幾時幾分出發的？（評量「跨午的時間加減問題」）
- IV. 因機械零件老舊導致發電廠無法供電，小王家從下午10時30分到隔天上午6時10分停電，請問小王家共停電幾小時幾分？（評量「跨日的時間加減問題」）

上述問題與課習題相似，不易評量學生的問題解決能力。另一方面，從學習內容出發研發出來的問題多數不易引導學生進行分析或思考，容易變成為了評量特定學習內容的問題。因此，如果從數學概念或內容出發研發試題時，要特別注意這些問題，且要儘可能地避開。

## 實作練習 1

練習「從數學內容出發」的命題，修改下列試題：

---

爸爸有一張300元的折價券，買了每輛345元的玩具汽車三輛，用了折價券後還要付多少元？

---

請利用下列步驟進行修改：

- 步驟 I 修改問題敘述，更符合真實生活
- 步驟 II 嘗試加入學習表現（或核心素養）提問
- 步驟 III 增加引導（形成）問題與延伸思考（詮釋評估）問題

以下是一個參考的修改方式：

### 參考答案

爸爸有一張消費滿1500元才可以使用的300元折價券。他買了每輛300元玩具汽車三輛，每個150元的飛盤二個。

可能的提問：

#### 問題 01

請問爸爸能用折價券嗎？

#### 問題 02

請問爸爸結帳時要付多少錢？

#### 問題 03

請問「買四輛車、二個飛盤」和「買三輛車、二個飛盤」，哪一個方式比較便宜？

### 範例 3 畢氏定理課習題修改

畢氏定理是國中七年級一個重要的數學內容。相關的課習題大致可分為二類：第一種是制式的程序性問題，例如：「直角三角形ABC的二股長分為12公分，16公分，請問它的斜邊長度是幾公分？」第二種是試題本身帶有生活情境的元素，但問題多數不具意義、或不知道為什麼要計算這個結果，例如：

### 梯子移動問題

有一長度為250公分的梯子斜靠在牆上的窗戶下緣，試問：

- (1) 已知梯腳離牆腳70公分，則窗戶下緣離地面有多少公分？
- (2) 若梯子下滑40公分，則梯腳移動多少公分

從數學內容出發的課習題，有時不容易直接進行修改，例如：上述的二個例子，一個與生活情境無關；一個是在此情境下，不會出現這種問題。因此有時候甚至必須砍掉重練、重新選用情境。因為，要選擇能提出真實問題、賦予解決問題意義，或是增加學生說明、詮釋或選擇機會的情境，才能發展出好的素養導向試題。以下是一道結合消防車救災規定，應用畢氏定理解決問題的範例：

### 消防車問題

在2004年，新北市消防隊取得一台配有旋轉雲梯的消防車。在雲梯的末端會使用籃架，消防隊員可以在非常高的高度下救人。根據正式的救災規定，在救人過程中，車輛與燃燒中的房屋應保持至少12公尺的距離。消防車的規格資料如下表。

規格資料	
車輛型號	Daimler Chrysler AG Econic 18/28 LL - Diesel
製造年份	2004
動力	205 kw (179 HP)
引擎容積	6374 cm <sup>3</sup>
車輛尺寸	長度10 m 寬度2.5 m 高度3.19 m
雲梯規格	長度可達30 m
空車重量	15540 kg
車輛總重	18000 kg

#### 問題 01

新北市消防隊用此消防車可以救人的最高高度是多少？

#### 問題 02

昨天有三人20公尺高度處獲救。請問雲梯的長度最小會是多少？

資料來源：Krawitz等人（2017）。

此問題在探討消防車救災時安全距離、雲梯車的長度、以及消防車可以救人的最高高度三者之間的關係。在符合安全規定下，消防車可以救人的最高高度的

計算、雲梯車長度是否夠長，很自然的就會是此問題的討論重點。而在解決問題的過程中，畢氏定理也會很自然地被引用進來。

從數學內容出發命題時，有些試題可以利用原題目的情境進行修改，但大多數問題需要重新改寫或使用別的情境。改寫試題時，可能會跳脫出原本的情境設定，或使用跨領域的題材或情境，例如：上述的問題是使用消防車救災情境及其他安全規定。要特別注意的是，從數學內容出發的研發試題，儘量避免與課習題相似，因為課習題多數無法評量學生的問題解決能力，此外利用此方式研發出來的試題，多數不具備真實性，或容易變成為了評量特定學習內容的問題（Tout & Spithill, 2015）。

#### 範例 4 直線方程式課習題修改

直線方程式是10年級一個重要的單元，以下是一道與方程式相關的傳統試題。

##### 方程式及其圖形

請寫出「斜率為50，y軸截距為200」的方程式，並繪製圖形。

在國高中的數學中，有許多單元中是為了未來學習更高階數學的基本知識，這些試題通常會使用數學符號、專有名詞，例如：上述範例中的斜率、截距、方程式。此外，這些試題的內容多數是簡潔、條件充足（well-defined）的數學問題，沒有情境且問題多半是計算、證明或制式的程序性問題。這些傳統試題雖然能有效的評量學生學科知識、計算或證明能力，但多數局限在數學知識、內容或數學內部的推論。以下是利用本節提供的三個基本的步驟修改此試題過程與說明。

首先，我們需要尋找一個合適的情境，並用生活用語取代原「斜率」、「截距」、「方程式」……等數學用語，讓問題轉換成情境中的真實問題。如同前面的範例，在尋找合適的情境時，可以先試想「誰需要知道這個方程式？」「什麼情況下要用方程式？」例如：

## 第一版修改後試題內容

國際書展的書商正在應徵暑期工讀生，工讀生的薪水是「每小時時薪200元，每多銷售一套雜誌多加獎金50元」。

請寫出工讀生的薪水和販售雜誌份數的關係，並繪製圖形。

修改後的試題是利用國際書展打工的情境來包裝、陳述問題。打工是學生寒暑假（或未來）可能會接觸的情境，如何計算打工薪水是打工時最重要的議題。選取好合適的情境後，試題中的數學符號、專有名詞便可調整成日常生活中的詞語，例如：「斜率」改成「每多銷售一套雜誌多加獎金50元」、「截距」改成「每小時時薪200元」、「方程式」改成「工讀生的薪水和販售雜誌份數的關係」。修改後的試題同樣是評量直線方程式，但增加薪水計算的情境，同時也將問題轉換成在打工情境中比較真實的問題。

此試題可進一步的修改，增加比較、判斷或決策的機會，達到評量學習表現與核心素養能力的效果。修改的方式如下：

## 第二版修改後試題內容

為期六天的國際書展即將在臺北舉辦。小明正在尋找書展的打工機會。以下是二個書商提供的打工機會：

**雜誌商A：**工作六天，每天8小時，每小時時薪200元，每多販售一套雜誌多加獎金50元。

**雜誌商B：**工作六天，每天8小時，每小時時薪250元，每多販售一套雜誌多加獎金25元。

### 問題 01

請幫小明分析一下，在販售不同雜誌數量時，這二個打工機會的薪水差異為何？

### 問題 02

如果小明的專長是行銷，每天可以推銷5~10套雜誌，他應該選擇哪一個工作機會？

資料來源：吳正新（2020）。

第二版修改後的試題增加另一個打工的機會，讓試題情境轉變成比較二個不同打工機會在販售不同雜誌數量時，可獲得薪水的差異。因此它需要學生進行比較，找出差異原因。此外，為了計算二份工作的薪水差異，學生很自然地就需要繪製圖形，使得繪圖不再是一個制式工作，而是分析過程中一個重要工具。在回答問題時，學生必須發揮系統思考（核心素養A2）、規劃執行（核心素養A3）的能力，進行代數式或方程式的處理，並用於推論及解決問題（學習表現g-V-4），才能評估二家報社的薪水差異處。當薪水差異的比較完成後，學生要進一步評估自己的能力，才能思考哪一份工作比較好，或哪一份工作比較符合自己。透過這樣的修改方式便可將跨領域的核心素養、學科的學習表現融入試題之中。

### 補充說明 1 問題解決歷程與題組題

根據問題解決的歷程（圖1），在問題解決的歷程中包含不同階段，因此在命題時，還需要考量一個重要的元素：增加不同層次的試題，引導學生解決問題。特別是對生活經驗仍不足的國中小學生，這些引導是相當重要的，因為在解決非例行性問題時，學生很容易卡關（stuck）。如果沒有適時的引導，學生很容易因為卡關而放棄，久而久之便會對數學沒有興趣，甚至一遇到數學問題，就會產生數學焦慮、放棄數學（McLeod & Adams, 1989）。但若能提供合適引導、協助學生理解情境、理解問題、進而發展策略解決問題，便能建立學生的信心、提升學生學習數學的動機。

如何在命題中發展不同層次的試題？根據選定的情境研發形成、運用、詮釋評估這三個問題解決的歷程發展引導問題。這三種類型的問題所評估到的能力與核心素養和學習表現息息相關（圖8），因此若要完整的評量核心素養與學習表現，試題必需包含這些層次的試題。因此，**從數學內容出發的命題可以再增加一個步驟：「發展不同層次的問題」**。

接著，我們以一個範例來說明如何「發展不同層次的問題」。表2列出了從數學內容出發發展不同層次的詳細的步驟及各步驟的內容。首先，以數學內容「F-8-1一次函數：透過對應關係認識函數」出發，並選定一個有對應關係的生

活情境「換季單一價」優惠活動。接著，要先協助學生理解這個情境中最重要元素，即「對照表」的使用。在理解情境中的數學結構後，能運用數學算則、公式解決使用「對照表」的問題，例如：使用單一價對照表時，單一價大約等於打幾折？或跳脫出文本的內容進行一些比較，例如：傳統的「打折」與「單一價對照表」這二種優惠活動的哪一個比較便宜？最後，從在情境中發展詮釋評估的問題。“What if”、“What if not”是一種最常用來發展詮釋評估試題的方式（Brown & Walter, 1990），也就是調整情境中的條件或特徵進行提問。以本題為例，單一價優惠活動的「對照表」只提供定價10,880元以下的優惠價對照，如果老闆要販售定價超過單一價對照表範圍的產品時，例如：定價12,000元的名牌服飾，他應該要怎麼定訂單一價比較合理？

表 2  
從數學內容出發發展不同層次問題的範例

步驟 I	選定一個學習內容。	✓ 透過對應關係認識函數
步驟 II	增加合適的情境。	
步驟 III	擬定有意義或有目的的問題。	✓ 怎麼使用對照表？
步驟 IV	增加學生說明、詮釋的問題。	✓ 在使用單一價對照表時，單一價大約等於打幾折？ ✓ 傳統的「打折」與「單一價對照表」這二種優惠活動的哪一個比較便宜？
步驟 V	發展不同層次的問題。	✓ 如果老闆要販售定價超過單一價對照表範圍的產品時，例如：定價12,000元的名牌服飾，他應該要怎麼定訂單一價比較合理？

根據表2的分析結果，最後再整理成一個完成的題組題。可以先試看看，然後再參照下一頁的例題。如何根據形成、運用、詮釋評估來發展試題，可進一步

參考第五章說明。

## 參考答案

### 換季折扣

百貨公司正在進行秋冬換季特賣會。  
女裝服飾部推出單一價規則表的優惠方案，  
優惠方式如右表。

定價	單一價
3480 以下	1380
3500 ~ 3880	1580
3900 ~ 4480	1780
4500 ~ 4880	1980
4900 ~ 5480	2180
5500 ~ 5880	2480
5900 ~ 6880	2680
6900 ~ 7880	3080
7900 ~ 8880	3580
8900 ~ 9880	3980
9900 ~ 10880	4480

#### 換季折扣：問題 01

請依照規則表來判斷下列各個敘述是否正確。

敘述	正確／不正確
原本定價5,000元的衣服，單一價是2,180元。	<input type="checkbox"/> 正確 <input type="checkbox"/> 不正確
單一價是2,680元的衣服，原本定價可能是6,000元。	<input type="checkbox"/> 正確 <input type="checkbox"/> 不正確

#### 換季折扣：問題 02

小洛想買一件洋裝，百貨公司和某購物網站上都有販賣，他們的定價都是2,000元。  
購物網站上的優惠方式是定價打四五折。  
請問小洛在哪裡買會比較划算？請說明你的理由。

#### 換季折扣：問題 03

請問百貨公司定價高於3,500元的女裝服飾，折扣大約是幾折？

- A 三折     B 四折     C 五折     D 五五折

#### 換季折扣：問題 04

如果百貨公司想販售定價12,000元的女裝服飾，它的單一價應該要訂為多少錢？  
請說明你的理由。

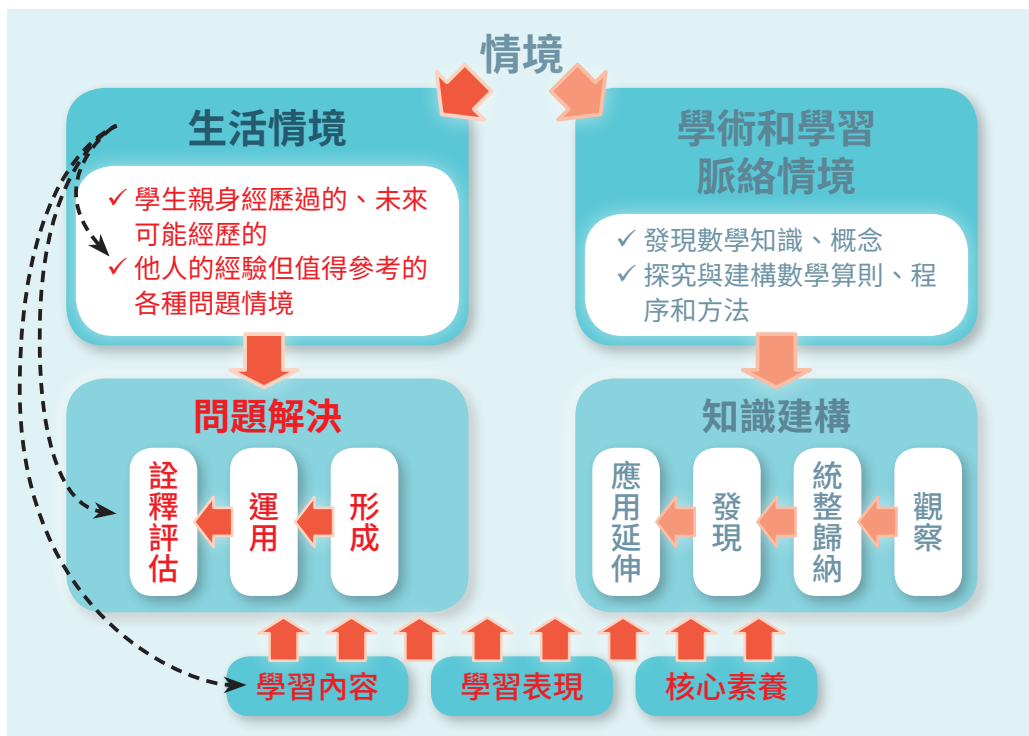
資料來源：吳正新（2021）。

## 第二節 從生活情境出發

真實情境與真實問題是素養導向試題的重要元素，因此從生活情境出發研發素養導向試題是最直接的命題方式。如圖10所示，如果從生活情境出發，在命題時需要考量問題是否貼近學生生活、情境或問題是否太複雜、是否具備不同層次問題，以及內容是否合適、是否有評量到學習表現與核心素養。

圖 10

從生活情境出發的命題策略



如何有系統地利用找到的情境命題研發試題，需要有一個詳細的流程。圖11列出四項從生活情境出發命題策略的關鍵步驟，其中：

### 步驟 1：蒐集並彙整情境相關的資訊

蒐集並彙整與選定情境的相關資料。在查詢資料的過程中，一方面可以增加對選定情境的背景知識，避免命題內容有瑕疵；另一方面可以了解

情境中有什麼是與數學相關的問題或議題，可以作為後續的提問。

### 步驟 2：找出情境中你或學生可能會問的問題

在選定的情境中，詢問自己會想問什麼問題、學生會想問什麼問題。一般而言，你或學生會想問的問題，就會是真實問題，而這些問題通常會是有需求的、有目的的問題。此外，也可以尋找是否有讓自己或學生產生迷思或疑惑的問題，因為這些問題也會是真實問題。最後還可以進一步思考自己和學生之外的其他人，可能會關注的問題。故從找出情境中可能會問的問題，大致可分為三類：

- 2-1 有需求、有目的的問題
- 2-2 迷思問題
- 2-3 從不同角度、身份發想問題

如果滿足上述三項條件，在解題時自然就會結合學習表現與核心素養，因為要解決這些真實問題，就要運用數學思考問題、分析問題和解決問題的能力，例如：表徵、組織、分析、比較、說明、推論、驗證等高層次的思考能力與核心能力。

### 步驟 3：確認問題背後評量的數學概念

確認步驟 2 發想到的試題其背後所評量的數學內容、涉及的數學概念，是否符合測驗對象。要避免問題是評量一般常識或其他領域的知識。符合的試題，進一步依情境脈絡組成題組，同一個題組中儘可能包含形成、運用、詮釋評估三種不同層次試題。

### 步驟 4：題型選擇與題目順序安排

確認評量的方式是要選用是非題、選擇題、填充題或建構反應題。選用方式大致如下：

- ✓ 若是需要學生詮釋或說明的，或是希望看到學生的思考歷程或呈現計算與處理過程，以建構反應題為主；
- ✓ 若有固定的解法或唯一標準答案的問題，可以考慮填充題或選擇題；
- ✓ 若是簡易的概念性的問題，可以選用是非題或選擇題。
- ✓ 如果選用選擇題，需要能建構三個誘答項，才能確保試題的鑑別度。

最後是題目順序的安排。題目順序與題型有關，原則是：是非題或選擇題優先，其次是填充題，最後是建構反應題。此外，題目順序要有脈絡或包含不同層次的試題，如果問題比較複雜，需要有引導問題或鷹架題，協助學生一步一步解決問題。所以當選定的情境中有一個明確的目標或問題存在時，它與引導題就可以自行組成一個題組；其他在步驟 2 發想的問題，則可以重新組合成另一個有脈絡的題組。

圖 11  
從生活情境出發命題的 4 個關鍵步驟



以下列舉幾個從生活情境出發命題的範例：

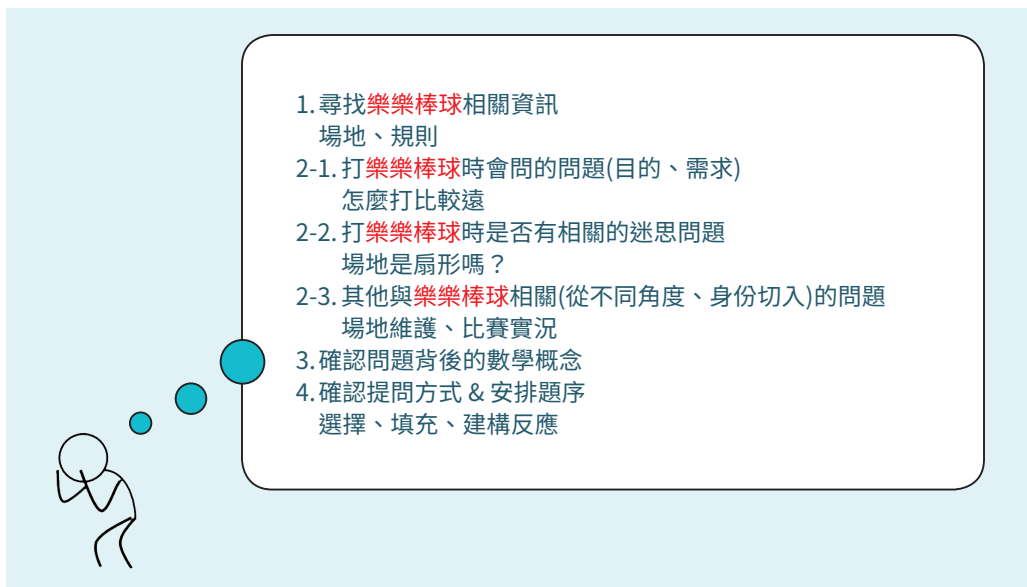
### 範例 5 樂樂棒球

第一個範例以國小校園中常見的體育活動「樂樂棒球」情境，說明如何利用上述的四個關鍵步驟發展一道符合四年級的數學試題。

首先，參照圖11的順序建立「樂樂棒球」題組的流程（圖12）。

圖 12

研發「樂樂棒球」題組的流程



**步驟 1：**要尋找與樂樂棒球有關的資訊，例如：場地資訊、棒球規則，讓自己了解樂樂棒球相關的資訊。

**步驟 2：**設計並思考三個面向的提問，例如：

- 2-1 打樂樂棒球時，你會想問什麼、你會有什麼目的或需求，例如：怎麼打才會比較遠？全壘打要打多遠？
- 2-2 打樂樂棒球時是否有相關的迷思概念，例如：把球打比較高就會飛的比較遠嗎？球場是扇形嗎？
- 2-3 從不同身份、角度來看樂樂棒球，可能會想問什麼問題？例如：工作人員在維護場地重鋪草皮時，要購買多少的？守備時，野手接到球時要怎麼傳球？

在發展試題的初始階段，先儘可能的發散思考，蒐集各式可能的問題。當然，能聯想到的問題數量與品質，會與命題者對情境熟悉程度及命題能力有關。

**步驟 3：**確認所有發想到的試題其背後所使用的數學概念是否符合測驗對象。如果合適則可以直接發展成試題，例如：搭配二維表格報讀，詢問全壘打

要打多遠。另外，有些問題可以搭配跨領域的知識，例如：怎麼打才會比較遠？把球打比較高就會飛比較遠嗎？這二個問題可以結合物理概念「水平向上仰角約45度拋射出去的球會飛行最遠」形成問題。當然，某些想法可能無法形成試題，例如：樂樂棒球的球場是扇形，它與一般的棒球場（中外野比較遠）不同。這類型的問題可嘗試修改或簡化，或者直接刪除不用，有時候在分析或討論後，可能會變成研發另一道試題的材料。

**步驟 4：**確認每一道試題的題型，並安排題目的順序。

以下是完整的試題內容，其中問題1是評量學生報讀二維表格、選擇正確資訊的能力；問題2是評量表徵轉換的問題，學生要能將文字表徵「水平向上仰角約45度拋射出去的球會飛行最遠」轉換成圖形表徵，並連結到樂樂棒球的打擊方式；問題3是有關球場內野區的草皮鋪設問題，學生要能利用「全部減部分」的方式，估算不規則面積的大小；問題4結合傳接球的方法，評量學生的旋轉角概念。

### 樂樂棒球

樂樂棒球是一項有趣又安全的健康運動。下圖是初級版樂樂棒球的場地圖



初級版場地各項規定距離

項目	國小	國中／成人
1. 壘距	15公尺	18公尺
2. 投距	9公尺	9公尺
3. 全壘打	40公尺	50公尺
4. 一三壘界外區	5公尺	5公尺
5. 本壘前界外區	5公尺	5公尺

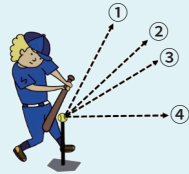
#### 問題 01

請問國小全壘打線的距離是多少公尺？

- ① 9公尺      ② 15公尺      ③ 40公尺      ④ 50公尺

問題 02

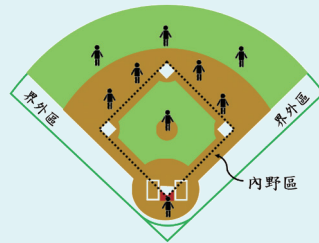
依據牛頓力學結論，水平向上仰角約45度拋射出去的球，會飛行最遠。請問哪一個擊球角度球會飛行最遠？



問題 03

普及國小樂樂棒球場預計在內野區鋪設草皮。如右圖所示：

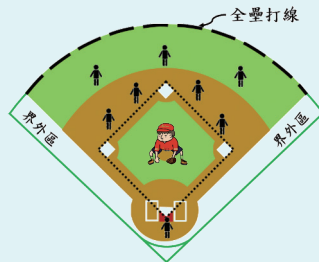
- 樂樂棒球場的內野區為一個四邊形，此四邊形的邊長均為15公尺，且4個內角均為90度
- 各壘包附近、壘包和壘包間的跑壘區、投手投球附近均不鋪設草皮。這些區域共30平方公尺。



請問管理員購買了200平方公尺的草皮，是否足夠鋪設內野區？

問題 04

傳球時，要面對目標才能傳的準確。  
三局上半，投手面對本壘投完球後，正面接到一個滾地球後。他想傳往二壘。請判斷下列四種傳球方式，哪一種方式能準確地傳往二壘的？正確的請圈選「是」，不正確的請圈選「否」。



	傳球方式	是否正確嗎？
①	順時針轉90度	是／否
②	逆時針轉90度	是／否
③	順時針轉180度	是／否
④	逆時針轉180度	是／否

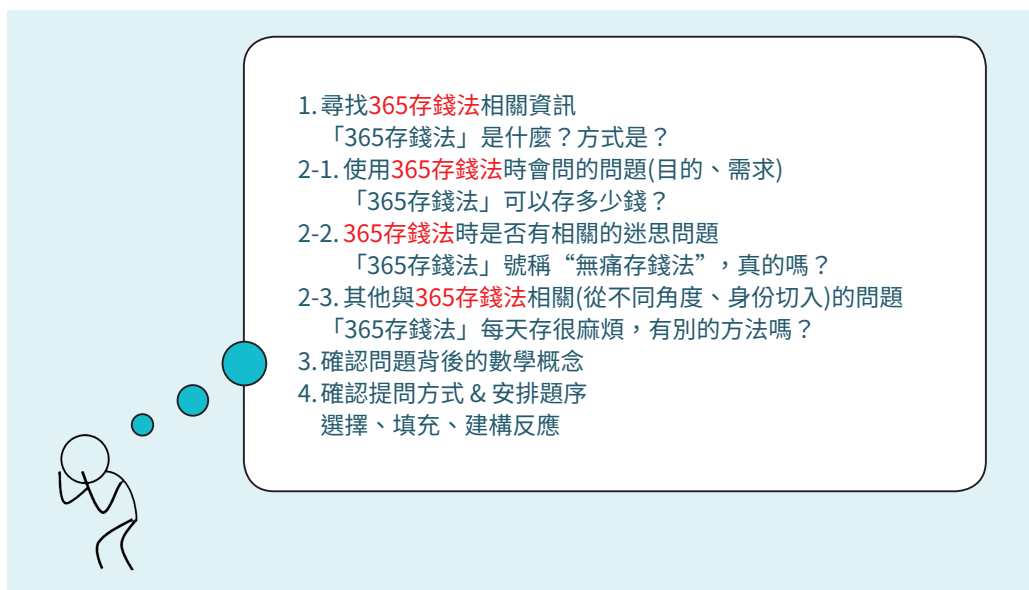
資料來源：吳正新（2021）。

## 範例 6 365存錢法

本題組以「存錢」為情境，研發（八年級）等差數列的問題。「365存錢法」是網路上很多人在討論的一種存錢法，選用這個熱門話題有機會貼近學生日常生活，達到引起學生動機與興趣的目的。確認主題後，接著依據圖11的四個步驟發想365存錢法有關的問題。圖13是發散思考後，一些可能的相關問題。

圖 13

研發「365存錢法」題組的流程



「365存錢法」題組的發散思考過程說明如下：

**步驟 1：**「365存錢法」的存錢方式是：第一天存1元，第二天存2元，第三天存3元……，依此類推，第365天存入365元。此存錢方式每日存入的金額，其實就是數學中的等差數列。但這樣的存錢規則敘述完後，學生就懂了嗎？

**步驟 2：**設計三個面向的提問

2-1 「365存錢法」存滿1年（365天）的總金額會有多少？能不能達成購買某些東西的目標？

- 2-2 「365存錢法」號稱無痛存錢法，每天只要存入少少的錢，一年就可以存在七萬多元？是真的嗎？
- 2-3 「365存錢法」在執行時比較麻煩，每天都要存入一定的金額，因此網路上有人建議「52週存錢計畫」，改為一週存一次，執行上會比較方便。如果調整成，「52週存錢計畫」又該如何進行存錢計畫？
- 2-4 存錢計劃到後期其實是「很痛的」，能否調整「52週存錢計畫」順利完成一項儲蓄

接著，在確認每個問題「背後數學概念的確認」以及各問題的「題型」後，即可將發想到的這些問題串聯起來組成題組。組成題組時，儘可能挑選不同層次的試題或可以排成有脈絡的子題，才能同時評量到學生不同的核心能力。以下為整理後的「365存錢法」試題題組完整內容：

### 365存錢法

最近網路上熱議的「365存錢法」非常簡單，就是在開始存錢的第一天存1元，第二天存2元，第三天存3元……，依此類推，第365天存入365元。下表為「365存錢法」前四週的存錢計畫。

365存錢計畫							
週次	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
一	1元	2元	3元	4元	5元	6元	7元
二	8元	9元	10元	11元	12元	13元	14元
三	15元	16元	17元	18元	19元	20元	21元
四	22元	23元	24元	25元	26元	27元	28元

問題 01

依照上述「365存錢法」，請判斷下列敘述是否正確？

敘述	正確／不正確
在第55天存入的金額會比第54天存入的金額多1元。	<input type="checkbox"/> 正確 <input type="checkbox"/> 不正確
存到第100天的總金額會比存到第99天的總金額多1元。	<input type="checkbox"/> 正確 <input type="checkbox"/> 不正確

問題 02

若依照「365存錢法」存錢，存第365天後，總共存了多少錢？

問題 03

小明覺得「365存錢法」每天都要存錢很麻煩，於是想改為每週存一次錢的方法，共存52週。如下表，小明已計算出前四週需要存入的金額。依照小明的「52週存錢計畫」，他在第11週要存入多少錢？

小明的52週存錢計畫								
週次	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日	當週存錢金額
一	1元	2元	3元	4元	5元	6元	7元	28元
二	8元	9元	10元	11元	12元	13元	14元	77元
三	15元	16元	17元	18元	19元	20元	21元	126元
四	22元	23元	24元	25元	26元	27元	28元	175元

問題 04

小明每週的零用錢是1,000元，若依照他的「52週存錢計畫」，請問從哪一週開始他每週的零用錢無法支付當週存入的金額？請說明你的理由。

問題 05

「52週存錢計畫」到後期每週要存入的金額會超過小明每週的零用錢1,000元，因此小明想再次調整存錢計畫，希望在24週（大約半年）後，存滿14,400元購買一台平板電腦。請問小明能否藉由存錢計畫的調整來達成目標？如果可以，請提出一種新的存錢計畫；如果不可以，請說明你的理由。

資料來源：吳正新（2021）。

實作練習 2

請根據下列的步驟練習「從生活情境出發」的命題。

步驟I 利用下列的主題，進行試題發想。看到這個主題，你會想到什麼情境？

實作練習	主題	實作練習	主題
練習 1	調味醬	練習 7	總統的支持度
練習 2	披薩	練習 8	搶劫
練習 3	春天園遊會	練習 9	賣報紙
練習 4	網路通訊會	練習 10	年度風雲車
練習 5	測驗分數	練習 11	廢棄物
練習 6	購買公寓	練習 12	點滴速率

步驟II 在這情境下，你（學生）會想問什麼問題？

（※先想一下，如果還是沒有想法，請參考下一頁的提示）

還沒想到嗎？請參考底下提供的資訊，進行練習。

參考資訊 1：以下為練習1~12可能的提問與問題類型。

實作練習	標題	可能會問的問題	問題類型
練習 1	調味醬	怎麼（依照食譜）製作調味醬？	需求
練習 2	披薩	買哪一個比較划算？	目的
練習 3	春天園遊會	使用生活用語說明中獎的可能性	目的
練習 4	網路通訊	（解決時差）尋找合適的聊天時間	需求
練習 5	測驗分數	提出一個合理的成績比較方式說服老師	目的
練習 6	購買公寓	快速計算公寓樓層面積	需求
練習 7	搖滾音樂會	估算參加音樂會的人數	需求
練習 8	總統的支持度	比較民調背後的資料收集方式	目的
練習 9	搶劫	圖形的詮釋評估（報讀與製作）	迷思
練習 10	賣報紙	比較二份工作的薪水計算差異	目的
練習 11	年度風雲車	利用加權估評年度風雲車	需求
練習 12	點滴速率	分析點滴的容積、時間的變化	需求

參考資訊 2：以下為練習1~12可能可以發展成試題的數學能力。



參考資訊 3：完整的試題內容請參考臺灣PISA國家研究中心（2012）。

## 補充說明 2 情境／主題的選取

選取適當的情境／主題，才能研發好的素養導向試題，因為情境是引發學生學習動機的重要因素，也是引導學生學習思考、探索與解決問題的重要材料。再者，由於核心素養是一項結合「知識」、「能力」、「態度」的綜合能力，唯有融入情境的問題解決才能檢測學生是否習得的核心素養。倘若欠缺情境因素，很可能只會檢測到學生的記憶或背誦能力、或只能評估學生對知識的精熟程度，而無法掌握學生是否具備核心素養，也無法評估學生是否具備問題解決能力，更無法理解學生是否能將知識應用到是日常生活中。

生活中有哪些事物與數學有關？要怎麼尋找呢？以下提供幾種思考方式。第一種方式是先將生活情境進行分類，再從分類後的方向或主題進行發想。以PISA為例（Organisation for Economic Cooperation and Development, 2016），他們將情境分為四大類，包括：與個人生活相關的、與社會或公眾事務相關的、與科學相關的、與未來工作相關的，其中：

- 與個人生活相關的主題：飲食、購物、健康、交通……等；
- 與社會或公眾事務相關的主題：選舉、政策、經濟……等；
- 與科學相關的主題：天氣、生態與環境、醫學、測量……等；
- 與未來工作相關的主題：成本、獲利、決策或品質管控……等。

根據這些分類，可以聚焦在某個主題上，再分析這個主題可能包含的數學問題，或作為發想試題的情境或材料。

第二種方式是從學生親身經歷過的、未來可能經歷的、或他人的經驗但值得參考的生活情境，選擇合適的情境作為命題的材料（任宗浩，2018），例如：學生可能會參加的體育活動「樂樂棒球」、或可能會使用的存錢法「365存錢法」。從學生角度出發所發想的情境，會最貼近學生生活，學生也會最有感覺，因此最容易激發學生思考、探索。當然，不是所有小朋友都會有相同的經歷，因為即使是同班級的學生，也不見得會相同。所以在選取情境時不用過於局限，但

重要的是，要搭配後續的提問，引發小朋友的好奇心與探索的欲望。

第三種方式是利用評量目標（核心素養、學習表現）聯想情境。例如：在「時間加減課習題修改」範例，嘗試加入核心素養「規劃執行」的元素，把時間與規劃連結在一起，將在單純的時間加減問題，轉換成修復道路的時間規劃問題，透過增加學生說明、詮釋的機會，引發學生解決問題的動機。

第四種方式是多瀏覽一些生活數學的科普書籍或是應用數學 (applied mathematics) 的專書，或多留心自己生活週遭與數學相關的事物。一方面可增加自己的數學知識，一方面可以知道數學可以應用在什麼地方。如果沒有特別留意這些與數學相關的資訊，在命題時，很容易只想到課本、習作或參考書中的題目。

### 補充說明 3 這不是素養導向試題

「很多文字的試題就是素養導向試題嗎？」

素養導向試題的基本要素是「生活情境」以及「問題解決」，因此在設計試題時，需要有情境的鋪陳以及引導問題的提問。然而，許多命題者在結合生活情境、發展素養導向試題時，在情境或提問中經常夾雜長篇的文章或說明，認為文字多的試題就是素養導向試題。然而，這些過多或不必要的資訊或說明，不但影響了原本的評量目標，也無法提升學生的作答動機，更無法讓學生體會到數學在生活中的用處，只是增加解題的閱讀負荷量。這些文字很多、似是而非的素養導向試題，大致可分為下列三類：

- I. 刻意將解題資訊藏在長篇文章之中、
- II. 情境的鋪陳與說明太過詳細、
- III. 提供過多與解題不相干的資訊或說明。

這些似是而非的素養導向試題，除了題幹的說明過於冗長外，問題多數也是傳統的數學題或是計算題，無法檢測高層次的思考能力和核心素養。以下分別列出幾個相關的範例：

## 類型 I：刻意將解題資訊藏在長篇文章之中（國小三年級）

新冠肺炎期間，進出公共場所都需要戴口罩，因為口罩的外層有一層不織布，能隔絕病菌進入口鼻，一般成人口罩的長度是18公分，寬度是10公分；兒童口罩的長度是14公分，寬度是9公分，每個人再依自己的臉型大小，挑選成人口罩或是兒童口罩，主要是防止飛沫的感染，可惜歐、美人士仍不習慣戴口罩，也不太認同戴口罩真的能防疫。

除了口罩之外，校內也會使用漂白水稀釋液進行消毒，而漂白水稀釋液的簡易調配的方式是5 mL的漂白水加入500 mL的清水中，即可調配500 mL的漂白水稀釋液，因為漂白水能破壞細菌或病毒的細胞壁，讓細菌或病毒死亡，所以是我們現階段所使用最便宜且方便的消毒方式。

教室內有以下六種容器，底下分別是每個容器的編號以及容量，請你想辦法挑出二種容器，剛好能量出10L的水。



### 問題 01

請問成人口罩還是兒童口罩的不織布面積大？ 答：\_\_\_\_\_

### 問題 02

請問成人口罩的不織布面積是（            ）平方公分。

### 問題 03

500 mL漂白水稀釋液的調配方式是將（            ）mL的漂白水加入500 mL的清水中。今天，老師要你調配1公升的漂白水稀釋液，請問調配的方式是要將（            ）mL的漂白水加入1000 mL的清水中。

### 問題 04

如果老師請你準備10 L的清水，請你從編號甲到己的容器中，選出二種容器，剛好能量出10 L的水！ 答：\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_

資料來源：素養導向教學與評量工作坊學員作業。

## 類型 II：情境的鋪陳與說明太過詳細（國小五年級）

西元2017年，臺北市主辦了第29屆世界大學運動會（簡稱世大運），許多來自世界各國的運動選手齊聚一堂，參加這場運動盛典。選手村裡的選手餐是由澳洲GHG（Global Hospitality Group）公司承包，為了滿足選手的胃，又希望精準預估供餐量，GHG公司總共採購了約300噸的食材。

對選手來說，每場比賽都可能是職業生涯中的關鍵時刻，食品安全絕對是GHG公司最看重的事情。為了確保食品安全，餐廳裡的熟食，只要陳列超過二小時、冷食陳列超過四小時，就必須丟棄。根據GHG公司統計，賽事期間選手村產生的總廚餘量，大約有6%，而賽事結束後的剩食數量則高達約10公噸。

經過臺北市政府盤點，剩食以冷凍肉品及海鮮最多，高達6公噸，其次是鍋貼、雲吞等冷凍食品，有1.7公噸，冷凍蔬菜及水果則有1.2噸，另外還有900箱的蛋糕、甜點，以及200多箱的雞蛋、牛奶。

### 問題

根據文章的敘述，在第29屆世大運中，GHG公司所準備的選手村食物，大約有幾公噸被浪費掉或未被選手食用？合起來約是多少公斤？

資料來源：素養導向試題研發人才培訓計畫學員作業。

## 類型 III：提供過多與解題不相干的資訊或說明（國中七年級）

懸浮微粒（particulate matter [PM]），泛指懸浮在空氣中的固體顆粒或液滴，顆粒微小甚至肉眼難以辨識。直徑小於或等於2.5微米的懸浮微粒稱為細懸浮微粒（PM2.5）。PM2.5細小顆粒，比病毒大，比細菌小，容易帶有毒物質進入人體。懸浮微粒能夠在大氣中停留很長時間，並可隨呼吸進入體內，積聚在氣管或肺中，影響身體健康。

懸浮微粒的主要來源有：地表揚起的塵土，海鹽、火山爆發、沙塵暴、森林火災等。此外，燃燒化石燃料（如：煤、石油等）和垃圾，以及柴油汽車的廢氣也會產生懸浮微粒。在室內，塵蟎、二手菸是懸浮微粒最主要的來源。這些懸浮微粒來自菸草產品的不完全燃燒。同樣，金紙燃燒、焚香及燃燒蚊香，也會產生懸浮微粒。

### 問題

請問細懸浮微粒（PM2.5）的直徑小於\_\_\_\_\_公分。（以科學記號表示）

資料來源：改編自「懸浮微粒」（2021）。

良好的試題需要引導學生理解情境，藉由情境的理解帶出問題，再利用不同類型或層次的子題評量學生應用數學知識解決問題的能力。然而要將情境帶入試題不一定要長篇大論，可以利用一些方法降低閱讀量，例如：**保留重要的說明、刪除不必要的資訊、精簡使用的文句、提供圖形或表格說明以減少文字量、或將資訊重新整理編排（部分資訊放題幹，部分資訊放子題）……**等，這些方式都可以有效的減低試題的閱讀負荷量。

### 實作練習 3

請利用下列方法，重新精簡「**怎麼買最省錢**」的題幹資訊與提問。

- I. 保留重要的說明、刪除不必要的資訊、
- II. 精簡使用的文句、提供圖形或表格說明以減少文字量、
- III. 將資訊重新整理編排（部分資訊放題幹，部分資訊放子題）

#### 怎麼買最省錢

下面是愛喝咖啡的王先生進行「咖啡省錢大作戰」，記錄優惠說明及咖啡原價的紀錄表：

##### 咖啡省錢大作戰

大八便利商店：2/10起至2/28止，中杯以上，咖啡第二杯半價。

原價：中杯50元／大杯60元

皇家便利商店：3/1起至3/3，於全國各地皇家便利商店出示優惠券，咖啡不分容量一律買五杯，送五杯。可以跨店取咖啡。

原價：中杯50元／大杯60元

笑嘻嘻烘焙坊：每個星期五，咖啡第二杯半價。2/28當天限時特價，第二杯10元。

原價：中杯80元／大杯100元

Goodnight便利商店：今年1/1-12/31止，使用Goodnight積點卡，咖啡一律八折優惠。

原價：中杯50元／大杯60元

問題 01

根據「咖啡省錢大作戰」記錄表，有不同的便利商店給予「第二杯半價」的優惠，請在下列的敘述中，選擇出「第二杯半價」優惠的正確敘述：

- 1 買二杯咖啡，全部只要付原價一半的錢。
- 2 第一杯是原價，第二杯付原價一半的錢。
- 3 第一杯是半價，第二杯也是半價。
- 4 買二杯咖啡，第一杯算免費。

問題 02

下面是愛喝咖啡的王先生「咖啡省錢大作戰」記錄表格，請協助填入資料，將表格完成：

店名	時間限制	原價	優惠方案	實際單杯折扣 以百分率表示
大八便利商店	2/10起 至2/28	大杯60元	第二杯半價	
皇家便利商店	2/28起 至3/3	大杯60元	買五杯 送五杯	
笑嘻嘻烘焙坊	2/28當日	大杯100元	第二杯半價	
			第二杯10元	
Goodnight便利商店	今年1/1 至12/31	大杯60元	憑集點卡 算原價八折	

問題 03

請問2月28日當天，王先生若是要購買10杯大杯咖啡，在哪一家購買會最便宜？請根據上面的統計表格資料判讀，寫下你的答案，並說明理由。

(※先想一下，如果還是沒有想法，請參考下一頁的參考答案)

以下是一個「怎麼買最省錢」修改後的參考範例。

## 怎麼買最省錢（第二版）

快樂便利商店時常有飲料的促銷優惠，不同的優惠方案有不同的折扣，選擇合適的優惠方案可以更省錢。

### 問題 01

以下是快樂便利商店購買二杯相同飲料的優惠方案。



下列的敘述，何者不符合上圖優惠方案的意思？

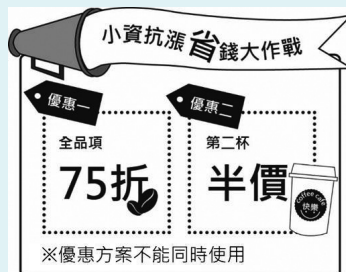
- ① 買一杯，沒有半價優惠。
- ② 買二杯，二杯都有半價優惠。
- ③ 買二杯，只有一杯有半價優惠。
- ④ 買三杯，只有一杯有半價優惠。

### 問題 02

快樂便利商店販售的抹茶拿鐵，每杯售價60元。  
快樂便利商店提供二種優惠方案，優惠說明如右：

小晴想買2杯抹茶拿鐵，她認為「優惠一」比較便宜，你同意她的看法嗎？

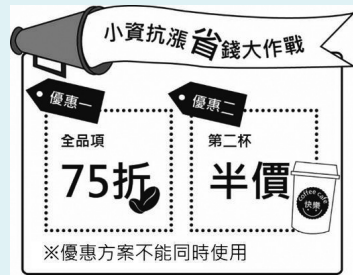
請說明你的理由。



問題 03

快樂便利商店販售的抹茶拿鐵，每杯售價60元。  
快樂便利商店提供二種優惠方案，優惠說明如右：

麗麗要買5杯抹茶拿鐵，她要怎麼買、怎麼選擇優惠方案比較划算？請說明你的理由。



資料來源：國家教育研究院（2020b）。

更多的試題修改範例與說明，請參見第五章的《試題修改歷程》。

補充說明 4 數學建模

數學建模（mathematical modeling）也是一種從生活情境出發的一種解題活動（Schoenfeld, 1992）。它需要學生建立數學模式，並以數學觀點解釋情境中的問題與現象，作為決策的依據。在過程中，需要學生發展具有建設性的數學方法，解決生活中複雜的問題。數學建模與素養導向評量在本質上是相似的，同樣都是利用情境中的問題來啟動學生的數學思考，促進學生的數學學習（Zbiek & Conner, 2006），但不同的是，數學建模同時要應用「形成」、「運用」、「詮釋評估」的能力，它需要更完整的問題解決能力（Stracy, 2005）。

以下是Koellner-Clark與Lesh（2003）提出的一個數學建模問題，它是一道適合國小高年級以上學生的問題。此問題利用一個仿真的情境建立的一個解題活動，在解題的過程中，學生需要先理解文本資訊、釐清問題，然後找出重要的變項、運用數學知識，建立適合的計算公式。最後，學生還要能說明、解釋並確認此結果的合適性，才能完成任務。

## 大腳印

今天清晨，警察發現昨天深夜有個好心人士，將公園裡廢棄已久的飲水器修復好了。市長想要感謝這位好心人，但沒人知道他是誰。警察在飲水器附近能找到的線索只有腳印。

右圖是警察拍下來的一個腳印，它會有助於我們確定這位好心人士的身高，以利於我們找到這個人。

你的工作是建立一個「利用腳印大小預測身高的方法」。

如此一來，警察就可以利用身高來找尋這個好心人士。



資料來源：修改自Koellner-Clark與Lesh（2003）。

數學建模與素養導向評量還有另一個相同的特色：培養學生的創造力。以大腳印問題為例，如果適當的運用在教學或評量上，可以發現學生有各式不同的創意與想法，例如：有些學生會計算身高等同於腳印計算；有些學生會比較好心人士與自己腳印大小的比值，再根據自己的身高推算；有些學生先建立腳印大小與身高的表格，再根據表格中的數據找出關係式（Imm & Lorber, 2013）。

數學建模活動與素養導向評量比傳統數學問題更像真實生活中的問題解決，它們比傳統數學問題更能引發學生的興趣，提高學生嘗試去解決問題的動機。因此，若能將傳統的數學問題提升或轉變成數學建模活動與素養導向評量，才能創造出應用數學解決生活問題的機會，才能讓學生看見數學的價值。

### 範例 7 名畫挑選

數學建模通常會比較難且複雜，因此大多數的建模問題都可以拆解成較小的問題，逐步引導學生解決，以下以「名畫挑選」為例進行說明。名畫挑選是一個建模問題，屬於數學中的最佳停止問題（optimal stopping problems），此問題又稱為秘書問題（secretary problem）、相親問題、止步問題、見好就收問題、蘇丹的嫁妝問題、挑剔的求婚者問題，也是生活中常見的一種決策問題。「名畫挑選」的題幹敘述與問題如下：

有一位畫作收藏家，他將家中收藏的名畫全部捐贈給博物館，接受捐贈的每個博物館都可以選擇一幅畫作。你是對畫作品質有很強的鑑別力，因此國家美術館請你幫他們挑選。

由於時間緊迫，各博物館也想爭奪最好的名畫，因此每個挑選畫作人，都要遵守下列的規則：

- ✓ 開始挑選前，主辦單位會公告作品的總數量，
    - 你無法瀏覽所有的作品；
    - 所有的作品會隨機展示在你面前，每次展示一件。
  - ✓ 瀏覽每一件作品時，您必須當下決定選擇要它或拒絕它；
    - 如果決定選擇某一幅畫，你就可以擁有它，挑選作業就結束。
    - 如果您拒絕正在瀏覽的作品，之後就無法再選擇它。
  - ✓ 所有作品都是不同的，沒有二幅畫是「一樣好」。
    - 你知道展示在你面前的作品的相對排名和價值。
- 如果您的目標是最有價值的名畫，你要怎麼挑選？

資料來源：修改自Gould等人（2012）。

上述的這個問題不易直接回答，因為它同時包含了古典機率、條件機率、對數積分、雙變數函最佳化……等數學內容。因此，如果要直接用來教學或評量，需要利用一些引導問題，協助學生獲得答案，可能的引導問題如下：

### 問題 01

選擇第一幅畫是個好策略嗎？那選擇最後一幅畫呢？

### 問題 02

假設只有二幅畫。第一幅畫是最有價值的機率是多少？第二幅畫是最有價值的機率是多少？

### 問題 03

如果有三幅畫呢？第一幅畫是最有價值的機率是多少？第二幅畫是最有價值的機率是多少？最後一幅畫是最有價值的機率是多少？

問題 04

如果有三幅畫，最有價值的畫以A表示、第二有價值的畫的以B表示、第三有價值的畫的以C表示。這三幅畫的排列順序總共有多少種？請以A、B、C表示。

問題 05

朋友有一個建議：「無論瀏覽到什麼畫，都先拒絕第一幅！然後，只要看到比第一幅更好的畫，就選擇它。」請問如果有三幅畫，這個策略在什麼情況下，可以成功選到最有價值的畫？什麼時候會失敗？如果依照這個策略，選到最有價值的畫的機率為何？

問題 06

依照問題5中的朋友建議，如果你第一件瀏覽的畫是三幅畫中價值最低的C，請問你從這三幅畫中選到最有價值的畫的機率是多少？如果第一件瀏覽的畫是B或A，選到最有價值的畫的機率分別是多少？

問題 07

如果有四幅畫怎麼辦？他們有多少種排列順序？請建立一個挑選名畫的策略，使後選到最有價值的畫的機率最高？

問題 08

如果有100幅畫，請你建立一項簡單的挑選策略，讓選到最有價值的畫的機率至少是 $1/4$ 。

問題 09

請建立一個最佳的挑選最有價值的名畫的策略，並計算挑選最有價值的名畫的機率。

上述的引導問題從古典機率開始提問，接著是有關樣本空間、排列組合、機率計算、條件機率的問題，最後問題9，要根據前面的引導與提問，建立最佳策略的一般解。問題9會比較難，除了條件機率外，還要具備隨機變數、無窮數列、對數積分等數學概念。因此可以根據學生的能力選擇合適的問題及目的，

例如：1. 從回答問題中，知道有比「隨機挑選」更好的策略（問題1～問題5）。  
 2. 能做延伸的計算或推論（再增加問題6～問題7）。3. 能提出簡易的挑選策略（再增加問題8），並計算它的機率。4. 建立最佳策略的一般解（再增加問題9）。  
 不論目標是哪一項，最重要的是要讓學生看見數學的價值，知道數學不是沒用，不是只用來考試，而是你沒在用，或你不知道怎麼用。

以本題為例，表3列出「無策略隨機挑選」與「使用策略挑選」獲得最有價值名畫的機率差異。基本上，使用數學進行有策略挑選到最有價值名畫的機率都高會於隨機挑選。當總數量是五個以上時，有策略的挑選且挑選到最有價值名畫的機率（43.3%）超過隨機挑選（20.0%）二倍以上。當名畫的數量愈來愈多時，這二種方式使用挑選到最有價值名畫的機率都會遞減，但如果是有策略的挑選，挑選到最有價值名畫的機率至少都有37%：如果是隨機挑選，挑選到最有價值名畫的機率會一直遞減到幾乎是0。

表 3

隨機挑選與使用策略挑選獲得最有價值名畫的機率比較

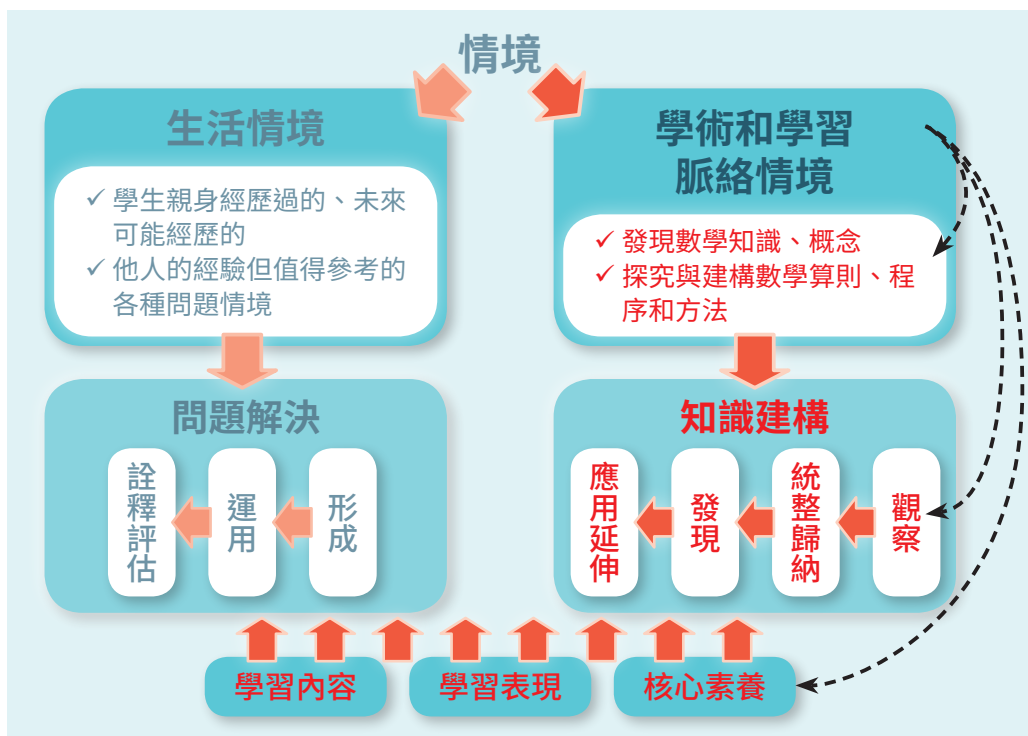
名畫 總數量	使用策略		無策略（隨機挑選） 挑選到最有價值名畫的機率
	拒絕數量（%）	挑選到最有價值名畫的機率	
3	1 (33.3%)	50.0%	33.3%
4	1 (25.0%)	45.8%	25.0%
5	2 (40.0%)	43.3%	20.0%
6	2 (33.3%)	42.8%	66.7%
7	2 (28.6%)	41.4%	43.1%
8	3 (37.5%)	41.0%	12.5%
9	3 (33.3%)	40.6%	11.1%
10	3 (30.0%)	39.8%	10.0%
20	7 (35.0%)	38.4%	5.0%
30	11 (36.7%)	37.9%	3.3%
40	15 (37.5%)	37.6%	2.5%
50	18 (36.0%)	37.4%	2.0%
100	37 (37.0%)	37.1%	1.0%
Large n	n*37% (37.0%)	37.0%	0.0%

### 第三節 在學術與學習脈絡情境中發現數學

從學術和學習脈絡出發的評量，需要建構一個像數學家思考問題的學習歷程，讓學生在回答問題的過程中理解數學、在探究的過程中發現數學，進而習得知識與培養重要的核心能力。Lockhart（2009）認為，如果不讓學生有機會參與這些過程，體驗自己猜想與發現、經歷創造性的挫折、產生靈感、拼湊出自己的解釋和證明，那就剝奪了他們學習數學的機會。如此一來，數學課裡就沒有數學。Sparrow（2008）指出，當學生面對那些自然又不做作的情境，使用他們的數學知識探索並解決問題時，數學就成為真實的，而教師任務就是將這些探究過程，帶到數學課堂中。

綜合上述的分析，圖14彙整出從學術與學習脈絡情境出發的命題策略。命題流程仿照數學學習的過程，讓數學知識建立循序漸進的從觀察開始或具體操作開始，接著，在引導過程中，讓學生有機會從老師提供的材料進行統整、歸納的分

圖 14 從學術與學習脈絡情境出發的命題策略

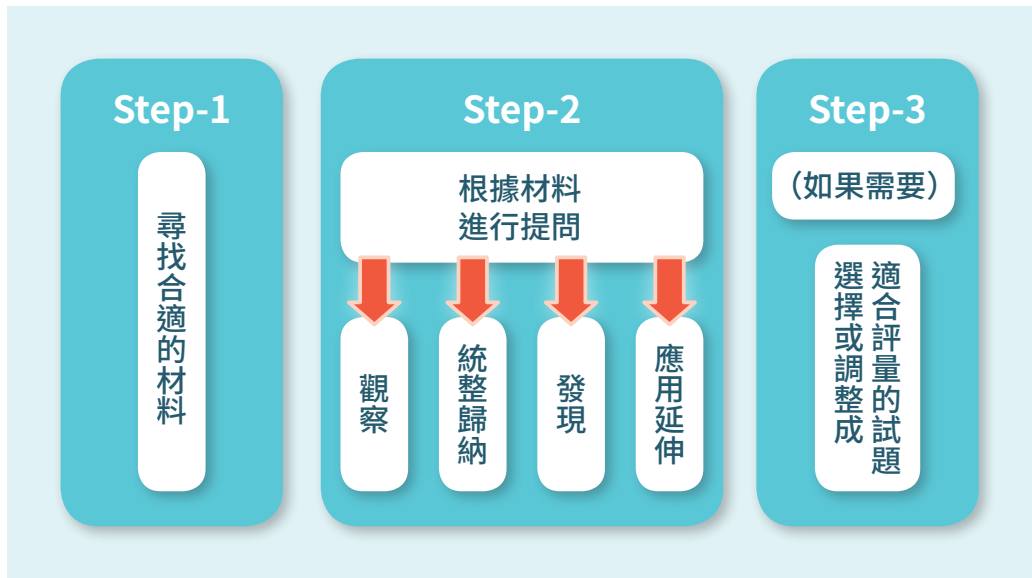


析，然後自行發現或建構出數學知識的原理或原則，並逐步提升至抽象的定理或論證。在這探索與學習過程中的各式引導問題、探究問題都是好的素養導向問題。

根據圖14，從學術與學習脈絡情境出發在命題時，要包含下列3步驟（如圖15）：

- 步驟 1**：尋找合適的材料。
- 步驟 2**：根據選定的題材，進行不同知識建構程序的提問，要儘可能包含：觀察、統整與歸納、發現以及延伸與應用等四種不同類型的問題。當然，並不是所有選定的材料都能包含這四類型的問題，有可能會因為選擇材料的限制，僅能有部分類型的提問。
- 步驟 3**：挑選整個探究過程中適合轉換成評量的試題，或調整提問方式讓問題不會太過開放且適合作為評量工具。如果提問可以直接轉成評量問題，此步驟不一定需要。

圖 15  
從學術與學習脈絡情境出發命題的 3 個關鍵步驟



以下利用三個例子來說明，從學術與學習脈絡情境研發試題。

## 範例 8 發現溫度轉換公式

第一個範例是有關華氏 ( $^{\circ}\text{F}$ ) 與攝氏 ( $^{\circ}\text{C}$ ) 溫度的轉換。

**步驟 1：**為了讓學生察覺華氏與攝氏的差異，此範例選擇了一個常用的溫度計，溫度計二側分別標示華氏與攝氏，其中攝氏的範圍從 $0^{\circ}\sim 100^{\circ}$ ，華氏的範圍從 $32^{\circ}\sim 212^{\circ}$ 。

**步驟 2：**根據選擇的材料，選則合適的提問。提問要儘可能包含觀察、統整與歸納、發現以及應用這四項。在本範例中，問題1首先引導學生觀察溫度計，詢問學生不同的華氏溫度與攝氏溫度是否相同？接著，問題 2 進行簡單的溫度變化比較，協助學生進行統整與歸納前的準備。問題3-1讓學生嘗試找出五組華氏溫度等於攝氏溫度的數對，問題3-2讓學生根據找到的數據，發現華氏與攝氏之間轉換的關係，問題3-3是從平面坐標的角度，讓學生以繪畫的方式判斷並建立華氏溫度與攝氏溫度的關係。最後，問題4則是華氏與攝氏轉換的應用問題。

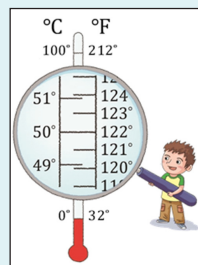
**步驟 3：**調整提問。

原本的探究問題	調整後的問題
<p><b>問題3-1：</b> 請列出五組溫度計上「攝氏溫度數值＝華氏溫度數值」的數對。</p>	<p><b>問題3-1：</b> 請列出五組溫度計上「攝氏溫度數值＝華氏溫度數值」的數對，並說明這五組數據中，攝氏溫度和華氏溫度的關係。</p>
<p><b>問題3-2：</b> 你怎麼找到這五組數據的？這五組數據中的攝氏和華氏有什麼關係？</p>	<p><b>問題3-2：</b>（直線方程式的探究） 如果以x軸為攝氏、y軸為華氏，然後將這五組數據畫在此坐標平面上，它們會在同一直線上嗎？請說明你的理由。</p>
<p><b>問題3-3：</b> 你能將這五組數據畫在直角坐標平面上嗎？請問這五組數據在同一直線上嗎？你要怎麼確認？</p>	

以下為完整的試題內容：

右圖是一個常用的溫度計。

- 左邊為攝氏 (°C)，範圍從0°~100°，總共100格，每增加1格上升1°C。
- 右邊為華氏 (°F)，範圍從32°~212°，總共180格，每增加1格上升1°F。



問題 01

請判斷下列敘述是否正確？

敘述	是否正確
1. 攝氏0°等於華氏32°	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否
2. 攝氏100°等於華氏100°	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否

問題 02

涵涵觀察了溫度計後說：「攝氏上升50°等於華氏上升了122°。」

請問涵涵的說法是否正確？請說明你的理由。

問題 3-1

請列出五組溫度計上「攝氏溫度數值＝華氏溫度數值」的數對。這五組數據中的攝氏和華氏有什麼關係？

問題 3-2

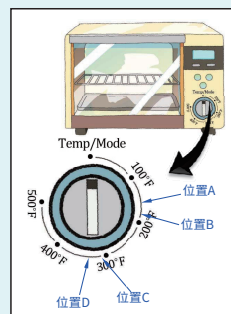
(直線方程式的探究)

如果以x軸攝氏、y軸為華氏，將這五組數據繪在坐標軸上，它們會在同一直線上嗎？你要怎麼確認？

問題 04

涵涵想要烤布丁，她參考食譜後得知「烤箱的溫度要設定在攝氏150度 (°C)，烘烤約40分鐘」。但涵涵家的烤箱是美國購買的，溫度標示是華氏 (°F)。如果她要按照食譜製作烤布丁，請問她要把烤箱的溫度指標「|」轉到哪個位置？

- ① 位置A    ② 位置B    ③ 位置C    ④ 位置D



資料來源：國家教育研究院 (2021)。

在數學領域課程手冊（國家教育研究院，2020a）中提到：「教學時可舉情境例，透過觀察對應關係的規律性，進而表徵為，認識一次函數」，即不論在教學或評量中，都需要提供學生從觀察至發現的數學學習過程。然而，在傳統的教學中，華氏與攝氏溫度的轉換公式，大多數是直接介紹公式（ $F=1.8C+32$ ），或是作為介紹一次函數後的一個範例，之後就是大量的計算練習與考試。如此一來，學生的學習過程便缺少探究的歷程與發現的機會。

## 範例 9 發現統計量

先問問題再教方法，也可以提供學生發現數學、創造數學的機會。第二個例子以跳遠代表隊選拔為情境，並以此方式進行。相關的步驟與說明如下：

**步驟 1：**以跳遠代表隊選拔為題材，讓學生從真實數據中進行說明與詮釋，創造出尚未學習過的統計量。

**步驟 2：**在提供跳遠代表隊選拔的說明與學生跳遠練習的數據後，在問題1中詢問學生使用平均數可能會遇到的問題。接著，問題2引導學生發現或創造出統計量，例如：加權平均數（星期五成績不列入計算，即權重為0）、中位數或眾數。最後，問題3詢問學生這些統計量的差異。

以下為完整的試題內容：

### 跳遠代表隊選拔

你準備參加跳遠代表隊選拔，但必需證明你能跳出5.2公尺的平均成績才能入選。教練要參考你最近一週每天練習的最佳成績，以及這五次最佳成績的平均值。右側是你上週的五次跳遠紀錄。很不幸，星期五那天因為你身體不太舒服，所以成績很差。

	公尺
星期一	5.2
星期二	5.3
星期三	5.3
星期四	5.4
星期五	4.4

#### 問題 01

請問平均值能代表你真正的實力嗎？為什麼？

#### 問題 02

請用2種不同的方式，計算出能代表你真正實力的數值。

## 問題 03

請問這2種方式和原本的平均值有什麼不同？它們更能代表你真正的實力嗎？為什麼？

資料來源：修改自Boaler（2016）。

在傳統的教學中，統計量平均數、加權平均數、眾數、中位數都是直接從定義開始介紹，例如：「一群資料中，出現次數最多的資料（或其類別），稱為這群資料的眾數」。然而，當數學拿掉了中間的發現或創造性的過程，只給學生過程的結果，會讓數學學習變得相當無趣，Lockhart（2009）指出，當學習數學的焦點集中在「什麼」，排除掉「為什麼」，數學的學習就會變調，數學就不再是數學。因此，不論是教學或評量，都應該多製造一些讓學生發揮想像與創造的空間與機會，才能讓學習數學會更有趣。

### 範例 10 發現「公差」

學校裡的數學，最主要的問題就在於「沒有問題」。例如：在介紹等差數列的公差時，課本都會這樣介紹：「在一個數列中，任意相鄰二項『後項減去前項所得的差』都相同，稱為等差數列，這個差稱為公差，通常用 $d$ 表示」。接著，再介紹：「首項 $a_1$ 、公差 $d$ 、則第 $n$ 項的計算方式， $a_n = a_1 + (n-1)d$ 」。然後，就開始反覆練習公式的使用與計算，例如：「有一等差數列， $a_2 = 10$ 、 $a_6 = 18$ ，求 $a_9 = ?$ 」。如此一來，很容易讓學校教的數學都沒有問題，因為如果有問題，也只會是代公式計算的問題。

在上述的問題中，學生可以在完全不知道「公差 $d$ 」、也不需要使用公式的情況下，就可以的猜測、計算、甚至求得 $a_9$ 。因此，只要能系統的重整這些過程，就能發揮引導的效果，讓學生發現「公差」，然後再創造出等差級數第 $n$ 項公式或等差級數和公式。可能的步驟如下：

**步驟 1**：以一個有規律的數列作為題材。

**步驟 2**：根據選擇的材料，選則合適的提問。從規律的觀察開始提問，並引導學生發現公差。然後，在沒有公式的情況下，讓學生以嘗試錯誤的方式計

算數列第九項。接著，引導學生歸納、發現計算第 $n$ 項公式的關鍵元素（即首項和公差）。最後，將問題難度提高，讓學生應用前面幾題問題的發現或結果。

以下為完整的試題內容：

### 發現公差

#### 問題 01

觀察下列數列的規律，並在空格中填入適當的數：1, 4, 7, 10, \_\_\_\_, 16

#### 問題 02

在數列「1, 4, 7, 10, \_\_\_\_, 16」，任意相鄰二項的差（後項減前項）是多少？是否都一樣？

#### 問題 03

有一數列 $\{a_1, a_2, \dots\}$ ，數列中任意相鄰二項的差（後項減前項）都相同。如果 $a_2=10$ 、 $a_6=18$ ，求 $a_9$ ？

#### 問題 04

有一數列 $\{a_1, a_2, \dots\}$ ，數列中任意相鄰二項的差（後項減前項）都相同。如果， $a_2=10$ 、 $a_6=18$ ，請問 $a_{50}$ ？在你的計算過程中，有什麼重要元素是計算 $a_{50}$ 時一定要知道？

（本題是引導學生思考的關鍵問題）

#### 問題 05

有一數列 $\{a_1, a_2, \dots\}$ ，數列中任意相鄰二項的差（後項減前項）都相同，如果 $a_4 + a_7 = 40$ ， $a_5 + a_{10} + a_{14} = 110$ ，請問 $a_2$ ？

在學生剛接觸數列時，多數不太習慣使用代數符號或公式，因為簡單的數列很容易找到規則或規律。因此，在上述的範例中，問題是由易到難鋪陳，讓學生

在解題的過程中逐步發現首項和公差的重要性，並利用它們進行解題。整個過程都是為了引導學生主動思考與發現。讓符號在適當的時機才出現，創造應用符號解題的價值，而不是一開始就介紹公式，避免數學問題都無趣的公式背誦與計算。

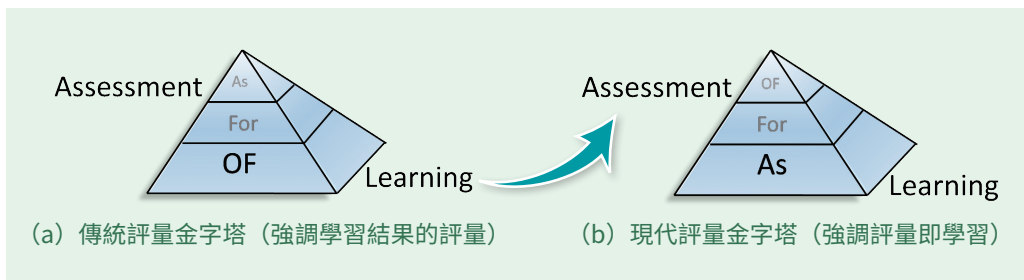
### 補充說明 5 評量即學習

Earl (2003) 曾根據評量的特色，將評量分成「學習結果的評量 (assessment of learning)」、「促進學習的評量 (assessment for learning)」和「評量即學習 (assessment as learning)」，以及，其中「學習結果的評量」一般又稱為「總結性評量」，利用評量進行學生學習成果、排名或能否取得證書的評估。「促進學習的評量」是指利用評量促進學生的學習，其目的是提供教師教學回饋或決定教學策略。「評量即學習」是利用評量提供學生自我監控 (self-monitoring)、自我修正 (self-correction) 的反思學習機會。Earl與Katz (2005) 進一步指出，評量即學習是一種認知重組過程。在過程中，提供學生參與、建立自己的理解過程的機會，學習反思與批判能力，並積極的將學生的理解與先備知識的連結，進而應用於新的學習中。

根據上述的分類，素養導向評量屬於是一種評量即學習，特別是情境為學術與學習脈絡情境時，因為學術與學習脈絡情境的試題包含「觀察」、「統整歸納」、「發現」、「應用」，在評量過程中，直接或間接的引導學生應用反思的能力，並隨時調整自己的思考解決問題，讓學生在學習過程中，扮演更主動的角色。

Earl (2003) 認為評量應從強調「學習結果的評量」轉換成強調「評量即學習」(如圖16所示)，因為「學習結果的評量(總結性評量)」能提供師生的教、學回饋是相對較少的。更重要的是，「評量即學習」是自我察覺和終身學習的基礎 (Bransford et al., 1999; Earl & Katz 2013)，當學生習得自我監控、自我修正等重要的反思與批判能力後，才能夠將自己的知識和能力運用到決策和行動上，才能夠管理和控制自己的學習，成為終生學習者。

圖 16  
評量金字塔



資料來源：改編自Earl（2003）。

#### 實作練習 4

請根據圖15的建議步驟，設計一個「發現長方形面積公式」的題組。

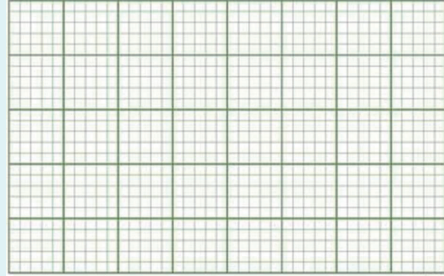
（※先想一下，如果還是沒有想法，請參考下面的提示）

以下是一個參考答案。

### 發現長方形面積公式

右圖是一塊千格板。

千格板中的小方格都是長1公分、寬1公分、面積為1平方公分的正方形。



#### 問題 01

請在千格板中畫出一個面積為20平方公分的長方形。

#### 問題 02

請問你畫的長方形，它的長和寬分別是多少公分？

#### 問題 03

還有別種長和寬的組合，它的面積也是20平方公分嗎？請列出2種不同於問題2的答案的組合。

#### 問題 04

請問在這些長和寬的組合中，「長」、「寬」和「面積」有什麼關係？

### 補充說明 6 引導式發現學習

發現學習 (discovery learning) 是心理學家Bruner (1961) 提出的一種具深度學習效果與培養遷移能力的學習方式，它的優點有：(1)較容易記憶所學過的資訊；(2)提高長期記憶 (long-term memory)；(3)增進學生於日後以相同的方式，進行自我學習的能力；(4)增進學生在沒有幫助的情況下，也能解決相似的問題

之能力；(5)學生因能自我學習與自行解題，而獲得內在的增強。然而，研究發現，使用發現學習經常會因為學生對基礎知識不熟悉，降低學習效率或發生錯誤的學習，因此有學者提出引導式發現學習（guided discovery learning），改善原本的發現學習，因為學生在學習或解決問題的過程中，仍需要教師從旁協助學生發現概念、原則、關聯性、或解決問題。例如：Mayer（2004）指出，引導式發現學習改善了傳統的發現學習、建構式教學法，減少學生的摸索，避免明顯的錯誤，協助學生朝正確的方向前進。Howe（2000）彙整了引導式發現學習一些技巧與步驟：

1. 提供學生有關於學習內容的資訊，學習概念、原理、原則的策略或解題的策略，增加學生發現的經驗；
2. 可選擇或集中於與學習或解題活動相關的內容和經驗上；
3. 選擇一些值得研究的範例，以提供學生正面和負面的例子；
4. 以發問的方式幫助學生建立學習的架構；
5. 在推理的過程中，提供必要的邏輯；
6. 提供足夠的情境，以幫助學習者了解是否可應用所學，及在何種情況下能應用所學；若有需要，可提供更多的訊息，以協助學生發現。

在學術與學習脈絡情境中，素養導向評量利用引導式的方式，協助學生在評量過程中進行「觀察」、「統整與歸納」、「發現」以及「延伸與應用」，基本上它的精神與引導式發現學習相似的，差別在於素養導向評量是藉由評量中的問題，進行引導式發現學習。



## 第五章 試題修審

素養導向試題大多是命題者原創的，包括情境鋪陳、說明到問題的撰寫，過程中很容易忽略一些細節，因此試題完成後都需要再次的檢查。最簡單的檢核方式是與第一章的素養導向評量要素進行對照，如果都能符合，就會是優良的素養導向試題。除了直接與第一章的素養導向評量要素比較，本章進一步提供不同的檢核方式，包含用試題檢核表、好問題的特徵、不同層次的試題特徵以及團隊審查程序。接著，在第四節會介紹五項常見的命題問題，並提供可能的解決方式。本章最後再分享三道完整的試題修改過程以及試題修審過程的討論紀錄。

### 第一節 試題檢核

根據第四章介紹的三種不同的命題方法以及第一章的《素養導向評量要素》，表4彙整出數學素養導向評量分析檢核表，此檢核表可以作為命題者在研發試題後，個人自我檢查的檢核清單。檢核表主要分為「情境」與「數學探究歷程」、「其他」三個檢核面向。

在「情境」的部分，檢核項目包括：1. 情境的判定，判定試題是屬於生活情境、學習脈絡、學術探究、或學科知識；2. 評估情境與問題的真實程度。其中第二項評估情境與問題的真實程度時，可再細分成題幹與問題二部分，說明如下：

一、題幹主要是描述情境、說明試題內容主要的地方，可能是一段長文章或短文，可能包含照片、圖形、表格、或（電腦化試題的）動畫或操作。

- ✓ 題幹內容要儘可能是來自學生切身相關的生活經驗，或學生未來可能經歷的或重要的生活經驗。
- ✓ 題幹中使用的數據要能符合或接近真實，才能符合、貼切生活情境。

- ✓ 在描述情境、說明試題時，資訊必需完整、語句通順，並且要儘可能的將閱讀負荷減至最低程度。

二、在提問的部分，要注意以下三點：

- ✓ 素養導向試題要能貼切實際的問題，或具備目的或需求的問題。
- ✓ 條件和問題之間的已知與未知關係要符合邏輯，例如：利用數學以簡馭繁或由易求難，而不是為了評量某特定學習內容而虛擬出生活情境不可能出現的狀況，或由繁求簡或由難求易本末倒置。
- ✓ 為了能有效的評量學生應用數學的知識和能力，學生有無經驗/經歷不能影響作答。其目的是要能讓學生真正的運用數學知識、能力和數學思維據理說明、言之有據或解決問題。

表 4  
數學科素養導向評量分析檢核表

數學科素養導向評量分析檢核表					
試題編號					
情境	情境類別	<input type="checkbox"/> 生活情境 <input type="checkbox"/> 學習脈絡 <input type="checkbox"/> 學術探究 <input type="checkbox"/> 學科知識			
	符合程度	<input type="checkbox"/> 符合 <input type="checkbox"/> 部分符合 <input type="checkbox"/> 未符合			
	審核分析	審核內容	未符合	備註	
	題幹	來自學生切身相關的生活經驗，或未來可能經歷的或重要的生活經驗			
		數據符合或接近真實			
		資訊完整、語句通順			
	問題	閱讀負荷減至最低程度			
貼切實際問題，具備目的或需求的問題					
條件和問題間的已知與未知關係要符合邏輯					
數學探究歷程	審核分析	包含的問題類別	備註		
	問題層次	<input type="checkbox"/> 形成 <input type="checkbox"/> 運用 <input type="checkbox"/> 詮釋評估			
其他	審核分析	審核內容	未符合	備註	
	測驗目標	正確使用學習內容、學習表現，且符合測驗對象			
	評分規準	是否明確			
總評					

資料來源：引自吳正新等人（2020）。

在「數學探究歷程」檢核部分，素養導向試題要同時評量不同層次的問題解決能力，檢核學生解決問題或探究過程中各項歷程的能力，特別是形成、運用、詮釋評估三項認知歷程的能力。因為對新課綱而言，要能評量各項學習表現與核心素養，就需要搭配不同歷程的試題，才能完整的檢測新課綱中的各項指標。因此在研發試題時，要特別留意問題的層次，才能研發出評量學生不同面向的能力。倘若僅仿照課本、參考書或題庫光碟命題，可能無法跳脫出傳統試題的框架或限制，無法涵蓋新課綱各個面向和內容。

最後，在「其他」部分的檢核，主要是檢示測驗目標是否正確，也就是，提問要符合測驗對象能理解，如果是針對特定年級或期中評量，要注意問題背後是否符合該年級的學習內容、學習表現。最後是有關評分規準的撰寫，它需要有明確的說明以及範例（詳見第六章）。

### 範例 11 試題檢核範例

以下利用幾個範例作為試題檢核說明；每一道試題都會提供利用表4的試題檢核表進行檢核。

試題	下表是各家銀行在某一天新台幣（TWD）兌換人民幣（CNY）的廣告匯率：		
	銀行名稱	現金匯率	
		銀行買入	銀行賣出
	F銀行	4.431 (手續費NT100元)	4.646 (不收手續費)
T銀行	4.494 (不收手續費)	4.659 (不收手續費)	
Y銀行	4.502 (不收手續費)	4.652 (不收手續費)	

附註：  
 用外幣兌換新台幣需參考「銀行買入」  
 用新台幣兌換外幣需參考「銀行賣出」  
 「手續費NT100元」是指顧客每兌換一次外幣，不限金額，需再給銀行新台幣100元  
 例如：顧客若到F銀行兌換人民幣，顧客必須拿4.646元的新台幣才能兌換到人民幣1元；  
 反之，顧客若想在F銀行換回新台幣，銀行只會拿新台幣4.431元買回人民幣1元。  
 資料來源：工作坊學員作業。

<p>檢核說明</p>	<p>原試題的評量對象是小學五年級學生，對於五年級學生「匯率」並不是很貼近學生生活經驗。此題的情境需要較多的額外知識，若只是為了評量學生的小數四則運算，題幹所選用的題材並不合適。</p>
<p>試題</p>	<p>水熊蟲，為緩步動物，它們體積極小，最小只有50微米而最大的則有1.4毫米，必須用顯微鏡才能看清，卻強大到可以生存於任何極端條件中，在喜馬拉雅山脈（6,000 m以上，曾在5,546 m處發現過）、溫泉、南極和深海（4,000 m以下）都能生存。舉凡從逼近絕對零度的零下272°C低溫，到115°C高溫的環境，或是暴露在高劑量輻射下、優游在有機溶劑中，對牠而言都不成問題。在冷凍庫裡待上30年或是讓牠脫水個10年也只是小意思，畢竟水熊蟲目前還是地球上唯一已知能在外太空存活的動物。近期《自然通訊》(Nature Communications) 刊登了東京大學科學團隊的文章，指出透過基因定序，他們找到了水熊蟲「無敵」的線索。而這項研究，或許能幫助人類進一步提升環境適應力。若1微米 = <math>\frac{1}{1000000}</math> 公尺，則50微米可用科學記號表示為多少公尺？</p> <p><b>A</b> <math>5 \times 10^5</math>    <b>B</b> <math>5 \times 10^6</math>    <b>C</b> <math>50 \times 10^6</math>    <b>D</b> <math>50 \times 10^6</math></p> <p>資料來源：○○○市○○○國中段考題。</p>
<p>檢核說明</p>	<p>過多與問題不相干的說明，學生在解題時閱讀負荷量過大，可適度精簡文字，降低閱讀負荷量。</p>
<p>試題</p>	<p>國道3號1,237公里處至1,249公里處，有民眾反應「燈光不足影響行車安全」，因此將原本道路的二側及二端，每隔300公尺設有路燈一盞，改為每隔200公尺豎立路燈，則有_____盞路燈不需更改位置。</p> <p>資料來源：○○○市○○○國中段考題。</p>
<p>檢核說明</p>	<p>數據不符合或接近真實。國道3號全長431.5公里，使用錯誤的資訊容易誤導學生。</p>
<p>試題</p>	<p>台灣的氣溫紀錄中，西元2004年5月在台東出現過40度C的高溫，而西元1970年1月在玉山出現過-18度C的低溫，請問這二個溫度中，高溫比低溫高了多少度？_____。</p> <p>資料來源：○○○市○○○國中段考題。</p>
<p>檢核說明</p>	<p>雖有試題有情境與實際數據，但計算二個不同地方的溫差的用意並無實際用途。對學生而言並無實質意義，只是為了評量學生的正負數四則運算的問題。</p>
<p>試題</p>	<p>圖（十二）為歌神KTV的兩種計費方說明。</p> <p>若曉莉和朋友們打算在此KTV的一間包廂裡連續歡唱6小時，經服務生試算後，告知他們選擇包廂計費方案會比人數計費方案便宜，則他們至少有多少人在同一間包廂裡歡唱？</p> <p><b>A</b> 6    <b>B</b> 7 <b>C</b> 8    <b>D</b> 9</p> <p>資料來源：103年國中教育會考第22題。</p> <div data-bbox="968 1387 1200 1656" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><b>歌神 KTV</b></p> <p><b>包廂計費方案：</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>包廂每間每小時900元，</li> <li>每人需另付入場費99元</li> </ul> <p><b>人數計費方案：</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>每人歡唱3小時540元，</li> <li>接著續唱每人每小時80元</li> </ul> </div>
<p>檢核說明</p>	<p>條件和問題間的已知與未知關係不符合邏輯，因為多少人到KTV唱歌不會需要到結帳時才知道，只是為了評量學生的不等式的運算。</p>

## 第二節 好問題的特徵

試題檢核表從情境、問題、問題層次、評量內容及評量目標，檢核整體試題的品質，其中的提問或問題，強調問題的真實性。然而，除了問題的真實性，好的素養導向試題還會有什麼特徵？

在解決問題的過程中有形成、運用、詮釋評估三種不同的階段（圖8），在不同階段中會有不同的問題需要處理、解決。若能進一步掌握不同階段的特徵、問題的重點，便能提出好問題。此外，在這三個階段中，研發詮釋評估類型的試題非常不容易，因為傳統的評量與試題都聚焦在計算，沒有經驗的命題者經常會陷在這個框架中，導致研發的試題多數只為了評量某個特定的學習內容而設計。因此，本節的第二個重點是如何研發詮釋評估類型的試題，包括這些問題有什麼特徵，怎麼問出具備這些特徵的問題。最後，會提供大量的範例題及這些範例題的簡要說明，讓讀者能參考、模仿，進而變成命題專家。

### 一、不同層次的試題特徵

不同層次的試題是指形成、運用、詮釋評估三個數學歷程或問題解決階段中的問題。進一步將數學歷程拆解成次向度與指標，可以更清楚了解在不同的過程中，有哪些重要的問題。這些問題一方面可以協助學生理解情境，另一方面可以引導學生解決問題。

「形成」是指將現實生活中遭遇的問題轉換成具數學結構、表徵、或數學特異性的問題（Organisation for Economic Cooperation and Development, 2016），它可以再拆解成「辨識資訊」、「使用表徵」、「形成策略」三個次向度。

辨識資訊包括：

- ✓ 辨識情境或問題中重要的影響變數／變項
- ✓ 辨識問題或情境中的數學結構，包括規律、關係和模式……等
- ✓ 辨識問題背後數學模型的限制和假設

使用表徵包括：

- ✓ 使用適當的變數／變項、符號、圖表或模式，將問題轉化為數學語言或表徵
- ✓ 理解不同表徵之間的關係，包括生活用語、符號與形式語言

探索與規畫包括：

- ✓ 連結問題與已知的數學概念、事實或程序
- ✓ 簡化問題，建立解決問題的步驟

「運用」是指應用數學概念、事實、程序與推論解決問題，獲得結果（Organisation for Economic Cooperation and Development, 2016），它可以再拆解成「程序執行」、「統整推論」、「使用工具」三個次向度。

程序執行包括：

- ✓ 應用已知的數學事實、規則、結構和算則，進行解題
- ✓ 繪製數學圖形與表格、進行模擬分析，並從中擷取訊息
- ✓ 處理數字、圖形、統計數據、代數式和方程式，以及幾何表徵

統整推論包括：

- ✓ 根據已知條件，證明數學結果，或解釋數學證明過程
- ✓ 調整或轉換原有的表徵解題
- ✓ 進行一般化或臆測

使用工具包括：

- ✓ 理解數學工具的特性
- ✓ 根據問題的特徵，選擇合適的數學工具解題，包括使用三角板、量角器、計算機、試算表……等

「詮釋評估」是指反思解法、答案或結論的合理性，並在真實生活中進行做合理的詮釋（Organisation for Economic Cooperation and Development, 2016），它可以再拆解成「詮釋說明」、「評估反思」。

詮釋說明包括：

- ✓ 詮釋圖形、表格中的訊息
- ✓ 在真實情境中詮釋所得的數學結果

評估反思包括：

- ✓ 評估數學結果在真實情境的合理性
- ✓ 理解數學概念、結果與數學模型的限制
- ✓ 根據獲得的數學結論、情境的限制或條件變動，進行策略或程序的調整，以獲得新結果
- ✓ 使用數學思維和運算思維進行預測

上述的這些數學歷程的向度、次向度、指標、與新課綱的學習表現和核心素養整是相似的。表5將這些項目彙整、合併成一個可以相互對應的表格。從表5可以發現，**形成**與學習表現中的「認識、觀察、察覺、蒐集資料、分類、製作表格、文字表示公式、文字或符號表述、符號或文字表徵生活中的關係與規律、描述現象」都是指相同或相似的能力。對應到的核心素養包括「規劃執行、符號運用、系統思考」。**運用**與學習表現中的「理解、計算、實測、解題、估算、應用、併式計算、換算、估測、取概數、推論、數據分析、運用、應用計算機、分析資料、使用統計軟體、操作計算機、建模」都是指相同或相似的能力。對應到的核心素養包括「系統思考、科技資訊、問題解決」。**詮釋評估**與學習表現中的「呈現與說明、說明與推理、報讀、簡單推論、驗證、溝通、推理、證明、驗算、檢核假設與推論、運用策略與原理、欣賞、溝通、解決問題」都是指相同或相似的能力。對應到的核心素養包括「問題解決、溝通表達、規劃執行」。

表 5  
數學歷程的向度、次向度與指標與學習表現和核心素養的關係

向度	次向度	指標	學習表現	核心素養
形成	辨識資訊	辨識情境或問題中重要的影響變數／變項	認識、觀察、察覺、蒐集資料、分類、製作表格、文字表示公式、文字或符號表述、符號或文字表徵生活中的關係與規律、描述現象	規劃執行 符號運用 系統思考
		辨識問題或情境中的數學結構，包括規律、關係和模式……等		
		辨識問題背後數學模型的限制和假設		
	使用表徵	使用適當的變數／變項、符號、圖表或模式，將問題轉化為數學語言或表徵		
		理解不同表徵之間的關係，包括生活用語、符號與形式語言		
	探索規畫	連結問題與已知的數學概念、事實或程序 簡化問題，建立解決問題的步驟		
運用	程序執行	應用已知的數學事實、規則、結構和算則，進行解題	理解、計算、實測、解題、估算、應用、併式計算、換算、估測、取概數、推論、換算、數據分析、運用、應用計算機、分析資料、使用統計軟體、操作計算機、建模、數據分析	系統思考 科技資訊 問題解決
		繪製數學圖形與表格、進行模擬分析，並從中擷取訊息		
		處理數字、圖形、統計數據、代數式和方程式，以及幾何表徵		
	統整推論	根據已知條件，證明數學結果，或解釋數學證明過程		
		調整或轉換原有的表徵解題		
		進行一般化或臆測		
	使用工具	理解數學工具的特性		
根據問題的特徵，選擇合適的數學工具解題，包括使用三角板、量角器、計算機、試算表……等				
詮釋評估	詮釋說明	詮釋圖形、表格中的訊息	呈現與說明、說明與推理、報讀、簡單推論、驗證、溝通、推理、證明、驗算、檢核假設與推論、運用策略與原理、欣賞、溝通、解決問題	問題解決 溝通表達 規劃執行
		在真實情境中詮釋所得的數學結果		
	評估反思	評估數學結果在真實情境的合理性		
		理解數學概念、結果與數學模型的限制		
		根據獲得的數學結論、情境的限制或條件變動，進行策略或程序的調整，以獲得新結果		
	使用數學思維和運算思維進行預測			

資料來源：修改自吳正新（2021）。

## 範例 12 CD 唱片販售

以下利用「CD唱片販售」為例，說明如何利用表5進行試題的修改與審查。

### 第一版試題內容

有一家唱片公司完成了一張CD唱片的錄製，並準備大量複製及銷售。  
如果一張CD唱片的封面設計成本為\$250元，複製一張CD唱片成本\$3元。製作一張CD唱片的成本P會與錄製CD唱片的數量c有關。  
請製作一張不同c值與P值的表格，並繪製它的圖形。

資料來源：修改自Wendt與Murphy（2015）。

第一版的試題和傳統課習題很像，但它並不是好的素養導向試題，因為：1. 沒有善用情境資訊；2. 只要利用成本函數P的資訊即可作答；3. 評量的內容與傳統問題相似，是例行的計算與繪圖，4. 沒有「形成」的問題與「詮釋評估」類型的問題，不易引發學生思考。以下的第二版試題是嘗試利用表5來進行修改的結果：

### 第二版試題內容

#### 問題 01

你是一家唱片公司的老闆。有位客人帶著錄好的10首歌曲，請你幫忙製作成唱片並大量複製。請問有哪些因素會影響你對客戶收取的總費用？

#### 問題 02

假設你已錄製好10首歌曲，想找唱片公司幫忙製作成CD唱片並大量複製。A公司的收費方式是：複製50張收費\$400元，複製100張收費\$550元。這二種收費方式皆含CD封面設計費用\$250元，請問

- (1) 如果要複製600張CD，A公司的收費是多少？
- (2) 請利用線性函數列出A公司的收費P與複製數量c之間的關係。
- (3) 在你列出的線性函數中，c前面的數字的單位是什麼？

問題 03

假設你已錄製好10首歌曲，想找唱片公司幫忙製作成CD唱片並大量複製。  
B公司的收費方式是：複製50張收費\$400元，含封面設計費用\$250元。  
以下有二個成本函數：和Q它們都符合「複製50張收費\$400元」。請問哪一個成本函數比較合理？

問題 04

假設你已錄製好10首歌曲，想找唱片公司幫忙製作成CD唱片並大量複製。  
X公司的收費方式是：封面設計費用\$250元，複製1張收費\$3元。  
Y公司的收費方式是：封面設計費用\$300元，複製1張收費\$2.5元。  
請問你會選擇哪一家公司？在什麼情況下你會換另一家？

資料來源：修改自Wendt與Murphy（2015）。

第二版的試題依據問題解決的歷程增加了不同層次的問題。對照表5，問題1要能找出影響成本的重要因素，屬於辨識資訊中的「辨識情境或問題中重要的影響變項或變數」。問題2屬於使用表徵中「使用適當的變數／變項、符號、圖表或模式，將問題轉化為數學語言或表徵」、「理解不同表徵之間的關係」，以及程序執行中的「應用已知的數學事實、規則、結構和算則，進行解題」。這些問題有助於學生未來學習更高階的數據分析（例如：迴歸模型）。問題3屬於使用表徵中的「使用適當的模型」以及評估反思中的「評估數學結果在真實情境的合理性」。問題4是有關損益平衡分析（break-even analysis），它應用到「理解數學概念、結果與數學模型的限制」以及「根據獲得的數學結論、情境的限制或條件變動，進行策略或程序的調整，獲得新結果」。

搭配不同層次問題，第二版的試題可以評量更多的核心素養與學習表現。一旦學生學習到各式問題解決過程中的重要能力，未來才有可能將此能力應用、遷移到學校外的問題解決。換言之，學生要以「有用」的方式來學數學，才會知道數學是有用的，才能理解學習數學的價值。

## 實作練習 5

請根據下方的資訊，提出形成、運用、詮釋評估三種層次的問題

### 捷運常客優惠方案

捷運公司推出了「常客優惠方案」，方案內容如下：

#### 常客優惠方案

1. 持電子票卡搭乘捷運可累計搭乘次數及搭乘金額。
2. 每張卡依每月累計搭乘次數，決定現金回饋比例，如下表：

當月累計搭乘次數	現金回饋比例
11~20次	10%
21~30次	15%
31~40次	20%
41~50次	25%
51次以上	30%

3. 當月累計搭乘金額及現金回饋比例會決定下個月回饋金，計算方式如下：  

$$\text{下個月回饋金} = \text{當月累計搭乘金額} \times \text{現金回饋比例}$$

(※先想一下，如果還是沒有想法，請參考下一頁的參考答案)

問題 01

請判斷下列敘述是否正確？

敘述	是否正確
1. 當月累計搭乘超過10次，下個月才有回饋金	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否
2. 當月搭乘35次，下個月的回饋金為當月累計搭乘金額的20%	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否
3. 搭乘80次的現金回饋比例比搭乘60次的現金回饋比例高	<input type="checkbox"/> 是 <input type="checkbox"/> 否

問題 02

哥哥使用同一張悠遊卡搭乘捷運，三月份共搭乘65次，累計金額2,000元，請問哥哥下個月的回饋金有多少元？

- ① 195元    ② 600元    ③ 700元    ④ 1,950元

問題 03

雅芸與伊婷都是以捷運為交通工具。

四月份雅芸共搭乘23次，累計搭乘金額為1,000元；伊婷共搭乘35次，累計搭乘金額為800元。

雅芸說：「我的累計搭乘金額比伊婷高，所以下個月的回饋金也會比伊婷多。」

你認為雅芸的說法是否正確？請說明你的理由。

問題 04

辰昕不常搭捷運，五月份已搭了10次，累計搭乘金額500元。

網路上有人建議：「當月捷運已搭乘10次的人可再多搭乘一次，下個月即可獲得回饋金。」

辰昕如果依此建議在五月底多搭乘了一趟40元的捷運，請問他下個月所獲得的回饋金會比多搭乘這一趟的費用多嗎？請說明你的理由。

資料來源：國家教育研究院（2021）。

## 二、詮釋評估類型試題的特徵

Gonzales (1994) 從教導學生擬題 (problem posing) 的過程中，彙整出16項好問題應該具備的特質。表6將好問題的特徵重新整理，並將這些特徵進行簡易的分類。這些特徵大致可以分成四類：

- ✓ 第一類是命題的基本原則，包括：問題具體且清楚明確、問題難度適中、使用適合施測對象能理解的詞彙。
- ✓ 第二類是能引發學生動機，包括：使用引發學生興趣的情境、使用實際、真實或有創意的問題。
- ✓ 第三類是促進數學概念理解、運用數學能力，包含：有助於理解數學概念的問題、促使學生進行數學推理、促進學生使用數學知識和技能的問題、解題過程培養學生表徵轉換的能力、解題過程引發學生使用模型、圖表和符號來表徵問題。
- ✓ 第四類是提供數學溝通、數學探究與詮釋評估的機會，包括：具多元解法的問題、問題涉及策略的使用，不是只要一個標準答案、提供學生分類、溝通表達和定義概念不同的作答方式、探索性的問題，例如：“What if...?”、以及問題要能提供學生臆測、分析和探究的機會。

好問題的特徵與數學素養導向評量分析檢核表 (表4) 的相似處是：難度要適中、要符合評量對象、試題的真實性。此外，好問題的特徵特別強調，「促進數學概念理解、運用數學能力」、以及「提供數學溝通、數學探究與詮釋評估的機會」的問題。與新課綱的課程目標 (表1) 相比，「促進數學概念理解、運用數學能力」與課程目標第二、三項相符，而「提供數學溝通、數學探究與詮釋評估的機會」則是與課程目標第四、五項 (表1) 相符。好問題的特徵除了重視試題的真實性，同時強調理解和運用數學概念的重要性，以及數學探究的重要性。因此，在檢視試題的優劣時，可以將試題與好問題的特徵進行比對，確認試題是否具備這些特徵。

表 6  
好問題的特徵

好問題的特徵	分類
I. 問題具體且清楚明確。 II. 問題難度適中。 III. 使用適合施測對象能理解的詞彙。	基本原則
IV. 使用引發學生興趣的情境。 V. 實際或真實問題。 VI. 有創意的問題。	引發學生動機
VII. 有助於理解數學概念的問題。 VIII. 促使學生進行數學推理。 IX. 促進學生使用數學知識和技能的問題。 X. 解題過程培養學生表徵轉換的能力。 XI. 解題過程引發學生使用模型、圖表和符號來表徵問題。	促進數學概念理解、運用數學能力
XII. 具多元解法的問題。 XIII. 問題涉及策略的使用，不是只要一個標準答案。 XIV. 提供學生分類、溝通表達和定義概念的機會。 XV. 探索性的問題，例如：「What if...?」 XVI. 問題要能提供學生臆測、分析和探究的機會。	提供數學溝通、數學探究與詮釋評估的機會

資料來源：修改自Gonzales (1994)。

好問題特徵的第三類「需要促進數學概念理解、運用數學能力」與第四類「提供數學溝通、數學探究與詮釋評估的機會」與詮釋評估類型的問題相似，都是屬於高層次思考與推論的問題。因此，這些好問題的特徵也可以作為命題的指引。以下我們依照好問題的特徵，列舉一些符合這些特徵的範例試題，以具體呈現什麼是好的素養導向試題。這些範例（國家教育研究院，2020b，2021），不僅包括常見的買賣或購物相關的試題，也包括許多生活中與數學相關的問題。觀摩這些具備不同特徵的試題，可以讓命題者對**好問題**更加的熟悉與認識。每道範例題都會提供本題的「好問題的主要特徵」、「試題內容」、以及簡要的「試題說明」。

(一) 促進數學概念理解、運用數學能力的範例

範例 13 職棒選手

好問題的特徵：有助於理解數學概念																																							
試題內容				試題說明																																			
<p>打擊率是棒球運動中衡量打擊選手成績的重要指標，其計算方式為：</p> <p><b>「打擊率＝選手擊出的安打數除以打數」</b></p> <p>下表是職棒選手<u>程今風</u>本季開始至8月20日的打擊成績：</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>月份</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>7</th> <th>8</th> <th>總計</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>打數</td> <td>21</td> <td>50</td> <td>48</td> <td>44</td> <td>50</td> <td>35</td> <td>248</td> </tr> <tr> <td>安打數</td> <td>4</td> <td>17</td> <td>10</td> <td>17</td> <td>18</td> <td>10</td> <td>76</td> </tr> <tr> <td>打擊率</td> <td>0.19</td> <td>0.34</td> <td>0.21</td> <td>0.39</td> <td>0.36</td> <td>0.29</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>				月份	3	4	5	6	7	8	總計	打數	21	50	48	44	50	35	248	安打數	4	17	10	17	18	10	76	打擊率	0.19	0.34	0.21	0.39	0.36	0.29		<p>打擊率是棒球運動中衡量打擊選手成績的重要指標。它的計算方式是：「安打數除以打數」。在本例題中，以表格的方式呈現選手每月份的打擊率，但最後詢問選手從球季開始至今的打擊成績。因此，可以協助學生釐清「打擊率」的概念。如果生對打擊率的概念不是很清楚，很有可能會計算6個月的打擊率的平均。此外，學生也可以藉由觀察已知的3～8月打擊率，了解「打擊率＝安打數除以打數」，達到評量即學習的效果。</p>			
月份	3	4	5	6	7	8	總計																																
打數	21	50	48	44	50	35	248																																
安打數	4	17	10	17	18	10	76																																
打擊率	0.19	0.34	0.21	0.39	0.36	0.29																																	
<p><b>問題 02</b></p> <p>一般而言，職棒選手的</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 打擊率在0.28以上，被稱為是一個「稱職」的打者。</li> <li>● 打擊率在0.30以上，被稱為是一個「優秀」的打者。</li> <li>● 打擊率在0.40以上，被稱為是一個「偉大」的打者。</li> </ul> <p>截至目前的表現（本季開始至8月20日），<u>程今風</u>是屬於哪一種打者？請說明你的理由。</p>																																							

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

## 範例 14 雨量

### 好問題的特徵：有助於理解數學概念

試題內容	試題說明																				
<p>臺灣位於副熱帶地區，一年之中各月的降雨分布相當不均勻，梅雨期和颱風期是全年降雨量較多的時期。</p> <p><b>問題 03</b></p> <p>下圖是2018年五月到九月，蘭嶼和高雄的雨量折線圖。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="215 801 519 987"> <table border="1"> <caption>蘭嶼雨量 (毫米)</caption> <thead> <tr><th>五月</th><th>六月</th><th>七月</th><th>八月</th><th>九月</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>120</td><td>400</td><td>120</td><td>480</td><td>240</td></tr> </tbody> </table> </div> <div data-bbox="529 801 853 987"> <table border="1"> <caption>高雄雨量 (毫米)</caption> <thead> <tr><th>五月</th><th>六月</th><th>七月</th><th>八月</th><th>九月</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>200</td><td>800</td><td>400</td><td>1600</td><td>200</td></tr> </tbody> </table> </div> </div> <p>比較這二張圖後，<u>小明</u>說：「五月到九月期間蘭嶼的總雨量比高雄還多。」</p> <p>你認為他的說法正確嗎？請說明你的理由。</p>	五月	六月	七月	八月	九月	120	400	120	480	240	五月	六月	七月	八月	九月	200	800	400	1600	200	<p>折線圖包括：統計圖名稱、橫軸與縱軸的意義、標示、與數量單位，以及代表變化之折線。因此報讀時，需要考量這些元素，才能進行正確的報讀。如果是比較二張不同的折線圖，特別需要注意圖形的橫軸與縱軸的意義、標示、與數量單位的差異，才能進行正確的報讀和比較。</p> <p>本題利用生活中常見的雨量折線圖為題材，但它們縱軸的單位有明顯的差異，評量學生是否具備正確的報讀折線圖的概念。</p>
五月	六月	七月	八月	九月																	
120	400	120	480	240																	
五月	六月	七月	八月	九月																	
200	800	400	1600	200																	

資料來源：國家教育研究院 (2020b)。

## 範例 15 怎麼買最省錢

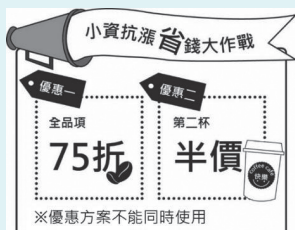
### 好問題的特徵：促使學生進行數學推理

試題內容	試題說明
<p>快樂便利商店時常有飲料的促銷優惠，不同的優惠方案有不同的折扣，所以選擇適當的優惠方案是一件重要的事情。</p>	<p>本試題以生活中常見的飲料促銷活動為題材，讓學生根據優惠方案的說明，</p>

問題 03

快樂便利商店販售的抹茶拿鐵，每杯售價60元。  
快樂便利商店提供二種優惠方案，優惠說明如右：

小晴想買五杯抹茶拿鐵，她認為方案一比較優惠，你同意她的看法嗎？請說明你的理由。

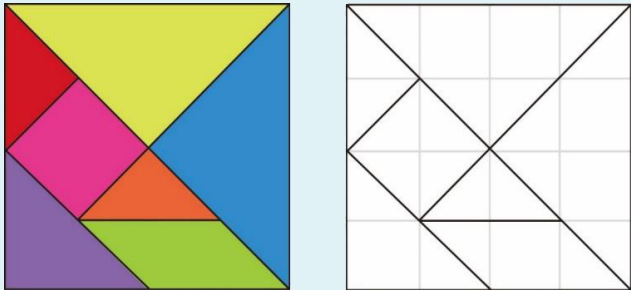


運用數學，進行推理與計算。學生首先要讀懂優惠方案，並分別確認二種方案購買五杯的方式，在計算出二方案分別需要支付的價錢，才能推論出哪一種方案比較優惠。促使學生進行數學推理的題材，才能累積學生的問題解決經驗，才能培養學生學習遷移的能力。

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

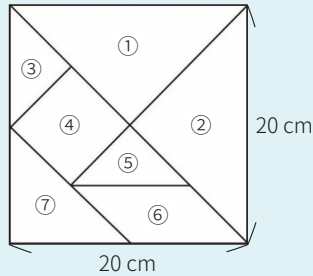
範例 16 七巧板

好問題的特徵：促使學生進行數學推理

試題內容	試題說明
<p>七巧板是一種由七個組件組成的智力遊戲，相傳是明、清時期由中國人所發明的。七巧板可以透過切割正方形製作出來，方式如下：</p> 	<p>七巧板是學校經常用來協助教學的教具，學生對它相當熟悉。它有二個大小一樣的四邊形，其中一個是正方形，一個是平行四邊形。可以利用「切割、重組」、「等底同高」、或直接計算面積的方式說明。不論學生使用哪一種方式說明，都需要運用學過的幾何性質進行推論。若能正確的說明理由，代表學生具備數學推理能</p>

問題 01

阿德利用一張邊長20公分的色紙製作七巧板的七個組件，如右圖所示。請問組件④和組件⑥哪一個面積比較大？請說明你的理由。



力，同時也具備數學溝通能力。

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

範例 17 安全舒適的游泳空間

好問題的特徵：促進學生使用數學知識和技能

試題內容

研究顯示，不同深度的游泳池，泳客要擁有不同的使用面積，才能安全又舒適游泳。研究結果如下表：

深度 (公尺)	每人最小安全舒適的游泳池表面面積 (平方公尺)
<1.0	2.2
1.0-1.5	2.7
1.5-2.0	4.0

如果不符合此規定，容易使泳客產生碰撞或造成水面以下之能見度不佳而發生溺斃的危險。

試題說明

體積和表面積是二項重要的幾何性質。何時使用體積？何時使用表面積？是學生常見的錯誤類型。評估符合安全舒適游泳空間下，泳池最多可以容納的人數，首先要先根據研究建議，理解不同深度的泳池，每人需要的最小安全舒適的表面面積是不同的。然後，再利用泳池表面積，分別計算不同深度的泳池區域，分別可以容納的人數。

問題 02


某運動中心的游泳池長為50公尺，寬為20公尺。左側深度為1公尺，由左至右逐漸加深至2公尺，游泳池中間的深度為1.5公尺。

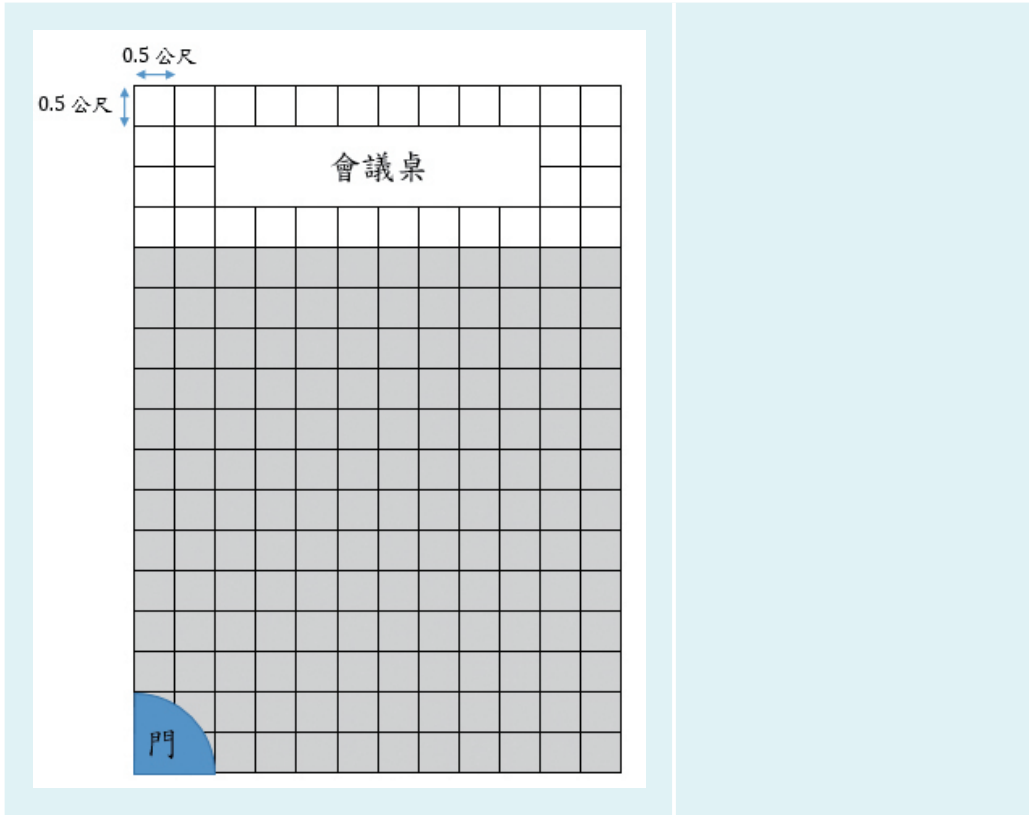
請問此運動中心的游泳池在符合安全舒適的研究建議下，最多可以容納多少人？請說明你的理由。

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

範例 18 防疫社交距離

好問題的特徵：培養學生表徵轉換的能力

試題內容	試題說明
<p>為防止「嚴重特殊傳染性肺炎（COVID-19）」疫情蔓延，衛福部規定：「人與人之間，在室內應保持1.5公尺、室外應保持1公尺的社交距離。」</p> <p>問題 01</p> <p>里長準備召開里民大會，他利用地磚的大小（0.5公尺×0.5公尺）來規劃椅子的擺放，讓參與的里民就坐，以保持室內社交距離。擺放的條件如下：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ 座位在會議桌前方的灰色區域。</li> <li>✓ 座位離牆面至少0.5公尺。</li> <li>✓ 座椅的擺放不能影響門的開關。</li> </ul> <p>里長想要儘可能的擺放多張椅子。請用「●」代表椅子，在下方會議室的平面圖畫出可能的擺設方式。你可以利用 、 或  方式標記。</p>	<p>表徵轉換是解決問題的第一個步驟。理解情境中問題、釐清問題中的數學結構、才能簡化問題，進而解決問題。</p> <p>本題利用社會時事問題為題材，引導學生使用表徵轉換。問題提供了里長預先設定的三種擺放椅子的條件。學生需要根據這三個條件，以及地磚的大小，轉換成實際可能的擺設方式，並繪製在平面圖中。</p>



資料來源：國家教育研究院（2021）。

### 範例 19 你健康嗎？

#### 好問題的特徵：培養學生表徵轉換的能力

試題內容	試題說明
<p>世界衛生組織建議以身體質量指數 (Body Mass Index, BMI) 來衡量肥胖程度。BMI的計算方式為：</p> $BMI = \frac{\text{體重(公斤)}}{\text{身高(公尺)} \times \text{身高(公尺)}}$ <p>國民健康署建議我國成人BMI應維持在18.5至24之間（健康體位），過瘦（BMI&lt;18.5）或過重（BMI&gt;24）皆有礙健康。</p>	<p>生活中的數學多數會同時包含不同的表徵，例如：符號、公式、圖形和表格。利用BMI評估體位，學生需要具備日常語言與數字，及算則與符號之間的轉換能力，在根據健康體重對照表，獲得BMI指</p>

問題 02

國民健康署建議的健康體重對照如下：

健康體重對照表

BMI值範圍	體位情形	建議
BMI<18.5	過瘦	應補充營養
$18.5 \leq \text{BMI} \leq 24$	健康體位	保持現況
BMI>24	過重	應多運動

小宣爸爸的身高是170公分，體重是75公斤。小宣計算爸爸的BMI後，對照上表她該給爸爸什麼建議？

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

標的建議。因此學生要具備不同表徵之間的轉換能力，才能答對此問題。

(二) 提供數學溝通、數學探究與詮釋評估機會的範例

範例 20 視力檢查

好問題的特徵：具多元解法的問題

試題內容

臺大醫院公布最新學生視力監測調查，國小六年級近視（度數50度以上）的比率為70.6%，國中三年級為89.3%。

問題 02

下表是健康國小六年一班、二班的視力檢查結果。

	六年一班	六年二班
近視人數	18	18
未近視人數	7	9
合計	25	27

試題說明

利用具多元解法的問題，不但能培養運用數學概念解決問題，也能培養學生的創意思維。

本題至少有二種基本的解法，其中一種利用分數的概念來說明，另一種是計算出二個比率值，再進行比較，獲得結果。

從學生的作答結果可知，多數學生傾向使用計算出

安安說：「健康國小六年一班和六年二班近視人數一樣多，所以這二班近視人數比率一樣。」請問，安安說的這句話正確嗎？請說明你的理由。

**滿分**

代碼11：回答「不正確」，並能合理說明原因。

- 不正確。雖然近視人數相同，但尚須考慮各班之總人數。

代碼12：回答「不正確」，且能各別列出或計算出二班近視人數之比率，並做判斷。

- 不正確。  
六年一班近視比率： $18 \div 25 = 0.72 = 72\%$ ；  
六年二班近視比率： $18 \div 27 \approx 0.67 = 67\%$ ，  
 $\therefore 72\% \neq 67\%$   $\therefore$  不正確。

答案的方式作答。這可能與傳統的教學，強調計算、強調標準答案有關。此外，也可以發現學生缺乏利用數學概念進行溝通的能力。

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

**範例 21 值日生**

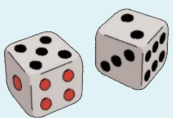
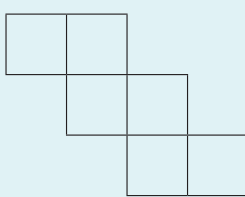
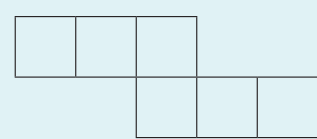
**好問題的特徵：具多元解法的問題**

試題內容	試題說明
<p>「值日生」是依學校的行事曆安排負責執行勤務的學生。</p> <p>五年一班有20人，其中1至12號是男生，13至20號是女生。</p> <p>五年一班的導師安排值日生的方式是「依照座號每天排定一位男生和一位女生一同擔任值日生。」</p> <p><b>問題 03</b></p> <p>從男、女生擔任值日生的次數來看，導師的安排方式是否公平？請說明你的理由。</p>	<p>真實問題一般具備多元解法，可以從不同角度，不同的方向進行解題。許多研究指出，具多元解法的試題才是好的素養導向試題，因為具多元解決的問題，可以引導學生思考、帶動學生討論、並提供學生發揮創意的空間與機會。本題要分析老師安排</p>

<p><b>滿分</b></p> <p>代碼<b>11</b>：從男女生人數不同來說明。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 不公平，男生人數比較多，女生人數比較少。</li> </ul> <p>代碼<b>12</b>：從男女生擔任值日生的天數來說明。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 不公平，因為號碼較前面的會擔任較多次。</li> <li>● 不公平，因為有些人會多當一次。</li> </ul>	<p>值日生的方式是否公平，雖然使用傳統、常見的情境，但問題的設計可以讓學生運用數學知識與概念，進行不同的思考。</p>
--	--

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

## 範例 22 製作六面骰

好問題的特徵：問題涉及策略的使用	
試題內容	試題說明
<p>六面骰是一個六面分別標示1到6點，且相對二面數字和為7的正立方體。</p> <div style="text-align: right;">  </div> <p><b>問題 03</b></p> <p>小孟知道還有另外二種立方體展開圖的畫法，如下圖：</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-end;"> <div style="text-align: center;">  <p>畫法1</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>畫法2</p> </div> </div> <p>請問使用哪一種立方體展開圖的畫法，可以在長30公分、寬21公分的厚紙板上製作一個比較大的六面骰？請說明你的理由。</p>	<p>涉及策略使用的問題需要經過縝密的思考或分析，而且可以促進並培養學生運用數學思考問題、分析問題、解決問題的能力。在固定大小的長方形厚紙板上製作一個比較大的六面骰，需要比較不同六面體展開圖與長方形厚紙板尺寸之間的關係。因此，學生要能進行策略性的規劃並比較，才能正確的回答問題。</p>

資料來源：國家教育研究院（2021）。

## 範例 23 迪士尼樂園的門票價格

### 好問題的特徵：問題涉及策略的使用

試題內容			試題說明																													
<p>東京迪士尼樂園是適合全家大小一同遊玩的景點。迪士尼樂園的購票方式有二種：<b>現場購買</b>、<b>網站訂購</b>。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 現場購買要使用日幣（¥），網站訂購使用臺幣（NTD）。</li> </ul> <p>目前的幣值兌換方式是：日幣金額×0.28＝臺幣金額。</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 購買學生票或兒童票者，入園時需出示證件，否則只能購買成人票入園。</li> </ul> <p>二種購票方式的價格如下表：</p>			<p>有不同購票管道，就會衍生出不同的購買方式；有不同的購票方式，就會涉及不同的購票策略與方式。若再加上優惠活動，購票問題就會更複雜。當問題涉及策略的使用時，就要進行不同的比較，找出最佳解。本題雖然是常見的購物情境，但因為問題涉及策略的使用，學生在作答時，必須進行分析、思考和比較，才能獲得最佳解。</p>																													
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">現場購買</th> <th colspan="3">網站訂購</th> </tr> <tr> <th>種類</th> <th>年齡</th> <th>票價</th> <th>種類</th> <th>年齡</th> <th>票價</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>成人票</td> <td>18歲 ~64歲</td> <td>¥ 7,500</td> <td>成人票</td> <td>18歲 ~64歲</td> <td>NTD 2,091</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">優惠票</td> <td>學生票</td> <td>12歲 ~17歲</td> <td rowspan="2">優惠票</td> <td>學生票</td> <td>12歲 ~17歲</td> <td>NTD 1,812</td> </tr> <tr> <td>兒童票</td> <td>4歲 ~11歲</td> <td>兒童票</td> <td>4歲 ~11歲</td> <td>NTD 1,366</td> </tr> </tbody> </table>						現場購買			網站訂購			種類	年齡	票價	種類	年齡	票價	成人票	18歲 ~64歲	¥ 7,500	成人票	18歲 ~64歲	NTD 2,091	優惠票	學生票	12歲 ~17歲	優惠票	學生票	12歲 ~17歲	NTD 1,812	兒童票	4歲 ~11歲
現場購買			網站訂購																													
種類	年齡	票價	種類	年齡	票價																											
成人票	18歲 ~64歲	¥ 7,500	成人票	18歲 ~64歲	NTD 2,091																											
優惠票	學生票	12歲 ~17歲	優惠票	學生票	12歲 ~17歲	NTD 1,812																										
	兒童票	4歲 ~11歲		兒童票	4歲 ~11歲	NTD 1,366																										
<p><b>問題 03</b></p> <p>翁先生打算和太太帶著二個15歲的小孩前往迪士尼樂園。</p> <p>目前遊樂園提供一項優惠活動，優惠方式是：<b>網站購票可享「滿8,000打九折」</b>。</p> <p>翁先生想利用此優惠方式購票，請問他要怎麼買會最便宜？請說明你的理由。</p>																																

資料來源：國家教育研究院（2021）。

## 範例 24 電費計價

## 好問題的特徵：探索性的問題，例如：“What if...?”

試題內容			試題說明																	
台電公司對一般住家、機關、學校等非營業用的夏月用電度數分段計費方式如下表：			電費計算是常見的生活情境題，但一般的問題都是評量學生是否能理解分段計費或學生的（小數的）計算能力。																	
單位：元																				
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">每月用電度數分段</th> <th>夏月 (6月1日至9月30日)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="6">非營業用</td> <td>120度以下部分</td> <td rowspan="6">每度</td> <td>1.63</td> </tr> <tr> <td>121~330度部分</td> <td>2.38</td> </tr> <tr> <td>331~500度部分</td> <td>3.52</td> </tr> <tr> <td>501~700度部分</td> <td>4.80</td> </tr> <tr> <td>701~1,000度部分</td> <td>5.66</td> </tr> <tr> <td>1,001度以上部分</td> <td>6.41</td> </tr> </tbody> </table>			每月用電度數分段		夏月 (6月1日至9月30日)	非營業用	120度以下部分	每度	1.63	121~330度部分	2.38	331~500度部分	3.52	501~700度部分	4.80	701~1,000度部分	5.66	1,001度以上部分	6.41	本題以“What if...?”的方式，詢問學生如果原來的計費方式條件改變，新的計費方式是否划算。因此學生在作答時需要先釐清改變前與改變後的計費規則的差異，便能以較簡潔的方式回答問題。
每月用電度數分段		夏月 (6月1日至9月30日)																		
非營業用	120度以下部分	每度	1.63																	
	121~330度部分		2.38																	
	331~500度部分		3.52																	
	501~700度部分		4.80																	
	701~1,000度部分		5.66																	
	1,001度以上部分		6.41																	
<p><b>問題 04</b></p> 一般住家電費為二個月計價一次，學校電費為一個月計價一次。 如果一般住家改成每月計價一次，請問對一般住家而言，是否比較划算？請說明你的理由。			然而，從學生的作答反應可知，多數學生都是以「舉例、計算、比較」的方式來回答問題。能利用計算改變前後的差異，其背後的數學意涵來回答問題的學生，只有少數。																	

資料來源：國家教育研究院（2021）。

## 範例 25 火紅歌曲

好問題的特徵：問題要能提供學生個臆測、分析和探究的機會

試題內容	試題說明
 <p>上圖為某知名影音平台中的一張音樂專輯，裡面收錄了24首2020年火紅的英文歌曲，共1時24分02秒。觀賞者可以自行移動時間軸上的「●」調整已播放時間。</p> <p><b>問題 01</b></p> <p>小芳如果想直接聽這張音樂專輯中的第七首歌曲「07. One Call Away」，她可以嘗試將已播放時間調整到何時？請說明你的估算方法。</p>	<p>當問題貼近學生生活，而且有點難、又不會太難時，最容易引起學生學習興趣與動機，以及引導學生進行臆測、分析與探究。</p> <p>火紅歌曲以學生常見的上網休閒活動為情境，詢問學生如何選到喜愛的歌曲，提供學生一個可能的臆測、分析和探究的機會。學生可以結合生活經驗（3分鐘／首），問題數據（1時24分02秒／24首），或用數學概念（比率）等，不同的方式進行分析與探究，獲得結論。</p>

資料來源：國家教育研究院（2021）。

## 範例 26 當骰子遇到疊疊樂

## 好問題的特徵：問題要能提供學生個臆測、分析和探究的機會

試題內容	試題說明
<p>「骰子遇到疊疊樂」是一款桌遊，它有40塊二邊印有相同數字的積木，其遊戲規則如下：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>● 投擲二顆骰子，出現點數和為<math>m</math>點，則抽取編號為<math>m</math>號的積木一塊；</li> <li>● 若沒有<math>m</math>號的積木，則再擲一次。</li> </ul> <p>例如：若擲出二顆骰子的點數和為8，則抽取編號8號的積木一塊；若沒有8號的積木，則再擲一次。</p> <p>圖一是排好後還沒開始玩的圖片，圖二是玩了數次後的圖片。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <span>圖一</span> <span>圖二</span> </div> <p><b>問題 02</b></p> <p>如果要抽7號積木，請問二顆骰子的點數可能有哪幾種？請列出所有的可能。</p> <p><b>問題 03</b></p> <p>請問哪些編號的積木永遠不會被抽出呢？請說明你的理由。</p>	<p>桌遊通常會結合不同的數學概念，若要獲勝需要分析、探究遊戲的規則與獲勝的條件。有別於傳統單獨以骰子為題材的試題，骰子遇到疊疊樂同時利用骰子的特徵與疊疊樂的立體圖像設計問題，提供學生分析、理解骰子的特性。</p> <p>學生可以在遊戲中，探究與骰子有關的排列組合與機率的問題。</p>

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

### 第三節 團隊修審與討論流程

在完成試題研發與個人修審後，比較嚴謹的方式是再進行一次團隊審題，避免試題有問題或有疑義。團隊修審像是一個集體腦力激盪的過程，大家一起提供建議、檢核試題、修改試題、或改寫試題。團隊修審要注意些什麼事呢？以下介紹是一個簡易的程序（圖17），及各步驟中要注意的事項。

圖 17  
試題修審流程



修審程序大致可分為下列三個步驟：

- 一、**試寫**：試寫是相當重要的，因為從讀題到作答，可以深入理解試題情境、評量內容，掌握整體的試題資訊與架構，後續才能與命題者進行深入的對話與討論。
- 二、**命題者說明**：由命題者說明命題的想法與理念。在聽完說明後，所有參與的人員要將自己試寫結果與命題者的想法進行比對，若有不一致的地方必須提出討論，即使只有一點點的疑惑。
- 三、**檢核討論**：討論與命題者想法不一致的地方，或提供命題者可能疏忽或遺漏之處。討論時可以依序分析下列三個面向：

- ✓ 情境的合適性：
  - 情境能否引發學生興趣？

- 是否會太複雜？
- 情境是否真實（參考表4）？
- 是否符合評量對象？是否有描述清楚？
- 如果上述內容都合適，**是否能發展符合評量內容、符合評量對象的問題？**
- ✓ 情境與問題之間的連結：
  - 如果刪掉情境／題幹資訊，問題還能作答嗎？
  - 這個情境中，重要的問題是什麼？
  - 在這個情境下，你或學生會問這些問題嗎？
  - 除了這些問題，還有什麼問題是**在這個情境下，應該要問但沒問的問題？**
- ✓ 問題的脈絡：
  - 問題是否包含**不同層次**（參考表5）？
  - 試題是否具備**好問題的特徵**（參考表6）？
  - 問題是否有逐步引導學生思考？
  - 問題的敘述是否精簡？
  - 問題是否正確評量到預設的評量目標、數學內容？
  - 問題是否符合評量對象？
  - 題意是否清楚？特別是，**學生是否能寫出命題者預期的答案？**
  - 如果原問題不佳，可以修改嗎？如果要修改，要怎麼修改、能怎麼修改？

在嚴謹的試題開發或高風險的測驗中，團隊修審是必要的程序，因為團隊修審可以發現個人命題的盲點，從不同的角度再次檢視一次題目。

## 第四節 常見的命題問題

對於不熟悉素養導向命題的人，在命題時常會遇到、出現一些問題。以下彙整了5個常見的命題問題，除了問題的說明，同時也提供這些問題可能的解決方法。

### 一、閱讀負荷量過大

文字過多、閱讀負荷量過大是命題者在研發素養導向試題最常見的問題（參見第1頁「雨水撲滿」第53、54頁「口罩」、「世大運」、「懸浮微粒」）。在研發素養導向試題時，命題者要掌握一個原則：情境是為了引發學生興趣、或引導

出問題或任務，它不是文學作品，也不是科普文章，所以不要在題幹中放入過多與評量無關的資訊，避免評量目標的失焦。如何降低閱讀負荷量？可參考第四章「補充說明3：這不是素養導向試題」的說明。

## 二、情境與問題無關

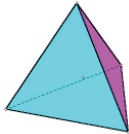
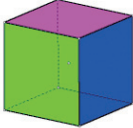
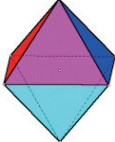
情境的鋪陳需要與後續的提問是相關的，如果無關，就不需要這些說明了（這也是一種簡易的素養導向試題檢查方式）。為什麼會發生這種問題？通常是因為命題者為了評量特定學習內容而造成的，例如：下面的「正多面體」試題，命題者以正多面體與柏拉圖立體作為情境題材，情境內容相當豐富，但後續的問題1~3卻只針對正六面體的性質進行提問，沒有善用情境中的材料。這些問題顯而易見的，都是為了評量學習內容中的「S-S-5：正方體和長方體」，與傳統的課習題相似。

### 正多面體

骰子是桌上遊戲常見的小道具，透過擲骰的數字可以來決定遊戲的先後順序或是決定的行動值。常見的骰子種類有正四面骰、正六面骰、正八面骰等等……為了遊戲的公平性，骰子呈現的形體以正多面體為主。

正多面體又稱為「柏拉圖立體」，每個面皆由全等的正多邊形所組成。構成正多面體有幾項條件：一、每個面必須是由「正多邊形」所組成；二、每個角度都必須相等；三、每一條邊都必須等長。

以下是正四面體、正六面體、正八面體的形體以及相關資訊。

	正四面體	正六面體	正八面體
形體外觀			
面數	4面	6面	8面
邊數	6條	12條	12條
頂點個數	4個	8個	6個

問題 01

小美想要製作一個正六面體的骰子，他想要先用木條做骨架，骰子一個邊需要長8公分，請問小美需要幾公分的木條？

問題 02

呈上題，小美要用色紙製作骰子的外觀，請問他需要用到多少平方公分的色紙？

問題 03

小美運用剩下的80公分木條製作一個邊長4公分的正四面骰以及邊長5公分的正八面骰，她能製作出來嗎？請寫出你的理由。

資料來源：素養導向試題研發人才培訓計畫學員作業。

如何避免情境與問題無關？1. 使用真實問題，也就是根據情境進行提問（參考第四章《從生活情境出發》命題），如此一來，情境與問題自然而然就不會脫勾。2. 跳脫課本、習作的命題框架，選用更符合學習內容的題材。因為傳統的課習題都是為了評量該單元的內容，多數的問題都是**為了評量特定學習內容**。因此，命題者需要跳離傳統試題的框架，才能避免問題與情境無關。很重要的一點是，數學不是只有計算，運用數學解決問題需要處理不同階段的問題，而且針對不同的情境，會需要不同的「形成」問題、不同的「運用」的問題、不同的「詮釋評估」的問題。這是不容易的，因為教師對課本內容太過於熟悉，很容易被課習題的試題綁住。因此平時需要多留意生活中與數學相關的題材，以及這些情境中會發生的問題。

### 三、學生作答與預期不相符

在研發試題的過程中，試題通常會歷經多次的討論與修改。在反覆的討論的過程中，會造成命題者對試題內容相當熟悉。由於太過熟悉，很容易忽略一些小細節，使得試題的用字或用詞不夠精確，導致學生作答與預期不相符。另一方面則是對學生的程度或理解能力不夠熟悉，以為使用簡要的說明或描述，學生就可以理解，這也會是導致學生作答與預期不相符的原因。以下列的「兌換儲物罐」

的問題2為例：

### 兌換儲物罐

快樂便利商店正在舉行「點數換購儲物罐」活動，換購辦法如下：

每消費金額滿50元可得1點  
 兌換方法：  
 方法一：6點+129元  
 方法二：8點+59元  
 方法三：10點免費送  
 ※加購金額也可獲得點數

防潮儲物罐



#### 問題 02

靜香想自行消費換得一個儲物罐，請問哪一種兌換方法所花費的金額最少？  
 寫下正確答案並把你的想法或做法寫下來。

兌換儲物罐問題2詢問學生「靜香想自行消費換得一個儲物罐，請問哪一種兌換方法所花費的金額最少？」

命題者預期的答案是「方法一」，因為：

$$\text{方法一：} 6 \times 50 + 129 = 429；$$

$$\text{方法二：} 8 \times 50 + 59 = 459；$$

$$\text{方法三：} 10 \times 50 = 500。$$

但在施測後發現，許多學生回答「方法三」，他們的理由是「方法三是免費送」。這就是命題者與學生對文字的理解不同所造成的。

如何避免學生作答與預期不相符？1. 確認自己的用字是否正確。2. 在完成試題研發後，命題者要進行試寫，而且試寫時要逐字逐句閱讀，甚至把自己當成學生在作答，或以前從未看過這道試題。3. 如果可以的話，進行小型的預試或班級預試。因為從預試結果可以直接知道學生對問題的理解、作答的方式是否符合命題者原本的想法。如果不同，便可以參照學生的作答進行調整或修改。

回到「兌換儲物罐」問題2，你覺得可以如何修改？

以下是一個參考答案。

### 問題 02

大雄目前沒有任何點數，他想利用消費集點換得1個儲物罐。  
請問哪一種兌換方法所花費的金額最少？請說明你的理由。

## 實作練習 6

以下是一道經過預試的題目，請參考問題下方的學生作答分析，修改問題的敘述。

### 多一元加一件

佳佳服飾店正在促銷，全店商品促銷方式如下圖：



### 問題 03

小駿已經決定要買一件原價為799元的外套。考量促銷，他想要在以下三個商品中再選擇一個來購買：

「原價999元的牛仔褲、原價799元的休閒褲、原價599元的運動褲」

請問搭配上列哪一條褲子來購買，所得到的優惠是最大？請說明你的理由。

問題說明：命題者希望學生比較哪一種組合的優惠折扣（% off）最多，預期的答案是「休閒褲」。然而，在學生的作答範例中，發現許多學生是藉由比較折扣的金額總量來說明何者最優惠，例如：

- 1,000元能買一件外套和牛仔褲（原價1,798），折了798元
  - 1,000元能買一件外套和休閒褲（原價1,598），折了798元
  - 1,000元能買一件外套和運動褲（原價1,398），折了598元
- 所以，**牛仔褲**和**休閒褲**優惠一樣多

或是計算總價最低的組合，例如：

- $999 + 1 = 1000$ ， $799 + 1 = 800$ ， $599 + 1 = 600$
- 所以，**運動褲**最優惠

從學生的作答中可以大致猜測到，有些學生可能有迷思，也有可能是問題敘述不夠精確，導致學生的作答與預期不相符。

請修改問題3，讓學生能理解原本命題者的方向。

以下是一個參考答案。

### 問題 03

小駿已在佳佳服飾店挑選一件799元的外套，考量促銷，他想要在以下三個商品中再選擇一件來購買：「999元的牛仔褲」、「799元的休閒褲」、「599元的運動褲」。不論他挑選哪一件褲子都會有優惠，優惠後的價等同於原價打了某個折數。請問他選購哪一件褲子，所獲得的折數是最優惠的？請說明你的理由。

## 四、只有計算題或程序性問題

在試題中加入合適的情境，是許多命題者在研發素養導向試題時最在意且唯一留意的地方。然而，在加入了情境後，卻忽略了問題的重要性，造成提問都還是傳統的問題。最常見的問題就是：都是計算題或程序性問題，例如：第1頁的「雨水撲滿」（第一版）、第3頁的「數值簡化」（第一版），以及以下方的「職棒選手」範例題組。

「職棒選手」題組主要有二部分，第一是計算打擊率，要分別計算4~8月中，每個月的打擊率。第二部分是將計算的結果畫成長條圖。它的問題是，為什麼要計算那麼多次的打擊率？因為計算很重要嗎？為什麼要繪製長條圖，因為它

是學習內容的其中一項？如果只是一要評量數學知識，其實並不一定需要情境，直接給定數據即可。

### 職棒選手（第一版）

下面是職棒選手程今風三到八月的打擊成績：

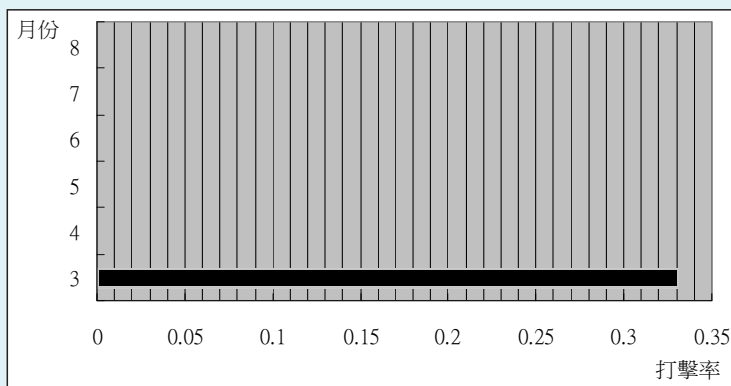
月份	3	4	5	6	7	8
打數	21	50	48	44	50	45
安打數	7	14	16	15	14	10
打擊率	0.33					

#### 問題 01

請算出他逐月的打擊率並填入上表。（若無法整除時，請算到小數第二位再四捨五入）

#### 問題 02

請將上面的資料畫成長條圖。



資料來源：素養導向試題研發人才培訓計畫學員作業。

要怎麼避免加了情境之後的試題只有計算問題或只有制式的程序性問題？大致上有幾個方式：1. 增加問題的真實性；2. 增加問題的目的性與需求性；3. 增加需要詮釋或評估的問題、4. 增加與情境相關的迷思題。上述這些問題，都與問題解決有關。因為想要解決這些問題，你會想知道如何處理、你會想知道為什麼、

你會想改變（更有效率、更精準……）或看到改變、或是想解決這些疑惑和迷思。因此，根據方向再進一步去思考問題，通常就可以聯想到更高層次的提問。

以下是「職棒選手」修改後的版本。與第一版相比，第二版的問題1，調整成只需要計算8月份的打擊率，評量學生是否讀懂題目中的打擊率資訊。問題2雖然也是計算題，但它包含了檢測計算打擊率時可能的迷思，如果學生有迷思，可能會先計算3~8月每月的打擊率總和，再取平均。問題3增加了一個真實的問題，學生需要思考如何處理、計算，它是一個需要利用數學進行說明的問題。

### 「職棒選手」（第二版）

打擊率是棒球運動中衡量打擊選手成績的重要指標，其計算方式為：

「 $\text{打擊率} = \text{選手擊出的安打數} \div \text{打數}$ 」

下表是職棒選手程今風本季開始至8月20日的打擊成績：

月份	3	4	5	6	7	8	總計
打數	21	50	48	44	50	35	248
安打數	4	17	10	17	18	10	76
打擊率	0.19	0.34	0.21	0.39	0.36		

#### 問題 01

請問程今風目前8月份（8月1日至8月20日）的打擊率是多少？（若無法整除時，請四捨五入到小數第二位）

#### 問題 02

一般而言，職棒選手的

- 打擊率在0.28以上，被稱為是一個「稱職」的打者。
- 打擊率在0.30以上，被稱為是一個「優秀」的打者。
- 打擊率在0.40以上，被稱為是一個「偉大」的打者。

截至目前的表現（本季開始至8月20日），程今風是屬於哪一種打者？請說明你的理由。

問題 03

截至8月20日止，聯盟打擊王的打擊率是0.310，且所屬球隊已完成本季所有比賽。在8月21日的最後一場比賽中，程今風選手的表現是「5打數4安打」。

請問程今風選手整個球季（3月至8月21日）的打擊率是多少？是否能成為聯盟新的打擊王？請說明你的理由。

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

## 五、題材或問題太相似

在進行素養導向試題研發時，大家最常想到的就是「購物」的情境，因為買東西就會有金錢的計算，有計算就覺得是數學。例如：在超商買咖啡有不同的折扣，「買三送一」和「第二件五折」，哪一個比較便宜？或是在百貨公司購物時，「滿千送百」和「消費滿1,000即享九折」，哪一個比較划算。因此許多研發成果都會相似，甚至相同。

然而，要怎麼避開怎麼命題都是和「購物」有關的問題？

第一個方式是命題者可以試著從別的角度進行發想、或是對選用情境和題材進行更深入的分析。以購物的優惠活動為例，購物時不是只有優惠活動與數學相關，還有其他活動或方案也都與數學有關。例如：利用優惠活動購買咖啡後，後續的退貨、退款的問題，裡面也有許多數學問題。下列是一道以「退款權益公告」為題材發展的試題：

### 超商咖啡

超商正在舉辦咖啡促銷活動，原價一杯50元的咖啡，一次預購20杯可享75折，可分次兌換，且每人限購一次。

#### 退款權益公告

退款時，已兌換的咖啡以原價扣除後，剩餘金額再行退還。

問題 02

哲銘預購了20杯咖啡且已兌換了10杯，他想要退還尚未兌換的咖啡。  
請問根據「退款權益公告」，超商要退還哲銘多少錢？請說明你的理由。

問題 03

哲銘已購買20杯咖啡。  
請問他兌換超過幾杯咖啡後，超商就不會再退費？請說明你的理由。

問題 04

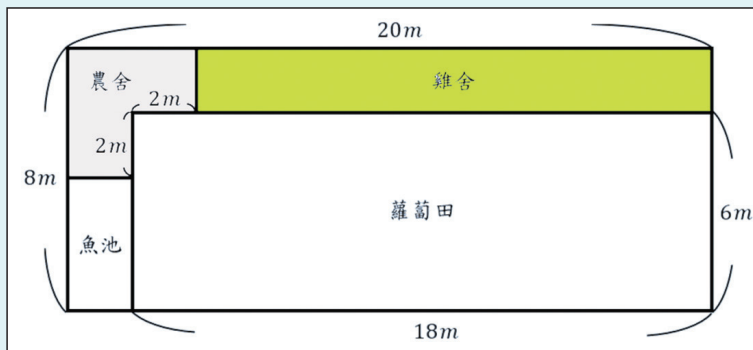
為什麼超商在退款時，不能以每杯50元的方式，退款剩餘杯數的總價錢給顧客？  
請說明你的理由。

資料來源：國家教育研究院（2021）。

第二個方式是連結生活中的議題或結合跨領域的題材進行研發。以下是一道計算複合圖形面積的問題，但此問題又進一步將法規結合在一起，詢問「農舍大小是否符合政府的規定」。結合後的新問題，即可以協助農場主人解決問題，又會有煥然一新的感覺。

### 農地規劃

徐先生有一塊長20公尺，寬8公尺的長方形農地。農地包含雞舍、魚池、蘿蔔田和農舍四個部分，如下圖：



問題 01

政府規定：「農舍面積不能超過農地面積的10分之一。」  
請問徐先生的農舍大小是否符合政府的規定？請說明你的理由。

資料來源：國家教育研究院（2021）。

## 實作練習 7

「骰子」是常見的一個遊戲道具，它可以發展什麼樣的試題？請先嘗試分析「骰子」的特徵、有關「骰子」的數學知識何時會用到「骰子」、以及誰會用「骰子」？

提示 1：對面點數和為7。

（完整的試題範例請參見臺灣PISA國家研究中心 [2012] 公告的數學試題「M145：骰子」）

提示 2：堆疊後不同視圖可以看見不同的點數。

（完整的試題範例請參見臺灣PISA國家研究中心 [2012] 公告的數學試題「M555：數字方塊」）

提示 3：正方體展開圖。（完整的試題範例請參見第97頁）

提示 4：機率遊戲。（完整的試題範例請參見第101頁）

還有其它與「骰子」有關，可以作為命題的題材嗎？

## 第五節 試題修改歷程

如果試題不符合試題檢核表、或不具備不同層次的試題特徵或好問題的特徵，下一步怎麼修改？常見的方式有二種：

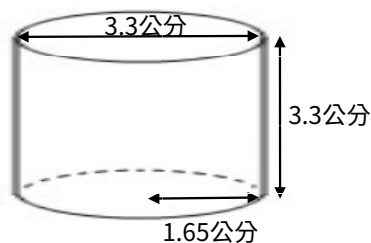
- ✓ 嘗試調整情境或重新選擇情境，達到評量相同內容的目的

- ✓ 如果情境合適且貼近學生生活，重新思考學生真實會遇到的問題，或根據一個特定想要解決的問題，往前思考可能需要的引導問題

這些過程可以參考別人的試題修改歷程學習，一方面可以作為自己命題的借鏡，另一方面則可以避免發生相同的問題。以下介紹三道試題修改的歷程，包含從發想、初稿、修改到最後定稿的內容，以及過程中修改項目的說明。

### 範例 27 表面積

柱體表面積是學習幾何的一個重要單元。在課習題中，經常給定一個柱體，然後要求學生計算柱體表面積，例如：請計算下列圓柱體的表面積。

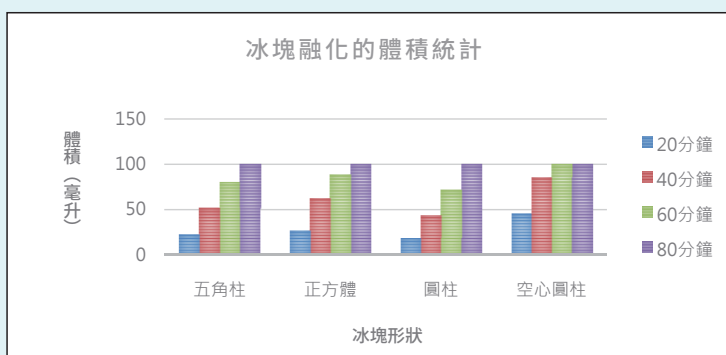


這樣的問題只是評量學生是否熟記數學內容或公式。本題組以此為學習內容出發，嘗試加入自然課冰塊融化的情境，並參照圖9的三個步驟進行修改。我們使用了下列三個步驟：

- 步驟 I 加入小學冰塊融化的教學情境，讓學生比較不同形體的表面積大小。
- 步驟 II 問題1請學生根據實驗數據，判斷哪一種冰塊融化速率較慢。
- 步驟 III 問題2透過計算與比較不同形體表面積，說明哪一種冰塊融化速率快。

### 冰塊融化（第一版）

冠辰做了冰塊融化速度的實驗研究，他將100毫升的水，倒入四種不同形狀的容器中，冰塊形狀分別為五角柱、正方體、圓柱、空心圓柱，分別放入在四個杯子中，並觀察它們融化的速度，統計資料如下：



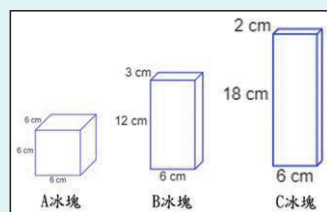
問題 01

由上圖可知，五角柱、正方體、圓柱、空心圓柱，哪一種的冰塊融化較慢？

- ① 五角柱    ② 正方體    ③ 圓柱    ④ 心圓柱

問題 02

冠辰發現冰塊融化的速率跟某個變因有關係，因此，他又製造了三種不同形狀的冰塊，如右圖。請問這三種不同形狀的冰塊，哪一種冰塊的融化速率比較快？請說明你的理由。



冰塊融化題組（第一版）試題分析與討論

第一版試題雖然導入了自然課冰塊融化實驗的情境，但是問題1主要是圖表報讀，問題2是不同立方體的表面積比較，這二題與實驗之間的關聯較小。因此在討論後，修改的方式主要是加強實驗結果與問題之間連結。

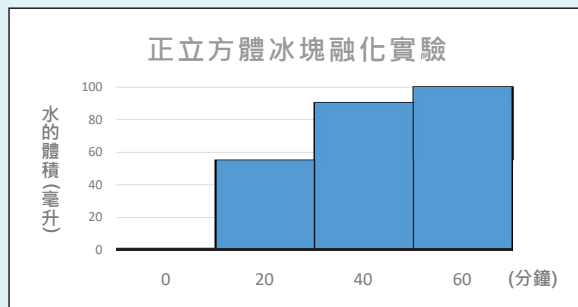
第二版試題在設計時，把表面積是影響冰塊融化主要的原因置於題幹中，作為貫串題組的一個重要資訊。接著，問題1評量學生是否理解「面積愈大，融化的速度愈快」，當轉換成圖形表徵時，能否判斷哪一張圖才是符合這句話的意思。問題2是計算題，評量學生能否運用表面積的公式，比較二種不同形狀冰塊的融化速度。問題3加入飲料店的情境，評量學生是否能應用表面積知識於日常生活中，進行推論與說明。增加不同層次的問題，主要是要讓學生在評量中能進行思考，而不是只會代公式與計算，此外，讓試題更加生活化，讓學生知道數學的實用性。

## 冰塊融化（第二版）

研究顯示：「**表面積**是影響冰塊融化的主要原因，冰塊的**表面積愈大**，融化的**速度愈快**」。

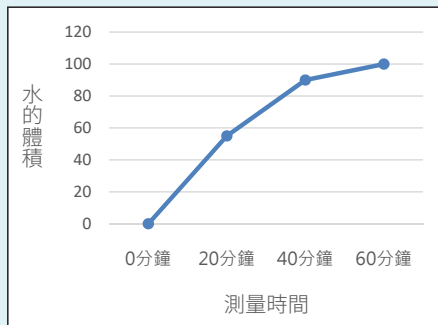
### 問題 01

冠辰用一個體積為100立方公分的正立方體形狀冰塊，進行冰塊融化速度的實驗，並觀察它們融化的速度。冠辰的實驗結果如下：

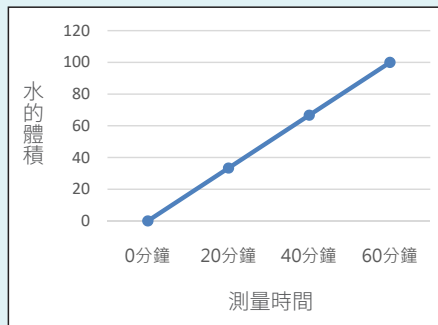


請問下列哪一張圖是冠辰最有可能得到的結果？

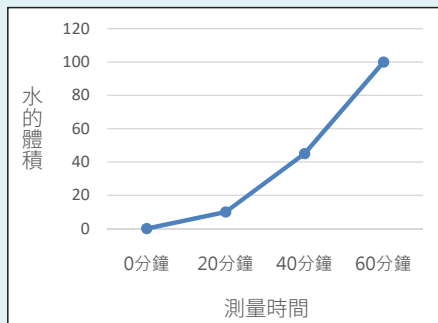
1



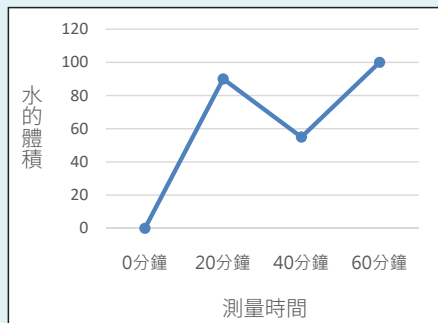
2



3

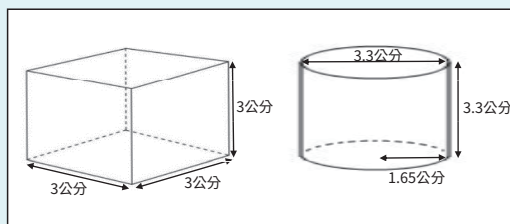


4



問題 02

冠辰另外選用了二個不同形狀的冰塊進行冰塊融化速度的實驗，其中有一個是體積為27立方公分的正方體，一個是高3.3公分，半徑1.65公分的圓柱體，它的體積大約也是27立方公分。



請問哪一個冰塊的融化速度比較快？你說明你的理由（圓周率以3計算）。

問題 03

為了讓飲料快速降溫、變冰，手搖飲料店有時候會使用**碎冰**取代正立方體的**冰塊**（例如：古早味冰紅茶）。請問飲料店的作法是否合理？請舉例並說明你的說法是正確的。

## 範例 28 排隊

### 情境選取 & 試題設計理念

「排隊」是很多人都曾有過的經驗，無論是到便利商店購物、動物園購票、搭火車及捷運等諸多場合，我們經常必須排隊。每當大排長龍時，我們總希望不要等太久，因此如何讓等候時間最短的效率問題，自然就成為相當重要的數學及社會問題。排隊理論是研究服務系統中排隊現象隨機規律的學科，使用到的數學知識相當複雜。由於本題組的評量對象是第三學習階段學生，我們將以簡單的模擬數據，讓學童察覺二種排隊方法的差異，並讓學童理解抽號碼牌的排隊方式，優於傳統自行選擇到不同窗口的排隊方式。

## 排隊（第一版）

雖然現今郵局的服務項目和1970年代兩相比較，沒什麼改變；但服務方式卻大不相同，例如：現今郵局排隊等候的方式，就和1970年代大不相同。

### 問題 01

在1970年代，郵局的服務窗口，是採用服務窗口各自多線「固定排隊」的服務方式。有一天張老師到郵局存款時，看見甲、乙、丙……等七人大約同時到服務窗口前，張老師問了每一個等待的人，想被服務的項目，結果如下圖：

窗口1	窗口2	窗口3	服務項目	服務作業時間
甲(活期存款)	乙(開戶)	丙(定期存款)	開戶	約20分鐘
丁(提款)	戊(活期存款)	己(活期存款)	除戶	約20分鐘
庚(活期存款)			定期存款	約15分鐘
			活期存款	約5分鐘
			提款	約10分鐘
			匯款	約10分鐘

請依據前面圖表資訊推測，張老師排在哪一個人後面，等待時間會最短？

- ① 丁    ② 戊    ③ 己    ④ 排在哪裡都一樣快

### 問題 02

現代郵局服務窗口的排隊方式「抽號碼排隊」。情況如下圖：某天有甲、乙、丙……等七人服務窗口前等候服務。

窗口1	窗口2	窗口3	服務項目	服務作業時間
甲(活期存款)	乙(開戶)	丙(定期存款)	開戶	約20分鐘
			除戶	約20分鐘
			定期存款	約15分鐘
			活期存款	約5分鐘
			提款	約10分鐘
			匯款	約10分鐘

<p><b>等候區</b></p> <p>丁(提款)</p> <p>戊(活期存款)</p> <p>己(活期存款)</p> <p>庚(活期存款)</p>
---

不久之後**窗口2**的服務人員說臨時想上廁所5分鐘，接下來依下一個號碼會輪到「已」，請推測「已」大約要等待多少時間？

- ① 5分鐘    ② 10分鐘    ③ 15分鐘    ④ 20分鐘

**問題 03**

請問「固定排隊」和「抽號碼排隊」，哪一種排隊方式比較好？為什麼？

**傳統排隊方式**

窗口1	窗口2	窗口3
甲(活期存款)	乙(開戶)	丙(定期存款)
丁(提款)	戊(活期存款)	已(活期存款)
庚(活期存款)		

**現代排隊方式**

窗口1	窗口2	窗口3
甲(活期存款)	乙(開戶)	丙(定期存款)

<p><b>等候區</b></p> <p>丁(提款)</p> <p>戊(活期存款)</p> <p>已(活期存款)</p> <p>庚(活期存款)</p>
---

**排隊試題第一版試題討論**

本題組以常見的「郵局排隊」為情境，試圖以簡單的範例讓國小學童理解不同排隊方法的差異。然而，本題組有下列幾項問題

1. 二種排隊方式並沒有說明如何進行，也沒有引導學生理解這二種排隊方法
2. 子題的資訊重覆出現，增加閱讀量
3. 問題無法逐步引導學童理解二種排隊方式等候時間的差異

因此，第二版針對這些問題嘗試進行修改。

第二版試題在題幹中說明「傳統」和「現代」二種方式，並將各子題都會用到的資訊彙整到題幹。問題1聚焦在傳統排隊方式，並在試題中加入排列組合的概念，讓學童了解傳統排隊會有不同的可能，想要很快輪到自己，需要靠運氣的。問題2引導學生理解現代排隊的輪流方式。問題3則是利用模擬狀況來比較二種排隊方式的平均等候時間。

## 排隊（第二版）

郵局的排隊方式分為「傳統」和「現代」二種。

**傳統：**自行選擇到不同的服務窗口或櫃台，排隊等候。

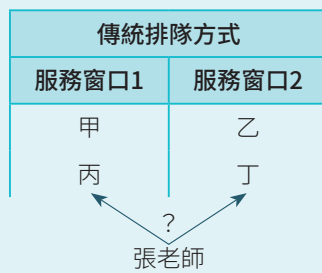
**現代：**抽取號碼牌，以先到先服務的方式，排隊等候。

張老師到一間只有二個服務窗口的小郵局辦理開戶。  
右表為郵局提供的服務，以及各項服務所需的時間。

服務項目	服務作業時間
開戶／除戶	約20分鐘
定期存款	約15分鐘
活期存款	約5分鐘
提款／匯款	約10分鐘

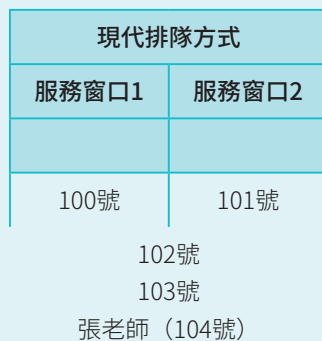
### 問題 01

如果郵局採用「傳統」的排隊的方式。  
張老師到郵局時，這二個服務窗口各有二個人，排在前方的人正要開始辦理。  
請問張老師最少要等候多久？  
最多要等多久？



### 問題 02

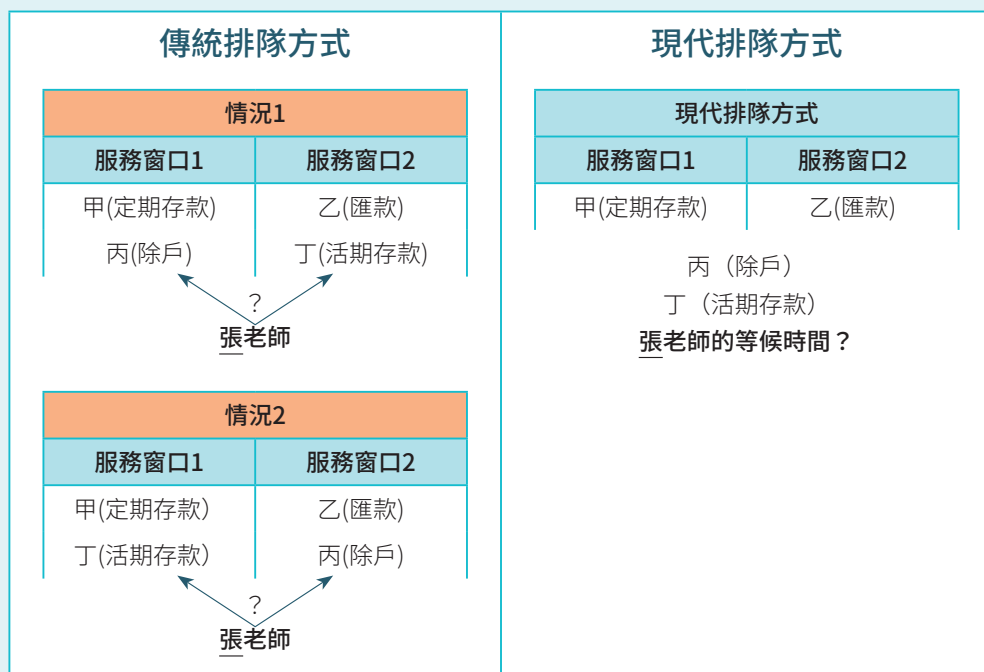
如果此郵局採用「現代」的排隊方式。  
張老師到郵局時，這二個服務窗口各有一個人正要開始辦理，另有二個人（102號及103號）正在排隊。  
請問在什麼情況下，輪到張老師時，他會到服務窗口1？在什麼情況下，輪到張老師時，他會到服務窗口2？  
（請利用郵局的服務項目說明）



### 問題 03

假設甲、乙二人正在服務窗口辦理「定期存款」、「匯款」。此時，丙、丁和張老師依序進到郵局，其中丙要辦理「除戶」、丁要辦理「活期存款」。

如果是郵局是採用**傳統**排隊方式，則丙、丁的排法可能會有二種情況（如下圖左）；如果郵局是採用**現代**排隊方式，只有一種排法（如下圖右）。



對張老師而言，二種可能的**傳統**排隊方式的等候時間平均為幾分鐘？**現代**排隊方式的等候時間為幾分鐘？

## 範例 29 電費帳單

### 情境選取 & 試題設計理念

日常生活中，我們經常會看到各式各樣的數據與資訊，而單據就是其中一種類型，例如：繳費單、收據、通知單……等。繳費單中最常以表格型態出現，這些一維或二維表格的資訊，對學童來說並不陌生，但往往沒有機會深入去探究其中隱藏的一些重要資訊或收費原則。為了鼓勵讓學生能多關心與接觸生活中的數學，本題組以電費帳單為試題情境，讓試題能與生活情境連結，藉此檢核學生的知識應用能力。

## 電費帳單（第一版）

近年氣候變遷強烈，高溫屢創紀錄，於是小明家在六月安裝了一台冷氣。

下圖為小明家今年7~8月（本期）電費帳單上的用電資訊，請仔細觀察後，回答下列問題。

比較項目	用電日數	度數	日平均度數	減少用電量
本期	62	883	14.24	0
去年同期	61	789	12.93	
去年下期	63	936	14.86	

### 問題 01

請問「本期」比（較）「去年同期」的日平均用電度數增加或減少了多少？

### 問題 02

日平均度數的計算方式為「日平均度數＝度數÷用電日數」。

請研判帳單上的日平均度數計算結果是採用哪一種方式？請說明你判斷的理由。

### 問題 03

若小明家生活用電習慣沒有改變的情況下，請預測下一期用電度數是多少？請說明你的理由。

## 電費帳單題組（第一版）試題分析與討論

本題組參照圖11的步驟進行命題，第一版的試題已有基本的架構在，因此在討論時，聚焦在文字修飾、問題脈絡與問題真實性的調整。討論後，大致會朝下列五項問題進行修改與調整：1. 題幹與問題中有多餘的資訊；2. 增加二維表格的報讀檢測；3. 減少試題的計算量（第一版問題2，需要使用除法計算至小數第三位）；4. 增加圖表，提供學生圖表詮釋的機會；5. 調整問題，讓問題更真實。

根據上述的討論，第二版問題1以多重是非題檢測學生是否理解電費帳單上的資訊。問題2以節電獎勵金的計算，評估學童的計算能力。問題3與第一版相同，但更換題幹數據，因為原帳單的數據無法判斷「日平均度數」採用的取概數算法。問題4改以圖呈現，提供去年3~10月以及今年3~8月的用電量數據，讓學生預測9~10月今年用電量。

## 電費帳單（第二版）

下圖為小明家今年7~8月（本期）電費帳單上的用電資訊。

比較項目	用電日數	度數	日平均度數
本期	62	687	11.08
去年同期	63	936	14.86

註：「日平均度數」代表同一期內每日的平均用電度數

### 問題 01

請判斷下列敘述是否正確？

敘述	正確／不正確
小明家7~8月用電1623度	<input type="checkbox"/> 正確 <input type="checkbox"/> 不正確
小明家7~8月用電25.94度	<input type="checkbox"/> 正確 <input type="checkbox"/> 不正確

### 問題 02

台電的節電獎勵金方式為：「當期用電每節省一度，可獲得0.6元獎勵」。請問小明家能否獲得節電獎勵金？如果可以，可以獲得多少元？

### 問題 03

小明和小玲正在討論電費帳單上「日平均度數」的計算規則。

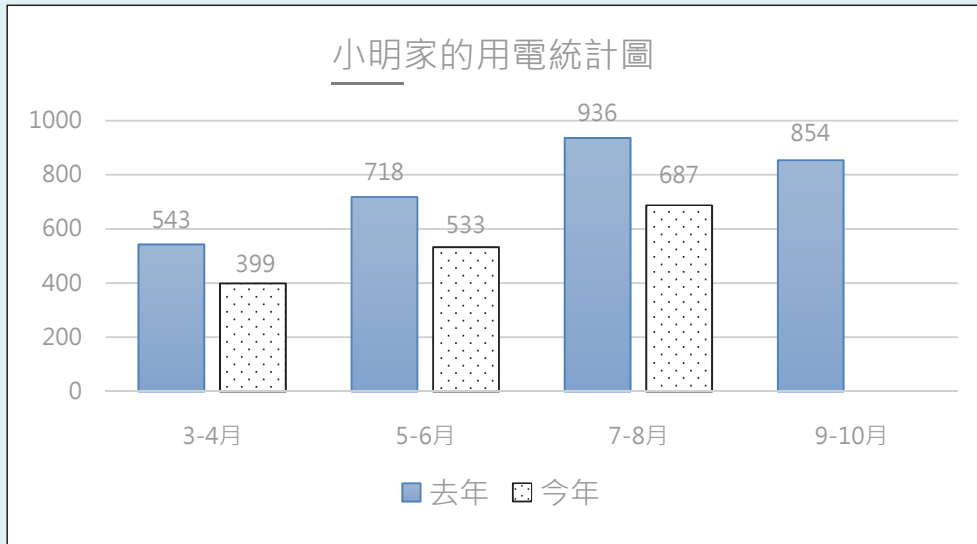
「日平均度數」代表同一期內每日的平均用電度數

本期日平均度數： $687 \div 62 = 11.0806\dots$   
去年同期日平均度數： $936 \div 63 = 14.8571\dots$

根據黑板上的計算結果，請問費帳單上的「日平均度數」是使用什麼取概數方式？請說明你的理由。

問題 04

下圖是小明家今年和去年的用電量統計圖。如果小明家的生活用電習慣沒有改變，請根據此圖推測小明家今年9~10月的用電量大約是多少？請寫下你的答案，並說明理由。



## 實作練習 8

請先閱讀「節約用水（第一版）」試題並分析它的問題，並將第一版試題的問題及可能修改的方式，紀錄在試題下方的表格中。

### 節約用水（第一版）

臺灣年降雨量約2,500公厘，為世界平均值的2.6倍，但因季節性雨量豐枯分配不均，復因地形之山高坡陡水資源不易蓄積，以及人口密度高居世界第二，致使每平方公尺每人分配之降雨量不及世界平均值的1/5，為使國人體認臺灣並非水資源充裕的國家，進而愛惜水資源，經濟部水利署近十年來致力於節水觀念提升，推動方式包括辦理社區及學校節約用水座談會與節水參訪活動、發行節約用水季刊及宣導手冊、節約用水資訊網發佈網路節水訊息以及錄製節水短片電視宣導等，以加強國人節水觀念。經多年來努力，國人的節水意識已達90%以上，顯示節水觀念已深植國人心中，但並不代表會付諸行動；有鑑於此，小力的老師特別在課堂中宣導節約用水的重要，小力聽完後也回家跟家人宣導此事。

#### 問題 01

小力因為最近在上對稱圖形的單元，上網查詢節約用水資訊時，看到這個省水標章，便開始想，這個標章是對稱圖形嗎？請問你認為是嗎？



#### 問題 02

剛好小力家的水龍頭壞掉了，小力爸媽聽完小力分享後，便決定上網查省水型的水龍頭跟一般非省水的差別，查到以下的資訊，請問小力一家三口若將水龍頭換成省水型的水龍頭，每人每天使用水龍頭時間為八分鐘，包括廚房及浴室洗手檯，請問他們三人一天可以省幾毫升的水？

類別	流量標準 (公升/分鐘)
省水型	9公升/分鐘
非省水型	12公升/分鐘

#### 問題 03

若以一年365天計算，他們三人一年下來可以節省幾公噸的水？

資料來源：素養導向試題研發人才培訓計畫學員作業。

在第一版的試題中，你發現了什麼問題？要如何修改？

問題	可能修改的方式

請再閱讀「節約用水（第二版）」試題並分析它的問題，並將第二版試題的問題及可能修改方式，記錄在試題下方的表格中。

### 節約用水（第二版）

由於近期新聞報導水庫缺水，因此小力的老師特別在課堂中宣導節約用水的重要，小力聽完後也回家跟家人宣導此事。

類別	流量標準 (公升/分鐘)
省水型	9公升/分鐘
非省水型	12公升/分鐘

#### 問題 01

剛好小力家的水龍頭壞掉了，小力爸媽聽完小麗分享後，便決定上網查省水型的水龍頭跟一般非省水的差別，查到以上的資訊，小力在想若將水龍頭換成省水型的水龍頭，他們一家三口依照每人每天包含浴室、廚房使用水龍頭時間平均為：媽媽因為要煮飯所以平均使用水龍頭時間為一日13分鐘，爸爸每天要澆花平均使用水龍頭時間為一日10分鐘，而小力自己則是一日八分鐘，請問他們三人一天可以省幾毫升的水？

#### 問題 02

若以一年365天計算，他們三人一年下來可以節省多少立方公尺的水？

#### 問題 03

小力希望能夠再將水費降低，小力提議可以在水箱內放置裝水的寶特瓶，小力看網路上說若放280毫升的小寶特瓶，每次沖水，用水量的三倍與一般馬桶用水量的二倍相同，若一般馬桶沖水一次要耗費15公升，小力很好奇，他今天總共沖了四次馬桶，若在水箱內放入寶特瓶，相同水量他可以沖幾次呢？他省了幾公升的水？

資料來源：素養導向試題研發人才培訓計畫學員作業。

在第二版的試題中，你發現了什麼問題？要如何修改？

問題	可能修改的方式

修改完後，請對照下方的「節約用水（第三版）」，比較你的修改方式和參考答案的差異。

### 省水馬桶（節約用水 第三版）

使用省水馬桶可以達到節約用水的效果。

一般市售的「傳統馬桶」每次沖水量約為12公升；

「普級省水馬桶」每次沖水量約為6公升；

「金級省水馬桶」每次沖水量約為4.8公升。



#### 問題 01

研究顯示，每人每天平均使用五次馬桶。

如果將家中的傳統馬桶改成普級省水馬桶，在一家四口的小家庭中，每天約可以省下多少水量？

#### 問題 02

為了節約馬桶的沖水量，最簡單的方式就是在馬桶的水箱裡放入裝滿水的寶特瓶。小力想要讓家中普級省水馬桶的沖水量達到金級省水馬桶的標準，請問他至少要在水箱裡放入幾個裝滿水的500毫升寶特瓶？請說明你的理由。

（註：1公升=1,000毫升）

資料來源：國家教育研究院（2021）。

請彙整並分析第一、第二、第三版的差異。

差異

## 實作練習 9

請先閱讀「轉轉稀有的扭蛋角色（第一版）」試題並分析它的問題，並將第一版試題的問題及可能修改的方式，紀錄在試題下方的表格中。

### 轉轉稀有的扭蛋角色（第一版）

「貓貓大戰爭」遊戲推出「轉轉稀有的扭蛋角色」活動，以下是哥哥和弟弟看到的廣告：

各稀有度的出現機率	
超激稀有	5%
激稀有	25%
稀有	70%

#### 問題 01

看到廣告後，弟弟興奮地問哥哥，什麼是各稀有度出現的機率？哥哥說：反正就是「超激稀有」角色最難得到，「稀有」角色最容易得到。想一想哥哥為什麼這麼說？請舉例來說明。

#### 問題 02

這次活動共推出了40隻扭蛋角色，哥哥最想得到「超激稀有」角色，他想知道有幾隻「超激稀有」角色在這次的活動中，請幫忙哥哥想一想，寫下你的想法。

#### 問題 03

四月份即將推出特別活動，提高了「超激稀有」角色出現機率成二倍，另外「激稀有」角色出現率不變。請想一想那「稀有」角色出現機率變成多少呢？寫下你的做法，也請幫忙完成以下廣告。

~兒童節~ ◎特別活動◎	超激稀有	(            )
	激稀有	25%
	稀有	(            )

資料來源：素養導向試題研發人才培訓計畫學員作業。

在第一版的試題中，你發現了什麼問題？要如何修改？

問題	可能修改的方式

請再閱讀「(第二版) 限量扭蛋獎勵」試題並分析它的問題，並將第二版試題的問題及可能修改方式，紀錄在試題下方的表格中。

### (第二版) 限量扭蛋獎勵

張老師買了一台扭蛋機放在教室，裡頭總共有50顆公仔扭蛋。其中有五顆的角落生物；10顆的神奇寶貝，剩下的扭蛋都是小小兵。

#### 問題 01

大家討論著彼此扭到的公仔，發現其中有五顆的角落生物；10顆的神奇寶貝，剩下的扭蛋都是小小兵公仔，請問小小兵公仔佔全部扭蛋的比率是多少？

#### 問題 02

學生們告訴張老師希望下學期能多一點扭蛋，於是老師為了鼓勵學生，加了10顆扭蛋，但是維持各種扭蛋佔總顆數的比率不變，請問各種扭蛋的顆數各是多了幾顆呢？

資料來源：素養導向試題研發人才培訓計畫學員作業。

在第二版的試題中，你發現了什麼問題？要如何修改？

問題	可能修改的方式

修改完後，請對照下方的「(第三版)元宵猜燈謎」，比較你的修改方式和參考答案的差異。

### (第三版) 元宵猜燈謎

幸福國小在元宵節舉辦猜燈謎活動，猜對者可參加抽獎，獎品有神奇寶貝、角落生物及小小兵，其中神奇寶貝有五個、角落生物有10個、小小兵有35個。

#### 問題 01

請問小小兵佔全部獎品的比率是多少？

#### 問題 02

小書是第一個猜對燈謎獲得抽獎的學生，請問小書抽到神奇寶貝的可能性為何？

- ① 完全不可能      ② 不太可能      ③ 大約50%的可能      ④ 非常有可能

#### 問題 03

由於學生參與活動相當熱烈，學校決定額外加碼20個燈謎及獎品。為了維持獎品的獨特性，每一種獎品的比率維持不變。

請問額外加碼的獎品中有幾個是角落生物？請說明你的理由。

資料來源：國家教育研究院（2021）。

請彙整並分析第一、第二、第三版的差異。

差異

## 第陸章 評分規準

評分規準 (rubrics) 是一種用來評量學生表現的工具，它清楚的列出如何評判學生作答表現的具體描述。評分規準一般分成**分析型評分** (analytic rubrics) 和**整體型評分** (holistic rubrics)，其中分析型評分是將學生作答分為幾個部分，逐一根據各部分標準進行評分；整體型評分是將學生作答視為一個整體，對整體表現進行評分。在實際應用上，寫作測驗經常使用整體型評分；數學建構反應題比較適用分析型評分，因為它可以提供更精細的回饋。

評量學生思考、表達能力是素養導向試題主要的項目之一，因此素養導向試題多數屬於建構反應題，也就是學生自己要能依據題目資訊提出自己的觀點、支持的理由和論證，或是建構出自己的答案。因此評分規準在數學素養導向評量中是相當重要的。由於電腦無法自動評閱這些建構反應題的答案，需要由教師進行人工閱卷。閱卷工作通常是由多位專家組成，因此在閱卷時，所有人都需要一份評分規準，作為閱卷評分的標準。如果評分規準制定的完整，評分結果會愈公平，評量後的回饋也會更精確、更有效。

以下說明如何建立評分規準，並以範例4「數值簡化」為例，輔以說明。

### 第一節 建立評分規準

建立評分規準大致可分為三個步驟：1. 釐清評量目標；2. 確認表現水準數量；3. 撰寫表現描述。各步驟分述如下：

一、釐清評量目標：在擬定評分規準前，釐清每道問題的評量目標。

- ✓ 如果試題不是自己研發的，或是對評量目標不是很清楚時，可以透過題目試寫，釐清評量目標。例如：範例4「數值簡化」問題1的評量目標是比較二種取概數的方式；問題2是在具體生活情境中應用小數取概數估算；問題3是察覺生活問題與數學的關聯，並能嘗試與擬訂解決問題的計畫，在

解決問題之後，能轉化數學解答於日常生活的應用。

二、確認表現水準數量：根據評量目標擬定表現水準數量。

- ✓基本上，建構反應題的表現水準分成「滿分、部分分數、零分」或「滿分、零分」二種，其中「滿分」通常是代表學生能理解問題或任務，並能運用數學知識和能力呈現出正確的想法、理由或解決問題的程序。要特別注意的是，「滿分」會隨著評量目標不同而有異，例如：有些問題重視學生的計算能力或程序執行能力，評分時會著重計算的正確性；有些問題重視學生的說明或解釋，評分時會著重理由是否充份；有些問題重視學生的推理與分析，評分時則會著重步驟間的合理性。「部分分數」則是代表學生僅呈現部分的能力。「零分」代表學生無法理解問題，或無法完成題目的要求。
- ✓表現水準一般會以數字表示，例如：「2、1、0」或「1、0」。
- ✓少數比較複雜的試題或評量的概念比較多的時候，表現水準會超過3個，例如：「3、2、1、0」或「4、3、2、1、0」。但是，當表現水準數量是3個或3個以上時，可能需要評估一下題目是否太難或太複雜、是否需要簡化。因為如果題目太難，學生不易答對；如果題目太複雜，在解題過程中容易出錯，無法獲最終答案或影響學生作答信心。有時候則是設定的太過詳細，導致表現水準數量過多。例如：每個步驟都給分。表現水準數量是否擬定過多，也可以參考後續的試題分析結果（Wu et al, 2016），如果有某一個水準沒人或人數特別少，可以參考進行合併。
- ✓部分的素養導向試題會有多元解，此時可以將單碼的表現水準改成雙碼表示，其中第一碼用來表示表現水準，第二碼用來表示不同的解法或不同的錯誤類型，例如：範例4「數值簡化」問題1的滿分有2種，分別是「代碼21」、「代碼22」表示，代表學生有二種回答方式，這二種都可以獲得滿分；範例5「雨水撲滿」問題2則有「代碼21」、「代碼22」、「代碼23」三種。

三、撰寫表現描述：確認表現水準數量後，撰寫每一個表現水準的具體說明與描述。

- ✓表現描述根據評量目標來撰寫，說明學生要達到這個水準應該展現什麼能力。例如：範例4「數值簡化」問題1是比較二種小數取概數的方式，何者

會有利於消費者。學生要能說明二種小數取概數的差異，也就是二種方法對不同數字的「捨去」和「進位」方式不同，使得「五捨六入」的結果會有利於消費者。因此，只要有提及此重點，並回答「五捨六入」即可獲得滿分。故代碼21的表現描述為「回答『五捨六入』，並能合理說明理由或舉出適當之例子做說明」。合理說明包含許多類型，第一種是列舉適當的例子進行說明，例如：

- 五捨六入較有利於消費者。因若小數點後一位為5時，依五捨六入可以原則，則可去之。反之，四捨五入則需進位。
  - 五捨六入較有利於消費者。因為若結帳金額為40.5元，則依五捨六入原則只需付40元；反之，依四捨五入則需付41元。
  - 五捨六入，理由：四捨五入捨去，進一位；五捨六入捨去，進一位。
- ✓ 作答問題時，不一定要用計算或證明，有時可以用日常用語表達或說明，只要能合理的說明清楚或解決問題，都可以獲得分數。例如：範例4「數值簡化」問題3，滿分有二種分別是代碼21與代碼22，其中

代碼21：寫出餅乾正確之配對方式，並計算出正確配對的價錢（198元），例如

$$88 + 77 \times 0.6 = 88 + 46.2 = 134.2 \approx 134 ;$$

$$44 + 33 \times 0.6 = 44 + 19.8 = 63.8 \approx 64 ,$$

$$134 + 64 = 198 \text{元}。$$

代碼22：寫出餅乾正確之配對方式，並能合理說明原因。

- ✓ 「洋芋片配泡芙」及「蛋捲配捲心酥」分別結帳花費會最少，因最高價格之二件餅乾優先配對，可得較多優惠。

評分規準要寫得完整並不容易，因為有些試題本身就具有多元解法，命題者可能無法一一列舉。特別是素養導向試題的作答，學生經常會有不同創意的答案，這些都無法事先發現。因此，如果試題無法進行預試，命題者只能儘量思考可能得解題方式；如果可以進行預試，在預試後、閱卷前，需要參照學生作答，重新確認評分規準各水準的描述，補上真實的學生作答範例，完備評分規準。因為完整的評分規準，可以讓閱卷者更容易理解，不但能提高閱卷速度，也會增加評分結果的公平性。

以下為「數值簡化」與「雨水撲滿」各子題完整的評分規準。

## 範例 30 「數值簡化」暨評分規準

### 數值簡化

某些商家的收費方式是採用五捨六入的方式，也就是結帳金額的小數點後第一位，若小於或等於5，則捨去；反之，若大於或等於6，則進位。例如：如果結帳金額是40.5元，只需付40元；若結帳金額是40.6元，則需付41元。

#### 問題 01

請問四捨五入和五捨六入，何種收費方式比較有利於消費者？請說明你的理由。

#### 問題1計分

##### 滿分

代碼21：回答「五捨六入」，並能合理說明理由或舉出適當之例子做說明。

- 五捨六入較有利於消費者。因若小數點後一位為5時，依五捨六入可以原則，則可去之。反之，四捨五入則需進位。
- 五捨六入較有利於消費者。因為若結帳金額為40.5元，則依五捨六入原則只需付40元；反之，依四捨五入則需付41元。
- 五捨六入，理由：四捨五入捨去，進一位；五捨六入捨去，進一位。

代碼22：回答「五捨六入」，並用日常用語表達說明。

- 五捨六入，可以捨去更多的數字。

##### 部分分數

代碼11：回答「五捨六入」，但理由或舉出適當之例子不恰當或不充分

- 五捨六入法，因為消費者的物品如果剛好是115元，他就只要給100元，如果是四捨五入，他就要給120元。
- 五捨六入，因為可以讓價錢變便宜。
- 五捨六入，這樣消費者可以不用煩惱那0.1的差。

##### 零分

代碼00：其他答案。

- 四捨五入，有些消費比較喜歡較便宜的商品。

代碼99：沒有作答。

問題 02

建榮和同學到某家使用五捨六入的超商買飲料。

超商正在週年慶，飲料的優惠方式是：

「同系列的商品第2件5折」

建榮他們購買了同系列產品奶茶和紅茶各一瓶，其中奶茶一瓶是15元，紅茶一瓶也是15元。請問他們一共要付多少元？

問題2計分

滿分

代碼1：22元。

- $15 + 15 \times 0.5 = 15 + 7.5 = 22.5$ ，依五捨六入則需22元。

零分

代碼0：其他答案。

代碼9：沒有作答。

問題 03

畢業旅行即將到來，秉宏和陳靜到某家使用五捨六入的超商買零食。超商售有5種餅乾，價錢分別如下：

洋芋片	蛋捲	捲心酥	泡芙	點心酥
88元	33元	44元	77元	55元

超商正在週年慶，餅乾的優惠方式是：

「第2件6折（以價低者折扣）」

秉宏選了一包洋芋片和一包蛋捲；陳靜選了一包捲心酥和一包泡芙。請問他們在結帳時，如何重新配對餅乾進行結帳，可以更省錢呢？請說明你的理由。

問題3計分

滿分

代碼21：寫出餅乾正確之配對方式，並計算出正確配對的價錢（198元）。

- $88 + 77 \times 0.6 = 88 + 46.2 = 134.2 \div 134$ ；  
 $44 + 33 \times 0.6 = 44 + 19.8 = 63.8 \div 64$ ，  
 $134 + 64 = 198$ 元。

代碼22：寫出餅乾正確之配對方式，並能合理說明原因。

- 「洋芋片配泡芙」及「蛋捲配捲心酥」分別結帳花費會最少，因最高價格之二件餅乾優先配對，可得較多優惠。
- 蛋捲和捲心酥、洋芋片和泡芙，  
 $\text{洋芋片} = 88 \times 60\% = 48$ ；  
 $\text{蛋捲} = 33 \times 60\% \doteq 20$ （價格最低）；  
 $\text{捲心酥} = 44 \times 60\% \doteq 26$ （第2低）；  
 $\text{泡芙} = 77 \times 60\% \doteq 46$ 。

### 部分分數

代碼11：寫出正確配對（包括只說一組）或排序，但理由不充分或計算有誤。

- 蛋捲、捲心酥、泡芙、洋芋片，因為題目有寫（以價低者折扣）。

### 零分

代碼00：其他答案。

代碼99：沒有作答。

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

## 範例 31 「雨水撲滿」暨評分規準

### 雨水撲滿

為了有效利用水資源，我們可以在學校製作雨水撲滿，收集雨水再加以利用。

雨水撲滿的製作方式與概念如下：



下雨時，雨水會沿著屋簷流入溝渠，最後接到雨水撲滿裡。

問題 01

快樂國小在長為10公尺、寬為6公尺房屋屋簷旁，裝設了集水溝渠，收集雨水。

依據中央氣象局資料顯示，今天上午學校所在地區降雨量為25毫米。

請問今天上午學校的雨水撲滿可收集多少公升的雨水？請列出你的計算過程。

（註：1公尺=100公分，1公分=10毫米，1公升=1000立方公分）

降雨量小百科

降雨量本質上是水的體積，但生活中常以「降雨量總體積」除以「雨水落下面積」所得到的「高度」來形容降雨量的多寡。

問題1計分

滿分

代碼2：能正確列式出容積（長×寬×高）且單位換算正確。

- 10公尺=1,000公分；6公尺=600公分；25毫米=2.5公分；  
∴ $1,000 \times 600 \times 2.5 = 1,500,000$ 立方公分=1,500公升。

部分分數

代碼1：正確列出容積（長×寬×高），但單位換算有誤或過程中有計算錯誤。

- 10 m=10 m； $10 \times 6 = 60$ ； $60 \times 25 = 1,500$ ；  
 $1,500 \text{ m}^3 = 150,000 \text{ cm}^3$ ； $150,000 \text{ cm}^3 = 150 \text{ l}$ 。
- 25 mm=2.5 cm=0.025 m；10 m=1,000 cm=10 m；  
 $6 \times 10 \times 0.025 = 1.5$ ； $1.5 \text{ m}^3 = 15,000,000 \text{ cm}^3 = 15,000 \text{ l}$ 。
- 一平方公分=一毫升；10 m=1,000 cm； $1,000 \times 600 = 600,000 \text{ ml}$ ，  
25毫米=2.5 cm； $60,000 \times 2.5 = 1,230,000$ ； $1,230,000 \text{ ml} = 1,230 \text{ l}$ 。

零分

代碼0：其他答案。

代碼9：沒有作答。

問題 02

學校利用收集到的雨水，作為廁所馬桶沖水用。

根據統計，學校平均每人每天在校上廁所三次，每次沖水量約為6公升。

一桶體積為5立方公尺的雨水撲滿，收集滿一桶後是否足夠全校250位師生一天的廁所沖水量？請說明你的理由。（註：1立方公尺=1,000公升）

### 問題2計分

#### 滿分

代碼21：回答「足夠」，且能計算或說明出師生一天的廁所沖水量，並與雨水撲滿之體積做比較。

- 足夠。5立方公尺=5,000公升，  
故師生一天的廁所沖水量= $250 \times 3 \times 6 = 4,500$ 公升 < 5,000公升。
- 足夠。師生一天的廁所沖水量= $250 \times 3 \times 6 = 4,500$ 公升  
= $4.5$ 立方公尺 < 5立方公尺。
- 是，250位師生總共4,500公升。

代碼22：回答「足夠」，且能計算或說明出雨水撲滿可使用之人數，並再與全校師生人數做比較。

- 足夠。5立方公尺=5,000公升，故雨水撲滿可供 $5,000 \div (6 \times 3) \approx 277$ 人使用，且 $277 > 250$ ，因此足夠全校師生一天廁所的沖水量。
- 是。 $5,000 \div 6 = 833 \cdots 2$ ； $833 \div 3 = 277 \cdots 2$ 。

代碼23：回答「足夠」，且比較每人每天需要的用水量與每天每人可分配到的用水量。

- 足夠。 $5,000 \div 250 > 6 \times 3$ ，即 $20 > 18$ 。

#### 部分分數

代碼11：策略同「代碼21」，但後續計算或比較有誤。

- 否。 $250 \times 3 = 750$ ； $750 \times 6 = 4,500$ ，5立方公尺=5,000公升， $5,000 > 4,500$ 。

#### 零分

代碼00：其他答案。

- 足夠。比較少。（理由不充分）

代碼99：沒有作答。

資料來源：國家教育研究院（2020b）。

## 實作練習 10

練習 1：請草擬「迪士尼樂園的門票價格」問題3的評分規準。

### 迪士尼樂園的門票價格

東京迪士尼樂園是適合全家大小一同遊玩的景點。

迪士尼樂園的購票方式有二種：**現場購買**、**網站訂購**。

- 現場購買要使用日幣（¥），網站訂購使用臺幣（NTD）。

目前的幣值兌換方式是： $\text{日幣金額} \times 0.28 = \text{臺幣金額}$ 。

- 購買學生票或兒童票者，入園時需出示證件，否則只能購買成人票入園。

二種購票方式的價格如下表：

現場購買				網站訂購			
種類		年齡	票價	種類		年齡	票價
成人票		18歲~64歲	¥ 7,500	成人票		18歲~64歲	NTD 2,091
優惠票	學生票	12歲~17歲	¥ 6,500	優惠票	學生票	12歲~17歲	NTD 1,812
	兒童票	4歲~11歲	¥ 4,900		兒童票	4歲~11歲	NTD 1,366

#### 問題 03

翁先生打算和太太帶著二個15歲的小孩前往迪士尼樂園。

目前遊樂園提供一項優惠活動，優惠方式是：**網站購票可享「滿8,000打九折」**。

翁先生想利用此優惠方式購票，請問他要怎麼買會最便宜？請說明你的理由。

資料來源：國家教育研究院（2021）。

練習 2：請根據下方的學生作答範例修改你的評分規準，並挑選一些學生作答作為不同表現水準的範例

學生作答範例

問題 8.

1. 3張成人票, 1張學生票
2. 若2張成人票(4182元), 2張學生票(3624元), 則  $4182 + 3624 < 8000$  所以不行

問題 8.

因為加兩項跟兩項不能滿八千

$$1812+1812+2091+2091 \quad 1812+2091+2091+2091 \quad 8085 \times 0.9 = 7285.5$$

$$= 7806 = 8085$$

A: 1張學生票 3張成人票

問題 8. ① 分成大人 ② 省比較多錢  
人和學生買

問題 8.

買四張成人票:  $2091 \times 4 = 8364$   
 $8364 \times 0.9 = 7527.6$  元

< 買兩張成人, 兩張學生 =  
 $1812 \times 2 = 3624$   
 $2091 \times 2 = 4182$   
 $4182 + 3624 = 7806$

A: 買四張成人票

問題 8.

$$\begin{array}{r} 2091 \\ \times 4 \\ \hline 8364 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4182 \\ \times 2 \\ \hline 8364 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2091 \\ \times 2 \\ \hline 4182 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1812 \\ \times 2 \\ \hline 3624 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1812 \\ \times 2 \\ \hline 3624 \end{array}$$

答: 買四張成人票

問題 8.  
 $2091 \times 2 = 4182$   
 $1812 \times 2 = 3624$   
 $4182 + 3624 = 7806 \rightarrow$  不到 8000  
 $2091 \times 3 = 6273$   
 $6273 + 1812 = 8085 \rightarrow$  到 8000  
 A: 3張成人票, 1張學生票

問題 8.  
 $2091 \times 2 = 4182$   
 $1812 \times 2 = 3624$   
 $4182 + 3624 = 7806$   
 $2091 \times 4 = 8364$   
 $8364 \times 90\% = 8364 \times 0.9 = 7527.6$   
 $7806 > 7527.6$   
 A: 全部買成人票較划算

問題 8.  

$$\begin{array}{r} 2091 \\ \times 4 \\ \hline 8364 \end{array}$$
  
 因為都買成人才能到 1 千元  
 A: 都買成人

問題 8.  
 全都買成人票; 因為比較少  
 錢

問題 8.  

$$\begin{array}{r} 2091 \\ + 1812 \\ \hline 3903 \\ \times 2 \\ \hline 7806 \end{array}$$
  
 等 15 歲的小孩 18 歲  
 因為還是 794 元

問題 8.  
 $2091 \times 4 = 8364$   
 A 全買成人票

問題 8.

$$2091 \times 3 + 1812 \times 1$$

問題 8.0 三張成人票 - 一張學生票 @ 7806 > 7272.5

$$\begin{array}{l} 2091 \times 2 + 1812 \times 2 \\ = 4182 + 3624 \\ = 7806 \end{array} \quad \begin{array}{l} (2091 \times 3 + 1812 \times 0.9) \\ = 6273 + 1812 \times 0.9 \\ = 8085 \times 0.9 \\ = 7272.5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 808.5 \\ \times \\ \hline 7272.5 \end{array}$$

問題 8.

買 3 張成人票, 1 張學生票。

(1) 買 2 大 2 小 =  $2091 \times 2 + 1812 \times 2 = 7806$  (未滿 8000)

(2) 買 4 大 =  $2091 \times 4 = 8364$  (可打九折)

(3) 買 3 大 1 小 =  $2091 \times 3 + 1812 = 8081$  (可打九折)

$8364 > 8081$  ∴ 買 3 大 1 小 較划算

問題 8.

他可以買三張成人票, 一張學生票

$$\begin{array}{l} 2091 \times 3 + 1812 \\ = 6273 + 1812 \\ = 8085 \end{array}$$

問題 8.  $2091 \times 4 = 8364$

問題 8. 一個小孩帶證件, 另一個不帶, 這樣票價會超過 8000, 是 8090, 再打九折是 NTD 7281, 這是最便宜的買法

問題 8.

$$2091 \times 4 = 8364$$

$$7806 > 7527.$$

$$8364 \times 0.9 = 7527.6$$

$$1812 \times 2 = 3624$$

$$4182 + 3624 = 7806$$

$$2091 \times 2 = 4182$$

A: 買四張成人票, 因為滿 8000 才能

問題 8.

他可以故意買三張大人票, 然後再買一張學生票。

$$2091 \times 3 = 6273$$

$$6273 + 1812 = 8085$$

問題 8.

因為在帶一個就可以打抵了  
多花的錢也最少

$$1812 \times 2 = 3624$$

$$4182 + 3624 = 7806$$

$$2091 \times 2 = 4182$$

$$8000 > 7806$$

A: 再帶一個 4~11 歲的兒童

以下是一個參考答案。

### 滿分

代碼 21：比較三種（二張成人票及二張學生票、三張成人票及一張學生票、四張成人票）不同的購票方式後，並做出正確的判斷。

- 購買「三張成人票及一張學生票」最划算。

二張成人票及二張學生票：

$$(2091 + 1812) \times 2 = 3093 \times 2 = 7806 < 8000 ;$$

三張成人票及一張學生票：

$$2091 \times 3 + 1812 = 6273 + 1812 = 8085 > 8000、$$

$$8085 \times 0.9 = 7276.5 \div 7277 ;$$

四張成人票： $2091 \times 4 = 8364 > 8000$ 、 $8364 \times 0.9 = 7527.6 \div 7528$ ，  
因  $7277 < 7528 < 7806$ ，所以購買「三張成人票及一張學生票」最划算。

代碼22：比較二種關鍵的購票方式（二張成人票及二張學生票、三張成人票及一張學生票）後，並做出正確的判斷。

- $1812 \times 2 = 3624$ ， $2091 \times 2 = 4182$ ， $3624 + 4182 = 7806$ ；  
 $2091 \times 3 = 6273$ ， $6273 + 1812 = 8085$ ， $8085 \times \frac{9}{10} = 7276.5$ ，  
 $7806 > 7276.5$ 。可讓一位小孩網購成人票。
- $2100 \times 3 = 6300$ ， $6300 + 1820 = 8120$ ， $8120 \times 0.9 = 7308$ ；  
 $2100 \times 2 = 4200$ ， $1820 \times 2 = 3640$ ， $4200 + 3640 = 7840$ ，  
 $7308 < 7840$ 。答：三張成人票，一張學生票。  
 （使用估算方式計算，得到答案）

### 部分分數

代碼11：策略同代碼21或代碼22（需包含三張成人票及一張學生票的組合），但有計算錯誤。

- 三張成人票一張學生票。 $2091 \times 2 + 1812 \times 2 = 7806$ ；  
 $(2091 \times 3 + 1812) \times 0.9 = (6273 + 1812) \times 0.9 = 8085 \times 0.9 = 7277.5$ ，  
 $7806 > 7277.5$ 。（過程正確，但有計算錯）

代碼12：策略同代碼21，但僅比較「四張成人票」及「二張成人票、二張學生票」，缺少關鍵「三張成人票及一張學生票」的購票組合。

- 買四張成人票： $2091 \times 4 = 8364$ ， $8364 \times 0.9 = 7527.6$ ；  
 買二張成人票、二張學生票： $1812 \times 2 = 3624$ ， $2091 \times 2 = 4182$ ，  
 $4182 + 3624 = 7806$ ，  
 $7527.6 < 7806$ 。答：買四張成人票。

代碼13：僅計算「三張成人票及一張學生票」，但未進行比較。

- 買三張成人票再加上一張學生票。 $2091 \times 3 = 6273$ ，  
 $6273 + 1812 = 8085$ 。（僅計算三張成人票及一張學生票的原價）

### 零分

代碼00：其他答案。

- 全部買成人票，因為錢比較少。
- 買二張成人票、二張學生票。

代碼99：沒有作答。

資料來源：國家教育研究院（2021）。

## 第二節 使用評分規準的好處

使用評分規準可以提供教師教學回饋、進行有效的教學與評量整合，進而協助學生學習（Stevens & Levi, 2005；Brookhart, 2013）。例如：

✓ 了解學生學習成效

知道有多少人使用方法 1（獲得代碼21）解題、多少人使用方法2（獲得代碼22）解題。哪一種方法是這次評量前的教學重點？有多少比例的人有確實學習到並應用在解題？有多少人是用另一種方法？

✓ 釐清學生學習問題

知道學生學習的問題在哪裡有多少人只拿到部分分數（獲得代碼11或12），他們的問題是什麼？是教學過程中沒有強調？還是學生對這部分的內容比較不易理解？

✓ 調整教學方式

根據學生學習成效及學生學習問題提供的訊息，調整教學方式。

✓ 回饋試題研發

讓命題者在未來撰寫試題時，使用學生更熟悉、更能理解的字詞。

因此，除了選用好的題材、研發好的問題外，好的素養導向評量還需要撰寫完整的評分規準，才能提供客觀的評分標準，以及教學與學習的回饋。



## 第七章 因應素養導向評量的數學教學建議

如同第二章所言，素養導向評量的目的是為了引導、帶動素養導向教學，以培養學生的核心素養、學習表現與學習內容（參見圖8）。素養導向評量利用生活情境、學術與學習脈絡情境為背景，以引導式的問題解決（形成、運用、詮釋評估）方式，讓學生在解決問題的過程中，發現數學的價值；以知識建構的方式（觀察、統整歸納、發現、應用延伸），讓學生在解決問題的過程中，發生學習。完整、全面地培養學生學習表現、核心素養，達成課程目標。因此，因應素養導向評量的數學教學應不同於傳統的教學方式，它需要結合更多素養導向評量會檢測的重要能力或元素，例如：課室討論與活動。

課室討論與活動是學習數學很重要的一環（Burns, 2007；Chapin et al., 2003）。Burns（2007）指出，課室討論能藉由學生之間的分享、說明、解釋、問問題，幫助學生進行思考，而教師也可以藉由課室討論理解學生的想法與學習狀況。在課室中師生之間討論可以幫助學生進行數學思考和學習，課堂討論提供動力。與年紀相仿的同學討論猜測或想法時，學生變得更有動力（Chapin et al., 2003）。課室活動則是引起學生學習動機、主動思考的重要程序（Artigue & Blomhøj, 2013；Baptist & Raab, 2012；Lee & Hammer, 2011；林福來等人，2015；林碧珍、陳姿靜，2021）。例如：林福來等人（2015）指出，課室中的臆測活動具有啟動與延續數學思考的功能，同時也是通往概念理解、程序流暢、問題解決和推理等數學能力的樞紐；Lee與Hammer（2011）發現，在課堂上應用遊戲教學，可以促進學生的學習動機、認知、情感和社會參與。

因此，因應素養導向評量的數學教學可以結合第二章的素養導向評量要素與課室討論與活動（例如：數學臆測），增加師生間與學生間的討論、分享與溝通。結合二者後的素養導向教學需要考量下列四項要素：

### 一、在脈絡化的學習情境中提問或任務指派

- ✓ 素養導向評量強調問題解決，教師可以選用貼近學生生活情境的問題（國家教育研究院，2020b，2021）為教學材料，因為真實情境、真實問題可以吸引學生的注意力，而且可以提高學生的學習興趣，同時可以累積學生問題解決的經驗。對於生活經驗相對較少的中低年級的學童，可以使用繪本（鍾靜，2017）或具體可操作的教材（Boggan et al., 2010）引導學生數學概念的學習。
- ✓ 針對選用的情境，教師要能進行合適的說明，引導學生理解，或連結學生的舊經驗。然後，根據情境提出真實問題或指派任務。也就是，引導學生辨識資訊、理解問題、形成問題、或是引導學生對情境和問題進行觀察，以及適當的探索與初步規畫。

### 二、紀錄思考與討論的解題歷程

- ✓ 教師提出問題或任務後，提供充份的時間進行觀察與思考。
- ✓ 學生的思考結果需要進行記錄，老師才能了解不同學生的思考方式和思考歷程，進而釐清學生的學習問題。記錄思考過程同時也能訓練學生的表徵能力，以及統整、歸納能力（Chapin et al., 2003）。
- ✓ 思考後的小組的討論可以讓同學進行腦力激盪，培養學生創造思考的能力。在討論的過程中，決定合適的解題方向與策略。

### 三、分享選擇的方法及策略

- ✓ 分享是指全班或小組間的討論，是進一步將小組內的討論擴大，讓更多學生參與辯證、提問、反駁（林福來等人，2015；林碧珍、陳姿靜，2021）。
- ✓ 全班的討論可以讓學生有機會展現邏輯推理能力。當學生提出猜測或想法時，老師可以進一步要求學生提供證據來支持猜測或想法。討論過程中提及的反例也是很好的推理和論證的素材（Chapin et al., 2003）。此外，討論數學概念和程序時，可以使學生曝露他們的迷思或誤解，協助教師釐清和解決學生的問題。此過程也可以讓分享者以外的學生學習提問與批判性思考能力。當討論的問題是貼近學生生活時，能更容易的引發學生多元的思考，與多元的問題解決策略。

- ✓ 課室討論可以讓學生相互談論他們的思考和解決問題的方法，讓他們有更多的觀察和聆聽，提供學生更多參與數學思考的機會。討論的過程中，可以使他們意識到自己的想法與他人的想法之間存在差異，促使學生了解自己的說法是否完整、或證據是否充足或薄弱。

#### 四、歸納與反思等教學步驟

- ✓ 問題與任務需要由教師進行最後的統整、歸納，以完成教學目標、或解決問題與任務，才能讓學生發現數學的價值，知道學習數學是有用的，以及知道學習數學要怎麼用。在問題解決的過程中，累積各式的經驗，建立學生的學習遷移能力。
- ✓ 教師需要帶領學生進行反思，藉由反思理解自己的能力、思考方式、解題過程與其他人的差異，建立學生的後設認知的能力（Polya, 1945；Silver, 1982；Schoenfeld, 1983b），協助學生的學習從短期記憶深植到長期記憶中（Sternberg & Spear-Swerling, 1996）。

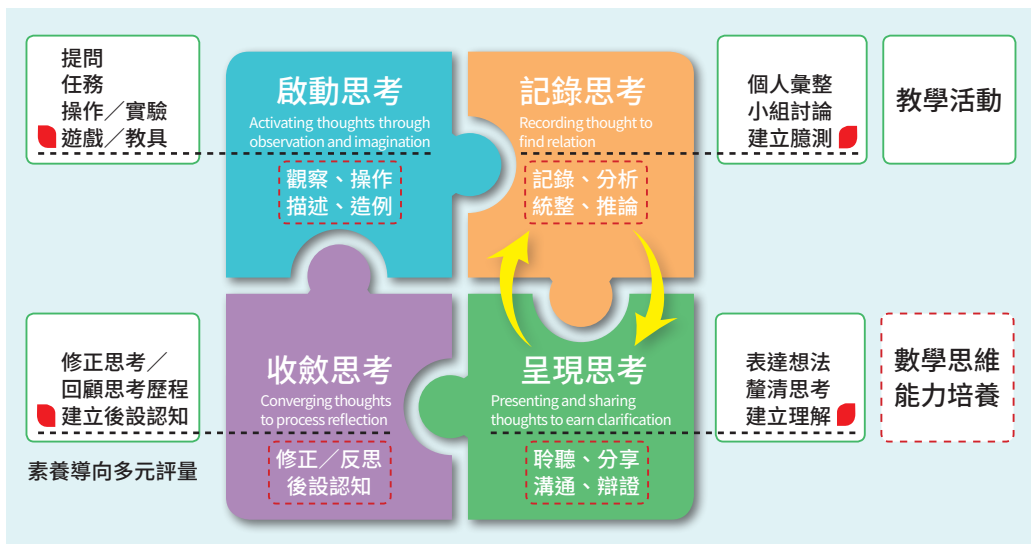
綜合上述說明，數學素養導向教學著重在「啟發數學思維」看見孩子的思考歷程，「發展學習策略」培養應用的能力，「連結生活情境」體認數學的價值，以激發學生的學習動機。此外，教師教學應以學生為主體，以其數學能力發展為考量，鼓勵學生提出多元解法並和他人溝通解題想法，鼓勵學生說明其理由與想法，肯定其正確的思考方式，或適時運用關鍵的範例製造認知衝突，讓學生發現其錯誤，並在課堂中建立起討論與互相聆聽的學習氛圍。

## 第一節 ARPC 高階思考養成歷程

根據前一節的四項要素，本節介紹一個從素養導向評量出發，結合課室活動、課室討論的素養導向教學模式「ARPC高階思考養成歷程」，並根據此模式設計二個教學活動。ARPC代表啟動思考（Activating thoughts through observation and imagination）、紀錄思考（Recording thoughts to find relation）、呈現思考（Presenting and sharing thoughts to earn clarification）、收斂思考（Converging thoughts to process reflection），如圖18所示。而這些步驟正是執行數學素養導向教學四項要素的方式，因為：

- ✓ 「脈絡化的學習情境、提問或任務指派」的目的就是要啟動學生的思考。
- ✓ 「紀錄思考或討論的解題歷程」的目的就是以學生為中心，自己嘗試思考、或討論解題方法，並將過程和結果紀錄下來。
- ✓ 「分享選擇的方法及策略」的目的是要學生學會分享、溝通，並從中察覺自己的論述是否完備，是否能說服所有的人。
- ✓ 「歸納與反思等教學步驟」是設定學習的終點、目標。學習的最後必須歸納出結論，才不會只有活動、沒有結果。學習之後也需要反思，才能讓學習內化。

圖 18  
ARPC 高階思考養成歷程



ARPC四個教學步驟的分項說明如下：

### 一、啟動思考

教師可挑選適當的生活情境進行提問、指派操作任務，或透過學具、教具和數學遊戲，讓學生從參與的過程中，自然而然的啟動思考。教師可以鼓勵學生描述看到的事實或現象、試著觀察規律、進行操作教具體驗、或創造可供探究的例子。

## 二、記錄思考

此階段教師請學生針對「啟動思考」之活動進行個人資料分析、想法彙整，再透過小組討論，提出合理之猜想或臆測。過程中，學生必須記錄下觀察的重點、分析與統整記錄的內容，作為推論或臆測的依據。教師的任務是讓學生覺得自己不是在為我們找出標準答案，他們是自己在研究各種方法，提出概念和想法。

## 三、呈現思考

教師引導學生表達想法。從問答的過程中，引導串接學生不連貫或跳躍的思考，並針對學生不合理的推論進行釐清，協助學生建立完整且合乎邏輯的思考。討論的過程中，教師針對每位學生的想法都要給予肯定，即使學生在表達上有不足或瑕疵，也要給予肯定，因為他們的錯誤經驗，可以協助大家建立正確的理解。此外，也可進行小組間的分析與答辯，透過辯證確認自己或小組的想法是合理且可以被驗證，教師則是在旁引導。

## 四、收斂思考

最後在收斂思考階段，請學生回想經過此課程後，所獲得的收穫或省思，可透過下列提問引導學生反思，培養並建立學生的後設認知能力：

- ✓ 我們今天提出了哪些概念來討論？
- ✓ 我們今天使用了哪些學習策略？
- ✓ 對於無法理解的部分，你能否精準地提出疑問？
- ✓ 你是否有從大家所犯的錯誤或誤解中，發現了什麼？
- ✓ 你或你的小組是怎麼思考今天的問題？
- ✓ 你的思考方式獲得結果了嗎？
- ✓ 你從你的思考方式學到什麼？
- ✓ 班上有沒有同學和你的思考方式類似？
- ✓ 有沒有同學的思考方式與你不同？
- ✓ 今天課堂上有什麼重大的爭論？你能從這些爭論中察覺出差異嗎？
- ✓ 你在這個單元有哪些強項或弱點？你計畫怎麼改進自己不足之處？

如果有合適的素養導向試題，可利用評量引導學童進一步將所學應用在生活情境中，發揮數學的功能，建立學習數學的價值。

根據ARPC四個教學步驟，我們研發了數個教學活動，以下我們介紹其中二個：第一個是以數學繪本為題材，符合低年級的教案「誰先吃桃子？」。第二個是以數學教具分數條為題材，符合中年級的教案「等值分數」。

### 範例 32 ARPC教案1：「誰先吃桃子？」（數學繪本）

教學主題	誰先吃桃子？	教學對象	國小一年級
對應單元	比長短、排順序、比多少	設計者	林裕峯、徐嘉玟
節數	共4節	修審專家	林碧珍教授、吳正新研究員
核心素養	數-E-A3 能觀察出日常生活問題和數學關聯，並能嘗試與擬訂解決問題的計畫。在解決問題之後，能轉化數學解答於日常生活應用。		
學習重點	學習表現	<ul style="list-style-type: none"> <li>• n-I-7 理解長度及其常用單位，並做實測、估算與計算。</li> <li>• n-I-8 認識容量、重量、面積。</li> <li>• s-I-1 從操作活動，初步認識物體與常見幾何形體的幾何特徵。</li> <li>• r-I-1 學習數學語言中的運算符號、關係符號、算式約定。</li> <li>• d-I-1 認識分類的模式，能主動蒐集資料、分類，並做簡單的呈現與說明。</li> </ul>	
	學習內容	<ul style="list-style-type: none"> <li>• N-1-5 長度（同S-1-1）：以操作活動為主。初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位）。</li> <li>• S-1-1 長度（同N-1-5）：以操作活動為主。初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位）。</li> <li>• N-2-12 容量、重量、面積：以操作活動為主。此階段量的教學應包含初步認識、直接比較、間接比較（含個別單位）。不同的量應分不同的單元學習。</li> <li>• R-2-1 大小關係與遞移律：「&gt;」與「&lt;」符號在算式中的意義，大小的遞移關係。</li> </ul>	
先備經驗	已具備長短、高矮的基本認知概念		
設計理念	數學是學習自然科學的基礎，然而對於兒童而言，數學教材必須生活情境化，數學教學活動遊戲化，這樣才能深深吸引兒童學習數學的興趣，提升數學的能力。透過繪本的圖文布置情境脈絡傳達數學的概念知識，並透過臆測任務學習與建立數學知識，讓學生可以發現排列順序時應該注意的重點，且依據比較的項目將大小、高低、長短等排出正確順序。最後，讓學生進行數學建模與學習遷移，思考如何把排列順序的知識，活用於解決生活中的問題。		
學習目標	1、透過數學故事的引導，學生能了解排列順序的方法。 2、透過實際的操作，學生能將排列順序的方法應用於生活中，解決問題。		
教學資源	故事簡報、小白板、自製學習單、觸控電視、無線投影軟體		

學習活動設計			
ARPC歷程	學習活動流程	時間	數學思維能力
<b>啟動思考</b> <b>Activate</b>	<b>一、生活情境連結到數學繪本</b> 1. 教師先引導孩子思考：如果班上有一顆桃子，應該要先給誰吃呢？再將情境連結到數學繪本——「誰先吃桃子」。 2. 老師將繪本簡報檔播放於電視上，一邊說故事，一邊引導學生思考繪本中的數學問題與學生互動。引導重點如下： (1) 引導學生猜測動物們想比較什麼項目，以什麼方式來排列順序。 (2) 引導學生發表並上台演示比身高、體重、嘴巴、耳朵和尾巴的方法。 (3) 引導學生思考除了故事中的方法，還有什麼方式可以來比較身高、體重、嘴巴大小、耳朵和尾巴的長短。 (4) 引導學生發現繪本中動物們量身高的問題。 (5) 引導學生定義高度和長度的起點與終點。	20分	<b>觀察例子</b> 聆聽故事 閱讀繪本 理解情境
	<b>二、重點提問</b> 1. 教師先在螢幕上呈現重點提問，每組分配一種動物，請學生分組先思考討論以下問題並記錄下來： (1) 長頸鹿（犀牛、鱷魚、兔子、猴子）想出來的比較項目是什麼？ (2) 長頸鹿（犀牛、鱷魚、兔子、猴子）根據比較項目，想出來的排列方式是什麼？ (3) 這個比較方法的排列順序是什麼？ (4) 為什麼長頸鹿（犀牛、鱷魚、兔子、猴子）會想用這個比較方法讓自己排第一，吃到桃子？ (5) 毛毛蟲把這隻動物的排列方式改成什麼，讓自己變成這個項目的第一名，吃到桃子？ 2. 學生思考討論記錄後，分別邀請一種動物的學生代表上台接受老師的訪問，提問如下： (1) 請問長頸鹿（犀牛、鱷魚、兔子、猴子）先生你在故事中的比較項目是什麼？ (2) 你的排列方式是什麼？ (3) 這個比較方法的排列順序是什麼？ (4) 為什麼你會想用這個比較方法？ (5) 毛毛蟲改變了你的什麼方式，讓自己變成第一名？	20分	<b>描述理解</b> 能清楚地描述對於繪本的理解，藉此培養數學表述能力。

<p>紀錄思考 Record</p>	<p>3. 學生修正自己的記錄。</p> <p style="text-align: center;">～第一節結束～</p> <p><b>三、個人彙整</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師引導學生思考：除了繪本中提到的比較方法外，每一種動物是否還有別的比較項目與排列方式，可以讓自己排名第一，先吃到桃子。並請學生將自己的比較方法（比較項目和排列方式）記錄於問題討論單上。</li> <li>2. 給予學生10分鐘個別思考記錄的時間。</li> <li>3. 二人一組相互討論、分享與釐清想法。</li> <li>4. 教師帶領學生依序討論長頸鹿、犀牛、鱷魚、兔子、猴子和毛毛蟲的比較方法（比較項目和排列方式）。每討論一種動物就給學生一分鐘的時間將比較方法（比較項目和排列方式）記錄於白板上，再請學生舉手發表，請該位學生將白板呈現在黑板前，讓其他學生知道已經發表過什麼，不再重複發表，其他同學可針對該位同學發表的合理性給予建議。</li> </ol>	<p>20分</p>	<p><b>推論結果</b></p> <p>從動物身體上的優勢或劣勢來進行推論是否能夠先吃到桃子</p>
<p>紀錄思考 Record</p>	<p><b>四、同儕討論，建立臆測</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師提問：經由同儕的討論與分享，從動物們的比較方法中你發現了什麼？ 老師幫助學生聚焦記錄重點，依序討論和記錄。 (1) 從每個動物的比較項目，你發現了什麼？</li> </ol> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>長頸鹿的比較項目是身高 犀牛的比較項目是體重 鱷魚的比較項目是嘴巴 兔子的比較項目是耳朵 猴子的比較項目是尾巴</p> </div> <p>老師列出動物們的比較項目，幫助學生思考。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(2) 從每個動物的排列方式，你發現了什麼？</li> </ol> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>長頸鹿的排列方式是由高到矮 犀牛的排列方式是由輕到重 鱷魚的排列方式是由大到小 兔子的排列方式是由長到短 猴子的排列方式是由長到短</p> </div> <p>老師列出動物們的排列方式，幫助學生思考。</p>	<p>20分</p>	<p><b>個人記錄與分析</b></p>

(3) 從動物們的排列順序中，你發現了什麼？

身高 由高到矮  
(動物們的排列順序圖片)

體重 由輕到重  
(動物們的排列順序圖片)

嘴巴 由大到小  
(動物們的排列順序圖片)

耳朵 由長到短  
(動物們的排列順序圖片)

尾巴 由長到短  
(動物們的排列順序圖片)

老師列出動物們的排列順序(圖片)，幫助學生思考。

(4) 從毛毛蟲的反應，你發現了什麼？

按照個子由矮到高的順序來排的話，我是第一名  
按照體重由輕到重的順序來排的話，我是第一名  
按照嘴巴由小到大的順序來排的話，我是第一名  
按照耳朵由短到長的順序來排的話，我是第一名  
還有～按照耳朵由短到長的順序來排的話，我還是第一名

老師列出毛毛蟲的做法，幫助學生思考。

～第二節結束～

呈現思考  
Present

五、組內分享，建立理解

四人一組，依序解釋自己的想法，修正與刪除不合理的猜想，將一致性的想法記錄於小白板上(可記錄於多塊白板上)。

10分

溝通、分享、辯證、修正紀錄

<p>呈現思考 Present</p>	<p><b>六、小組分享、表達想法</b></p> <p>請各小組依序拿著白板去台上表達想法，他組成員可針對該想法的合理性給予建議。</p> <p>學生可能的猜想：</p> <p>(一) 從比較項目臆測：</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <ol style="list-style-type: none"> <li>1、每一種動物都比較自己最厲害的地方。</li> <li>2、要按照一定的順序排列，不能亂跳來跳去。</li> <li>3、排列順序的方式有很多種，有大小、高矮、長短、輕重都可以。</li> <li>4、可以顛倒方向排列，從大到小、小到大，或高到矮、矮到高……。</li> <li>5、比順序就會不一樣。</li> </ol> </div>	<p>10分</p>	<p>溝通、分享、辯證</p>
<p>收斂思考 Converge</p>	<p><b>七、回顧思考歷程、建立後設認知</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 教師引導學生一同回顧對於動物排列順序的臆測發現。</li> <li>2. 教師呈現八顆桃子的簡報，請學生思考：有八顆桃子，每組只能分到一顆，你會建議比較什麼項目和排列方式，讓自己在四人小組中排第一個，先吃到桃子。</li> <li>3. 教師先請三位學生上台示範，全班一同思考，老師要和這三位學生比較什麼項目？如何排列？才能吃到桃子。</li> <li>4. 請學生將想法寫於白板上，並排列出同組四人的順序，於四人小組內討論發表。</li> </ol>	<p>5分</p>	<p><b>後設認知</b></p> <p>從理解到應用比較策略，得知如何觀察自己的優勢或劣勢，進行比較排序。</p>
<p>呈現思考 Present</p>	<p><b>八、釐清思考</b></p> <p>教師輪流請各組推派一位學生上台發表自己的比較項目與排列方式，並請同組成員一起上台排列順序。教師與他組學生一同檢核上台發表的組別其排列方法是否合理，給予回饋。</p>	<p>10分</p>	<p><b>分享與辯證</b></p> <p>透過各種比較的範例，釐清自己的想法，並發現比較的策略。</p>
<p>收斂思考 Converge</p>	<p><b>九、回顧思考歷程</b></p> <p>教師與學生一同回顧這三節課的學習內容</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 請學生回顧發表這三節課程所學概念。</li> <li>2. 請學生發表同學在思考比較方法時，是和自身類似？還是有所不同？</li> <li>3. 作業單-素養題大挑戰（重量比一比）</li> </ol> <p style="text-align: center;">～第三節結束～</p>	<p>5分</p>	<p><b>反思</b></p> <p>能在不同的生活情境下，提出不同的解決策略，並了解每個人的策略有所不同。</p>

## 教學反思與建議

1. 低年級學童的思考和書寫的速度較慢，為了讓學生有充分思考、討論、操作、表達與發言的時間與機會，建議剛開始的幾次教學，要安排充足的時間。
2. 低年級小朋友在討論時較容易忘記應遵守的規範，例如：音量過大，或覺得討論是別人的事，因此，老師可以適時提醒，避免學童分心而未進入小組討論的狀態。分組時，建議以3~4人為原則，避免人數過少時，學童可能討論不出答案。討論時，每人可發一張白紙（或討論本）並指定一個學童作為紀錄者，未擔任紀錄的人也必須在白紙上紀錄自己和他人的想法。若每組有四人，可同時請二人擔任紀錄，另二人擔任發表。
3. 在一年級實行分組的探究教學是可行的。分組討論、輪流發表雖然會花費許多時間，但是透過分組可以訓練學生不同的多元能力，例如：
  - ✓ 表達溝通能力：能將自己的想法說出來給同學聽，即使不知道也能勇敢說不知道。
  - ✓ 聆聽他人說話：能注意聽別人說話，能從別人的話語中獲取想要的答案，而非只是沉浸在自己的世界。
  - ✓ 檢核對錯的能力：能去思考對錯，發現錯誤而去糾正。
  - ✓ 指導同學的能力：能去扶助他人，指導程度較弱的學生。

上述四種能力並非一蹴可幾，必須持續練習一段時間，才能慢慢養成。
4. 建議事先利用專門課教導低年級學童如何討論。學會與他人討論是探究教學過程中一件相當重要的事，但往往我們都融入課堂中去教導孩子討論的方法和技巧。對一年級的學童而言，除了融入課堂中，若能將討論直接當成一門課，在這門課中直接和學生溝通同儕討論時應要注意的事項，例如：眼神的交流、語言的互動以及小組分工等方式，一年級學生能更快進入討論的狀況。
5. 首次實施ARPC低年級班級的學生反應
  - ✓ 啟動思考部分：以數學繪本當作一年級的授課教材相當受學生歡迎，因為故事性強，再加上教師音調與肢體動作的變化，學生上課參與度極高，發表相當踴躍，成功啟動學生思考。
  - ✓ 記錄思考部分：一年級的學生雖然書寫記錄較慢，成功啟動思考後，學生都

非常主動且積極的進行臆測，猜測除了繪本中提到的方法，還有沒有其他什麼方法。他們也能將自己的思考記錄下來。

- ✓ 呈現思考部分：學生很樂意舉手發表自己的想法，但在同儕討論分享想法時，比較無法聆聽他人的想法、與他人產生想法的溝通與交流、以及釐清與修正自己的想法。因此，在同儕間的討論、溝通交流模式須再加強。此外，老師在引導學生發現的部分，要以更具體的步驟，協助一年級學生收斂思考。
- ✓ 收斂思考部分：透過以上三部分的活動，大部分的學生皆能分享課堂所學，並能將自行歸納的規則並應用於生活中。在素養評量方面，在說出自己的理由部分，因為書寫的部分較多，有部分學生尚無法我手寫我口，建議可搭配語文課針對討論與文字表達方面加強。
- ✓ 低成就的學生也能從探究與討論中獲得成就感。在平常的課堂中，低成就的學生往往較不喜愛發表，但在探究的過程中，低成就的孩子透過與他人的互動，聆聽他人的想法，不但能從中有所收穫，也非常樂意在課堂中與同學分享自己的所得，並從中得到自我的肯定，也更願意動腦思考較困難的題目。

### 範例 33 ARPC教案2：「等值分數」（教具操作）

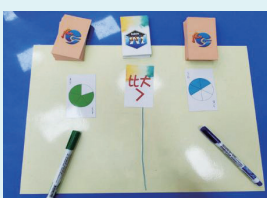
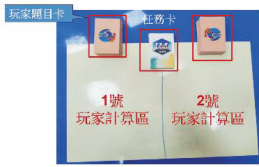
教學主題	等值分數	教學對象	國小四年級
對應單元	分數	設計者	林裕峯、陳瑋欣
節數	共3節	修審專家	吳正新研究員
核心素養	數-E-C1具備從證據討論事情，以及和他人有條理溝通的態度。 數-E-C2樂於與他人合作解決問題並尊重不同的問題解決想法。		
學習重點	學習表現	<ul style="list-style-type: none"> <li>• n-II-6 理解同分母分數的加、減、整數倍的意義、計算與應用。認識等值分數的意義，並應用於認識簡單異分母分數之比較與加減的意義。</li> </ul>	
	學習內容	<ul style="list-style-type: none"> <li>• N-4-6 等值分數：由操作活動中理解等值分數的意義。簡單異分母分數的比較、加、減的意義。簡單分數與小數的互換。</li> </ul>	
先備經驗	<ol style="list-style-type: none"> <li>1、認識真分數、假分數、帶分數。</li> <li>2、熟練假分數和帶分數互換及加減計算。</li> </ol>		

<p><b>設計理念</b></p>	<p>分數概念包含許多子概念，如：等分概念、單位量概念…等，而這些子概念又牽涉「連續量」與「離散量」的不同情境。學童在學習分數時，雖然花了很長的時間來學習，學習效果卻不好。</p> <p>根據兒童認知發展，國小學童正值具體運思期，須透過實際操作活動來察覺、形成數學概念。若能將分數概念以多元表徵方式呈現給學童，可協助學童進行概念的理解，因此幫助學童建立教具操作活動與數學概念間的連結，將可協助學童由實體情境邁向抽象思考。</p> <p>本課程設計採用ARPC高階思考養成歷程脈絡（啟動思考、記錄思考、呈現思考、收斂思考）帶領孩子探究實作與溝通反思，在教學上運用任務造例、觀察提問、討論與分享加以啟導，提供每位學生有感的學習活動。對於學習緩慢的學生也能依照自己的速度學習（遊戲的第二階段：同質性分組）。而學習超前的學生，將給予加深、加廣的情境與問題，激發學生的學習動機。</p> <p>分數是抽象的數學概念，因此需要透過具體的圖像讓學生了解量的變化。第三節遊戲設計是延伸三年級的分數分與合之活動，進行異分母的大小比較及加減運算，期望透過觀察分數圖卡及遊戲方式，讓學生理解與熟悉當比較異分母分數的大小或進行加減計算時，為何要通分成同分母的理由。</p>		
<p><b>學習目標</b></p>	<p>1、透過ARPC高階思考歷程探究活動，發現等值分數的性質。 2、覺察分母、分子同乘以一個整數，能找出等值分數。 3、覺察等值分數中，分母除以分子的答案皆相同。（比值相同）</p>		
<p><b>教學資源</b></p>	<p>教學簡報、記錄單、課後評量素養題、觸控電視、無線投影軟體</p>		
<p style="text-align: center;"><b>學習活動設計</b></p>			
<p><b>ARPC歷程</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>學習活動流程</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>時間</b></p>	<p style="text-align: center;"><b>數學思維能力與評量重點</b></p>
<p><b>啟動思考</b> Activate</p>	<p><b>壹、準備活動</b></p> <p>一、複習舊經驗 請學生回想並說明<math>\frac{1}{2}</math>、<math>\frac{1}{3}</math>代表的意義？</p> <p><b>二、數感培養</b></p> <p>1. 全體學生說讀分數數詞序列。 2. 從這一盒分數條中，你發現了什麼？</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>學生猜想：</p> <p>1、有51條分數條。 2、2條<math>\frac{1}{2}</math>會和1條1一樣長。 3、2條<math>\frac{1}{4}</math>會和1條<math>\frac{1}{2}</math>一樣長。 4、切得越多分，分母的數字就會越大。 5、少了<math>\frac{1}{7}</math>、<math>\frac{1}{9}</math>、<math>\frac{1}{11}</math></p> </div>	<p>3分</p> <p>5分</p>	<p><b>描述想法</b> 能用數學語言說出分數的定義（平分）</p> <p><b>觀察與描述</b> 能明確描述自己的觀察發現</p>

<p>啟動思考 Activate 記錄思考 Record</p>	<p>貳、發展活動</p> <p>一、任務一</p> <p>1. 觀察造例： 請你找出和1一樣長的分數條。</p> <p>2. 小組彙整： 請各組用分數表徵記錄排出來的結果。 (學生可能發現1個<math>\frac{1}{2}</math>加2個<math>\frac{1}{4}</math>也和1一樣長，給予肯定但暫不討論，只討論找出同分母的部分)</p> <p>3. 小組討論、建立臆測： 請問你們從記錄中發現了什麼？ (提示：1和2個<math>\frac{1}{2}</math>的關係是什麼?)</p> <p>4. 組內分享、建立理解： 請組內成員依序解釋自己的想法，最後將結果記錄於記錄單上。</p> <p>5. 小組發表、表達想法： 教師拍下學生討論記錄，投影至電視並請各小組成員代表分享並提出回饋意見。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>學生猜想：(教師協助彙整)</p> <p>1. 分子和分母一樣時，就會和1相等。</p> <p>2. 分子加1、分母也加1，就會等值。(迷思)</p> <p>3. 分子和分母同乘以一個數，一樣會相等。</p> </div>	<p>2分</p> <p>2分</p> <p>5分</p> <p>2分</p> <p>8分</p>	<p><b>操作與造例</b> 能找出等長的分數條 記錄與統整 能用分數記錄</p>
<p>呈現思考 Present</p>	<p>二、任務二</p> <p>1. 觀察造例： 請你找(排)出和<math>\frac{1}{2}</math>一樣長的分數條。</p> <p>2. 小組彙整： 請各組用數字或分數表徵記錄排出來的結果。</p> <p>3. 小組討論、建立臆測： 請問你們從記錄中發現了什麼？ (提示：<math>\frac{1}{2}</math>和2個<math>\frac{1}{4}</math>是什麼？2個<math>\frac{1}{2}</math>是多少？2個<math>\frac{1}{4}</math>是多少?)</p> <p>4. 組內分享、建立理解： 請組內成員依序解釋自己的想法，最後將結果記錄於記錄單上。</p>	<p>2分</p> <p>2分</p> <p>5分</p> <p>2分</p>	<p><b>描述與理解</b> 能明確說出自己的發現</p> <p><b>聆聽與分享</b> 能清楚描述想法</p> <p><b>溝通與辯證</b> 聽取分享，提出自己的看法</p>
<p>啟動思考 Activate 記錄思考 Record</p>	<p>1. 觀察造例： 請你找(排)出和<math>\frac{1}{2}</math>一樣長的分數條。</p> <p>2. 小組彙整： 請各組用數字或分數表徵記錄排出來的結果。</p> <p>3. 小組討論、建立臆測： 請問你們從記錄中發現了什麼？ (提示：<math>\frac{1}{2}</math>和2個<math>\frac{1}{4}</math>是什麼？2個<math>\frac{1}{2}</math>是多少？2個<math>\frac{1}{4}</math>是多少?)</p> <p>4. 組內分享、建立理解： 請組內成員依序解釋自己的想法，最後將結果記錄於記錄單上。</p>	<p>2分</p> <p>2分</p> <p>5分</p> <p>2分</p>	<p><b>操作與造例</b> 能找出等長的分數條</p> <p><b>記錄與統整</b> 能用分數記錄</p> <p><b>描述與理解</b> 能明確說出自己的發現</p> <p><b>聆聽與分享</b> 能清楚描述想法</p>

<p>呈現思考 Present</p>	<p>5. 小組發表、表達想法： 教師拍下學生討論記錄，投影至電視並請各小組成員代表分享並提出回饋意見。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>學生猜想：（教師協助彙整）</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 分母除以分子的答案都會一樣。（比值相同）</li> <li>2. 分子加1、分母加2，就會等值。（迷思）</li> <li>3. 分子和分母同乘以一個數，一樣會相等。</li> <li>4. <math>\frac{1}{2}</math> 的分母乘以 <math>\frac{2}{4}</math> 的分子，會等於 <math>\frac{2}{4}</math> 的分母。</li> </ol> </div>	<p>8分</p> <p><b>溝通與辯證</b> 聽取分享，提出自己的看法</p>
<p>呈現思考 Present</p>	<p>三、釐清思考</p> <p><math>1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{6}{6} = \frac{8}{8} = \frac{10}{10} = \frac{12}{12}</math>  <math>\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12}</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 請觀察上述二個造例記錄與等值分數的猜想中，有無共通性原則，可以作為檢查等值分數的方法？</li> <li>2. 請各組學生討論後發表想法。</li> </ol>	<p>5分</p> <p><b>聆聽與分享</b> 能清楚描述想法</p> <p><b>溝通與辯證</b> 聽取分享，提出自己的看法</p>
<p>啟動思考 Activate 記錄思考 Record 呈現思考 Present</p>	<p>四、任務三</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <u>觀察造例</u>： 請你找（排）出和 <math>\frac{1}{3}</math> 一樣長的分數條。</li> <li>2. <u>小組彙整</u>： 請各組用數字或分數表徵記錄排出來的結果。</li> <li>3. <u>驗證關係、確認猜想</u>： 請學生用檢驗等值分數的共通性原則（合理猜想）來確認記錄正確性。</li> </ol>	<p>2分</p> <p><b>操作與造例</b> 能找出等長的分數條</p> <p>2分</p> <p><b>記錄與統整</b> 能用分數記錄</p> <p>2分</p> <p><b>聆聽與分享</b> 能明確說出自己的發現</p>
<p>呈現思考 Present</p>	<p>五、釐清思考、建立理解：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 檢視造例紀錄，再確認全班共通性猜想是合理正確的。</li> <li>2. 請各組依據全班共通性猜想的內容，再舉出2個例子，證明猜想是正確的。</li> </ol>	<p>3分</p> <p><b>溝通與辯證</b> 能理解檢驗與找出等值分數的方法</p>
<p>收斂思考 Converge</p>	<p>參、綜合活動</p> <p>一、回顧思考歷程</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 我們今天從操作分數條中學到什麼數學概念？</li> <li>2. 你是怎麼發現等值分數的關係？</li> <li>3. 你的思考獲得結果或澄清了嗎？（原本怎麼想，後來透過什麼方式，澄清思考）</li> </ol>	<p>10分</p> <p><b>反思與建立後設認知</b> 能明確說出這堂課的收穫並學習遷移驗證所學</p>

<p>啟動思考 Activate</p>	<p>二、建立後設認知</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 將你在這堂課的發現寫入數學寫作本中。</li> <li>2. 隨堂總結評量</li> <li>3. 課後評量—數學素養評量題</li> </ol> <p>-----第一、二節結束-----</p> <p>壹、準備活動</p> <p>回顧三年級進行的分與合活動</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>一、我們要如何比較同分母分數的大小？</li> <li>二、我們要如何計算同分母分數的加法或減法？</li> <li>三、如果今天我們是進行異分母的加減怎麼辦？</li> <li>四、如果今天我們進行的是異分母的比大小，可以怎麼解決？</li> </ol>	<p>10分</p>	
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>學生預期回答：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1、利用上節課找出等值分數的方法，先將分母變成一樣，再做比較。</li> <li>2、可以看圖形表徵判斷大小。</li> </ol> </div>	<p>5分</p>	<p>描述理解</p> <p>能明確說出上堂課的收穫並說出自己的想法</p>
<p>記錄思考 Record</p>	<p>貳、發展活動</p> <p>一、教師說明遊戲規則：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 玩家2人一組</li> <li>2. 分數A卡一副、任務卡一副，小白板一張。白板筆每生一支。</li> <li>3. 先翻中間任務卡（加減卡或比大小卡）、雙方玩家在同時翻開旁邊分數卡（題目卡）。</li> <li>4. 二位玩家分別在自己的計算區域算出正確答案，先算出正確答案的可獲取對方的題目卡。</li> <li>5. 如果同時計算出正確答案，則只取走自己的題目卡。</li> <li>6. 如果同時計算錯誤則放入棄牌區。玩家必須將答案卡丟出並按鈴，才算成功將牌送出。未成功者，必須將丟出的答案卡收回。</li> </ol>	<p>10分</p>	<p>分析與統整</p> <p>能理解遊戲規則，並從中整理自己的勝利法則</p>



<p><b>呈現思考</b> Present</p>	<p>7. 贏家：任務卡結束，玩家手中牌數最多的為最後贏家。</p> <p><b>二、分數分與合遊戲操作</b></p> <p>1. 第一回合遊戲開始。</p> <p>2. 第一回合結束時，請小組發表勝利法則：</p> <p>◆ 提問一：在異分數比大小應注意什麼？</p> <p>◆ 提問二：在異分數分與合應注意什麼？</p> <p>3. 進行第二回合遊戲：教師可依照學生程度，進行小組人員微調（同質性分組）。</p> <p>4. 第二次遊戲結束：調查分組冠軍，並</p> <p>5. 給予獎勵加分。</p>	<p>10分</p> <p>2分</p> <p>8分</p>	<p><b>聆聽與分享</b></p> <p>能清楚描述想法</p>
<p><b>收斂思考</b> Converge</p>	<p><b>參、綜合活動</b></p> <p>一、統整學生在遊戲中運用到的分數概念並彙整出勝利法則。</p> <p>二、鼓勵學生可利用課餘時間進行分數分與合遊戲活動。</p>	<p>5分</p>	<p><b>反思與建立後設認知</b></p> <p>能明確說出透過遊戲運用已知驗證所學</p>

### 教學反思與建議

1. 由於學生之前並未參與過其他探究式課程，因此在鋪陳任務時，需要比較多的時間引導學生，他們才能夠歸納出操作任務中的發現及猜想。再者，雖然已提供學生記錄單進行猜想記錄，但多數學生仍無法正確使用數學語言描述猜想，因此仍需要逐步引導學生或請學生重述。
2. 教學活動中，以操作任務、提問、討論與分享貫穿整個教學活動，並依照啟動思考、記錄思考、呈現思考、收斂思考ARPC四個教學步驟引導學生學習，透過記錄單可以看見孩子有不同的發現。由於時間有限，無法讓每位學生都發表或討論，因此請導師在課後協助檢閱記錄單並給予學生回饋。
3. 整體而言，運用ARPC高階思考歷程進行探究式教學，能有助於學生對於抽象的分數表徵及等值分數的認識。在課程設計上，需要額外規劃半節課的時間，進行先備經驗的複習，對於進入新課程單元會更加順利，也減少澄清迷思的時間。在班級經營上，師生互動需再多培養一些默契，更要鼓勵學生勇於表達與分享，將能改善教學時間不足的狀況。在教學策略上，教師的提問要更具體，學生才能理解。在學習反思上，透過收斂思考的提問設計，學生都能明確的說

出不同的想法或感想。因此，使用ARPC高階思考歷程確實可以讓學習數學更有感、也更完整。

### 實作練習 11

請參考120頁的範例2「排隊」及下列的提問與活動，設計一個ARPC教學方案。

問題 1. 同學有沒有在排隊區或等候區等待的經驗？

問題 2. 怎樣挑選哪一排排隊，可以比較快速的輪到自己？

#### 活動（一）

**遊戲名稱：**累加數字比大小

**適合對象：**已學會加法

**活動目的：**理解傳統排隊方式可能的問題

**活動步驟：**

1. 每組發下一盒撲克牌，取出所有的2、3、4、10，以及二張人像牌。
2. 以二張人像牌，當做郵局1、2號窗口的服務員。
3. 將數字牌洗牌之後，「窗口1」發四張數字牌，「窗口2」發三張數字牌，模擬數個排隊人員分別需要的時間。猜一猜，哪一堆數字牌的總和最少。
4. 翻開數字牌，計算各堆總和，並做紀錄。
5. 重覆遊戲二次。

參考範例：

使用的時間	撲克牌模擬實驗1		撲克牌模擬實驗2	
	窗口1	窗口2	窗口1	窗口2
第一位	4	4	3	4
第二位	2	2	2	10
第三位	3	4	3	2
第四位	3	—	4	—
合計	12	9	12	16

註：— 代表沒有人排隊

問題 3. 根據你的實驗結果，你覺得怎麼排會比較快輪到你？

問題 4. 在撲克牌模擬實驗 2 中，哪個人會等很久？他要怎麼做可以比較快輪到他？（換排）

撲克牌模擬實驗 2	
窗口 1	窗口 2
3 (A先生)	4 (E先生)
2 (B先生)	10 (F先生)
3 (C先生)	2 (G先生)
4 (D先生)	—

問題 5. 在撲克牌模擬實驗 2 中，哪一位可能是最後到的？（G先生、D先生）

問題 6. 在撲克牌模擬實驗 2 中，如果「D先生」不是最後到的，但卻是最後一個才輪到他，公平嗎？

問題 7. 如何將時間也考慮進來？（先到先服務）

問題 8. 如何設計一個同時考慮「先到後到」、有「換排」機制的排隊方式？

問題 9. 利用撲克牌模擬新的排隊方式，並計算新、舊排隊方式的差異？

## 活動（二）

**遊戲名稱：**傳統與現代排隊超級比一比

**傳統：**自行選擇到不同的服務窗口或櫃台，排隊等候。

**現代：**抽取號碼牌，以先到先服務的方式，排隊等候。

**適合對象：**已學會加法及除法

**活動目的：**以能比較新（現代）與舊（傳統）排隊的差異

**活動步驟：**

1. 請同學取出數字牌 2~4 及 10 各二張，隨機洗牌之後，依序翻開撲克牌並紀錄。第一張記為  $N_1$ ，第二張為  $N_2$ ，第三張為  $N_3$ ，……，第八張為  $N_8$ 。
2. 傳統排隊：將撲克牌順序放在「窗口 1」與「窗口 2」，方式為： $N_1$  在「窗口 1」第一格， $N_2$  號在「窗口 2」第二格， $N_3$  在「窗口 1」第二格，……， $N_8$  在「窗口 2」第四格。統計每一位需要等候的時間。

3. 現代排隊：使用前一步驟相同的一組撲克牌，將 $N_1$ 在「窗口1」第一格， $N_2$ 號在「窗口2」第一格，但其餘字牌依現代排隊等候規則排列。統計每一位需要等候的時間。
4. 重覆執行步驟1~3。
5. 比較不同排隊方式每個人的等候時間差異。
6. 說明二種排隊方式等候時間不同的原因。

## 參考文獻

- 任宗浩 (2018)。素養導向評量的界定與實踐。載於蔡清華 (主編)，**課程協作與實踐第二輯** (頁75-82)。教育部中小學師資課程教學與評量。
- 吳正新 (2019)。數學素養導向評量試題研發策略。**中等教育**，**70**，11-35。https://www.doi.org/10.6249/SE.201909\_70(3).0024
- 吳正新 (2020)。傳統試題與素養導向試題有什麼不同？數學素養導向試題之初探。**國家教育研究院電子報**，**190**。https://epaper.naer.edu.tw/upfiles/edm\_191\_3411\_pdf\_0.pdf
- 吳正新 (2021)。第四學習階段數學素養長期追蹤 (計畫編號：NAER-2019-041-A-1-1-E1-08)。國家教育研究院。https://rh.naer.edu.tw/handle/2b992
- 吳正新、林裕峯、余陳宗、謝佳叡 (2020)。108學年度國中素養導向評量分析報告：數學科。臺北市教育局。
- 李國偉 (1978)。數學本質。**數學傳播**，**2**，17-21。
- 林碧珍、陳姿靜 (2021)。數學臆測教學模式教戰守則。師大書苑。
- 林福來、陳建誠、許慧玉、楊凱琳 (2015)。主動思考：貼近數學的心跳。開學。
- 洪詠善 (2018)。素養導向教學的界定、轉化與與實踐。載於蔡清華 (主編)，**課程協作與實踐第二輯** (頁58-74)。教育部中小學師資課程教學與評量。
- 張春興 (1989)。張氏心理學辭典。東華。
- 教育部 (2014)。十二年國民基本教育課程綱要總綱。
- 教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校：數學領域。
- 國家教育研究院 (2020a)。數學領域課程手冊。https://cirn.moe.edu.tw/WebContent/index.aspx?sid=11&mid=7313
- 國家教育研究院 (2020b)。素養導向試題研發人才培訓計畫 (第一期)：數學科試題研發成果。https://tpwli.naer.edu.tw/
- 國家教育研究院 (2021)。素養導向試題研發人才培訓計畫 (第二期)：數學科試題研發成果。https://tpwli.naer.edu.tw/
- 臺灣PISA國家研究中心 (2012)。數學樣本試題 (中文版)。國立臺南大學。
- 鍾靜 (2017)。數學繪本的精彩課堂～閱讀課與數學課。國立臺北教育大學。
- 懸浮微粒。(2021, 7月30日)。載於維基百科。https://zh.wikipedia.org/zh-tw/%E6%87%B8%E6%B5%AE%E7%B2%92%E5%AD%90
- Artigue, M., & Blomhoj, M. (2013). Conceptualising inquiry-based education in mathematics. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *45*, 797-810.

- Baptist, P., & Raab, D. (2012). *Implementing inquiry in mathematics education*. University of Bayreuth.
- Barell, J. (2007). *Problem-based learning. An inquiry approach*. Corwin Press.
- Brown, S. I., & Walter, M. I. (1990). *The art of problem posing*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass.
- Boggan, M., Harper, S., & Whitmire, A. (2010). Using manipulatives to teach elementary mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies*, 3, 1-6.
- Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (1999). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. National Academy Press.
- Brookhart, S. M. (2013). *How to create and use rubrics for formative assessment and grading*. Association for Supervision and Curriculum Development.
- Brown, S. J., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18, 32-34. <https://doi.org/10.3102/0013189X018001032>
- Bruner, J. S. (1961). The act of discovery. *Harvard Educational Review*, 31, 21-32.
- Burns, M. (2007). *About teaching mathematics: A K-8 resource*. (3rd ed.). Math Solutions.
- Chapin, S. H., O'Connor, C., & Anderson, N. C. (2003). *Classroom discussions: Using math talk to help students learn, Grades 1-6*. Math Solutions.
- Dixon, J. K., Nolan, E. C., Adams, T. L., Tobias, J. M., & Barmoha, G. (2016). *Making sense of mathematics for teaching grades 3-5*. Solution Tree Press.
- Drake, J. M., & Barlow, A. T. (2007). Assessing students' levels of understanding multiplication through problem writing. *Teaching Children Mathematics*, 14(5), 272-277. <https://doi.org/10.5951/TCM.14.5.0272>
- Earl, L. (2003). *Assessment as learning: Using classroom to maximize student learning*. Corwin Press.
- Earl, L., & Katz, S. (2005). *Rethinking assessment with purpose in mind*. Western and Northern Canadian Protocol.
- Earl, L., & Katz, S. (2013). Getting to the core of learning: Using assessment for self-monitoring and self-regulation. In M. M. C. Mok (Ed.), *Self-directed learning oriented assessments in the Asia-Pacific* (pp. 123-137). Springer.
- Gonzales, N. A. (1994). Problem posing: A neglected component in mathematics courses for prospective elementary and middle school teachers. *School Science and Mathematics*, 94(2), 78-84. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1994.tb12295.x>
- Gould, H., Murray D. R., & Sanfratello, A. (2012). *Mathematical modeling handbook*. COMAP.
- Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, 7(4), 293-397. [https://doi.org/10.1016/S0959-4752\(97\)00006-6](https://doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00006-6)
- Howe, R. W. (2000). *Guided discovery*. National Academy for Educational Research. <https://terms.naer.edu.tw/detail/378143/>

- Imm, K., & Larber, M. (2013). The footprint problem: A pathway to modeling. *Math Teach Middle School*, 19(1), 46-54. <https://doi.org/10.5951/mathteacmidscho.19.1.0046>
- Koellner-Clark, K., & Lesh, R. (2003). Whodunit? Exploring proportional reasoning through the footprint problem. *School Science and Mathematics*, 103(2), 92-98. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2003.tb18224.x>
- Krawitz, J., Schukajlow, S., Chang, Y. P., & Yang, K. L. (2017). Reading comprehension, enjoyment, and performance in solving modelling problems: How important is a deeper situation model? In B. Kaur, W.-K. Ho, T. L. Toh, & B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 97-104). PME.
- Lavine R. A. (2012). Guided discovery learning. In N. M. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the sciences of learning*. Springer.
- Lee, J. J., & Hammer, J. (2011). Gamification in education: What, how, why bother? *Academic Exchange Quarterly*, 15(2), 1-5.
- Lockhart, P. (2009). *A mathematician's lament: How school cheats us out of our most fascinating and imaginative art form*. Bellevue Literary Press.
- Mayer, R. E. (2010). *Applying the science of learning*. Pearson.
- McLeod, D., & Adams, V. (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Springer-Verlag.
- Ministry of Education Singapore. (2019). *Mathematics syllabuses: Secondary one to four*.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. L., & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 international results in mathematics and science*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center. <https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/>
- Organisation for Economic Cooperation and Development. (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics and financial literacy*.
- O'Brien, T. C., Wallach, C., & Mash-Duncan, C. (2011). Problem-based learning in mathematics. *The Mathematics Enthusiast*, 8(1), Article 7. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1209>
- Pellegrino, J. W. (2017). Teaching, learning and assessing 21st century skills. In S. Guerriero (Ed.), *Pedagogical knowledge and the changing nature of the teaching profession* (pp. 223-251). Organisation for Economic Cooperation and Development.
- Piaget, J. (1970). *Science of education and psychology of the child*. Oxford University Press.
- Polya, G. (2004). *How to solve it - A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- Renninger, K. A., Hidi, S., & Krapp, A. (1992). *The role of interest in learning and development*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Roh, K. H. (2003). Problem based learning in mathematics. *ERIC Clearing House for Science Mathematics and Environmental Education*. Retrieved May 20, 2021, from <http://www.ericdigests.org/2004-3/math.html>
- Schoenfeld, A. H. (1983a). *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an*

- annotated bibliography*. Mathematical Association of America.
- Schoenfeld, A. H. (1983b). Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science*, 7, 329-363. [https://doi.org/10.1016/S0364-0213\(83\)80003-2](https://doi.org/10.1016/S0364-0213(83)80003-2)
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). MacMillan.
- Schroeder, T., & Lester, F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. Trafton & A. Shulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics (1989 Yearbook)*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Silver, E. A. (1982, January 4-6). Thinking about problem solving: Toward an understanding of meta cognitive aspects of mathematical problem solving [Paper presentation]. The Conference on Thinking, Fiji. [https://www.scirp.org/\(S\(vtj3fa45qm1ean45wffcz5%205\)\)/reference/referencespapers.aspx?referenceid=936875](https://www.scirp.org/(S(vtj3fa45qm1ean45wffcz5%205))/reference/referencespapers.aspx?referenceid=936875)
- Slavin, R. E. (2005). *Educational psychology: Theory and practice* (8th ed.). Allyn & Bacon.
- Sparrow, L. (2008). Real and relevant mathematics: Is it realistic in the classroom? *Australian Primary Mathematics Classroom*, 13, 4-8.
- Stevens, D. D., & Levi, A. J. (2005). *Introduction to rubrics: An assessment tool to save grading time, convey effective feedback, and promote student learning*. Stylus.
- Stacey, K. (2005). The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 341-350. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.004>
- Stacey, K., & Turner, R. (2015). *Assessing mathematical literacy*. Springer.
- Sternberg, R. J., & Spear-Swerling, L. (1996). *Teaching for thinking*. APA Books.
- Sternberg, R. J. (2009). *Cognitive psychology* (5th ed.). Wadsworth.
- Tout, D., & Spithill, J. (2015). The challenges and complexities of writing items to test mathematical literacy. In K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing mathematical literacy: The PISA experience* (pp. 145-171). Springer.
- Wendt, T., & Murphy, K. (2015). Integrating modeling steps into the high school curriculum. *The Mathematics Teacher*, 109, 374-379. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.109.5.0374>
- Wiggins, G. (1990). The case for authentic assessment. *Practical Assessment, Research, and Evaluation*, 2, Article 2. <https://doi.org/10.7275/ffb1-mm19>
- Wu, M., Tam, H.-P., & Jen, T.-H. (2016). *Educational measurement for applied researchers*. Springer Nature.
- Zbiek, R. M., & Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 89-112. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9002-4>

素養好問題：素養導向評量研發指南 / 吳正新, 林裕峯,  
吳添寶著. -- 初版. -- 新北市：國家教育研究院,  
民111.06

面；公分  
ISBN 978-626-7106-70-9(平裝)

1. CST: 教學研究 2. CST: 教學評量 3. CST: 中小學  
教育

523.3

111009257

**書名：**素養好問題——素養導向評量研發指南

**發行人：**林崇熙

**主編：**吳正新

**作者：**吳正新、林裕峯、吳添寶

**設計審核：**策略溝通辦公室

**美編設計：**秀威資訊科技股份有限公司

**出版機關：**國家教育研究院

**地址：**237201 新北市三峽區三樹路2號

**電話：**(02) 7740-7890

**傳真：**(02) 7740-7064

**網址：**<https://www.naer.edu.tw>

**排版印刷：**秀威資訊科技股份有限公司

**展售處：**國家書店松江門市

地址：104472 臺北市中山區松江路209號1樓

電話：(02) 2518-0207

網址：<https://www.govbooks.com.tw>

五南文化廣場

地址：403018 臺中市西區臺灣大道85號

電話：(04) 2226-0330

網址：<https://www.wunanbooks.com.tw>

**出版日期：**111年6月 初版一刷

111年10月 初版二刷

112年7月 初版三刷

**定價：**新臺幣260元

**G P N：**1011100803

**I S B N：**9786267106709

---

本書通過雙向匿名學術審查

本書著作財產權為國家教育研究院所有，欲使用本書內容，  
須徵求同意或書面授權。





什麼是「素養導向評量」？你想像中的「素養導向評量」是什麼？為什麼需要「素養導向評量」呢？本書帶你一窺「素養導向評量」的研發方法，從評量架構、素養導向試題與傳統試題的優缺點分析、素養導向試題研發方法的說明、評分規準的制定，到完成試題後自我檢核與團隊審查流程，均有完整且詳細說明。

為了讓讀者在閱讀的過程中，能直接對照命題說明與範例，本書一大特色是每個步驟均有對應的範例與實作練習，達到讀完即學會的效果。這些範例題都是經過多次的討論、並由專家審查、班級預試、全國施測後的優良試題，可作為實際命題引導與參考。此外，還提供一套因應素養導向評量的數學教學建議，讓教師在課室中落實素養導向教學的方法。

國家教育研究院

National Academy for Educational Research



ISBN 978-626-7106-70-9 定價 260元



9 786267 106709

GPN 1011100803