國民中學數學教材原型C冊(下)

陳昭地教授 主編

國家教育研究院 出版

國民中學數學領域教材原型C冊

國家教育研究院 編印

序

政府為回應立法院與民意的需求，於民國 92 年起責成本院組成委員會編撰九年一貫數學領域國中、小部編本教科書，經審定後上市供書，以平抑教科書價格，同時引領民間出版商改善教科書的品質。部編本教科書在完成教材示範編撰與制衡教科書市場之階段性任務後，轉型發展教材原型，本書即為教材原型的研發成果之一。

本書分為中學與小學，中學部分配合國中以上之數學教師的數學專業素養，編輯延伸性與原創性的題材，包含未來與國民教育第十年數學銜接息息相關的重要內容，提供教師編選相關教材之用，或提供教科書編輯者及民間出版業研發教師手冊及相關教材。小學部分：配合教師需求，著重於國小階段之數、計算、量與實測、幾何等相關教材教法。本套教材編撰之目的，在於能引發教師教學之共鳴，進而沿用於教學，故於其取材方向及內容，依中、小學之特性而有些許差異。

本書係由課程及教學研究中心數學教材原型研發編輯委員會陳昭地教授、鍾靜教授、謝堅教授、張東輝教授、曹博盛教授、黃幸美教授、陳彥廷教授、周筱亭研究員、李政豐教師、蘇進發教師、傅淑婷教師、李政憲教師、丁斌悅教師、莊國彰教師、魏慶雲教師、房昔梅教師、詹婉華教師、吳欣悅教師、胡蕙芬教師等，前後共計三年的辛勤投入，內容極具意義與參考價值，對落實數學教育，應該頗有助益。茲值付梓之前，特為之序，並致最高謝意。

國家教育研究院課程及教學研究中心主任

范信賢　謹識

2013 年 12 月

國民中學數學教材原型C冊（下）

目 次

主題3－1：全等三角形

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者：**傅淑婷

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　陳昭地

(一) 知道三角形全等的意義。

(二) 能利用直尺和圓規作已知線段。

(三) 能利用直尺和圓規作已知角。

(四) 能利用直尺和圓規作已知線段的垂直線。

(五) 知道基本的放大縮小相似概念。

三、教學目標：

(一) 能利用尺規作圖驗證三角形的 SSS、SAS、ASA、AAS、RHS 全等性質。

(二) 能知道 AAA 和 SSA 條件不一定構成全等三角形。

(三) 能利用直尺和圓規作已知線段的中點。

(四) 能利用直尺和圓規作已知角的平分線。

(五) 能尋找圖形中的全等三角形。

(六) 能利用三角形的全等性質作幾何推理。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

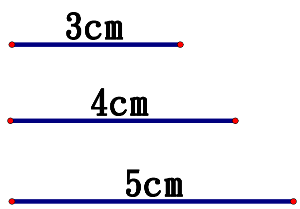
在幾何推理中，常利用全等三角形性質以推論出對應邊相等、對應角相等。本單元先利用尺規作圖帶領學生以實作代替證

明，驗證在 SSS、SAS、ASA、AAS、RHS 條件下，只能畫出全等的三角形，說明存在這些全等三角形性質。同時對於不存在 AA、SSA 全等，也以畫出不全等的三角形反駁。接著實際運用這些全等的性質，尺規作圖出已知線段的中點和已知角的平分線。同時考慮初學者對於如何在複雜圖形中尋找全等三角形有困難，所以本單元利用動態幾何概念，只要移動或旋轉可以疊合在一起的三角形，就是全等三角形。教師可以先引導學生大膽的猜測出全等三角形，再以全等三角形的條件推理驗證。

六、教學活動：

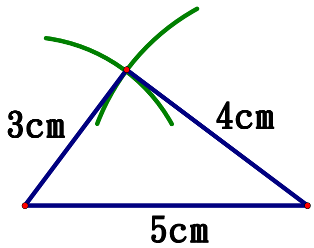
活動一：同學都知道所謂全等三角形，是指三個對應邊相等且三個對應角都相等的三角形。但是在實際運用上，我們可以不要每次都檢驗三個對應邊、三個對應角六個條件嗎？可以省略某些步驟而三角形仍然全等嗎？下面步驟請大家分別尺規作圖，並且探討大家畫出的三角形一樣嗎？都是全等三角形嗎？

步驟 1：請畫出邊長為 3 公分、4 公分、5 公分的三角形。



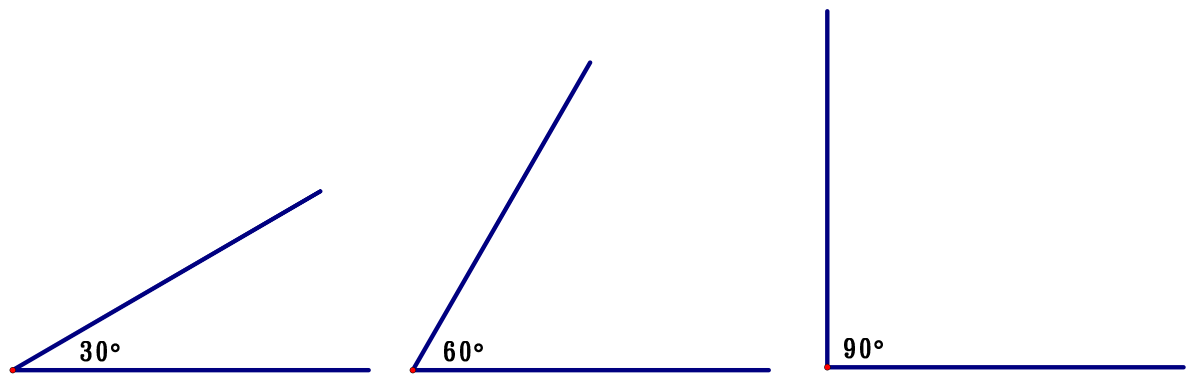
欣賞一下左右同學畫出來的三角形，大家畫的形狀一樣嗎？量一量你所畫出來的三角形三個內角的度數。三內角的度數取整數度數大約是多少？大家畫的是不是全等三角形？想想看給定三角形的三個邊，以大家的作圖方法，不考慮人為的誤差，是否就能確定圍出的三個角都對應相等，這就是三角形 SSS 全等性質。

SSS 作圖如下：



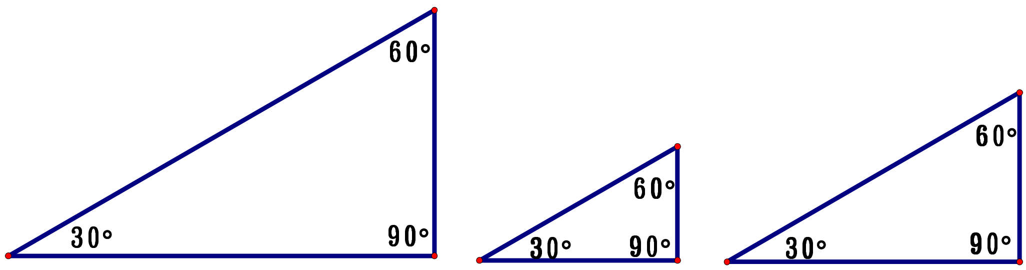
三內角的度數取整數值大約為 37°、53°、90°

步驟 2：請畫出三內角為 30°、60°、90° 的三角形。

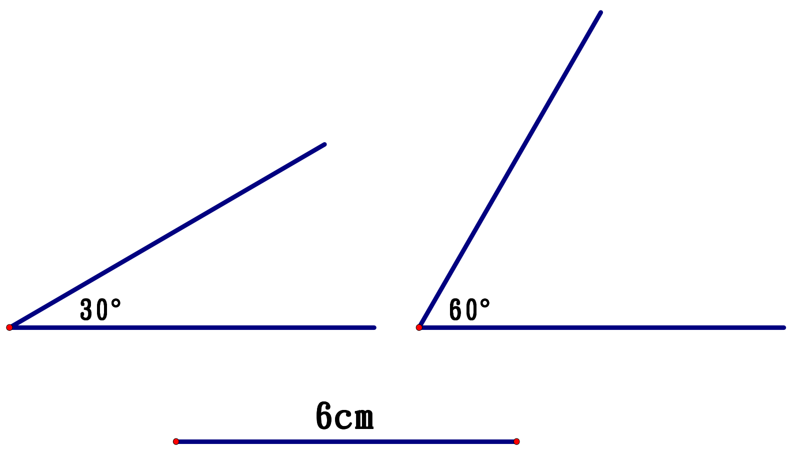


說說看這次作圖中你有甚麼發現？符合 AAA 的條件，大家畫出的三角形是否全等？想想看畫出來的三角形是不是我們常見的三角板中的一種？

AAA 作圖如下：如下圖中，可以任意作出三種符合 AAA 條件，三邊長卻大小不一樣的三角形。



步驟 3：步驟 2 中同學可以發現三角形只要二個對應角相等，利用三角形內角和等於 180° 就可以知道第三個對應角也相等。但是 AAA 並不構成全等的條件，大家在畫圖過程中，每個人對邊長的選擇長度不一樣，所以畫出的其實是放大縮小的相似三角形。如果在 AA 條件下，再加上一個對應邊(S)相等，則迫使放大縮小成同樣大小，這就是三角形 AAS 或 ASA 全等。下面二種情況請大家作圖體驗看看：已知 30° 、60° 、6 公分

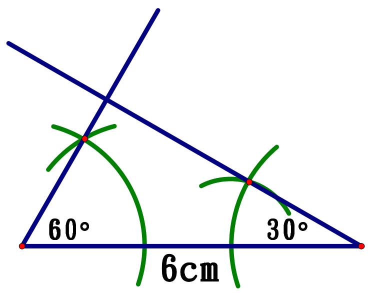


(1) 請畫出二內角為 30°、60°，夾邊為 6 公分的三角形。

（作圖提示：判斷出題目所給的條件是 ASA，

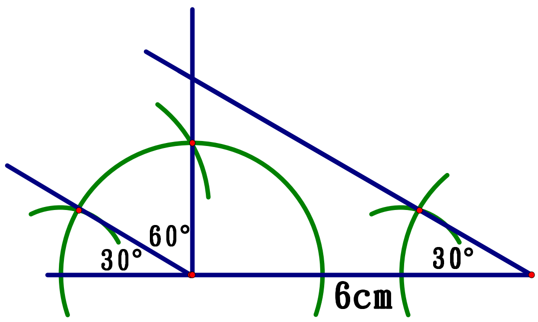
所以先畫 6 公分為夾邊，兩端再作 30° 和 60°）

ASA 作圖如下：



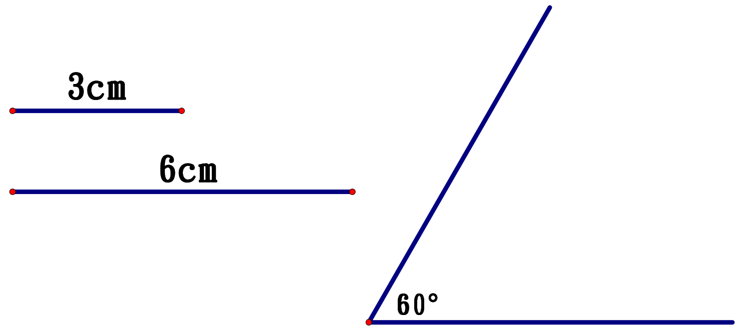
(2) 請畫出二內角為 30°、60°，且 60° 的對邊為 6 公分的三角形。（作圖提示：判斷出題目所給的條件是 AAS，先畫出第三個對應角是 $180°-30°-60°$，再以 ASA 方式作圖。）

AAS 作圖如下：



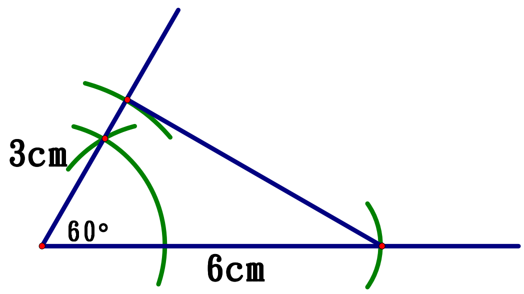
看左右同學是否畫出同樣的三角形，想想看是不是加上一個對應邊（6 公分）的條件，就可以畫出全等的三角形。如（1）給的條件是 ASA 全等，而（2）給的條件則是 AAS 全等。

步驟 4：請畫出邊長為 3 公分、6 公分，夾角為 60° 的三角形。



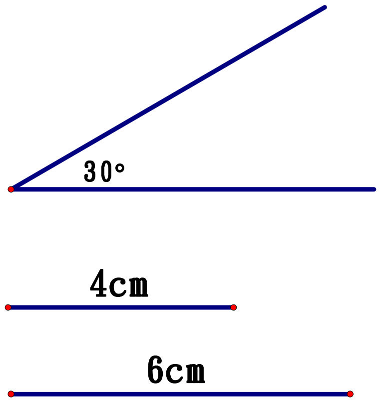
欣賞一下左右同學畫出來的三角形，大家畫的形狀一樣嗎？量一量你所畫出來的三角形三個內角的度數。三內角的度數取整數度數大約是多少？3 公分、6 公分以外的第三邊長度是多少？大家畫的是不是全等三角形？想想看以大家的作圖方法，不考慮人為的誤差，是否畫出的三角形都全等？這就是三角形 SAS 全等性質。

SAS 作圖如下：



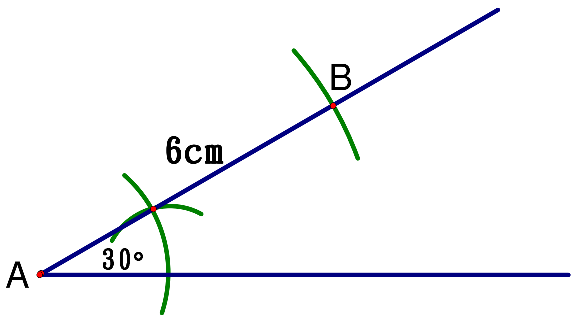
步驟 5：步驟 4 中，已知三角形的二個邊之後，如果給定的角不是這二個邊的夾角，也就是我們想要來探討 SSA 是否構成全等？

(1) 畫出邊長為 4 公分、6 公分且 4 公分的對角為 30° 的三角形。

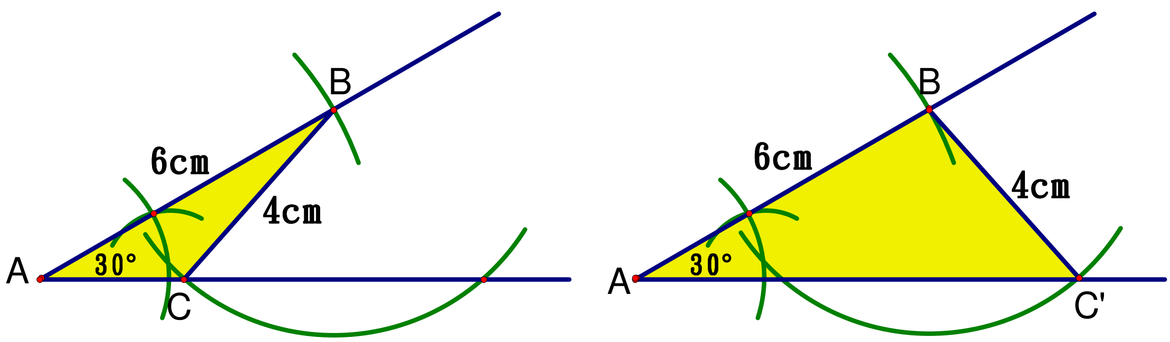


（作圖提示：先畫出∠A=30°，因為要求 4 公分的對角為 30°，所以在 30° 的一邊上取 $\overline{AB}=6$ 公分。）

SSA 作圖如下：

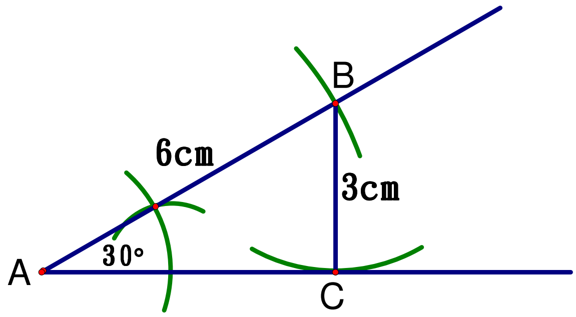


（作圖提示：要作出 30° 的對邊 4 公分，所以以 B 為圓心，4 公分為半徑畫弧，得到兩個交點 C 和 C'。）



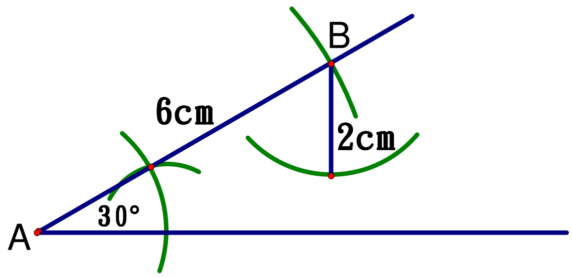
符合 SSA 條件可以畫出△ABC 和△ABC'二個三角形，所以 SSA 不一定畫出全等的三角形。

(2) 上題 SSA 作圖中，如將 4 公分改成 3 公分時，以 B 為圓心，3 公分為半徑畫弧，剛好得到一個交點 C。

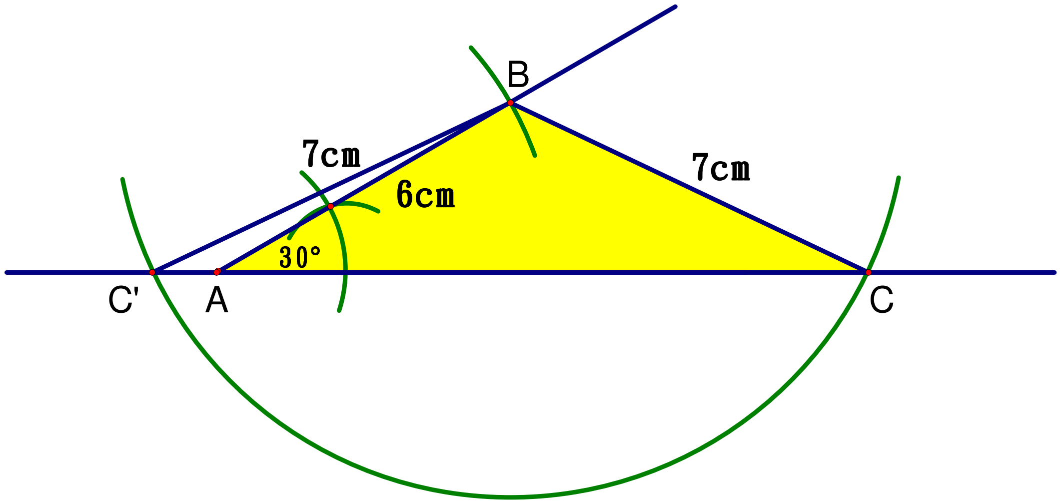


觀察此時∠C=90° ，這種狀況只畫出一個三角形，我們特別稱為 RHS 全等，R 指的是直角(right angle)，H、S 指斜邊(hypotenuse)和一個股。所以 SSA 的條件下，當角度是直角時可以確定三角形全等。

(3) 上題 SSA 作圖中，如將 4 公分改成 2 公分時，以 B 為圓心，2 公分為半徑畫弧，則無法得到交點，這應該是錯誤的條件，無法畫出三角形。



(4) 上題 SSA 作圖中，如將 4 公分改成 7 公分時，以 B 為圓心，7 公分為半徑畫弧，雖然得到兩個交點 C 和 C' ，但是只有△ABC 合乎題意，另一個△ABC'中∠C'AB=150° 是不合乎題意的三角形。



綜合以上所有 SSA 的條件，因為角度和邊長的不同，有時候畫出二個三角形、有時畫出一個三角形。所以沒有三角形 SSA 全等性質。

(5) 想一想 SSA 作圖的狀況，我們通常建議先作已知條件 $\angle A=30^\circ$，再作 $\angle A$ 的鄰邊 6 公分，接著要作 $\angle A$ 的對邊時，對邊的長度 a 公分會決定畫出的三角形個數：

歸納以下結論，以 $\angle A=30^\circ$，$\angle A$ 的鄰邊 6 公分，

①當 $a<3$ 時，作出____個三角形。

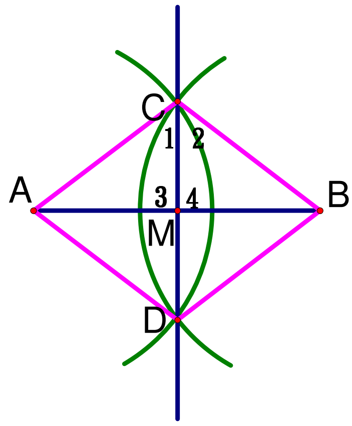
②當 $a=3$ 時，作出____個三角形。

③當 $3<a<6$ 時，作出____個三角形。

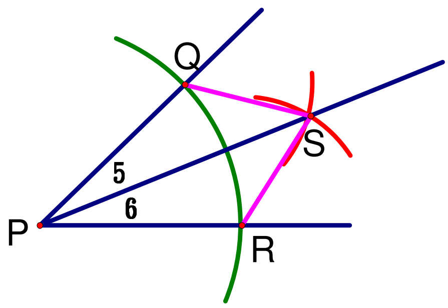
④當 $a>6$ 時，作出____個三角形。

隨堂練習 1：

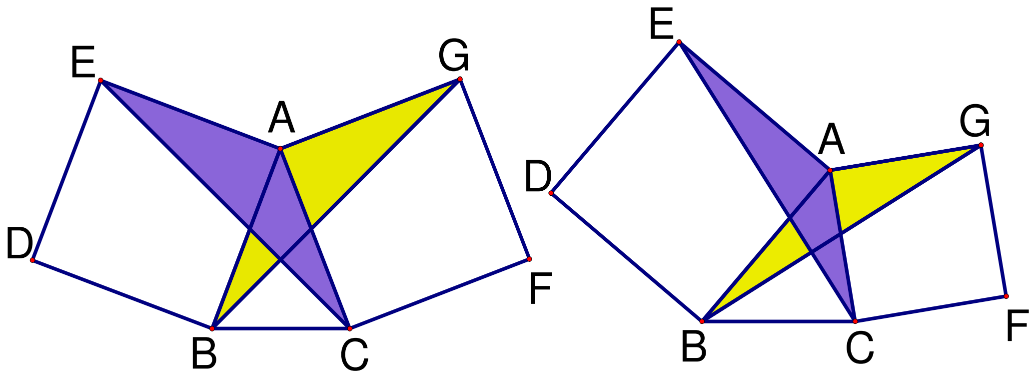
(1) 如下圖，已知$\overline{AB}$，**分**別以 A、B 兩點為圓心，大於$\frac{1}{2}\overline{AB}$的相同長度為半徑畫兩弧，兩弧相交於 C、D 兩點。連接$\overline{CD}$，可以說說看$\overline{CD}$是$\overline{AB}$的垂直平分線嗎？



(2) 如下圖，已知∠P，以 P 為圓心，適當長為半徑畫弧，此弧與∠P 的兩邊交於 Q、R 兩點。**分**別以 Q、R 兩點為圓心，大於$\frac{1}{2}\overline{QR}$的相同長度為半徑畫兩弧，兩弧相交於 S 點。連接$\overline{PS}$，可以說說看$\overline{PS}$是∠P 的角平分線嗎？



活動二：有人說幾何學之美麗，是發現，不是發明。那些隱藏在圖形中的美麗特性，等著你慧眼獨具的去觀察與發現，接著我們就利用全等三角形性質來尋找圖形中相等的對應邊或對應角。譬如下左圖：畫一個等腰△ABC，並在兩腰上作正方形 ABDE 和正方形 ACFG，連接$\overline{BG}$和$\overline{CE}$，觀察$\overline{BG}$和$\overline{CE}$是否等長？$\overline{BG}$和$\overline{CE}$是否互相垂直？又譬如下右圖：△ABC 是不規則的三角形，相同作法，觀察$\overline{BG}$和$\overline{CE}$是否等長？$\overline{BG}$和$\overline{CE}$是否互相垂直？

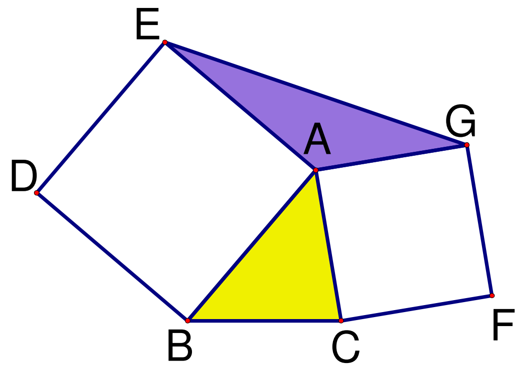


步驟 6：請說明左圖中△ABG 和△AEC 是否全等？$\overline{BG}$和$\overline{CE}$是否等長，$\overline{BG}$和$\overline{CE}$是否互相垂直？請說明理由。

步驟 7：請說明右圖中△ABG 和△AEC 是否全等？$\overline{BG}$和$\overline{CE}$是否等長，$\overline{BG}$和$\overline{CE}$是否互相垂直？請說明理由。

步驟 8：想一想上面二個圖形中△ABG 轉動一下，可以和△AEC 完全疊合在一起嗎？你覺得轉動幾度呢？

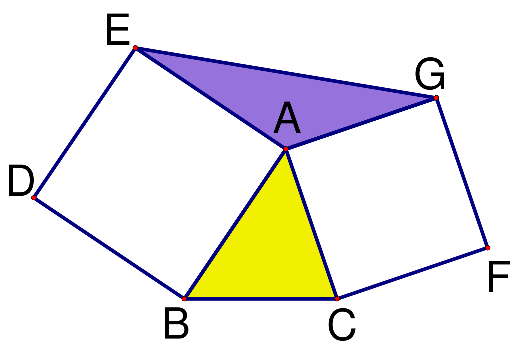
活動三：上一個活動中，你可以看出來即使先畫的△ABC 不等腰，兩個圖形在不規則中仍有相同的規律，下面的活動我們就只探討不規則△ABC 的情形。如果上一個活動中，我們改成連接 $\overline{EG}$ ，你發現什麼特別的性質？

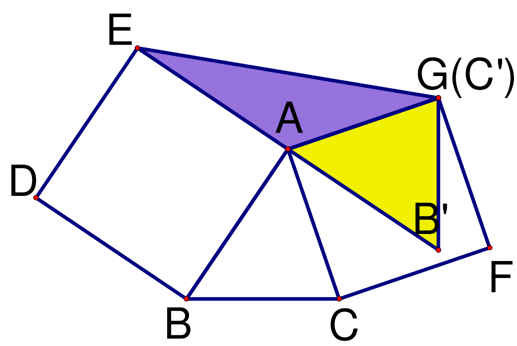


步驟 9：請說明上圖中△ABC 和△AEG 是否全等？

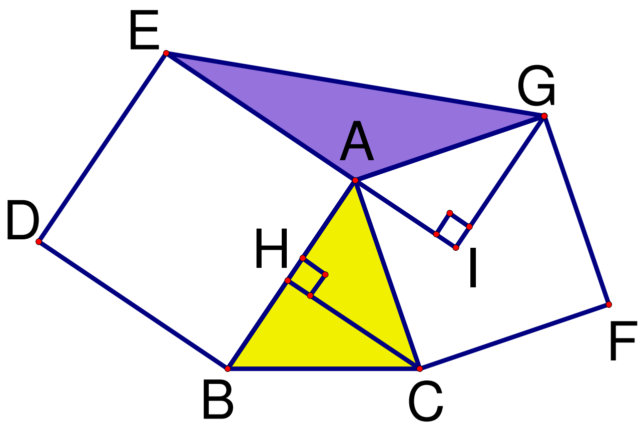
∠BAC 和∠EAG 有甚麼特別關係？

步驟 10：將上面圖形中△ABC 逆時針轉動 90° ，(如下右圖)讓 $\overline{AC}$ 疊合到 $\overline{AG}$ 邊上， $\overline{AB}$ 轉到 $\overline{AB'}$，△ABC 和△AEG 併排在一起。你有甚麼發現呢？





步驟 11：如果不轉動△ABC ，可以直接探討△ABC 和△AEG 的面積相等嗎？



因為三角形面積=(底×高)÷2，

所以可以找到△ABC 和△AEG 有等長的底，

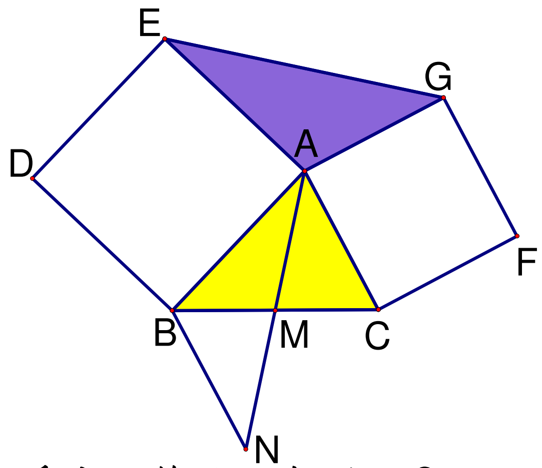
例如底 $\overline{AB}=\overline{AE}$ ，

接著如上圖畫出 $\overline{AB}$ 邊上的高 $\overline{CH}$ ，$\overline{AE}$ 邊上的高 $\overline{GI}$ ，

你能說出兩個高相等的理由嗎？

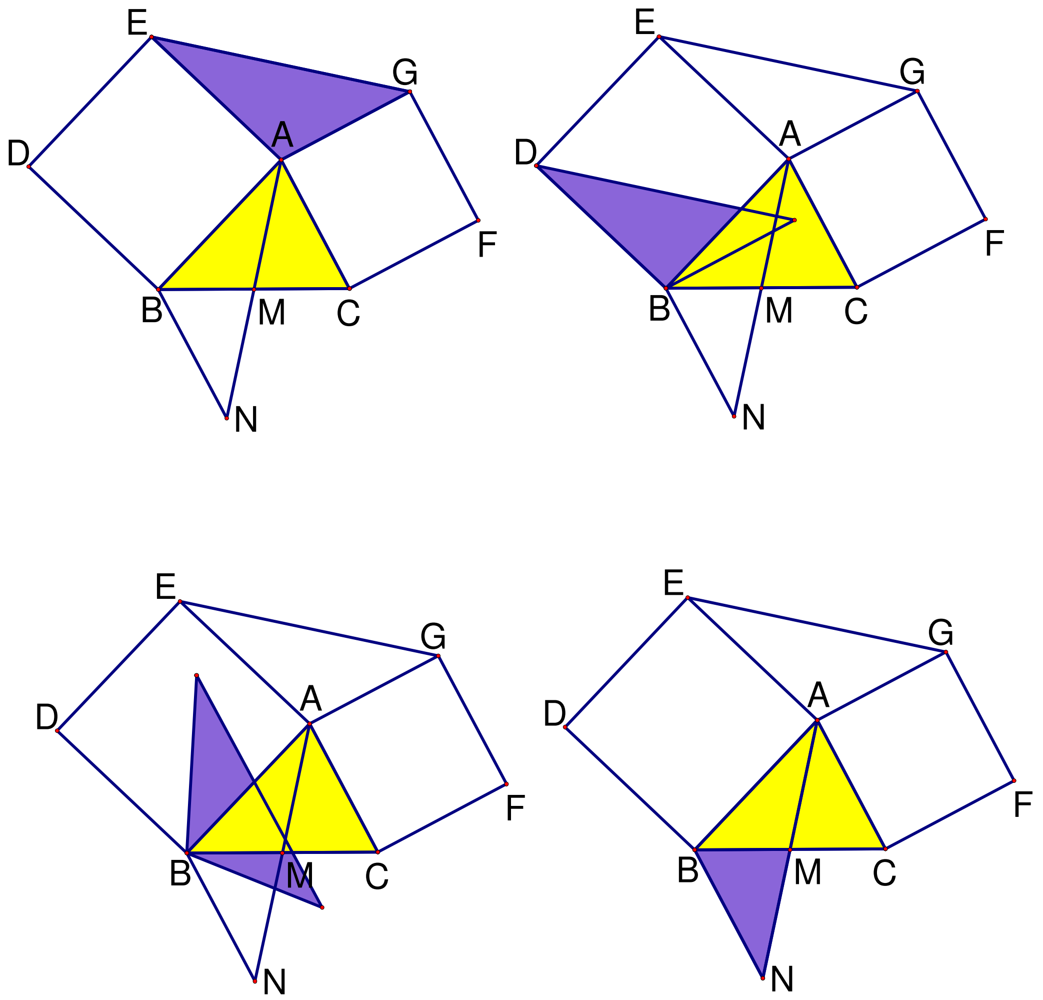
可以推論出△ABC 和△AEG 的面積相等。

活動四：在活動二的圖中，畫出△ABC 的中線 $\overline{AM}$ ，並延長 2 倍中線使 $\overline{AN}=2\overline{AM}$ ，連接 $\overline{BN}$ ，你發現什麼特別的性質？

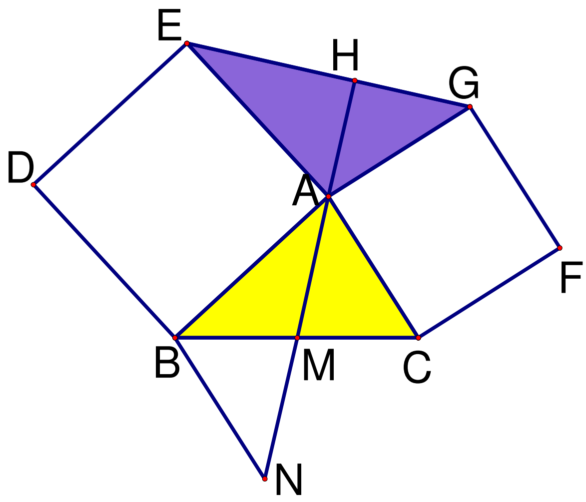


步驟 12：上圖中你有看出全等的三角形嗎？說說看△AMC 和△NMB 是否全等？你利用甚麼全等性質？

步驟 13： 還有別的全等的三角形嗎？說說看△ABN 和△AEG 是否全等？下圖可以看出△AEG 移動到△ABN 的過程，你也可以利用三角形的全等性質說明理由。



步驟 14： 延長△ABC 的中線 $\overline{AM}$ ，和 $\overline{EG}$ 相交於 H 點，想想看 $\overline{AH}$ 是△AEG 中的高、中線或角平分線？你的理由是甚麼？



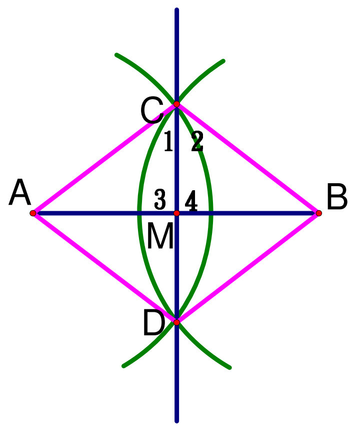
教學活動參考解答：

活動一：

步驟 5：(5) 分別作出 0、1、2、1 個三角形。

隨堂練習 1：

(1) 如右圖，



$\because \overline{AC}=\overline{BC}$，$\overline{AD}=\overline{BD}$，$\overline{CD}=\overline{CD}$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCD$(SSS 全等)。

$\therefore \angle 1=\angle 2$

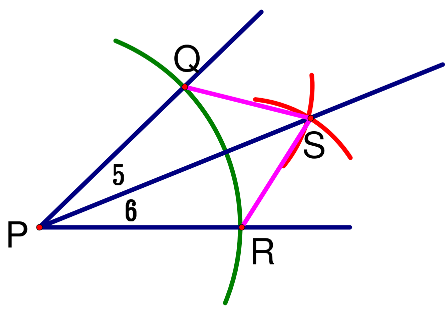
$\because \angle 1=\angle 2$，$\overline{AC}=\overline{BC}$，$\overline{CM}=\overline{CM}$

$\therefore \triangle ACM \cong \triangle BCM$(SAS 全等)。

$\therefore \overline{AM}=\overline{BM}$，$\angle 3=\angle 4=90^\circ$

可以知道 $\overline{CD}$ 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分線。

(2) 如右圖，



$\because \overline{PQ}=\overline{PR}$，$\overline{QS}=\overline{RS}$，$\overline{PS}=\overline{PS}$

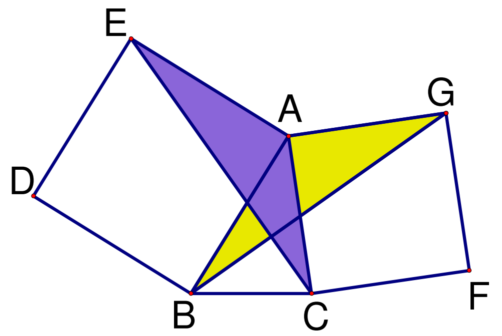
$\therefore \triangle PQS \cong \triangle PRS$(SSS 全等)。

$\therefore \angle 5 = \angle 6$

可以知道$\overline{PS}$是$\angle$P 的角平分線。

活動二：

步驟 6、7：二個圖的理由都相同。

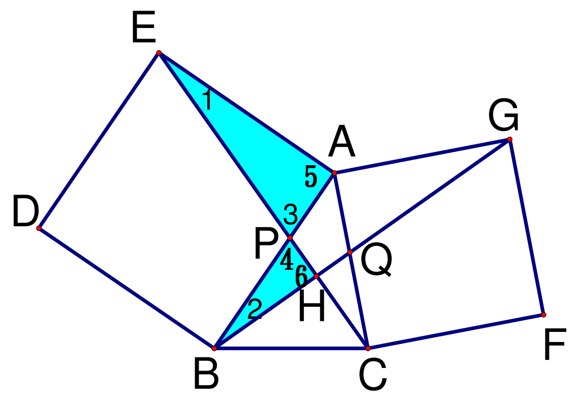


$\because \overline{AE} = \overline{AB}$，$\overline{AC} = \overline{AG}$，

$\angle EAC = \angle BAC + 90^\circ = \angle BAG$

$\therefore \triangle EAC \cong \triangle BAG$(SAS 全等)

$\therefore \overline{CE} = \overline{BG}$，$\angle 1 = \angle 2$



$\triangle$APE 和$\triangle$BPH 中

$\because \angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$

$\therefore \angle 6 = \angle 5 = 90^\circ$

得知$\overline{CE}$和$\overline{BG}$互相垂直且等長。

步驟 8：$\triangle$ABG 順時針轉動 90 度，可以和$\triangle$AEC 完全疊合在一起。

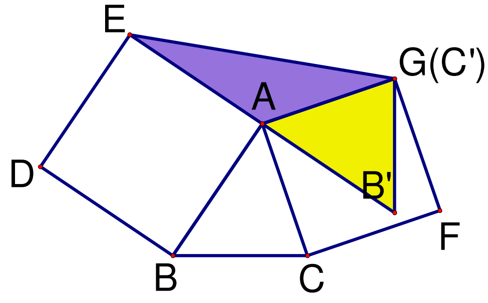
步驟 9：$\triangle$ABC 和$\triangle$AEG 不全等。$\angle BAC + \angle EAG = 180^\circ$

步驟 10：$\triangle$ABC 和$\triangle$AEG 併排在一起

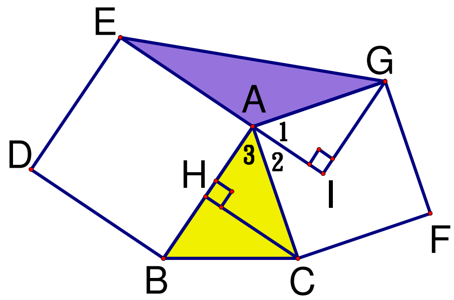
E、A、 B’在同一直線上，

$\overline{AB}$轉到$\overline{AB'}$，$\overline{AE} = \overline{AB'}$

$\triangle$AEG 和$\triangle$AB’G 等底同高，



所以面積相等。



步驟 11：∵$\angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3=90$

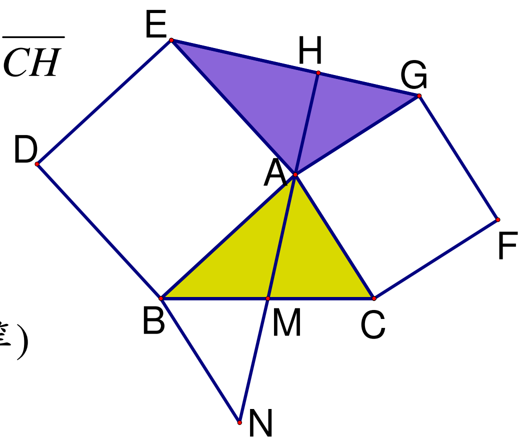
∴$\angle 1=\angle 3$

又∵$\angle AIG=\angle AHC=90^\circ$

$\overline{AG}=\overline{AC}$

∴$\triangle AIG \cong \triangle AHC$(AAS 全等)

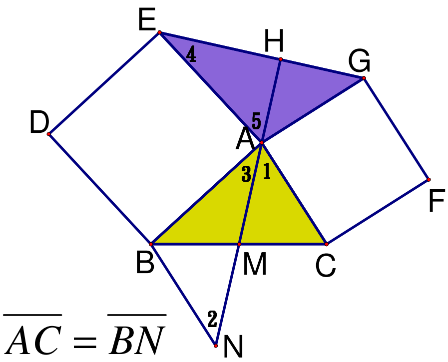
可以說明二個三角形的高$\overline{GI}=\overline{CH}$



步驟 12：∵$\overline{AM}=\overline{MN}$，$\overline{CM}=\overline{BM}$，

$\angle AMC=\angle NMB$

∴$\triangle AMC \cong \triangle NMB$ (SAS 全等)



步驟 13：∵$\angle 1=\angle 2$，

$\angle BAC+\angle EAG=180^\circ$

∴$\angle EAG=180^\circ-(\angle 1+\angle 3)$

$=180^\circ-(\angle 2+\angle 3)=\angle ABN$

∵$\angle EAG=\angle ABN$，$\overline{AE}=\overline{AB}$，$\overline{AG}=\overline{AC}=\overline{BN}$

∴$\triangle EAG \cong \triangle ABN$ (SAS 全等)。

步驟 14：∵$\triangle EAG \cong \triangle ABN$

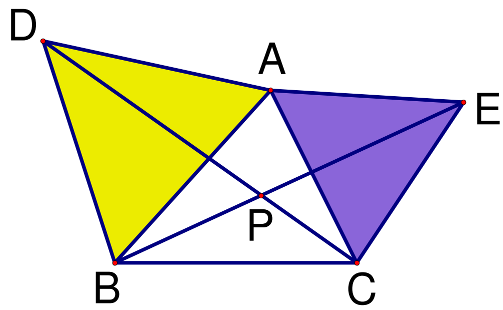
∴$\angle 3=\angle 4$

∴$\angle 4+\angle 5=\angle 3+\angle 5=90^\circ$

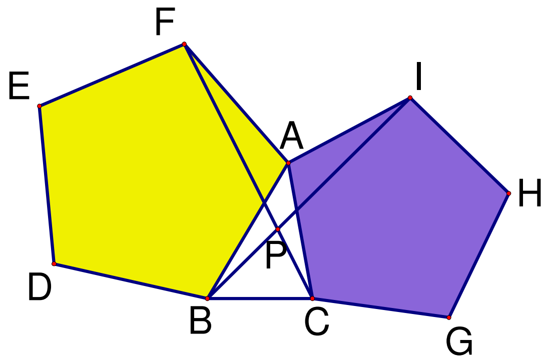
所以$\overline{EG}\perp\overline{AH}$，$\overline{AH}$是$\triangle AEG$的高。

七、指定作業：

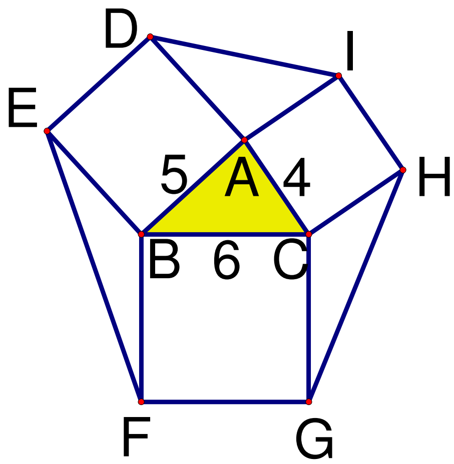
1. 畫一個△ABC，在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 邊上作正△ABD 和正△ACE，連接 $\overline{BE}$ 和 $\overline{CD}$，觀察 $\overline{BE}$ 和 $\overline{CD}$ 是否等長？$\overline{BE}$ 和 $\overline{CD}$ 的夾角∠DPB 是幾度？



2. 畫一個△ABC，在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 邊上作正五邊形 ABDEF 和正五邊形 ACGHI，連接 $\overline{BI}$ 和 $\overline{CF}$，觀察 $\overline{BI}$ 和 $\overline{CF}$ 是否等長？$\overline{BI}$ 和 $\overline{CF}$ 的夾角∠FPB 是幾度？



3. 參考下圖，已知△ABC 的三邊長分別為 4、5、6，在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 和 $\overline{BC}$ 邊上分別作正方形，並連接成六邊形 DEFGHI，計算六邊形 DEFGHI 的面積？



指定作業參考解答：

1. 可以說明△DAC ≅△BAE(SAS 全等)，

   $\overline{BE}$ 和 $\overline{CD}$ 等長。$\overline{BE}$ 和 $\overline{CD}$ 的夾角∠DPB=60°

2. 可以說明△FAC ≅△BAI(SAS 全等)，

   $\overline{BI}$ 和 $\overline{CF}$ 等長。$\overline{BI}$ 和 $\overline{CF}$ 的夾角∠FPB=108°

3. ∵△ABC=△ADI=△BEF=△CGH=$\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

   ∴六邊形 DEFGHI 的面積=$77+15\sqrt{7}$

八、教學活動注意事項：

1. 教學活動時間建議如下：第一節課，活動一利用尺規作圖體會三角形的全等，所以活動進行時，最好等待學生實際完成作圖，並互相比較畫出的三角形是否全等？希望學生從操作中分辨甚麼條件一定畫出全等的三角形，甚麼條件則不一定畫出全等三角形。教學動機與作圖說明：約 5 分鐘，步驟 1：

約 5 分鐘，步驟 2：約 5 分鐘，步驟 3：約 10 分鐘，步驟 4：約 5 分鐘，步驟 5：約 10 分鐘，隨堂練習 1：約 5 分鐘。(若時間不足，可留作課後作業)。第二節課，教師在帶領學生尋找全等三角形時，首要任務就是觀察。當學生有任何小小發現時，都以言辭鼓勵並培養發表的氣氛，畢竟數學家眼光就是要能發現平常人所沒有注意的細節或特性。接著再以幾何推理的步驟一一尋求等邊或等角的條件，利用全等三角形性質來解說觀察的結果。活動二：約 10 分鐘，活動三：約 15 分鐘，活動四：約 20 分鐘。

2. 本單元所舉例的全等三角形圖形，在旋轉或平移後會疊合在一起，教師可下載附錄的 GSP 上課檔案，在課堂上以電腦動態呈現，讓學生更容易看出相等的對應角與對應邊。之後再要求學生寫出全等三角形的性質解說。
3. 在各活動間教師宜巡堂走動，加強瞭解學生學習情形。
4. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 歸納 SSA 作圖的狀況，已知條件∠A，∠A 的鄰邊長 b 公分，∠A 的對邊長 a 公分，畫出的三角形個數有以下結論：

(1) 當 $a < b\sin A$ 時，作出 0 個三角形。

(2) 當 $a = b\sin A$ 時，作出 1 個三角形。

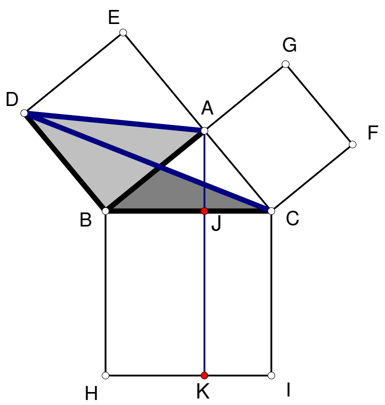
(3) 當 $b\sin A < a < b$ 時，作出 2 個三角形。

(4) 當 $a > b$ 時，作出 1 個三角形。

2. 利用三角形的全等可以解說畢氏定理。在幾何原本第一卷命題 47 中記載著歐幾里得(B.C.300 年) 解說畢氏定理的方法：

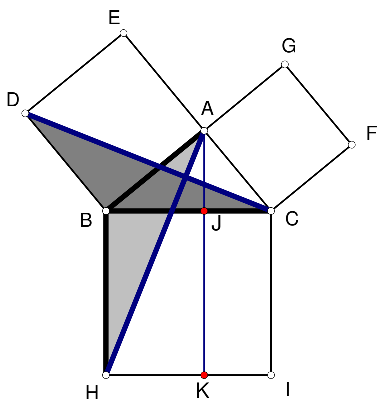
下圖中，欲說明∠A＝90° 時，$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$

只需證明正方形 ABDE＋正方形 ACFG＝正方形 BCIH 面積。

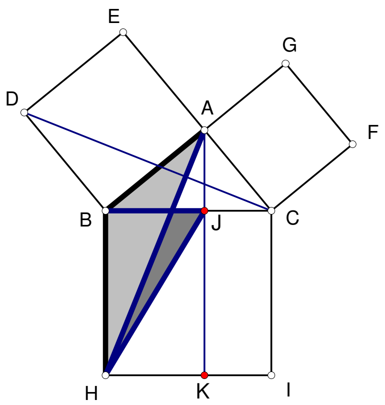


左圖中：

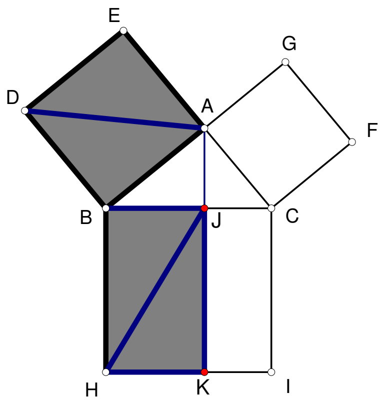
1. 過 A 作輔助線 $\overline{AK} // \overline{BH}$ 。
2. △DAB＝△DBC
   (同底等高等面積變換)



3. △DBC＝△ABH
   (二△全等，所以面積相等)



4. △ABH＝△BHJ
 (同底等高等面積變換)



5. 由以上 2.～4.知
 △DAB＝△BHJ
∴正方形 ABDE＝長方形 BHKJ
同理正方形 ACFG＝長方形 CIKJ

結論：
正方形 ABDE＋正方形 ACFG
＝正方形 BCIH 面積

主題 3－2：相似三角形

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　**撰寫者：**傅淑婷

二、先備知識：　　陳昭地

(一) 知道基本的放大縮小相似概念。

(二) 知道三角形的 SSS、SAS 全等性質。

(三) 知道三角形中兩邊之和大於第三邊。

三、教學目標：

(一) 能利用三角網格圖來解說三角形的 AA、SSS、SAS 相似性質。

(二) 能利用三角形的 AA、SSS、SAS 相似性質，判斷三角形是否相似。

(三) 在日常生活中，能利用相似形概念作測量。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

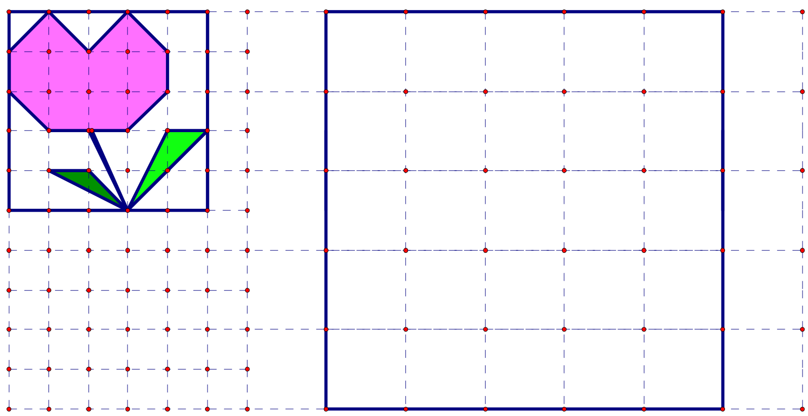
五、教學說明：

學生瞭解三角形的全等概念後，本單元主要是介紹基本的三角形相似概念。活動一複習小學學過的放大、縮小圖概念，活動二利用三角形網格圖來說明三角形的 AA、SSS、SAS 相似性質。活動三將三角形的相似性質應用於一些日常的測量或幾何圖形中。對於相似三角形更深入的應用，可繼續研讀本冊單元主題：3-6 正五邊形與黃金三角形、3-7 直角三角形母子相似定理與海龍公式。

六、教學活動：

活動一：我們在小學學過如何作出已知圖形的放大圖或縮小圖。有兩種最簡單可行的方法，一是直接放到影印機下面，選取放大或縮小倍率，再複雜的圖形都可以作出形狀相同的放大縮小圖。但是若不藉助機器，我們可以選擇以方格紙，改變方格的單位長，利用描點畫出一些簡易圖形的放大圖或縮小圖。

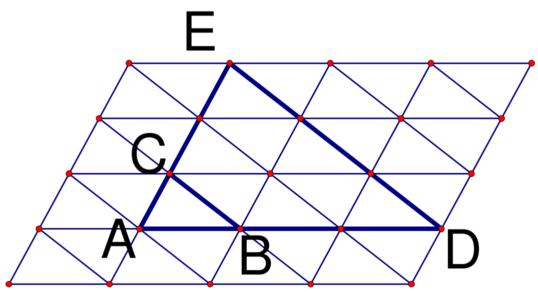
步驟 1：在下面方格中畫出左圖的 2 倍放大圖：



活動二：活動一中的放大或縮小圖都是原圖形的相似圖形，不過在國中的幾何探討時，我們特別關注相似多邊形。相似多邊形是指兩多邊形所有對應的角度都相等，對應的邊長都是一樣的比例。所以要檢驗兩個三角形是否相似，我們需要檢驗三個對應角相等而且三個對應邊等比例。這六個條件是否可以省略一些？記得在判斷三角形全等時，可以只用 SSS、SAS、ASA、AAS、RHS 條件，那麼三角形的相似呢？

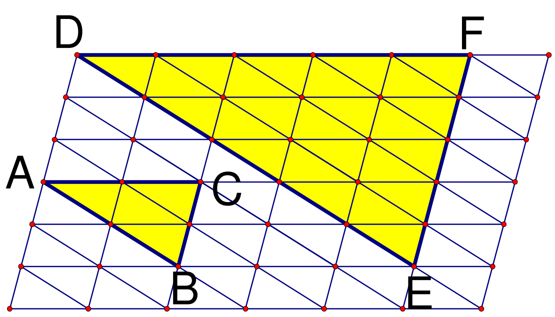
步驟 2：先討論 AA 相似。

觀察△ABC 和△ADE，因為三個對應角相等，所以可以將三角形疊合，並對著三邊作出三組平行線，形成如右圖的三角形網格，請觀察三個對應邊的比例是否相等？由三個對應角相等可以推出三個對應邊等比例，這就是三角形 AA 相似性質。我們用符號表示△ABC～△ADE (AA 相似)

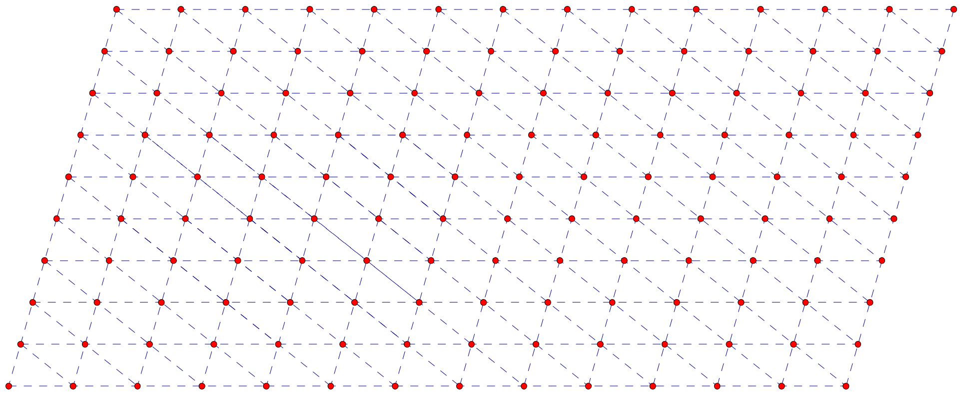


步驟 3：觀察△ABC 和△DEF，已知三個對應角相等，所以可以對著三邊作出三組平行線，形成如上圖的三角形網格，請觀察三個對應邊的比例是否相等？

我們可以推出△ABC～△DEF (AA 相似)？



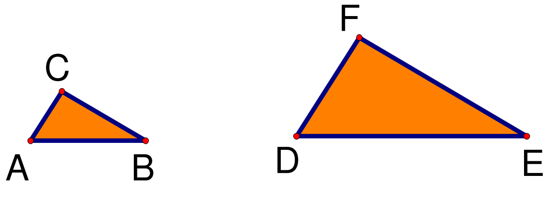
步驟 4：請在下圖的三角形網格中，畫出兩個三角形，使它們的對應角都相等，對應邊的比例都是 3：4。想一想這兩個三角形是否相似？



再任意畫一個三角形，想想看是否只要三邊沿著網格，就可以確定三個對應角都與前兩個三角形對應相等？

觀察它們的三個對應邊比例一樣嗎？是不是大家畫的各式各樣三角形都相似？這些三角形說明了只要 AAA 條件，則可以推出三個對應邊等比例，這就是三角形 AA 相似性質。

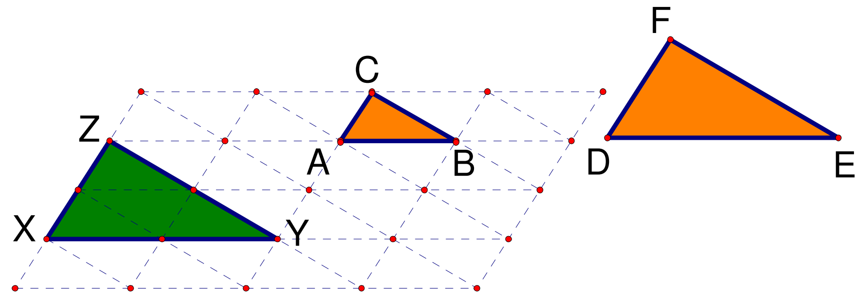
步驟 5：接著討論 SSS 是否相似？這裡的 SSS 指的是△ABC 和△DEF 它們的三個對應邊都成相同比例，是否可以說明△ABC 和△DEF 相似？



為了方便說明，假設$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{1}{2}$

我們沿著△ABC 的三邊作出三角形網格，並且在網格

內畫出△XYZ，使得$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{XY}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{YZ}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{XZ}}=\dfrac{1}{2}$



根據步驟 4，我們知道△ABC～△XYZ

因為$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{1}{2}$且$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{XY}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{YZ}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{XZ}}=\dfrac{1}{2}$

所以$\overline{DE}=\overline{XY}$，$\overline{EF}=\overline{YZ}$，$\overline{DF}=\overline{XZ}$。

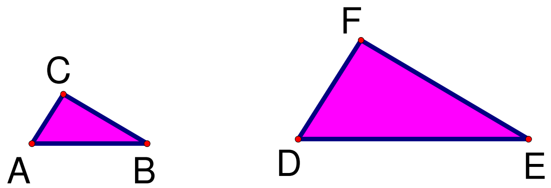
利用三角形 SSS 全等性質，我們知道△DEF≅△XYZ。

我們在三角形網格中，畫一個與△ABC 相似的△XYZ，再說明△DEF≅△XYZ，所以說明了△ABC 和△DEF 相似，由以上步驟我們知道 SSS 條件可以推出三角形相似。

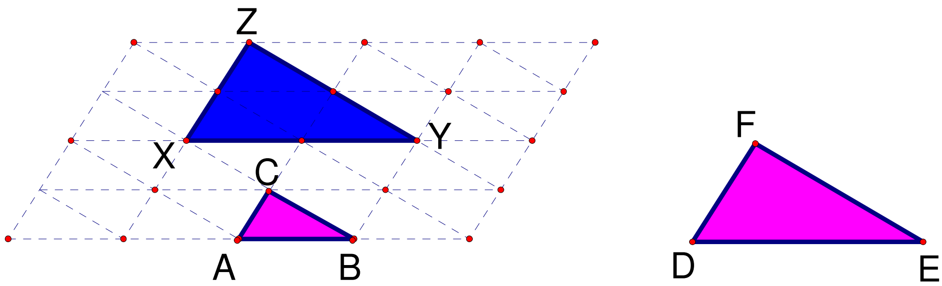
步驟 6：討論 SAS 相似。

下圖△ABC 和△DEF 中，有兩個對應邊成相同比例，且夾角相等。假設已知∠A=∠D，且$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{1}{2}$

是否可以說明△ABC 和△DEF 相似？



仿照步驟 5 的方法，沿著△ABC 的三邊作出三角形網格，並且在網格內借用一個△XYZ，

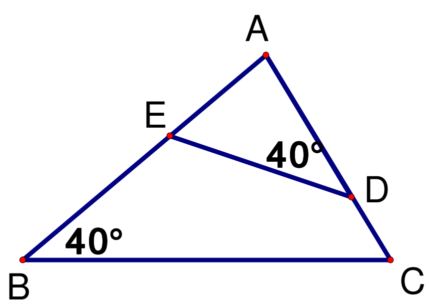


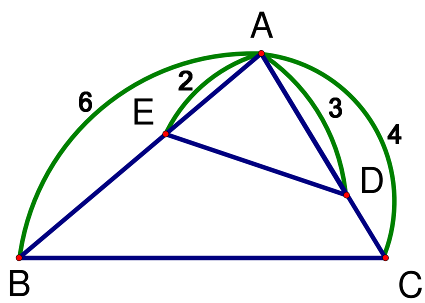
你可以說說看△ABC 和△DEF 相似？

以上步驟我們知道 SAS 條件可以推出三角形相似。

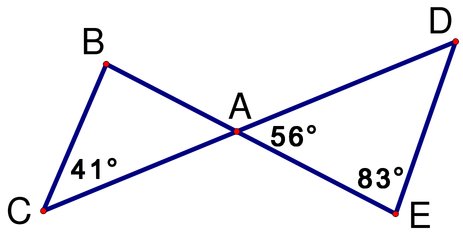
隨堂練習 1：下列各小題中，△ABC 和△ADE 是否相似？如果是，請寫出利用哪一種相似性質。

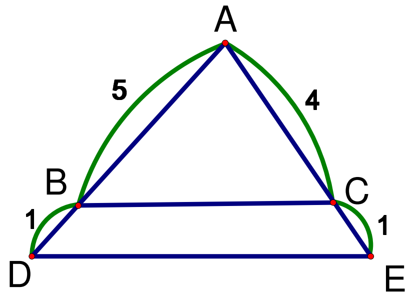
(1)__________________ (2)__________________





(3)____________________ (4)__________________





隨堂練習 2：

(1) △ABC 的三邊長為 5、12、13，△DEF 的三邊長為 8、15、17，則△ABC 和△DEF 是否相似？

(2) 下列六個三角形邊長紀錄如下：

① 4、7.5、8.5　　② 15、36、39

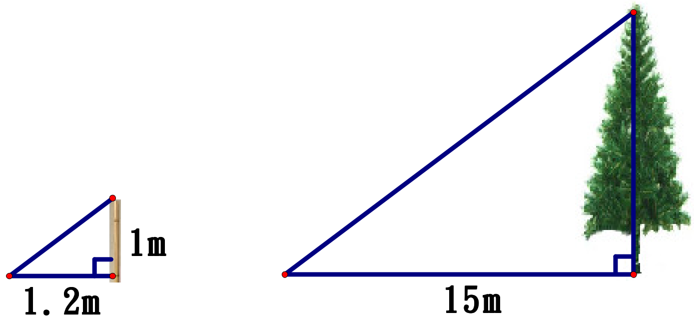
③ 10、24、26　　④ 1.25、3、3.25

⑤ 1、2.4、2.6　　⑥ 88、165、187

哪些與上題中△ABC 相似？_______________(請填代號)

哪些與上題中△DEF 相似？_______________(請填代號)

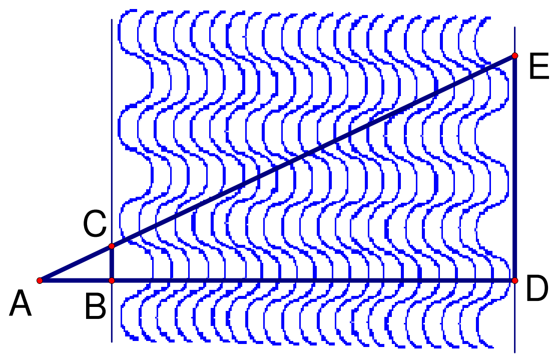
活動三：瞭解三角形有 AA 相似、SSS 相似、SAS 相似性質之後，日常生活中有很多的測量問題可以應用。例如下圖：想要測量一棵大樹的高度，雖然不方便直接爬到樹的頂端去量，卻很容易量到樹的影子長 15 公尺。如果我在旁邊立了一根 1 公尺的竹竿，發現竹竿的影子長 1.2 公尺。



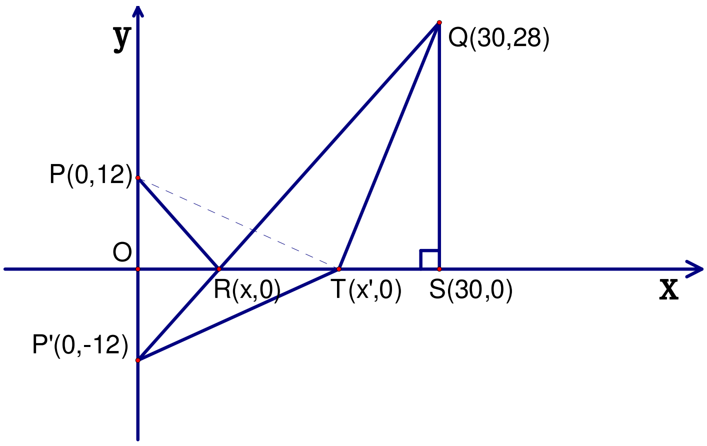
(1) 想想看上面兩個直角三角形相似嗎？為什麼？

(2) 可以利用相似三角形對應邊等比例，估算大樹的高度是多少公尺？

隨堂練習 3：<u>小美</u>和<u>小帥</u>站在河岸邊$\overleftrightarrow{BC}$，因為已知對面河岸邊有二根路燈(D、E)的距離是 50 公尺，所以他們想要設計一個辦法，可以不必渡河就能預估河的寬度。下面是他們的設計圖：<u>小美</u>站在 A 點，<u>小帥</u>站在 B 點，目測使 A、B、D 成一直線且垂直岸邊，測量$\overline{AB}$的距離是 5 公尺。再請<u>小帥</u>沿著河岸邊往前走到達 C 點，由<u>小美</u>目測使 A、C、E 成一直線，測量$\overline{BC}$的距離是 3 公尺，可以算出河寬$\overline{BD}$是多少公尺？



步驟 7： 坐標平面上有一隻螞蟻正在 P(0，12)的位置覓食，後來朝向南偏東的方向爬行至 x 軸 R(x，0)時，發現在 Q(30，28)處有一顆糖，於是再朝 Q 方向爬行到 Q，請問此螞蟻從 P 點開始至少共須爬行多少距離始能嚐到 Q 點處的糖呢？



說明：(1) 先作一草圖，如上圖所示。

(2) 欲求出 R(x，0)之 x，使得 $\overline{PR}+\overline{RQ}$ 為最短，即為所求。

(3) 先將 P 對 x 軸的對稱點 P′(0，-12)標出，連 $\overline{P'R}$

則 $\overline{PR}=\overline{P'R}$。

(4) 設 T(x$'$，0)為 x 軸上任意點(當然可設 $0<x'<30$)

連接 $\overline{P'T}$、$\overline{PT}$ 及 $\overline{TQ}$，則 $\overline{PT}=\overline{P'T}$

且 $\overline{P'Q}\le\overline{P'T}+\overline{TQ}$(三角形兩邊之和大於第三邊)

上式等號對任意 T 點成立，所以若取 R 為 $\overline{P'Q}$ 與 x 軸的交點，使得 P$'$、R、Q 在同一直線上，則可以保證

$\overline{PR}+\overline{RQ}=\overline{P'R}+\overline{RQ}\le\overline{P'T}+\overline{TQ}=\overline{PT}+\overline{TQ}$，也就是說明

$\overline{PR}+\overline{RQ}$ 為最短距離。

(5) 設 Q 到 x 軸所作垂直線的垂足 S(30，0)，

此時二個直角三角形△P'RO～△QRS(AA 相似)

又由 $\overline{OR}=x$ ，$\overline{RS}=30-x$

且由 $\dfrac{\overline{OR}}{\overline{OP'}}=\dfrac{\overline{RS}}{\overline{SQ}}$ 即得 $\dfrac{x}{12}=\dfrac{30-x}{28}$ 可以算出 $x=9$，

而螞蟻所爬行的最短距離，利用畢氏定理得知

$$\overline{P'Q}$$

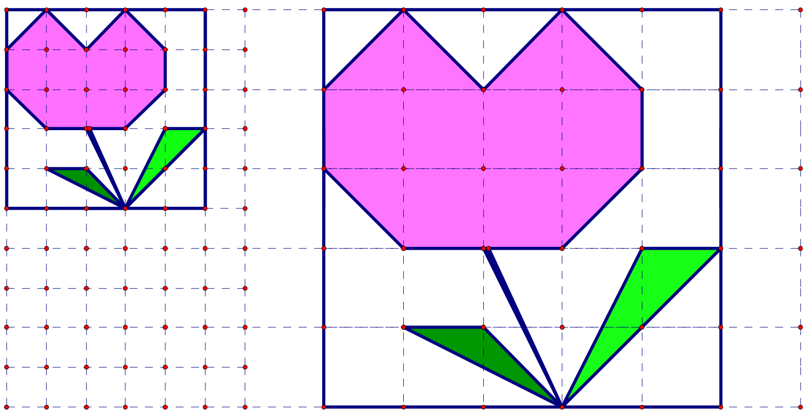
$$=\sqrt{30^2+[28-(-12)]^2}$$

$$=\sqrt{30^2+40^2}=50$$

教學活動參考解答：

活動一：

步驟 1：在下面方格中畫出左圖的 2 倍放大圖：



活動二：

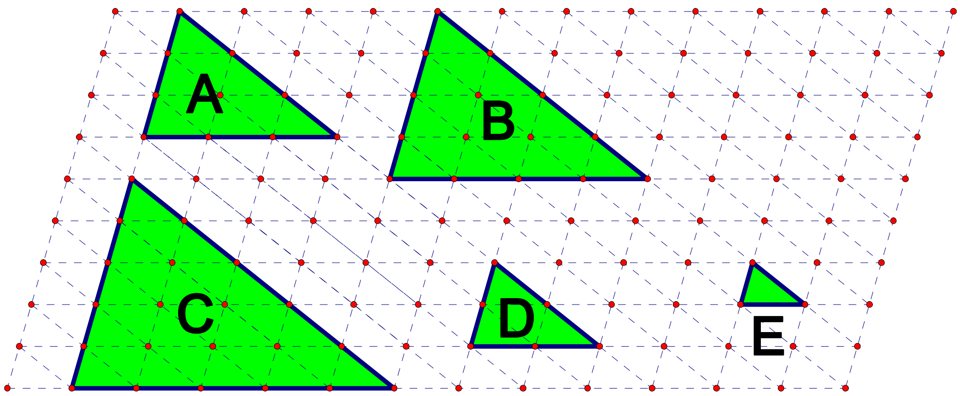
步驟 2：$\because \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{DE}}=\dfrac{1}{3}$ $\therefore$△ABC～△ADE

步驟 3：$\because \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}=\dfrac{2}{5}$ $\therefore$△ABC～△ADE

步驟 4：下圖中 A 和 B 兩個相似△，對應邊的比例就是 3：4。

其他沿著網格任意畫的圖形 C、D、E 也都是相似△，

只是對應邊的比例不一樣。



隨堂練習 1：(1) 是，AA 相似。(2) 是，SAS 相似。

(3) 是，AA 相似。(4) 不相似。

隨堂練習 2：(1)不相似。(2)和△ABC 相似的有②③④5， 和△DEF

相似的有①⑥。

活動三：

(1) 是，將太陽光線看成平行，則二直角三角形 AA 相似。

(2) $\because \dfrac{1}{1.2}=\dfrac{\text{樹高}}{15}$，$\therefore$樹高=12.5 公尺。

隨堂練習 3：$\because$△ABC～△ADE(AA 相似)，$\therefore \dfrac{3}{5}=\dfrac{50}{5+\overline{BD}}$

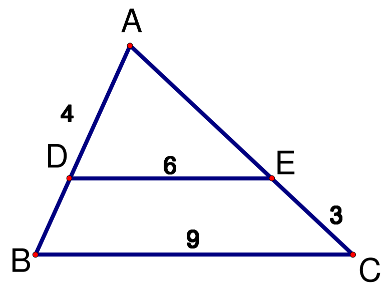
算出河寬 $\overline{BD}=\dfrac{235}{3}$ 公尺。

七、指定作業：

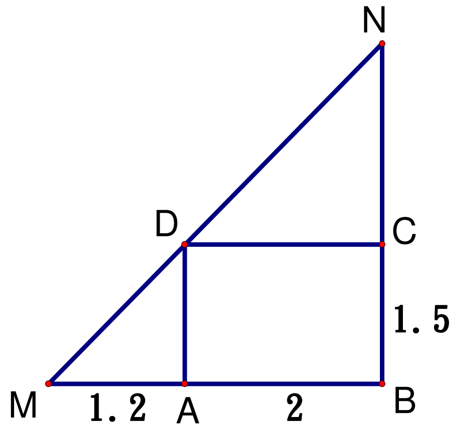
1. 下圖中，已知 $\overline{BC}\,//\,\overline{DE}$，說明△ABC 和△ADE 是否為相似三

角形？若 $\overline{AD}=4$，$\overline{DE}=6$，$\overline{CE}=3$，$\overline{BC}=9$，

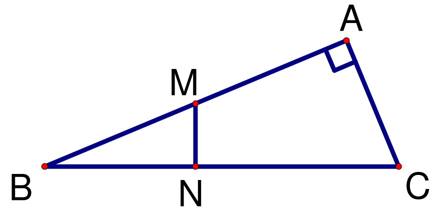
求 $\overline{BD}$ 和 $\overline{AE}$ 的長度。



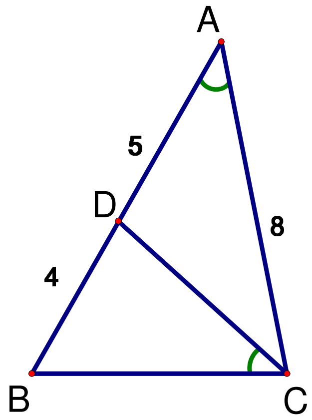
2. 下圖 $\overline{MN}$ 是一個梯子靠在 $\overline{NB}$ 垂直牆上，梯子下面有一個長方形的儲物櫃 ABCD，長 2 公尺，高 1.5 公尺。梯子剛好靠在儲物櫃的 D 點，量得 $\overline{MA}$ 的長 1.2 公尺，計算梯子可以達到的高度 $\overline{NB}$ 是多少？



3. 某博物館的外觀如下圖的直角△ABC，若∠A=90° $\overline{AC}=10$，$\overline{AB}=24$，$\overline{AB}$ 的中點 M 有一圓柱 $\overline{MN}\perp\overline{BC}$，說明△ABC 和△BMN 是否為相似三角形？計算圓柱的高 $\overline{MN}$ 是多少？



4. 下圖△ABC 中，已知∠BCD=∠A，說明△ABC 和△BCD 是否為相似三角形？若 $\overline{AD}=5$，$\overline{BD}=4$，$\overline{AC}=8$，求 $\overline{BC}$ 和 $\overline{CD}$ 的長度。



指定作業參考解答：

1. ∵△ABC～△ADE(AA 相似) 算出 $\overline{BD}=2$，$\overline{AE}=6$。

2. ∵ $\dfrac{1.5}{1.2}=\dfrac{\overline{NB}}{1.2+2}$，算出 $\overline{NB}=4$。

3. 先算出直角△BAC 的斜邊長 $\overline{BC}=26$，

   ∵△BAC～△BNM(AA 相似) ∴ $\dfrac{10}{26}=\dfrac{\overline{MN}}{12}$，算出 $\overline{MN}=\dfrac{60}{13}$。

4. ∵△ABC～△CBD (AA 相似) ∴ $\dfrac{5+4}{\overline{BC}}=\dfrac{8}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BC}}{4}$

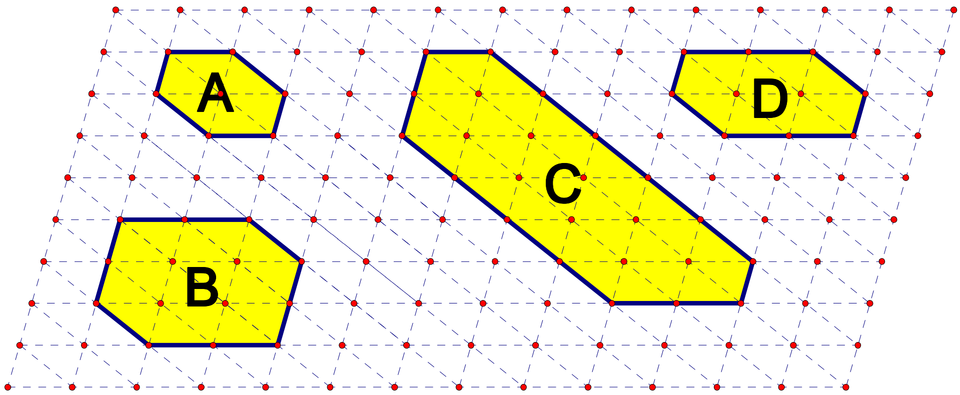
   算出 $\overline{BC}=6$，$\overline{CD}=\dfrac{16}{3}$。

八、教學活動注意事項：

1. 教學活動時間建議如下：**第一節課**，教學說明(含教學動機)約 5 分鐘，活動一約 5 分鐘，活動二(步驟 1~4)約 15 分鐘，活動二(步驟 5~6)約 20 分鐘。隨堂練習 1、2，可充作第一堂

課後指定作業用。**第二節課**，檢討前一節作業並複習 AA、SSS、SAS 相似性質，約 10 分鐘。活動三(含隨堂練習 3) 約 15 分鐘，步驟 7 約 15 分鐘，簡單提示指定作業約 5 分鐘。

2. 判斷三角形的相似，可以只用 AA 相似，也就是三個對應角都相等。也可以只用 SSS 相似，也就是三個對應邊成等比例。但是在四邊形以上的多邊形，上述兩者都無法成立。利用三角形網格，可以很容易看出下圖中的幾個六邊形，六個角都對應相等，但是對應邊卻不是等比例。



3. 在各活動間教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
4. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 傅淑婷(2013)。全等三角形，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(pp. 213-235)。新北市：國家教育研究院。

2. Graening, J. & Nibbelink, W. H. (1975). 8-3 Similar Triangles. In Graening, J. & Nibbelink (Eds.), Geometry, (pp. 240-245). Columbus, OH：Merrill.

主題 3－3：處處多數是等腰三角形

一、授課對象：國中八年級下學期學生。

撰寫者：傅淑婷
曹博盛
陳昭地

二、先備知識：

(一) 知道銳角、直角與鈍角的意義。

(二) 知道等腰三角形，正三角形及等腰直角三角形的畫法。

(三) 知道三角形三內角之和為 180°。

(四) 知道三角形面積為底乘以高的二分之一。

(五) 知道等腰直角三角形三內角分別為 90°、45°、45°。

(六) 知道兩三角形全等之 SSS、SAS、ASA、AAS 與 RHS 條件。

(七) 知道兩三角形相似之 SSS、SAS、AA 條件。

(八) 知道既知事實可以當作解說數學的工具。

(九) 知道兩點之間以連接此二點的線段為最短，因此三角形任兩邊之和大於第三邊。

(十) 知道直角坐標平面的建立方式。

三、教學目標：

(一) 熟悉等腰三角形之原始定義，並知等邊三角形相當於等角三角形。

(二) 瞭解等腰三角形兩腰上的中線等長，三邊上的三條中線交於一點，其交點稱為重心。

(三) 知道等腰三角形的重心性質：重心到頂點的距離為重心到對邊中點距離的兩倍。

(四) 能瞭解等腰三角形被其三條中線分成六個面積相等的小三角形。

(五) 熟悉等腰三角形兩腰上的高等長。

(六) 熟悉等腰三角形三邊上的中垂線交於一點。

(七) 能熟悉等腰三角形三內角的三條平分線交於一點。

(八) 能利用等腰三角形詮釋三角形大角對大邊，大邊對大角以及樞紐定理。

(九) 能知道△ABC 中，若高$h_a = h_b$，則$\overline{BC} = \overline{AC}$。

(十) 能暫時接受△ABC 中，若中線$m_a = m_b$，則$\overline{BC} = \overline{AC}$。

(十一) 知道△ABC 中，若角平分線$t_a = t_b$，則$\overline{BC} = \overline{AC}$。

四、授課時間：115 分鐘(二節半)

五、教學說明：

本單元以七個活動前後共 23 個步驟來編撰學習等腰三角形的強烈動機及其中線、高、底角平分線的特性，以及一般三角形的一些性質。以未來的生涯中，不論從任何角度來看，都極具重要性的等腰三角形的應用。原則上我們不贊成看到證明的字眼出現在國民數學教育的場所，因為「證明」雖然日常生活常被使用，開口閉口就說「證明給我看」，但你說、我說或他說的證明的意涵

常大不相同。在數學上的「證明」是很嚴謹的，至少要到大學專攻數學才適宜使用這個字眼，因此我們改用「解說」甚或「說明」來取代。「解說」按照字義直接說成解釋或說明，可以對學習十二年國民教育的數學會有較佳的效果，至少可讓師生都能集中火力來把問題透過計算或各種合適的方式說明清楚就可以了！這個觀點請老師要特別留意。另外本文跟一般的傳統的幾何教材處理方式有極大的差異，務必審慎閱讀教學注意事項，教學才能更有效率，成果才會更顯現出來。

六、教學活動：

活動一：溫故知新(從三角形談起)：

步驟 1：請老師發給每位學生 A4 紙張半頁，並告訴學生說：老師今天上課的主題是三角形的一些問題，然後要求學生用直尺或三角板畫出一個大小適中的三角形，接著馬上收回。粗略地分類一下跟等腰三角形有關的正三角形、等腰直角三角形與一般的等腰三角形所占的百分比。

步驟 2：根據實際的調查(朱芳儀，2013)，學生畫出來是等腰三角形至少占八成，於是就宣布實際這班所畫出三角形是等腰三角形的比例很高！隨著向學生說出等腰三角形是我們通常所關注的三角形。讓我們這堂課就先關注等腰三角形的一些簡易又重要的性質吧！強烈引導學生學習等

腰三角形有關性質的動機。

步驟 3：接著給等腰三角形下一個原始的定義：

有兩邊相等的三角形就稱作等腰三角形。

如圖 1 所示，它是一個等腰三角形：

其中 $\overline{AC}=\overline{BC}$，$\overline{AC}$ 及 $\overline{BC}$ 被稱作兩腰，$\overline{AB}$ 為底邊，∠A 與 ∠B 為其兩底角，兩腰的交點 C，∠C 被稱作頂角。

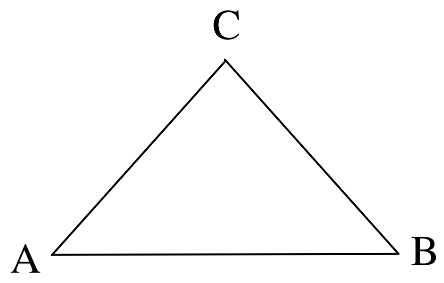


圖 1

步驟 4：學生溫習了正式等腰三角形的定義及一些名詞術語之後，接著如圖 1 畫出等腰△ABC，並將 $\overline{AB}$ 的中點標出 F，連接 C、F 兩點得 $\overline{CF}$，並請學生將這個等腰三角形描繪後剪下來，如圖 2：請學生細心觀察剪下來△ABC 中的 $\overline{CF}$ 與△CFA 及△CFB，要求學生沿著 $\overline{CF}$ 對摺，看看有什麼發現。

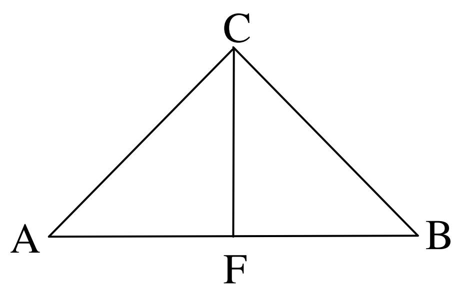


圖 2

隨堂練習 1：請問學生到底有什麼發現？

然後老師把預期發現的現象指明：

A 點疊到 B 點，C、F 點不動，$\angle CAF$ 與 $\angle CBF$ 疊合在一塊，

$\overline{AF}$ 疊合到 $\overline{BF}$，$\angle AFC$ 疊合到 $\angle BFC$，$\angle ACF$ 疊合到 $\angle BCF$。

步驟 5：老師把剛剛的發現，以更簡要的符號與文字解說：

(1) $\Delta ACF \cong \Delta BCF$。

(2) 等腰三角形的兩底角相等。

(3) 由 $\angle AFC = \angle BFC$，且 $\angle AFC + \angle BFC = 180°$，

於是 $\angle AFC = \angle BFC = 90°$；因此，$\overline{CF}$ 垂直平分底邊，而且

$\angle ACF = \angle BCF$，故 $\overline{CF}$ 為頂角 $\angle C$ 的平分線。

(4) 將(3)的發現簡稱為等腰三角形頂角的平分線垂直平分底邊，換言之，頂角的平分線落在底邊的中垂線上。

步驟 6：要求從另一角度，看圖 1，假設圖 1 的△ABC，一開始僅知道 $\angle A = \angle B$，而並不知道 $\overline{AC} = \overline{BC}$，再看看剪下來圖 2 的原先操作，由 $\angle A = \angle B$，對摺之後，問學生對兩邊長 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 的大小有什麼發現後；可以綜合出 $\overline{AC} = \overline{BC}$，即△ABC 是以 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 為兩腰的等腰三角形，於是作出如下的結論：

有兩內角相等的三角形，一定是等腰三角形。

步驟 7：綜合 4~6 的步驟，就可說成如下的結論：

(一) 等腰三角形的兩底角相等。

(二) 有兩個內角相等的三角形，就是以這兩個內角為底角的等腰三角形。

於是完成活動一的整個活動，不僅溫故而且知新，再請學生進一步討論下面的活動二。

活動二：等腰三角形中線的性質

步驟 8：(先對中線一詞解釋)

一般的△ABC，如圖 3，從頂點到對邊的中點，連成的線段，稱為中線。例如圖 3 中，A 跟$\overline{BC}$的中點 D 的連線段$\overline{AD}$就是一條中線。由於 A 點的對邊$\overline{BC}$長可記作 a，於是就把$\overline{AD}$記作m_a，其中 m 是英文中線 median 的縮寫，於是△ABC 就有三條中線m_a、m_b及m_c。

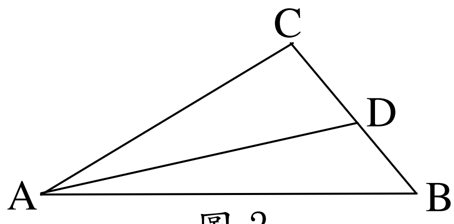


圖 3

隨堂練習 2：請把△ABC 的另外兩條中線m_b及m_c畫出來。

步驟 9：如果每位同學都把△ABC 的三條中線畫出來，盡量畫得準確，細心觀察它們的相交情況。許多同學所畫的三條

中線似乎都會相交於一點，這一個點稱為△ABC 的**重心**，在數學或理化課裡是很重要的。目前解說起來比較麻煩，就留待往後再看吧！現在就集中精力在「等腰」的特殊情況：

當△ABC 為等腰三角形是比較容易解說，下列步驟 10~11 就是依序解說的過程！

步驟 10：現在假設△ABC 為兩腰$\overline{AC}$與$\overline{BC}$的等腰三角形，並作出兩腰上的中線$\overline{AD}$與$\overline{BE}$如圖 4 所示。

細心觀察它們的長度$\overline{AD}=m_a$，$\overline{BE}=m_b$，將它們的長短關係作一個簡單的比較，你們會發現長度幾乎相等！

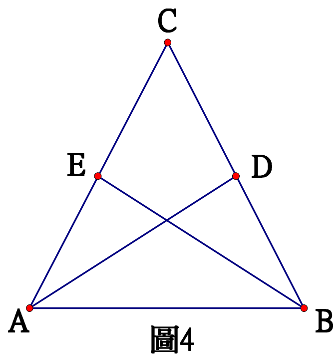


圖4

確實它們的長度是相等的，完整的說明如下。

說明：$m_a=m_b$，即$\overline{AD}=\overline{BE}$

細心觀察△ACD 與△BCE，看看它們是否全等？

$\because \overline{AC}=\overline{BC}$，$\angle C=\angle C$，$\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\overline{CE}$

∴△ACD≅△BCE (SAS 全等)，

$\therefore \overline{AD}=\overline{BE}$（對應邊相等）

現在我們已對兩腰上的中線等長作了完整明確的解說了。

步驟 11：再進一步看圖 4，先令$\overline{AD}$與$\overline{BE}$的交點為 G，

連$\overline{CG}$並延長$\overline{CG}$與$\overline{AB}$的交點為 F，

如圖 5。如果 F 恰好是$\overline{AB}$的中點，

換言之，$\overline{CF}$為$\overline{AB}$的中線，

那麼就可完成三條中線交於一點 G 了！

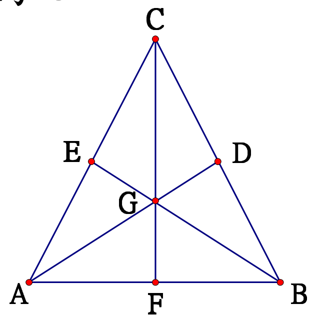


圖5

為此，我們先介紹如下的輔助工具：

輔助說明：圖 5 中，$\overline{CG}$在$\overline{AB}$的中垂線上。

如圖 6 所示，P 是$\overline{AB}$中垂線 L 上的任意一點，連$\overline{PA}$及$\overline{PB}$。得知直角△AMP 與△BMP 是全等三角形(SAS)，故知$\overline{PA}=\overline{PB}$。換句話說，中垂線上的任意一點與線段兩端點等距離；

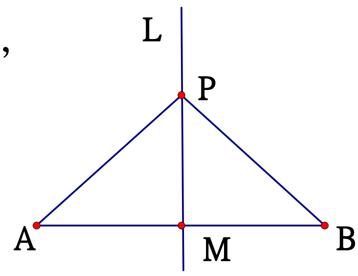


圖6

反過來，跟 A、B 等距離的點 P 會在$\overline{AB}$的中垂線上嗎？

此時，不妨設 P 不是$\overline{AB}$的中點(否則就不必要再說明了)，△ABP 是以$\overline{PA}$及$\overline{PB}$為兩腰的等腰三角形。

回頭看**步驟 5**，就可以知道 P 點在$\overline{AB}$的中垂線了！

再回頭看圖 5，故知頂點 C 在$\overline{AB}$的中垂線上；如果再能知道 G 點也在$\overline{AB}$的中垂線上，那麼$\overline{CG}$就可以決定$\overline{AB}$的中垂線。自然地，$\overline{CG}$延長線與$\overline{AB}$的交點 F 就是$\overline{AB}$的中點，而$\overline{CF}$就是底邊$\overline{AB}$上的中線。

輔助說明：$\overline{GA}=\overline{GB}$，即△ABG 是底邊為$\overline{AB}$的等腰三角形。

細心觀察圖 5 的△ABG，看看$\angle GAF$是否跟$\angle GBF$相等？

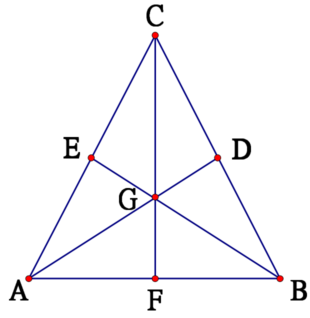


圖5

配合圖 4，△ACD≅△BCE

得知$\angle CAD=\angle CBE$

再看圖 5，知$\angle GAF=\angle CAB-\angle CAD$

而$\angle GBF=\angle CBA-\angle CBE$

另由$\angle CAB=\angle CBA$，

於是$\angle GAF=\angle GBF$（等量減法公理）

因此△ABG 為等腰三角形，$\overline{GA}=\overline{GB}$。合併上述的說明，得知 C、G 分別跟$\overline{AB}$的兩端點 A、B 等距離，故 C、G 都在$\overline{AB}$的中垂線上，於是可知道三條中線$\overline{AD}$、$\overline{BE}$及$\overline{CF}$交於一點 G，這個交點 G 就稱為等腰△ABC 的**重心**。

步驟 12：更進一步看重心 G 的性質。

為此，先將等腰△ABC 坐標化：

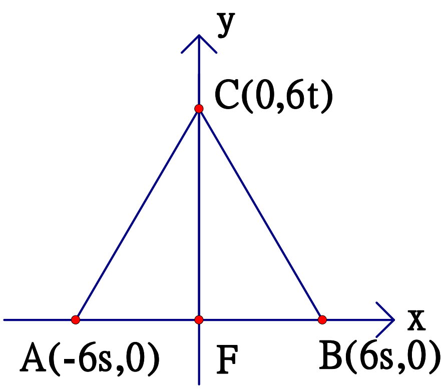


圖7(1)

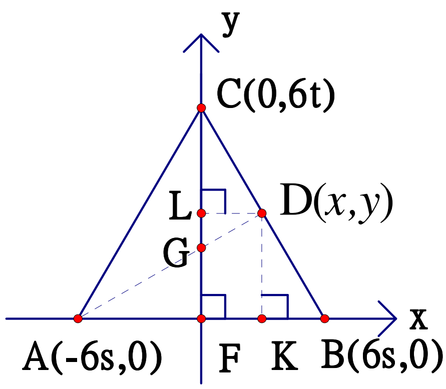


圖7(2)

以底邊$\overline{AB}$當作 x 軸，中垂線$\overline{CF}$當作 y 軸，F 為原點，

建立平面直角坐標系。

$\because \overline{AF} \perp \overline{CF}$ ，且$\because \overline{AF} = \overline{BF}$

可以把 A 的坐標設成(6s, 0)，則 B 的坐標為(6s, 0)，s >*0*。

而 C 點在 y 軸的上方,其坐標可設成(0, 6t),t >*0* 如圖 7(1)。

作中線$\overline{AD}$交$\overline{CF}$於重心 G，設 D 的坐標為(x,y)，如圖 7(2)。

過 D 分別作$\overline{DK} \perp \overline{FB}$，交$\overline{FB}$於 K；$\overline{DL} \perp \overline{CF}$，交$\overline{CF}$於 L。

∵D 為$\overline{BC}$的中點，且△CLD～△CFB (AA 相似)

$\therefore \dfrac{x}{6s} = \dfrac{1}{2}$ ，得知 $x = 3s$ 。

同理△BDK～△BCF (AA 相似)

$\therefore \dfrac{y}{6t} = \dfrac{1}{2}$，得知 $y = 3t$ 。

求出 D 的坐標為($3s$,$3t$)。

至於 G 的坐標可設成($0, z$)，

由△AGF～△ADK (AA 相似)

得知$\dfrac{z}{3t} = \dfrac{6s}{9s} = \dfrac{2}{3}$ ，即 $z = 2t$ 即得 G(0, 2t)；

又由於$\overline{GF} = 2t$ ，$\overline{GC} = 6t - 2t = 4t$ ，

故$\overline{GC} = 2\overline{GF}$

另由兩點距離公式$\overline{GA}=\sqrt{(0-(-6s)^2)+(2t-0)^2}$

$$=\sqrt{36s^2+4t^2}=2\sqrt{9s^2+t^2}\ \ldots\ldots①$$

$$\overline{GD}=\sqrt{(3s-0)^2+(3t-2t)^2}=\sqrt{9s^2+t^2}\ \ldots\ldots②$$

比較①、②再得$\overline{GA}=2\overline{GD}$

同理，若$\overline{BE}$為$\overline{AC}$上的中線，E 為$\overline{AC}$的中點，則$\overline{BE}$通過 G，仍然可得$\overline{GB}=2\overline{GE}$

換言之，我們可知重心 G 點到各頂點的距離等於 G 點到對邊中點的兩倍。

再回頭看圖 5，由中線平分三角形為兩面積相等的小△，

故△GAF=△GBF，△GBD=△GCD，△GCE=△GAE

且在△FGA 與△GCA 中，$\overline{AF}$為$\overline{FG}$邊上與$\overline{CG}$邊上的高。

△FGA =$\frac{1}{2}\overline{GF}\times\overline{AF}$ ，△GCA =$\frac{1}{2}\overline{GC}\times\overline{AF}$

由$\overline{GC}=2\overline{GF}$ ，故得△GCA = 2△FGA

即△GCA =△GAE +△GCE =2△GAE

於是△GCE =△GAE =△FGA

同理△GCD =△GBD =△FGB

又△ACF≅△BCF ∴△ACF=△BCF。

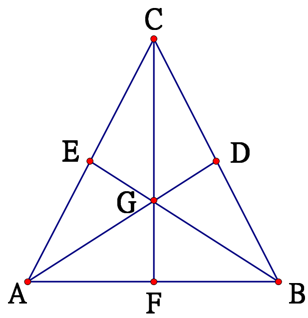


圖5

合併得△GCE =△GAE =△FGA=$\frac{1}{3}$△ACF

= $\frac{1}{3}$△BCF=△GCD =△GBD =△FGB

亦即三條中線分此等腰三角形為六個面積相等的小三角形。

隨堂練習 3：如圖 5，試說明$\triangle AGB = \triangle BGC = \triangle CGA$ (即重心 G 與三頂點的連線分此等腰三角形為三個面積相等的小三角形)。

綜合以上步驟 10~12，等腰三角形中線有如下四個重要性質：

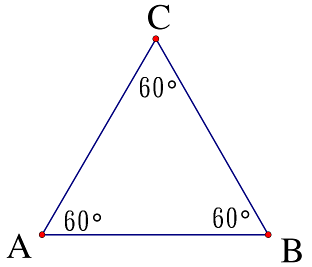
(一) 等腰三角形兩腰上的中線相等。

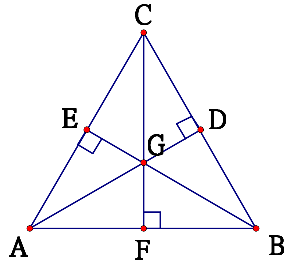
(二) 等腰三角形三條中線交於重心。

(三) 等腰三角形的重心到頂點的距離等於重心到對邊中點距離的兩倍。

(四) 等腰三角形的重心到三頂點的連線分此三角形成三個面積相等的小三角形；三條中線分此三角形成六個面積相等的更小的三角形。

隨堂練習 4：三邊長都相等的三角形稱為等邊三角形，而等邊三角形也是三內角都是相等(60°)的等角三角形，於是等邊三角形又被稱為**正三角形**，如下左圖所示。





試說明：正三角形 ABC 的三條中線分此正三角形為六個面積相等的直角三角形，而且重心 G 跟三頂點連接的線段分△ABC 為三個兩兩全等的等腰三角形，如上右圖所示。

活動三：等腰三角形邊上的高之性質

步驟 13：(先對高這一名詞解釋)

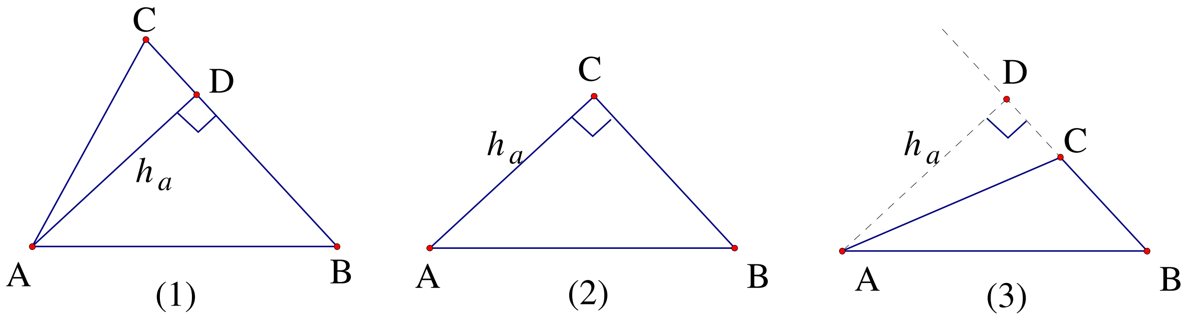


圖8

一般三角形，可分類成銳角三角形，直角三角形及鈍角三角形，如圖 8 之示意圖。過頂點 A 作與$\overline{BC}$邊或其延長線的垂直線(段)，垂足為 D，D 在$\overline{BC}$上或恰好就是 C，或在$\overline{BC}$的延長線上，$\overline{AD}$稱為$\overline{BC}$上的高。依此，任意三角形都有三條高(圖中每個圖僅出現一條高$\overline{AD}$)。同中線一樣，$\overline{BC}$或其延長線的高$\overline{AD}$記作h_a，其中 h 是英文 height 的縮寫，於是△ABC 就有三條高h_a，h_b及h_c。

隨堂練習 5：請將圖 8 中每一個三角形之另外兩條高畫出來。

步驟 14：為簡便起見，以下就針對等腰銳角三角形來探討它們的三條高，有無類似步驟 12 等腰三角形中線前兩個性質？答案是肯定的，將依下列步驟 15、16 來解說。

步驟 15：現在假設△ABC 為兩腰是 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 的等腰銳角三角形，並作出兩腰上的高 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$，如圖 9 所示。

仿照解說等腰三角形兩腰上的中線等長一樣：

(法一) 在兩直角△ACD 與△BCE 中

$\because \angle ADC = \angle BEC = 90°$

$\angle C = \angle C$ 、 $\overline{AC} = \overline{BC}$

$\therefore$△ACD≅△BCE (AAS 全等)

由上得知 $\overline{AD} = \overline{BE}$

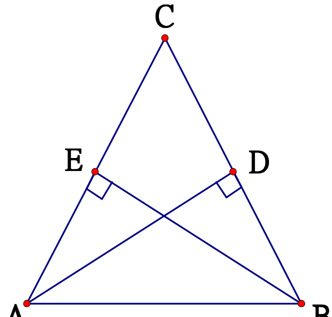


圖9

(法二) 我們也可由三角形面積公式來解說。

因為三角形的面積等於底乘以高的二分之一，

故△ABC $= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BE}$

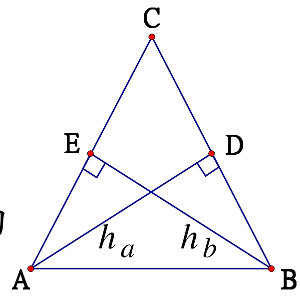
又△ABC $= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD}$

$\therefore \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BE} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD}$

$\overline{AC} \times \overline{BE} = \overline{BC} \times \overline{AD}$

且由 $\overline{AC} = \overline{BC}$ ，故得 $\overline{BE} = \overline{AD}$ ，亦即 $\overline{AD} = \overline{BE}$

隨堂練習 6： 如右圖，設△ABC 中，若$h_a = h_b$，則$\overline{BC} = \overline{AC}$。亦即有兩等高的三角形必為等腰三角形。(提示：仿上法二的解說方法。)再來，看一看等腰銳角$\triangle ABC$，三邊上的高是否會交於一點。



步驟 16： 先令$\overline{AD}$與$\overline{BE}$相交於 H，如圖 10。

連$\overline{CH}$，並延長$\overline{CH}$交$\overline{AB}$於 F。

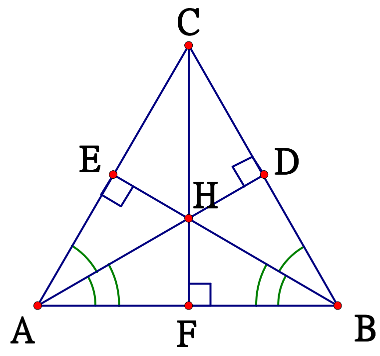


圖10

∵ △ACD≅△BCE (AAS 全等)

∴ $\overline{CD} = \overline{CE}$

又∵ $\overline{AC} = \overline{BC}$，$\overline{CD} = \overline{CE}$

∴ $\overline{AC} - \overline{CE} = \overline{BC} - \overline{CD}$

即 $\overline{AE} = \overline{BD}$

又在△AEH 與△BDH 中，

∵ $\angle EAH = \angle CAD = \angle CBE = \angle DBH$，

$\overline{AE} = \overline{BD}$，$\angle AEH = 90° = \angle BDH$

∴ △AEH≅△BDH (ASA 全等)

∴ $\overline{AH} = \overline{BH}$

如同上面步驟 11 一樣，由$\overline{AC} = \overline{BC}$，$\overline{AH} = \overline{BH}$

C 與 H 都在$\overline{AB}$的中垂線上，故$\overline{CH}$是$\overline{AB}$中垂線中的一

段，故$\overline{CH}$延長交$\overline{AB}$於 F 的線段$\overline{CF}$也是$\overline{AB}$中垂線的一段，故知$\overline{CH}$為$\overline{AB}$邊上的高，綜合起來就可完成等腰銳角三角形的三條高交於一點。

隨堂練習 7：

(1)等腰直角三角形 ABC，$\angle C = 90°$，其兩腰上的高是否相等？其三邊上的高是否交於一點？(如果是，把交點指出來。)

(2)等腰鈍角三角形 ABC，$\angle C > 90°$，其兩腰延長線上的高是否相等？其三邊上的高是否交於一點？

步驟 17：綜合起來，我們對等腰三角形的三個高有如下的結論：

(一) 等腰三角形兩腰上的高等長。

(二) 有兩邊上的高是等長的三角形，一定是等腰三角形。

(三) 等腰銳角或直角三角形，三高交於一點。

活動四：等腰三角形三邊上的三條中垂線之性質

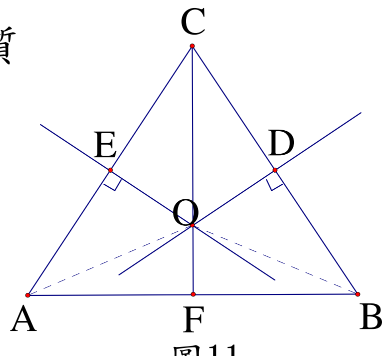


圖11

步驟 18：先針對等腰三角形，$\overline{AC} = \overline{BC}$，

其兩腰上的中垂線如圖 11 所示。

其中 E、D 分別為$\overline{AC}$與$\overline{BC}$的中點，

其交點設為 O，連$\overline{CO}$得兩個直角△COE 與△COD，

可利用直角三角形 RHS 全等性質得到

$\triangle COE \cong \triangle COD$ ($\because$ $\overline{CE} = \overline{CD}$，$\overline{CO} = \overline{CO}$)

$\therefore\ \overline{EO}=\overline{DO}$，即二中垂線段$\overline{EO}$與$\overline{DO}$等長

再連$\overline{OA}$與$\overline{OB}$，

則由$\overline{AE}=\overline{BD}$，$\angle AEO=\angle BDO=90^\circ$，$\overline{EO}=\overline{DO}$

得△AEO≅△BDO (SAS 全等)

$\therefore\ \overline{AO}=\overline{BO}$，故 O 點在$\overline{AB}$的中垂線上，

而$\overline{AC}=\overline{BC}$，C 點也在$\overline{AB}$的中垂線上。綜合起來$\overline{CO}$延長交$\overline{AB}$於 F 之線段$\overline{FO}$為$\overline{AB}$中垂線上的一線段，故直線$\overleftrightarrow{FO}$為$\overline{AB}$的中垂線，於是等腰三角形三邊上的中垂線交於一點 O。

隨堂練習 8：

(1) 再仔細觀察圖 11 中△BOC 的部分，連同$\overline{OD}$垂直平分$\overline{BC}$，試說明$\overline{BO}=\overline{CO}$。

(2) 假設圖 11 中的△ABC 為隨意的三角形，作$\overline{AC}$、$\overline{BC}$二邊上的中垂線，設交於 O。試說明：若$\overline{EO}=\overline{DO}$，則$\overline{AC}=\overline{BC}$，亦即有兩條相等的中垂線段，必為等腰三角形。

步驟 19：由步驟 18 及其後的隨堂練習 8，我們可以得下面結論：

(一) 等腰△ABC 中，E、D 分別為兩腰$\overline{AC}$與$\overline{BC}$的中點，過 E 點，D 點的中垂線交點 O，則$\overline{EO}=\overline{DO}$。

(二) 等腰三角形，三條中垂線交於一點 O，且有$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$的關係。

(三) 圖 11 中，△ABC 為任意三角形，有二條中垂線段 $\overline{EO}=\overline{DO}$，則△ABC 必為等腰三角形。

活動五：等腰三角形三內角平分線的性質

步驟 20：(先對內角平分線一詞解釋)

對任意給定的△ABC，有三個內角∠A、∠B 及∠C。

∠A 的內角平分線$\overline{AD}$，即指$\overline{AD}$平分∠A

其中 D 在對邊$\overline{BC}$上，如圖 12 所示，

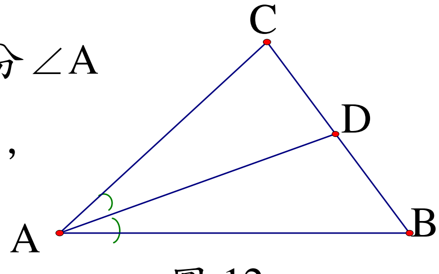


圖 12

同樣∠B、∠C 也都有一條內角平分線$\overline{BE}$、$\overline{CF}$，

故△ABC 有三條內角平分線，這三條內角平分線分別記作t_a、t_b及t_c。

隨堂練習 9：請畫出圖 12 中，∠B 與∠C 的內角平分線。

步驟 21：接下來，我們來探究等腰三角形三內角平分線有何特性？

首先考慮兩腰為$\overline{AC}$與$\overline{BC}$的等腰△ABC 中，

兩底角的平分線$\overline{AD}$與$\overline{BE}$，設其交點為 I，

如圖 13 所示(虛線暫時不要看)。

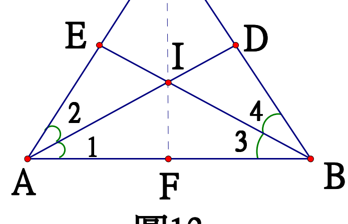


圖13

在△ACD 與△BCE 中，

$\because \angle 2=\frac{1}{2}\angle CAB=\frac{1}{2}\angle CBA=\angle 4$

$\overline{AC}=\overline{BC}$ ，$\angle ACB=\angle ACB$

∴ △ACD ≅ △BCE (ASA 全等)

∴ $\overline{AD}=\overline{BE}$ ，即兩底角平分線等長。

另由 $\overline{AC}=\overline{BC}$ 及 $\overline{AI}=\overline{BI}$

($\because \angle 1=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\angle ABC=\angle 3$)

故知 C 與 I 都是 $\overline{AB}$ 中垂線的點，$\overline{CI}$ 為 $\overline{AB}$ 中垂線的一線段，

隨之，延長 $\overline{CI}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點 F，$\overline{CF}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ ，

因此 △ACF ≅ △BCF，而知 $\angle ACF=\angle BCF$ ，

$\overline{CF}$ 為頂角∠C 的角平分線。

換言之，頂角∠C 的平分線亦通過原先兩底角平分線的交點 I。

隨堂練習 10： 設△ABC 為正三角形，請檢驗一下三條中線就是三邊上的三條高，也是三內角的三條平分線。

步驟 22： (小結)

由步驟 20～21 綜合起來，我們可以得到等腰三角形角平分線的性質：

(一) 等腰三角形兩底角的平分線等長。

(二) 等腰三角形三內角的平分線交於一點。

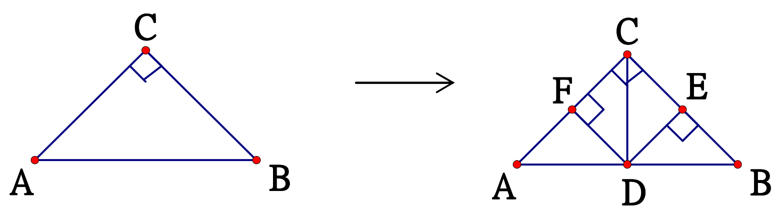
至於類似高的逆向性質：有兩高等長的三角形，必為等腰三角形；角平分線的逆向性質，則有兩內角平分線等長的三角形亦

必為等腰三角形，它的純幾何解說法是遲至 1840 年才公布於世的萊莫斯-斯坦納定理。隨後出現 60 多種不同難度的直接或間接解說法。我們在本單元僅提出這個事實，同學可以把它當作一種常識而已。如果有興趣的同學可請教老師，老師會把本單元教學參考資料中一個比較簡易(但仍具有一些難度)的解說法告訴你們的。

活動六：隨處都可見到等腰三角形

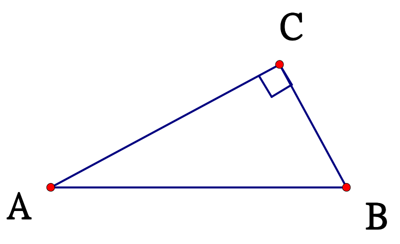
步驟 23：從一開始老師分發給學生畫出三角形為等腰三角形(含正三角形與等腰直角三角形)之比例很高，而且以上各活動也見到許許多多的等腰三角形，我們再來看一些實例。

步驟 24：實例

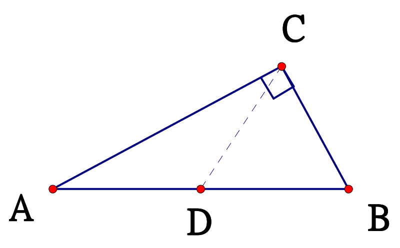


例 1：上圖原先是一個等腰直角三角形 ABC，經過作斜邊 $\overline{AB}$ 上的高 $\overline{CD}$，得到兩個全等的小等腰直角三角形△ACD 與△BCD 之後，再過 D 分別作斜邊 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 上的高 $\overline{DE}$ 與 $\overline{DF}$，又將△ABC 分成四個更小的等腰直角△ADF、△CDF 與△BDE、△CDE，再繼續仿照上面過程作下去會得到更多更多的更小的小等腰直角三角形！

例 2：下圖原先是一個直角三角形 ABC，經過作斜邊的中線 $\overline{CD}$ 後，會得到兩個較小的等腰三角形，△ACD 與△BCD，其中∠ADC 與∠BDC 分別為其頂角。



→



(見指定作業第 7、8 兩題)

例 3：轉回來看一般△ABC 邊角之間有何關係的問題：

(1) 在國小階段的幾何，已熟悉了△ABC 中任兩邊長之和大於第三邊的長。

(2) 三角形中，大邊對大角，小邊對小角，就可借用等腰三角形及三角形任兩邊之和大於第三邊來解說清楚：

①已知△ABC 中，$\overline{AB}>\overline{AC}$，如圖 14 所示，則$\angle C>\angle B$嗎？

說明：

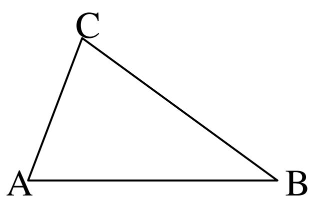


圖 14

$\because \overline{AB}>\overline{AC}$

$\therefore$ 在$\overline{AB}$上可取 E 點，使$\overline{AE}=\overline{AC}$

再連接$\overline{CE}$，得兩三角形△CEA 與△CEB，

而$\triangle CEA$ 為兩腰是$\overline{AC}$與$\overline{AE}$的等腰三角形，

看圖 15，於是 $\angle ACE = \angle AEC$

由 $\angle AEC + \angle CEB = 180^\circ$

$\angle ECB + \angle B + \angle CEB = 180^\circ$

$\therefore\ \angle AEC = \angle ECB + \angle B$

$\therefore\ \angle AEC > \angle B$

$\therefore\ \angle ACB > \angle ACE = \angle AEC > \angle B$

故得 $\angle C > \angle B$，完成肯定的解釋。

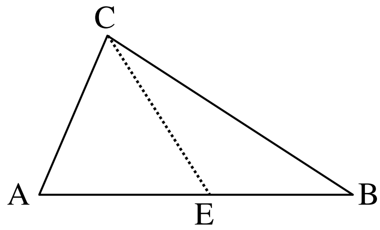


圖 15

②已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C > \angle B$，如圖 16 所示，則 $\overline{AB} > \overline{AC}$ 嗎？

說明：

$\because \angle C > \angle B$，

$\therefore$ 可以 $\overline{CB}$ 作角的一邊，

取 $\angle BCE = \angle B$，

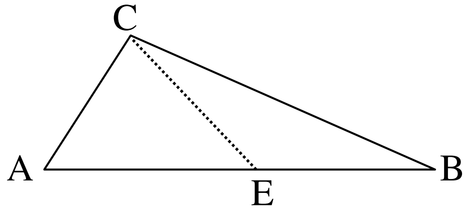


圖 16

得兩個 $\triangle EBC$ 與 $\triangle AEC$，如圖 16 所示。

而 $\triangle EBC$ 中，由於 $\angle BCE = \angle B$，

故 $\triangle EBC$ 為兩底角相等的等腰三角形，

於是 $\overline{CE} = \overline{EB}$，

但在 $\triangle AEC$ 中，$\overline{AE} + \overline{CE} > \overline{AC}$

$\therefore \overline{AE} + \overline{EB} > \overline{AC}$

$\therefore \overline{AB} > \overline{AC}$，也完成肯定的解釋。

再來看兩個△ABC與△DEF邊長或角的大小比較問題：

(1) 兩三角形中，有兩邊長對應相等，夾角不等，則夾大角所對的第三邊是否大於夾小角的第三邊長呢？

說明：看圖17，△ABC與△DEF中，

$\overline{AC}=\overline{DF}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，∠C ＞∠F 為已知三條件。

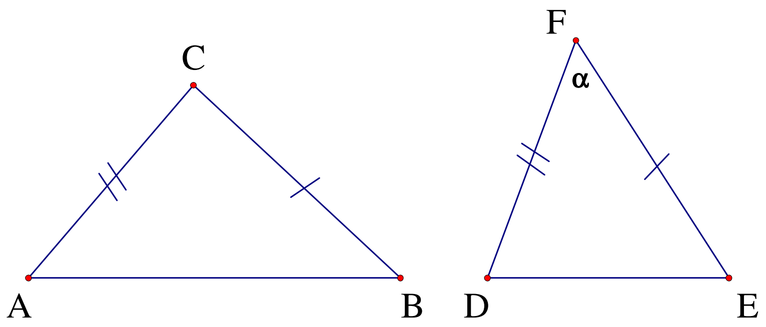


圖17

不妨設$\overline{BC}>\overline{AC}$，在∠ACB的內部作出一條線段$\overline{CE'}$，

使得∠ACE′= ∠DFE且$\overline{CE'}=\overline{FE}$，如圖18所示，

則△ACE′ ≅ △DFE(SAS)。

此時E′在△ABC的外部，

連$\overline{E'B}$，則$\triangle CE'B$為兩腰是$\overline{CE'}$與$\overline{BC}$的等腰三角形，

故∠CBE′=∠CE′B

∵ ∠AE′B＞∠CE′B

∴ ∠AE′B＞∠CBE′

而∠CBE′＞∠ABE′，

∴∠AE′B＞∠ABE′

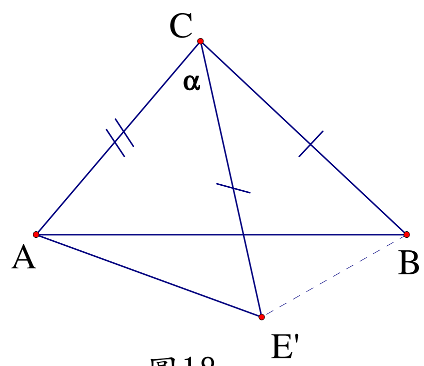


圖18

$\therefore \overline{AB} > \overline{AE'}$，但由△ACE′ ≅ △DFE，故$\overline{AE'} = \overline{DE}$

經代換後得$\overline{AB} > \overline{DE}$，完成了大角∠C 所對的邊$\overline{AB}$

大於小角∠F 所對的邊$\overline{DE}$之說明。

(2) 兩三角形中，有兩邊長分別對應相等，第三邊不相等，

則大邊所對的夾角是否會大於小邊所對的夾角呢？

說明：還是看圖 17，△ABC 與△DEF 中

$\overline{AC} = \overline{DF}$，$\overline{BC} = \overline{EF}$，$\overline{AB} > \overline{DE}$

那麼∠C 是否大於∠F 呢？

我們用(3)的結論及∠C 與∠F 有大於、小於或等於

恰有一成立。

如果能排除∠C<∠F 及∠C=∠F，則得知∠C>∠F

① 若∠C<∠F，則$\overline{DE} > \overline{AB}$；

② 若∠C=∠F，則△ACB ≅ △DEF(SAS 全等)，

於是$\overline{AB} = \overline{DE}$；

但由於$\overline{AB} > \overline{DE}$的條件，知上面①、②都是不可能發

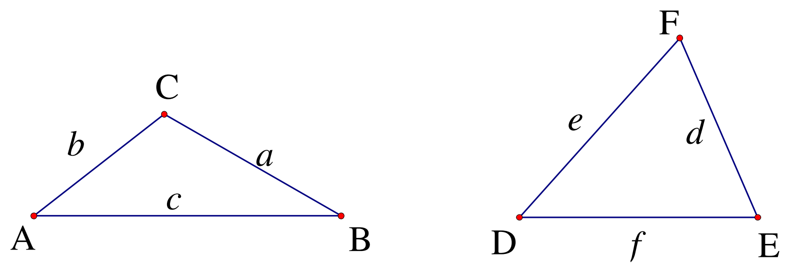
生，於是得知∠C>∠F，完成(4)之肯定的詮釋。

事實上例 3 之(3)被稱為**樞紐定理**，它就如時鐘上的長短針(短針計時，長針計分)，當其夾角越大，長短針另一端相距也就越大。而例 3 之(4) 則被稱為**逆樞紐定理**，兩個正逆定理都是很直觀的，而等腰三角形在詮釋樞紐定理的確扮演了重要的作用。

隨堂練習 11：

(1) 如下左圖，△ABC 中，∠C>90°，試說明$c^2 > a^2 + b^2$。

(2) 如下右圖，△DEF 中，∠F<90°，試說明$f^2 < e^2 + d^2$。



活動七：(總結論)

(一) 等邊三角形相當於等角三角形。

(二) 等腰三角形兩腰上的中線等長，三邊上的三條中線交於重心。重心到頂點的距離等於它到對邊中點距離的兩倍。

(三) 等腰三角形兩腰上的高等長，銳角或直角的等腰三角形，三邊上的高交於一點。

(四) 等腰三角形兩腰上的中垂線之交點形成的兩條中垂線段等長。三邊上的中垂線交於一點且交點到三頂點的距離相等。

(五) 等腰三角形兩底角的平分線等長，三內角的平分線交於一點。

(六) 詮釋三角形的大角對大邊或大邊對大角，或樞紐定理都顯現等腰三角形的一個關鍵作用。

(七) 如下圖，若將△ABC 的三邊$\overline{BC}$、$\overline{AC}$及$\overline{AB}$之長分別記作a、b、c；從各頂點向對邊所作高長分別記作h_a、h_b、h_c；

各頂點A、B、C向對邊所作中線分別記作m_a、m_b及m_c；

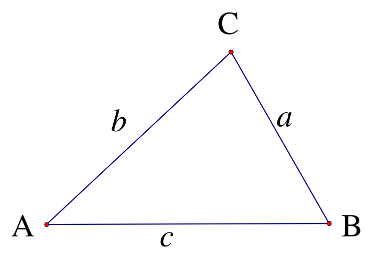
各內角∠A、∠B 及∠C 的角平分線分別記作t_a、t_b及t_c。

那麼我們有如下的逆向結論：

(1) 若$h_a=h_b$，則$\overline{BC}=\overline{AC}$。

(2) 若$m_a=m_b$，則$\overline{BC}=\overline{AC}$。

(3) 若$t_a=t_b$，則$\overline{BC}=\overline{AC}$。



上面對高的情形(1)已在本文中出現過；而對中線的情形則僅屬大胆的臆測而已，完整的說明，還會留在單元主題：三角形的三心作完整的探究。

最後角平分線等長之(3)，則留待你們發問或有興趣，再請教老師吧！

教學活動參考解答：

活動一：

隨堂練習 1：答案是開放的，引導學生到如老師所預期的現象。

活動二：

隨堂練習 2：(略)。

活動三：

隨堂練習 3、4、5 ：(略)。

隨堂練習 6：$\because h_a = h_b$，$ah_a = bh_b$ $\therefore a = b$，即 $\overline{BC} = \overline{AC}$，亦即 $\overline{AC} = \overline{BC}$。

隨堂練習 7：(1) 是；是，交點是頂點 C。

(2) 是;三邊上的高不相交,但三高的延長線交於一點。

活動四：

隨堂練習 8：(1) ∵ △BOD≅△COD (SAS 全等)

$\therefore \overline{BO} = \overline{CO}$

(2) 兩直角△CEO 與△CDO 中

$\because \overline{CO} = \overline{CO}$

$\overline{EO} = \overline{DO}$

$\angle CEO = \angle CDO = 90°$

∴△CEO≅△CDO (RHS 全等性質)

$\therefore \overline{CE} = \overline{CD}$， $\therefore 2\overline{CE} = 2\overline{CD}$， $\therefore \overline{AC} = \overline{BC}$

活動五：

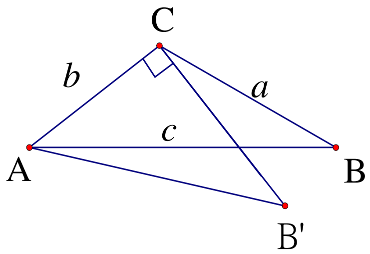
隨堂練習 9：(略) 。

隨堂練習 10：正三角形的三條中線就是三邊上的三條高，也是三內角的三條平分線。

活動六：

隨堂練習 11：(1) 作∠ACB' = 90°且$\overline{CB'}=\overline{CB}$，

則△ACB'中∠ACB' = 90°，



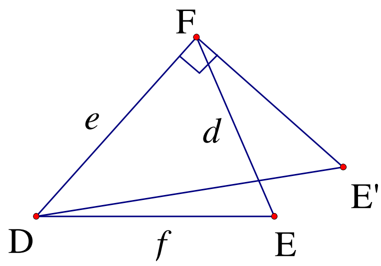
故$\overline{AB'}^2=a^2+b^2$

而由樞紐性質，$\overline{AB'}<\overline{AB}$

$\therefore \overline{AB'}^2>\overline{AB}^2$，而$\overline{AB'}^2=a^2+b^2$

$\therefore c^2>a^2+b^2$

(2) 作△DFE'使∠DFE' = 90°



且$\overline{FE'}=\overline{FE}$，

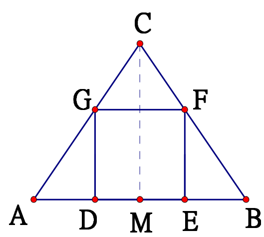
而由樞紐性質，

則$\overline{DE'}>\overline{DE}$，而$\overline{DE'}^2=e^2+d^2$

$\therefore \overline{DE}^2<e^2+d^2$，即$f^2<e^2+d^2$

七、指定作業：

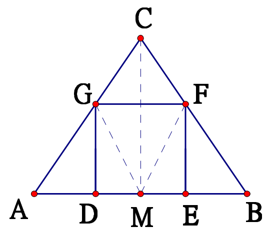
1. 如圖，等腰三角形 ABC 中，$\overline{AC}=\overline{BC}$，正方形 DEFG 為底邊$\overline{AB}$上的內接正方形，即$\overline{DE}$落在$\overline{AB}$上，另二頂點 F、G 分別在兩腰$\overline{BC}$、$\overline{AC}$上，試說明△ADG≅△BEF，且△GFC 為等腰三角形。



2. 上圖中，令 M 為$\overline{AB}$的中點，試解說$\overline{DM}=\overline{EM}$。

3. 在 1 的圖中，再連$\overline{GM}$與$\overline{FM}$，如右圖所示，

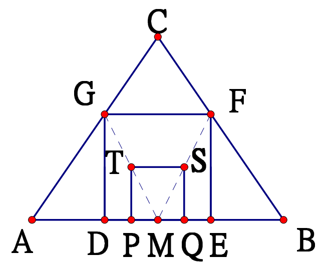
試說明△FGM 為等腰三角形。



4. 在 3 的圖中，令 S、T 分別為$\overline{FM}$與$\overline{GM}$的中點，

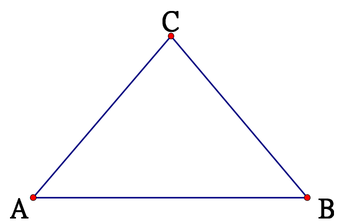
作$\overline{TP}\perp\overline{AB}$交$\overline{AB}$於 P，$\overline{SQ}\perp\overline{AB}$交$\overline{AB}$於 Q，

連$\overline{ST}$，如右圖所示，試說明 PQST 為正方形。



5. 已知△ABC 為兩腰$\overline{AC}$及$\overline{BC}$的等腰三角形，

請作出一個$\overline{AB}$邊上的內接正方形。

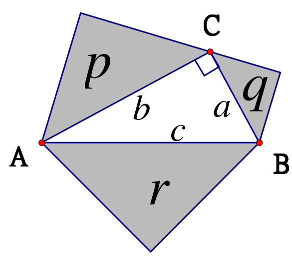


(提示：由 1~4 逆向先作正方形 STPQ 使得$\overline{PQ}$在$\overline{AB}$上，

且$\overline{PQ}$的中點就是$\overline{AB}$的中點。)

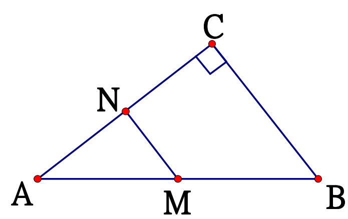
6. 直角三角形 ABC 中，$\angle C = 90°$，設 p、q、r 分別表示以$\overline{AC}$、$\overline{BC}$及斜邊$\overline{AB}$為底邊的三個相似等腰三角形的面積。試說明：$p + q = r$

(提示：相似△其面積比等於對應邊的平方比。)



7. 如圖，△ABC 為$\angle C = 90°$的直角三角形，M 為$\overline{AB}$邊上的中點，N 為$\overline{AC}$邊上的中點。

試說明：$\overline{MN}\perp\overline{AC}$。



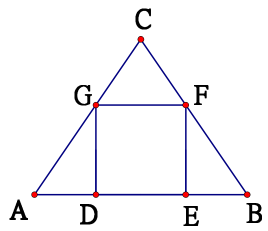
8. 試說明直角三角形斜邊上的中點到三頂點等距離。

指定作業參考解答：

1. 說明：在△ADG與△BEF中

$\because \angle A=\angle B$，$\angle ADG=\angle BEF=90^\circ$ 又 $\overline{DG}=\overline{EF}$

$\therefore$ △ADG≌△BEF (AAS全等)



說明：△GFC為等腰三角形如下：

由△ADG≌△BEF，$\therefore$ $\overline{AG}=\overline{BF}$

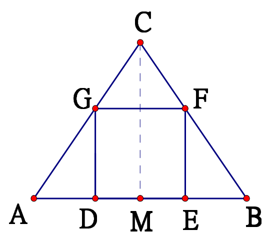
又 $\because$ $\overline{AC}=\overline{BC}$，$\therefore$ $\overline{AC}-\overline{AG}=\overline{BC}-\overline{BF}$

即得 $\overline{GC}=\overline{FC}$

故△GFC為兩腰是 $\overline{GC}$、$\overline{BC}$ 的等腰三角形

2. 說明：$\because$ △ADG≌△BEF，$\therefore$ $\overline{AD}=\overline{BE}$

又 $\because$ $\overline{AM}=\overline{BM}$

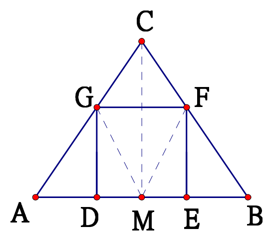


$\therefore$ $\overline{AM}-\overline{AD}=\overline{BM}-\overline{BE}$

即得 $\overline{DM}=\overline{EM}$

3. 說明：在△DGM與△EFM中，

由 $\overline{DG}=\overline{EF}$ ($\because$ DEFG為正方形)



且由2.知 $\overline{DM}=\overline{EM}$

另由 $\angle GDM=\angle FEM=90^\circ$

$\therefore$ △DGM≌△EFM (SAS全等)

$\therefore$ $\overline{GM}=\overline{FM}$，△FGM為兩腰 $\overline{GM}$ 與 $\overline{FM}$ 的等腰三角形

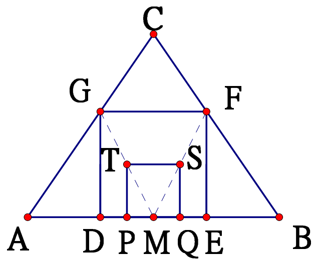
4. 說明：由 $\overline{TM}=\frac{1}{2}\overline{GM}=\frac{1}{2}\overline{FM}=\overline{SM}$

，即 $\overline{TM}=\overline{SM}$ ，

故△STM 亦為兩腰 $\overline{TM}$ 與 $\overline{SM}$ 的等腰三角形。

而△FGM 與△STM 為共有頂角∠FMG 的等腰三角形，

∴△FGM～△STM(SAS 相似)



$\therefore \frac{\overline{GF}}{\overline{TS}}=\frac{\overline{GM}}{\overline{TM}}=\frac{\overline{FM}}{\overline{SM}}=2$

即 $\overline{TS}=\frac{1}{2}\overline{GF}$

同法可解說△GDM～△TPM (AA 相似)

$\therefore \frac{\overline{GD}}{\overline{TP}}=\frac{\overline{GM}}{\overline{TM}}=2$ ，$\therefore \overline{TP}=\frac{1}{2}\overline{GD}$

合併上面，再由 $\overline{GD}=\overline{GF}$ 得 $\overline{TS}=\overline{TP}$

同理，可說明 $\overline{SQ}=\overline{TS}$ ；

進而利用△FGM～△STM 及△GDM～△TPM

∴∠FGM＝∠STM，∠DGM＝∠PTM

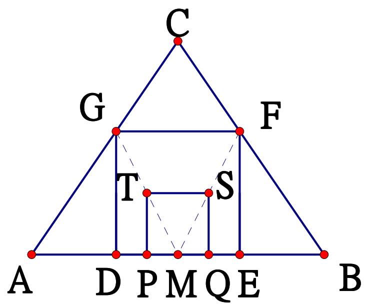
∴∠FGM＋∠DGM＝∠STM＋∠PTM，

但已知∠DGF＝90°且∠DGF＝∠FGM＋∠DGM

故得∠STM＋∠PTM＝90°，即∠STP＝90°

同理∠TSQ＝90°

綜合得知 PQST 為正方形



5. 作法：(1) 先作$\overline{AB}$的中點 M

(2) 在$\overline{AB}$上，M 的左、右各取 P、Q 點，

使得$\overline{MP}=\overline{MQ}$。

(參考上題，所取的 P、Q 最好靠近 M 點，

使得作出的正方形 PQST 在△ABC 的內部。)

(3) 以$\overline{PQ}$為邊長在$\overleftrightarrow{AB}$的上方作出正方形 PQST

(4) 連$\overline{MT}$、$\overline{MS}$並延長使得分別與$\overline{AC}$交於 G 點，

與$\overline{BC}$交於 F 點

(5) 分別過 G、F 點作$\overline{AB}$的垂直線交$\overline{AB}$於 D、E 點，則

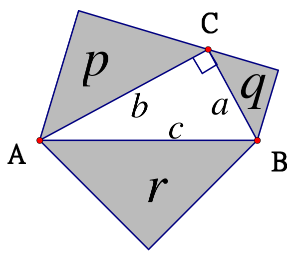
DEFG 即為所求的內接正方形。

說明：依 1~4 各題可逆向進行，最後得出的 DEFG 是符合所求的正方形。

6. 說明：令$\overline{AB}=c$、$\overline{AC}=b$、$\overline{BC}=a$

則由畢氏定理知$a^2+b^2=c^2$

又由相似三角形面積比等於其對應邊的平方比



知$\dfrac{p}{r}=(\dfrac{b}{c})^2$，$\dfrac{q}{r}=(\dfrac{a}{c})^2$，

再由$\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{a^2}{c^2}=\dfrac{b^2+a^2}{c^2}=1$

得知$\dfrac{p}{r}+\dfrac{q}{r}=1$，即得 $p+q=r$

7. 考慮△AMN 與△ABC

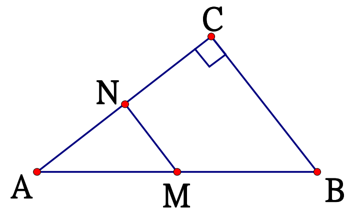
$\because \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{2}$

$\angle A = \angle A$

$\therefore$ △AMN～△ABC (SAS 相似)

$\therefore \angle ANM = \angle ACB = 90°$

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{AC}$



8. 已知直角三角形 ABC，設$\angle C = 90°$，

M 為斜邊$\overline{AB}$上的中點。

由上題 7 取$\overline{AC}$的中點 N，則由$\overline{MN} \perp \overline{AC}$

故$\overline{MN}$垂直平分$\overline{AC}$，於是$\overline{AM}=\overline{CM}$；

同理，$\overline{BM}=\overline{CM}$；合併得$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$，完成說明。

八、教學注意事項：

1. 教學活動時間建議如下：教學說明及活動一步驟 1、2 約 5~10 分鐘，步驟 3、4 約 5~10 分鐘，步驟 5、6、7 約 5~10 分鐘。活動二(含步驟 8~12)約 20~25 分鐘。(第一節課完畢，指定作習題 1~4)，活動三(含步驟 13~17)約 20~25 分鐘，活動四(含步驟 18~19)約 10~15 分鐘，活動五(含步驟 20~22)約 15 分鐘，活動六約 30 分鐘，活動七及指定作業約 10 分鐘。

2. 根據朱芳儀 (2013)的研究，實際調查學生會把老師說的三角形畫成等腰三角形(含等腰直角三角形或正三角形)比例高達八成以上。而本文也調查過林口國中四班共 109 人，畫出等腰三角形的比例高達$\frac{94}{103}\approx 86\%$。

對你任教的班級調查一下，只驗證是否有八成以上的比例而已，目的主要還是為本單元的主題引起學生強烈的教學動機。

3. 步驟 4 的說法是基於學生在國小階段學過線對稱的基本認識，因此採用對摺的方法，來得知等腰三角形兩底角相等。而反向的情形，有兩內角相等的三角形，也可用相同方法加以說明清楚，更進一步地也同時學到了頂角平分線垂直平分底邊。一種技術有多種應用成果是很重要的技巧。底下的方式僅提出供參考，不建議老師採用(對初學者符號會太抽象了！)：

如圖 1：△ABC 與△BAC 中

$\overline{AC}=\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{BA}$，$\overline{BC}=\overline{AC}$

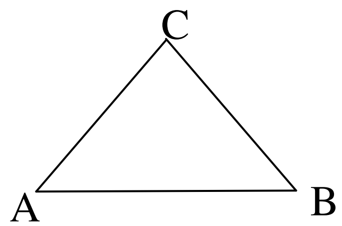


圖 1

故得知 △ABC≅△BAC (SSS 全等)

再得∠ABC=∠BAC，即∠B=∠A

4. 對本單元有關三角形的高、中線及角平分線應作複習，這是一定要做的工作，否則學生易混淆先前的預備知識。

5. 本單元主題的寫法跟一般學校的數學教科書有極大的不同。

教學前務必花上一段不少的時間準備，否則可能會無法順暢的教學，教學效果評量會產生欠佳的後果。

6. 本單元之主題有關三角形的心，僅先呈現重心一詞，其他的二心(內心、外心)等到三角形的三心單元再正式賦予這些術語。
7. 本單元雖然探討等腰銳角三角形之三條高交於一點，但仍不出現垂心一詞；一般而言，三高或其延長線也會交於一點，但對於銳角三角形而言，探究垂心難度較高，不宜在教幾何之開始就給出如此的難題。
8. 對中線單元，我們介紹其三中線交於一點重心。進而坐標法得出重心到頂點的距離等於重心到對邊中點距離的兩倍，主要提供一般的三角形也會有類似的性質之用，並充作將來學習三角形重心的預備工作並能強烈引起學習三角形重心之動機。至於一般的三角形有等長的中線時，必定是等腰三角形，則要等待處理一般的三角形重心後再一併說明。
9. 活動六(總結論)後提出步驟 24 的例 2，本身直角三角形斜邊上的中點跟三頂點等距離是未來學習數學很重要的工具，意外地想到這樣工具竟然能與隨處可見的等腰三角形連結在一起而且解說法也符合學生學習本單元的預備知識。
10. 利用三角形兩邊之和大於第三邊的國小既知性質，與建構適

當的等腰三角形就可用來說明△ABC 中，大角對大邊，小角對小邊，反之，大邊對大角，小邊對小角；進一步又可用來解說樞紐定理。

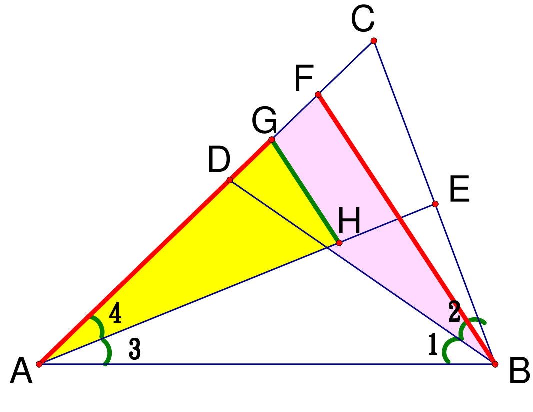
11. 利用樞紐定理與排除二種不可能發生的情形，利用三一律就可得逆樞紐定理。

12. 我們研究有兩內角平分線等長的三角形必為等腰三角形，基本上是一道難題。到目前共有 60 多種解說法，而這許多解說法部分排除了有高度技巧的純幾何解說法，我們就提供較易接受的間接幾何解說法：

將原題改變成三角形中，內角大的平分線長小於內角小的平分線長：

解說法：△ABC 中，$\angle A<\angle B$，$\overline{BD}$ 為$\angle B$ 的平分線，

$\overline{AE}$ 為$\angle A$ 的平分線，如右下圖所示。



由已知$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$

$\angle B=2\angle 2$，$\angle A=2\angle 4$

$\because \angle A<\angle B$，$\therefore \angle 4<\angle 2$

故可作出$\angle DBF=\angle 4$，

使得 F 在$\overline{AC}$ 邊上，

且$\overline{BF}$ 除了端點外都在△ABC 的內部。

由此作出後得到△ABF，進一步

再由∠1＞∠3，∠DBF＝∠4，故∠ABF＞∠BAC

於是$\overline{AF} > \overline{BF}$ (大角對大邊)

故可在$\overline{AF}$取 G 點使得$\overline{AG} = \overline{BF}$，

再過 G 點作$\overline{BF}$的平行線交$\overline{AE}$於 H，

於是∠AGH＝∠AFB (二平行線所截同位角相等)

且知 H 點會落在$\overline{AE}$線段的內部，

最後再利用 ASA 全等性質說明△AGH≅△BFD

推知$\overline{AH} = \overline{BD}$

但由$\overline{AE} > \overline{AH}$，所以$\overline{AE} > \overline{BD}$。

當然最後要用到三一律，知道∠B＞∠A，∠A＞∠B 都不可能。∴∠A＝∠B，於是△ABC 為等腰三角形。

13. 在各活動間教師宜巡堂走動，加強瞭解學生學習情形。
14. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

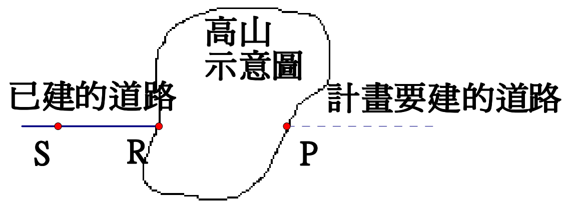
1. 朱芳儀(2013)。國中生三角形與四邊形的概念心像調查—以基隆市某公立國中七至九年級學生為例。(未出版之碩士論文)。臺北市：國立臺灣師範大學。

2. 李虎雄、陳昭地等(2003)。幾何學教師手冊上冊 2 版。臺中市：康熙。
3. 傅淑婷(2013)。全等三角形，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-1)。新北市：國家教育研究院。
4. 傅淑婷(2013)。相似三角形，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-2)。新北市：國家教育研究院。
5. 傅淑婷(2013)。正五邊形與黃金三角形，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-6)。新北市：國家教育研究院。
6. 陳昭地(2013)。三角形的高、中線、內角平分線及外角平分線之性質探討。國家教育研究院臺北院區：國中小數學領域教材原型研討會。
7. Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 39: The Criterion of Constructibility. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 278-279). Columbus, OH：Merrill.

8. 提供下列數學資料以隨時作為補充教材之用。

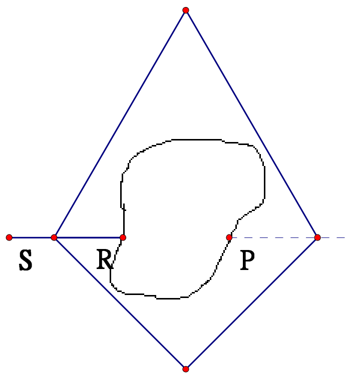
(1)高山的左方已建好了一條筆直的道路，如下圖所示。

由於發展求平衡的問題，現在計畫在山的另一方也要從高山下的平地，另蓋一條筆直的道路，該籌建小組為預備將



來兩條道路之間　籌建一條直通兩條的直線隧道，預定從兩個方向各自面對施工。請問如何幫他們設計出該在對方山下的那一點(P)及那樣直線方向來完成建造新的一條筆直道路呢？

解說：

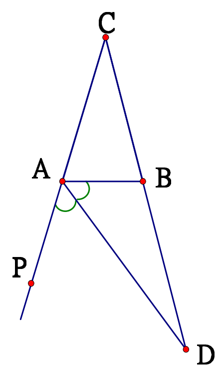


作法(一)　：正三角形法

作法(二)：等腰直角三角形法

設計草圖如右示意圖所示。

(2)①先定義△ABC 的外角平分線：



如圖，△ABC 中，延長 $\overleftrightarrow{CA}$，

$\overleftrightarrow{CA}$ 與 $\overline{AB}$ 決定出 $\angle A$ 的外角

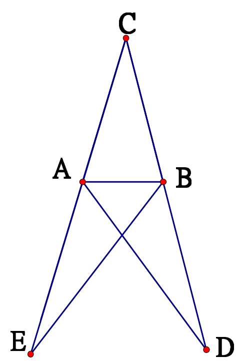
$\angle BAP = 180^\circ$ □ $\angle A$

若 $\angle BAP$ 的角平分線，

交對邊 $\overline{BC}$ 的延長於 D，

則稱 $\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的外角平分線。

②試解說非正三角形的等腰三角形，



其兩底角的兩條外角平分線等長。

如圖，△ABC 為 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 的等腰三角形。

$\angle C \neq 60°$，故$\angle A$ 外角平分線交$\overline{BC}$的延長線於 D，

$\angle B$ 的外角平分線交$\overline{AC}$的延長線於 E，欲說明$\overline{AD}=\overline{BE}$ 。

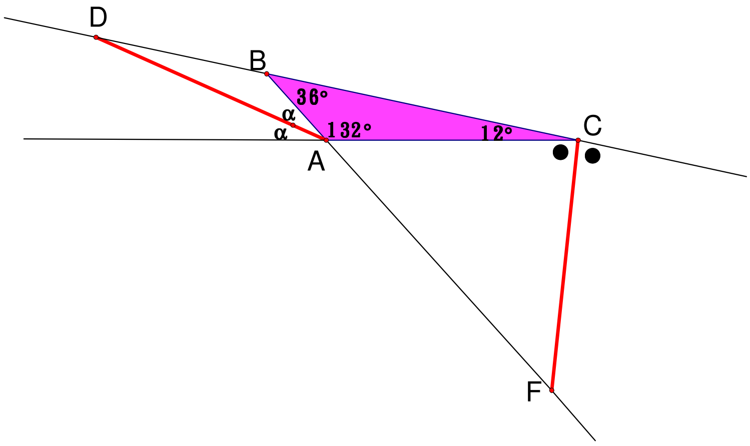
為此，考慮△CBE 與△CAD，

$\because \angle C=\angle C$，$\overline{CB}=\overline{CA}$，

$\angle CBE=\angle B+\dfrac{1}{2}\angle ABD=\angle A+\dfrac{1}{2}\angle BAE=\angle CAD$

故得△CBE≅△CAD(ASA 全等)　$\therefore \overline{AD}=\overline{BE}$

③ ②的逆敘述不成立，即有兩外角平分線等長未必是等腰三角形。如圖，12°、132°、36°為內角度數的△ABC 就有$\angle C$ 的外角平分線$\overline{CF}$與$\angle A$ 的外角平分線$\overline{AD}$等長。



說明：$\because \angle\alpha=24°$　$\angle CDA=12°$

$\therefore$△ACD 為等腰△，$\overline{AD}=\overline{AC}$……①

又$\angle CAF=180°-132°=48°$

且$\angle ACF=(180°-12°)\div 2=84°$

得$\angle AFC=180°-84°-48°=48°$

$\therefore$△ACF 為等腰△，$\overline{AC}=\overline{CF}$……②

由①②得$\overline{AD}=\overline{CF}$

主題 3－4：平行線與平行截線定理

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者：**傅淑婷

曹博盛

陳昭地

二、先備知識：

(一) 知道平面上的兩條（相異）直線只有相交與不相交兩種，不相交的兩直線就是平行線。

(二) 知道兩條平行線有公共的垂直線。

(三) 知道兩平行線之間處處等距離。

(四) 能用直尺的上、下緣畫出一組平行線。

(五) 知道角的意義，能用直尺圓規作出一角等於已知角。

(六) 知道三角形內角和為 180°。

(七) 知道三角形全等的條件（SSS，SAS，ASA，AAS）與相似形的條件（SSS，SAS，AA）。

(八) 知道$a:b=c:d$就是$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (b ，d 都不為0) 。

(九) 知道$a:b=c:d$且當a ，b ，c ，d 都不為 0 時，則$b:a=d:c$（反比）。

(十) 知道$a:b:c=r:s:t$的意涵。

三、教學目標：

(一) 知道平面上兩直線被另一直線截出八個角；並知道同位角與內錯角的意義。

(二) 知道兩平行線被一直線截出的任一組同位角都相等，任一組內錯角也都相等。

(三) 知道平面上兩直線被一直線截出一組同位角相等或一組內錯角相等，則此二直線為平行線。

(四) 能用同位角的性質，用尺規作出過已知直線外的一點且平行於已知直線的平行線。

(五) 能利用平行線的性質或判別性質，瞭解連接三角形任兩邊中點的線段平行且等於第三邊的一半。

(六) 能知道平行截線定理的意涵。

(七) 能利用平行截線定理將一線段n等分。

(八) 能利用平行截線定理準確的標示出數線上形$\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5}$或$\frac{4}{5}$分母小於或等於 5 的分數點。

(九) 能知道平行四邊形的兩組對邊等長。

四、授課時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

(一) 本單元是屬幾何的題材，要求學生研讀本單元時，應攜帶直尺、圓規及量角器。

(二) 本單元共有七個活動，內含十三個步驟，九個隨堂練習及六道例題，指定作業七道題，預備在兩節內完成教學。

(三) 使用 Powerpoint 檔或設計配合本主題的學習單可大幅

提昇教學效果。

(四) 教學時應能循序漸進，但若已具有充分先備知識，教學進度就可加快些。

(五) 本主題最重要的問題有三：

(1) 平行線的性質與判別性質。

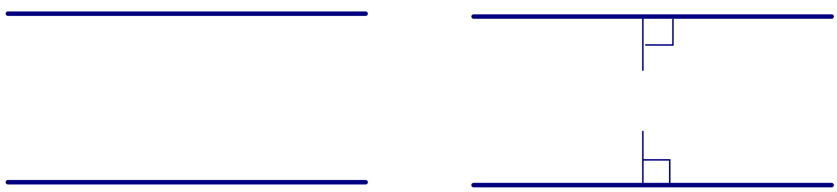
(2) 連接三角形兩邊中點的連線性質。

(3) 平行截線定理的意涵與應用。

六、教學活動：

活動一：何謂平行線？（溫故知新）

步驟 1：下面是沿著刻度尺的上、下緣所畫出的兩組直線：



（1）　　（2）

圖1

其中左邊這一組沒畫出任何刻度，而右邊這上、下對齊加上了一條刻度線並加上了垂直的記號。

這是大家在國小數學就學過的平行線，圖 1(2)又表示它們有一條公共的垂直線段；其實還有許許多多上、下對齊的刻度，如果把它們逐一作出，可以得到更多的共有垂直線段，它們的長度都是跟直尺的寬度同樣長；我們

把這個寬度就說成此兩平行線的距離，並可發現兩平行線處處等距離。

隨堂練習 1：

(1) 請同學核對身邊的刻度尺，(寬度可以不相同)，核驗看看可否畫出類似圖 1 的兩組平行線。

(2) 請同學在平面上，隨意畫出兩相交直線，並問此時是否有公共的垂直線?

步驟 2： 兩條相交的直線 L_1、L_2，設交點為 O，則此兩直線將平面分成以 O 為共同頂點的四個角：$\angle 1, \angle 2, \angle 3$ 及 $\angle 4$，其中有兩組的對頂角，$\angle 1$ 與 $\angle 3$；$\angle 2$ 與 $\angle 4$，如圖 2(1)所示。

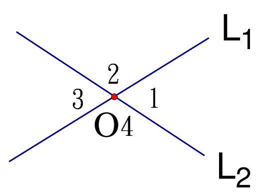


圖2(1)

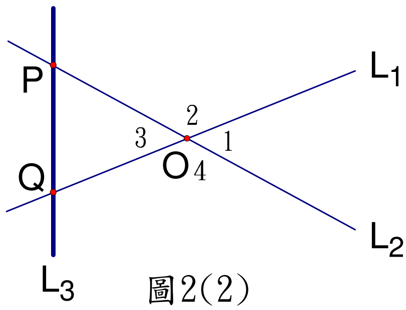


圖2(2)

圖 2(2)是想要說明相交的兩條(相異)直線不是平行線。假設此相交的兩直線 L_1、L_2 是平行線，則存在一條公共的垂直線 L_3，$L_3 \perp L_1$ 且 $L_3 \perp L_2$，也就是圖 2(2) 中 $\angle OPQ = \angle OQP = 90^\circ$。則 L_3 與 L_1、L_2 所圍成的 $\triangle OPQ$ 中，由於 $\angle 3$ 是正度數的角，所以 $\triangle OPQ$ 的內角和大於 180°，這是不合理的。事實上，任意畫出的直線也都不可能是

L_1、L_2的公共垂直線，因此L_1、L_2就不是一組平行線了！

換言之相交的二條（相異）直線不是平行線。

隨堂練習 2： 如圖 2 之(1)，請說明相交直線產生的四個角

$\angle 1, \angle 2, \angle 3$及$\angle 4$中，$\angle 1 = \angle 3$；$\angle 2 = \angle 4$（即對頂角相等）。

步驟 3： 反觀圖 1 中的兩條平線是永不相交的，於是在平面上兩條不相交的直線，也可視為平行線的一種詮釋。綜合言之，平面上兩條不相交的直線L_1、L_2可稱為平行線，記作$L_1 // L_2$，它們在此平面上有一條公共垂直線，如圖 3 表示。

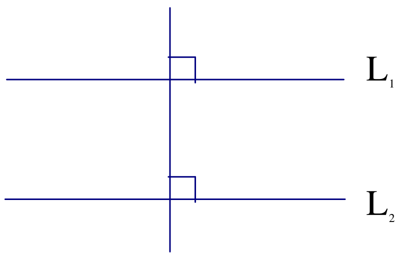


圖3

隨堂練習 3： 兩平行線有多少條共有垂直線（段）？從兩平行線上的任意點都有一條通過此點的共有垂直線嗎？

活動二： 平行線的性質

步驟 4： 如圖 4(1)、(2)所示，平面上兩組直線L_1與L_2；L_3與L_4；其中是L_1、L_2是平行線，L_3、L_4是不平行的直線，L 是與L_1、L_2都相交的直線，M 也是跟L_3、L_4都相交的直線，它們稱為原先兩條直線的一條截線，每一條截線跟兩條直線分

此平面為八個角。

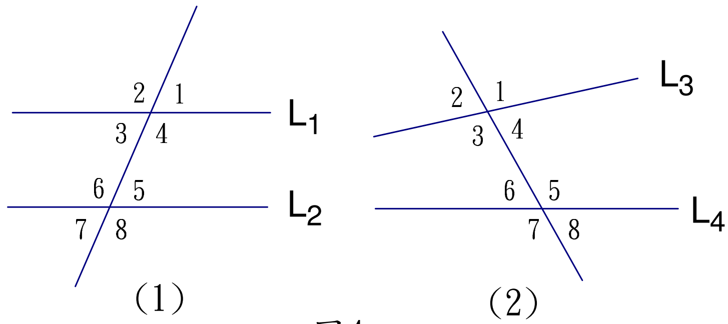


圖4

圖 4(1)、(2)中所提示的「八個角」，$\angle 1$與$\angle 5$是一組同位角，同樣地$\angle 2$與$\angle 6$，$\angle 3$與$\angle 7$，$\angle 4$與$\angle 8$也都是一組同位角，而$\angle 3$與$\angle 5$是一組內錯角，$\angle 4$與$\angle 6$也是一組內錯角，粗略觀察兩平行線 L_1 與 L_2 之同位角$\angle 1$與$\angle 5$似乎是相等的，但 L_3 與 L_4 這組相交直線之同位角$\angle 5$好像比$\angle 1$大！

再仔細地用量角器檢查核驗粗看的結果是否正確呢？請檢查看看！換言之，兩平行線被一直線所截，其截出的同位角是相等；而平面上不平行的直線被一直線所截出的同位角卻是不相等。

隨堂練習 4：

(1) 如圖 4 之(1)試說明：若$\angle 1 = \angle 5$，則$\angle 2 = \angle 6$，$\angle 3 = \angle 5$。

(2) 如圖 4 之(2)試說明：若$\angle 1 < \angle 5$，則$\angle 2 > \angle 6$，$\angle 3 < \angle 5$。

到底隨堂練習 4 上面核驗的答案，應如何正確說明，請看下一個步驟。

步驟 5：說明兩平行線 L_1、L_2被一直線 L 所截，但一組同位角相等：

看示意圖 4 之(1)，L_1與 L_2互相平行，截線 L 交 L_1與 L_2 於 A、B；而截出的一組同位角∠1與∠5，如圖 4 之(3)。

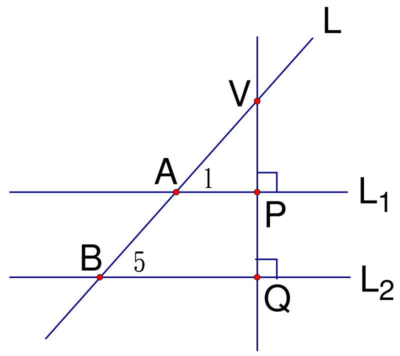


圖4(3)

取 L_1上的適當點 P，過 P 作 L_1的垂直線交 L_2於 Q，$\overleftrightarrow{PQ}$為 L_1與 L_2的一條公有垂直線，交 L 於 V，則由直線$\overleftrightarrow{PQ}$分別垂直 L_1、L_2於 P、Q，故$\angle APV=90°$，$\angle BQV=90°$，

於是得$\angle 1+\angle AVP=90°$，$\angle 5+\angle BVQ=90°$，但$\angle AVP=\angle BVQ$，

故得$\angle 1=90°-\angle AVP=90°-\angle BVQ=\angle 5$，即$\angle 1=\angle 5$。

配合隨堂練習 4 及步驟 5 的說明，我們可以知道：兩平行線被一直線所截出的同位角相等，隨之其內錯角也相等。

隨堂練習 5：如圖 4 之(1)試說明：若$\angle 1=\angle 5$，則$\angle 3=\angle 5$。

綜合言之，兩平行線被一直線所截，若同位角相等，則內錯角也相等。

活動三：平行線的判別性質

步驟 6：假如圖 4 之(1)一開始並不知道 L_1 與 L_2 是否互相平行，但知道 $\angle 1=\angle 5$，那麼我們能知道 $L_1//L_2$ 嗎？答案是肯定的。可以由圖 4 之(3)逆其道而行，取截線 L 上的適當點 V，過 V 作 L_1 的垂直線 $\overleftrightarrow{VP}$ 交 L_1 於 P，交 L_2 於 Q，

比較 ΔVAP 與 ΔVBQ：

$\angle 1+\angle \mathrm{AVP}=90°$，$\angle 5+\angle BVP+\angle BQP=180°$

$\because \angle \mathrm{AVP}=\angle \mathrm{BVP}$，$\angle 5=\angle 1$

$\therefore \angle 5+\angle \mathrm{BVP}=90°$

$\therefore \angle \mathrm{BQP}=90°$

$\therefore \overleftrightarrow{VP}\perp L_2$ 於 Q

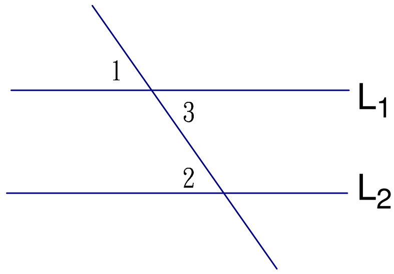
故 $\overline{PQ}$ 為 L_1 與 L_2 之一條公垂線段，於是 $L_1//L_2$。

同樣地假如圖 4 之(1)中，未先假設 $L_1//L_2$ 而僅知道 $\angle 3=\angle 5$ 則由 $\angle 3=\angle 1$，得 $\angle 1=\angle 5$，再由上面的說明知道 $L_1//L_2$，於是我們得到如下的結論：若平面兩直線 L_1、L_2 被一直線截出相等的一組同位角，亦即有一組同位角相等，則 L_1、L_2 是互相平行的直線；而若截出的一組的內錯角相等，則 L_1、L_2 亦是互相平行。

步驟 7：由上面的結論，簡單地說，平面上兩直線被一直線截出的一組同位角相等，或一組內錯角相等，則此兩直線互相平行，而此即為平行線的判別性質。

隨堂練習 6：

(1) 下圖中，若 $L_1//L_2$，$\angle 1=50°$，則 $\angle 2$ 等於多少度？



(2) 上圖中，若 $\angle 1=\angle 2$ 或 $\angle 3=\angle 2$，則 L_1 與 L_2 互相平行嗎？

活動四：過直線 L 外的一點 P，用尺規作圖作出直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 使得 $\overleftrightarrow{PQ}//L$。

步驟 8：由活動三之步驟 7，有同位角相等的兩條直線必平行，就可以讓我從畫角的方向，粗略畫出過直線外一點，作出過此點而平行於此線的直線了！更精確的作法，可採尺規作圖來得到準確的平行線，如下例：

例 1：已知直線 L，及不在 L 上的一點 P，如圖 5(1)，求作直線 $\overleftrightarrow{PQ}$，使得 $\overleftrightarrow{PQ}//L$。

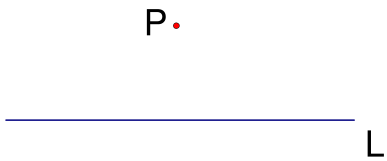


圖5(1)

作法說明：

(1) 在 L 上取一點 A，連直線 $\overleftrightarrow{PA}$ 如圖 5(2)所示。

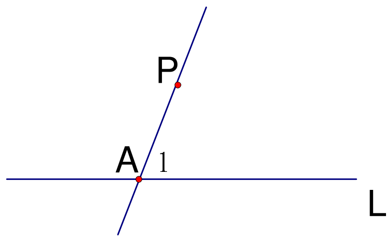


圖5(2)

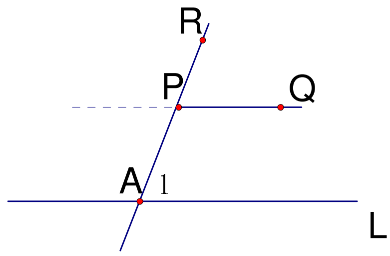


圖5(3)

(2) 令 $\overline{AP}$ 與直線 L 在 A 右方射線的交角為 $\angle 1$。

(3) 再過 P 點作以 $\overleftrightarrow{AP}$ 上方的射線 $\overrightarrow{PR}$ 為始邊，而終邊在過 P 點右方的射線 $\overrightarrow{PQ}$ 上，作 $\angle RPQ = \angle 1$，如圖 5（3）。

(4) 則由直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 上 $\angle RPQ$ 與 $\angle 1$ 為同位角，而 $\angle RPQ = \angle 1$，故 $\overleftrightarrow{PQ} /\!/ \mathrm{L}$，$\overleftrightarrow{PQ}$ 即為所求。

步驟 9：又借用幾何上的一個**公設**：過 L 外一點 P 恰有一直線與 L 平行，因此圖 5(4)表示 $\overleftrightarrow{PQ}$ 是平行於 L 的唯一直線了！

活動五：平行線同位角相等之判別性質的幾個應用

步驟 10：先考慮下面的實例

例 2：ΔABC 中，D、E 分別為兩邊 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 的中點，其連線段 $\overline{DE}$（如圖 6），

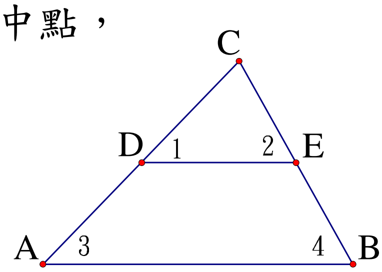


圖6

試說明 $\overline{DE} \overset{/\!/}{=} \dfrac{1}{2}\overline{AB}$

（此地 $\overset{/\!/}{=}$ 表示 $\overline{DE} /\!/ \overline{AB}$ 且 $\overline{DE} = \dfrac{1}{2}\overline{AB}$）

說明：先把圖 6 中的四個角分別記作 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$。

再看ΔDCE與ΔACB，由已知，$\because \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{2}$，

且$\angle C=\angle C$，$\therefore \Delta DCE \sim \Delta ACB$（SAS 相似性質），

$\therefore \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{2}$，即$\overline{DE}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}$，再由此相似得$\angle 1=\angle 3$，

$\angle 2=\angle 4$。最後因為$\angle 1$、$\angle 3$或$\angle 2$、$\angle 4$為一組同位角。

而同位角相等，即得$\overline{DE}//\overline{AB}$。

隨堂練習 7：可以或不可以用同樣的道理（簡稱**同理**），說明：若 F 為$\overline{AB}$的中點，則$\overline{EF}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$，$\overline{EF}//\overline{AC}$呢？（答案當然是可以，不妨把原圖倒過來看如法泡製一下。）

步驟 11：以上結果，常被稱為**三角形兩邊中點連線定理。**

例 3：ΔABC中，D 為$\overline{AC}$的中點，$\overline{DE}//\overline{AB}$且 E 在$\overline{BC}$上，如圖 7，試說明：E 為$\overline{BC}$的中點。

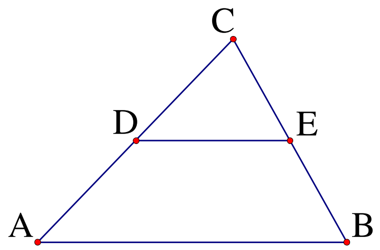


圖7

說明：$\because \overline{DE}\ //\overline{AB}$，$\therefore \angle CDE=\angle A$（同位角相等）

在ΔDCE與ΔACB中，$\angle CDE=\angle A$，$\angle C=\angle C$

$\therefore \Delta DCE \sim \Delta ACB$（AA 相似），$\therefore \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$

$\because$ D 為 $\overline{AC}$ 的中點 ， $\therefore \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{2}$， $\therefore \dfrac{\overline{CE}}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{2}$

故得 $\overline{CE}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$，即 E 為 $\overline{BC}$ 的中點。

由例 3 與例 2 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$ ，得 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$ ，故 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}-1=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CE}}-1$

於是 $\dfrac{\overline{AC}-\overline{CD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BC}-\overline{CE}}{\overline{CE}}$，故得 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}$

即 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$ 。

其實上面比例式對 D、E 為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 的中點時，顯然成立。更一般地說，我們有如下的例子。

例 4： ΔABC 中，D 為 $\overline{AC}$ 邊上或其延長線上的任意異於 A、C 的一點，$\overline{DE}$ 為過 D 點所作 $\overline{AB}$ 的平行線交 $\overline{BC}$ 或其延長線於 E，如圖 8(1) (2)所示。試說明：$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$ 。

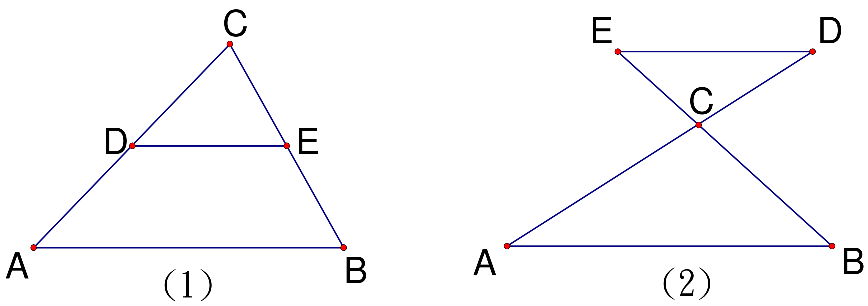


圖8

說明：在 ΔABC 與 ΔDEC 中，

$\because \overline{DE}//\overline{AB}$

$\therefore \angle A=\angle CDE$（同位角或內錯角相等）

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEC$（AA 相似）

$\therefore \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$

$\therefore \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}-1=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EC}}-1$（圖 8（1）情形）

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}+1=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{EC}}+1$（圖 8（2）情形）

故得 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$，即得 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$

由例 4 知ΔABC中，$\overline{AB}$邊的平行線將$\overline{AC}$、$\overline{BC}$分成比例線段，更一般地說，我們有如下活動六平行截線定理。

活動六：平行截線定理與應用

我們分成下列步驟 12～14 來逐序說明。

步驟 12：先考慮有三條平行線的問題。

例 5：ΔABC中，D、F 在$\overline{AC}$邊上，E、G 在$\overline{BC}$邊上，$\overline{FG}//\overline{DE}//\overline{AB}$（即$\overline{EG}$、$\overline{DE}$、$\overline{AB}$兩兩平行），如圖 9 之(1)。

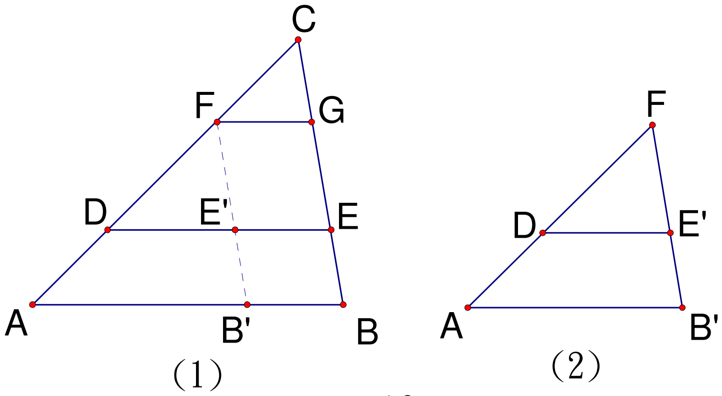


圖9

試說明：$\overline{CF}:\overline{FD}:\overline{DA}=\overline{CG}:\overline{GE}:\overline{EB}$（即$\overline{CF}$、$\overline{FD}$、$\overline{DA}$三線段長的連比等於$\overline{CG}$、$\overline{GE}$、$\overline{EB}$三線段長的連比）

說明：先看ΔDEC中，比照圖 8 之(1)（$\overline{DE}$取代$\overline{AB}$、$\overline{FG}$取代$\overline{DE}$）F、G 分別在$\overline{DC}$及$\overline{EC}$邊上，且$\overline{FG}//\overline{DE}$，得

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{DF}}=\frac{\overline{CG}}{\overline{GE}}\cdots(*)$$

再由過 F 作$\overline{BG}$邊的平行線分別交$\overline{DE}$、$\overline{AB}$於E'、B'，將圖 9 之(1)虛線$\overline{FB'}$與$\overline{FA}$及$\overline{AB'}$之三角形移到圖 9 之(2)，同樣地在圖 9 之(2)的$\Delta AB'F$中，

D、E'分別在$\overline{AF}$及$\overline{B'F}$邊上，且$\overline{DE'}//\overline{AB'}$，仿上可得$\dfrac{\overline{DF}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{FE'}}{\overline{B'E'}}\cdots(**)$又$\because\overline{FG}//\overline{DE}$，$\overline{FE'}//\overline{GE}$，$\therefore EGFE'$為平行四邊形，而平行四邊形的對邊等長（見隨堂練習 8）$\therefore\overline{FE'}=\overline{GE}$，同理，$BEE'B'$亦為平行四邊形，

$\overline{E'B'}=\overline{EB}$，用在$(**)$式中$\overline{GE}$取代$\overline{FE'}$，$\overline{EB}$取代$\overline{E'B'}$得

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{GE}}{\overline{BE}}\cdots(***)$$ ，

$(*)$ 式相當於$\overline{CF}:\overline{DF}=\overline{CG}:\overline{GE}$，

$(***)$ 式相當於$\overline{DF}:\overline{AD}=\overline{GE}:\overline{BE}$，

於是$\overline{CF}:\overline{DF}=\overline{CG}:\overline{GE}$，$\overline{DF}:\overline{AD}=\overline{GE}:\overline{BE}$，

故得 $\overline{CF}:\overline{DF}:\overline{DA}=\overline{CG}:\overline{GE}:\overline{EB}$。

特別當$\overline{CF}=\overline{DF}=\overline{DA}$時可得知$\overline{CG}=\overline{GE}=\overline{EB}$ 。

隨堂練習 8：試說明平行四邊形對邊等長。(提示：連接對角線看分成的兩個三角形是否全等。)

例 6：平面上三條平行線 L_1、L_2、L_3被一直線 L 所截，交 L_1、L_2、L_3分別於 F、D 及 A，此三條平行線又被另一直線 M 所截，交 L_1、L_2、L_3分別於 G、E 與 B，截線 L、M 交於 C，如圖 10。則$\overline{CF}:\overline{FD}:\overline{DA}=\overline{CG}:\overline{GE}:\overline{EB}$

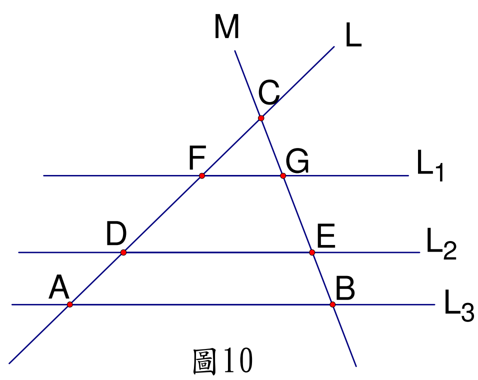


圖10

說明：僅看ΔABC部分，比照圖 9(1)即可得知結論正確。

步驟 13：再看一般的平行截線定理：

已知平面上一組平行線 L_1、L_2、…、L_n被兩條截線 L、M 所截。分別交 L_1、L_2、…、L_n於 F、D、…，A 及 G、E、…、B 且令 L、M 交於 C，如圖 11 所示。(圖中僅畫出 5 條)

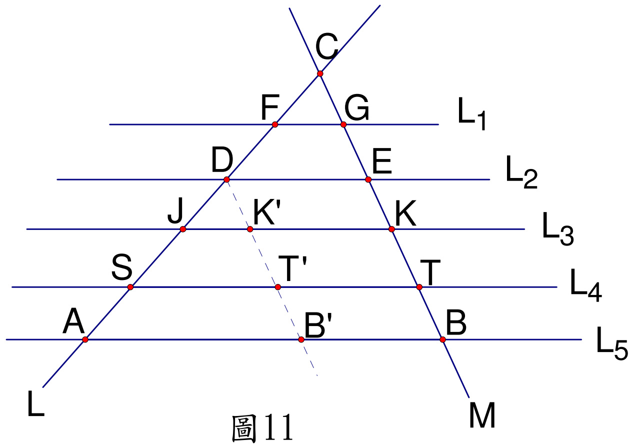


圖11

則 $\overline{CF}:\overline{FD}:\overline{DJ}:\overline{JS}:\overline{SA}=\overline{CG}:\overline{GE}:\overline{EK}:\overline{KT}:\overline{TB}$

說明：看ΔJKC，由例 5 知$\overline{CF}:\overline{FD}:\overline{DJ}=\overline{CG}:\overline{GE}:\overline{EK}$；

過 D 點作$\overline{DB'}//\overline{EB}$且$\overline{DB'}$分別交 L_3、L_4、L_5於K'、T'、B'。

再看$\Delta AB'D$，由例 5 知：$\overline{DJ}:\overline{JS}:\overline{SA}=\overline{DK'}:\overline{K'T'}:\overline{T'B'}$，

但$\overline{DK'}=\overline{EK}$，$\overline{K'T'}=\overline{KT}$，$\overline{T'B'}=\overline{TB}$故得

$\overline{DJ}:\overline{JS}:\overline{SA}=\overline{EK}:\overline{KT}:\overline{TB}$，合併得知：

$\overline{CF}:\overline{FD}:\overline{DJ}:\overline{JS}:\overline{SA}=\overline{CG}:\overline{GF}:\overline{FK}:\overline{KT}:\overline{TB}$，特別當

$\overline{KF}=\overline{FD}=\overline{DJ}=\overline{JS}=\overline{SA}$時，得$\overline{CG}=\overline{GF}=\overline{FK}=\overline{KT}=\overline{TB}$。

步驟 14：平行截線定理之應用

例 7：已知數線上標示代表 0、1 的點為O、P，如圖 12 所示。

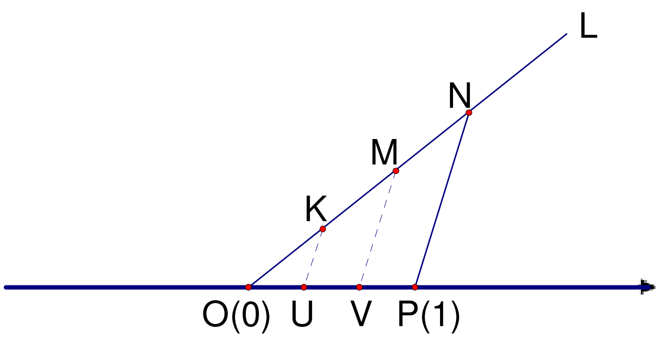


圖12

請用本活動的方法，標出數線上代表$\frac{1}{3}$及$\frac{2}{3}$的點。

作法說明：

(1) 過原點O向右上方作一條射線 L。

(2) 在 L 上選取適當長$\overline{OK}$，標出K。

(3) 在$\overline{OK}$延長線上再取出 M，N 使得$\overline{KM}=\overline{MN}=\overline{OK}$。

(4) 連$\overline{NP}$。

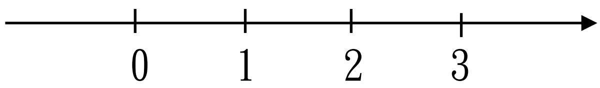
(5) 再過K、M分別作$\overline{NP}$的平行線交$\overline{OP}$於U、V。

(6) 由平行截線定理知$\overline{OK}:\overline{KM}:\overline{MN}=\overline{OU}:\overline{UV}:\overline{VP}$，故得

$\overline{OU}=\overline{UV}=\overline{VP}=\frac{1}{3}\overline{OP}$，而$U$、$V$分別表示$\frac{1}{3}$與$\frac{2}{3}$的點。

隨堂練習 9：在已標示出坐標 2，3 兩點的數線上，用本節的方法，

找出代表$2\frac{1}{3}$及$2\frac{2}{3}$的點。



活動七：(總結論)

(一) 你瞭解平行線的性質及其判別性質了嗎？

(二) 你知道兩條相交的相異直線得到兩組角度相等的對頂角嗎？

(三) 你是否能用尺規作出過一直線外的一點平行於此直線的

直線嗎？

(四) 你能清楚的說明三角形兩邊上的中點連線定理嗎？

(五) 你知道平行線截出比例線段嗎？

(六) 你能知道平行截線定理嗎？

(七) 你能用平行截線標示出數線上形如$\frac{1}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{4}{5}$的點嗎？

如果以上的問題有疑問的話，得再好好地查閱本單元的有關內容或再請教老師或跟同學討論呢！

教學活動參考解答：

活動一：

隨堂練習 1：(1)(2) 略。

隨堂練習 2：$\because \angle 3+\angle 2=180°$，$\angle 1+\angle 2=180°$，$\therefore \angle 3+\angle 2=\angle 1+\angle 2$，

$\therefore \angle 3=\angle 1$即$\angle 1=\angle 3$，同理$\angle 2=\angle 4$。

隨堂練習 3，有無限多條共有的垂直線；有。

活動二：

隨堂練習 4：(1)(2) 略。　隨堂練習 5：略。

活動三：

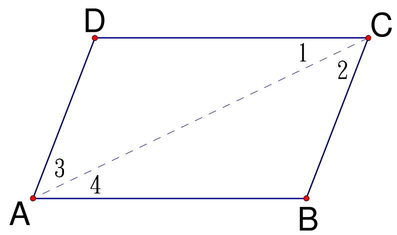
隨堂練習 6：(1) $\angle 2=50°$ (2) 是。

活動五：

隨堂練習 7：(略)。

活動六：

隨堂練習 8：已知平行四邊形 ABCD（如圖）



連 $\overline{AC}$ 得 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 與 $\angle 4$ 。ΔACD 與 ΔCAB 中，

$\because \angle 1 = \angle 4$ ，$\angle 2 = \angle 3$（內錯角相等），$\overline{AC} = \overline{AC}$ ，

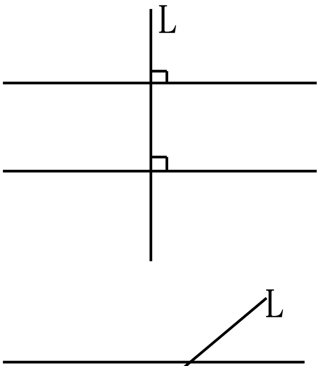
$\therefore \Delta ACD \sim \Delta CAB$（ASA 全等），$\therefore \overline{AD} = \overline{CB}$ ，$\overline{CD} = \overline{AB}$ 。

隨堂練習 9：仿例 6。

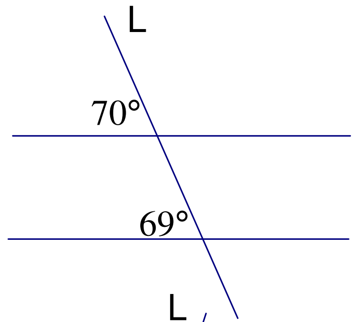
七、指定作業：

1. 下列平面上的各組直線被直線 L 截出八個角，哪些組是平行線？

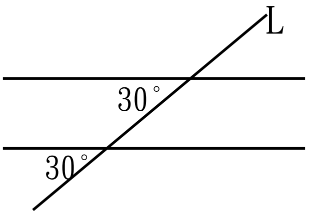
(1)



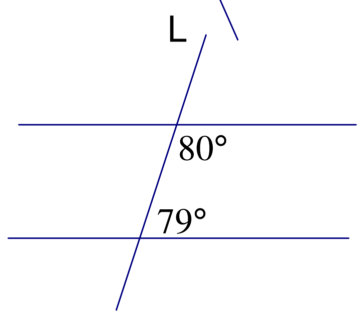
(2)



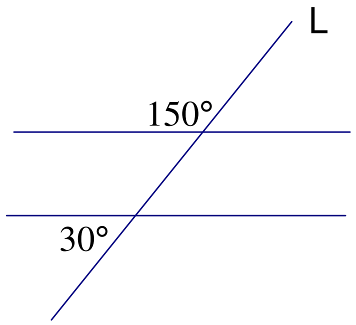
(3)



(4)

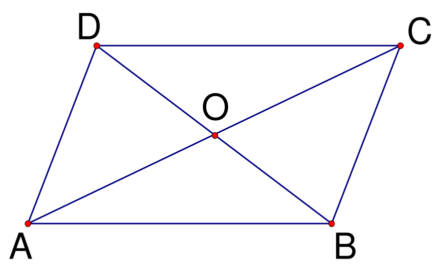


(5)



2. 已知 ABCD 為平行四邊形，兩條對角線 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 O，

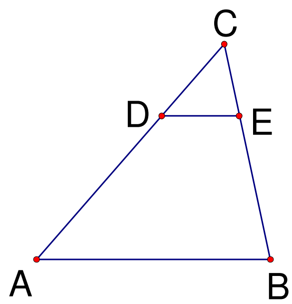
試說明：$\overline{DO}=\overline{BO}$，$\overline{AO}=\overline{CO}$。



3. 四邊形 ABCD 中，若兩條對角線互相平分，試說明：ABCD 為平行四邊形。

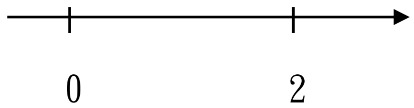
4. 如圖，ΔABC 中，D 在 $\overline{AC}$ 邊上，E 在 $\overline{BC}$ 邊上且知 $\overline{DE}//\overline{AB}$，

$\overline{AC}=3\overline{CD}$，說明 $\overline{AB}=3\overline{DE}$，$\overline{BE}=2\overline{CE}$。



5. 給定線段$\overline{PQ}$（如圖），試將線段$\overline{PQ}$五等分。

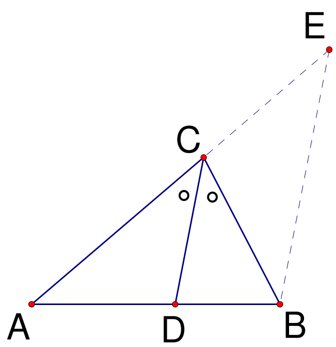
6. 已知數線標示出 0，2 的兩點，試找出表示$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{3}$的兩點。



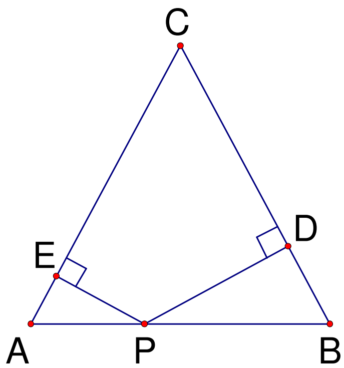
7. 已知ΔABC中，$\angle C$的平分線交$\overline{AB}$於 D，過 B 作$\overline{BE}//\overline{CD}$，並交$\overline{AC}$的延長於 E，如圖所示。

（1）試說明ΔBEC為等腰三角形。

（2）試說明$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$。



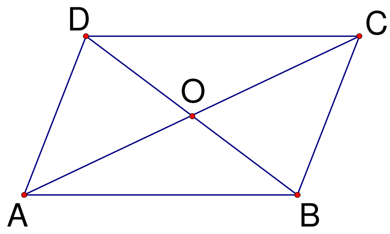
8. 等腰銳角ΔABC中，$\overline{AC}=\overline{BC}$，P 為$\overline{AB}$上的任意點，$\overline{PD}\perp\overline{BC}$於 D，$\overline{PE}\perp\overline{AC}$於 E，如圖所示。試說明：$\overline{PD}+\overline{PE}$為定值。



指定作業參考解答：

1. 平行線(1)(3)(5)，不是平行線(2)(4)。

2. 解法：$\because ABCD$ 為平行四邊形，$\therefore \overline{AD}=\overline{BC}$，



又$\because \angle DAO=\angle BCO$（內錯角相等），$\angle ADO=\angle CBO$（內錯角相等），

$\therefore \Delta ADO\cong\Delta CBO$，$\therefore \overline{DO}=\overline{BO}$，$\overline{AO}=\overline{CO}$。

3. 解法：四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 O

已知 $\overline{AO}=\overline{CO}$，$\overline{DO}=\overline{BO}$，

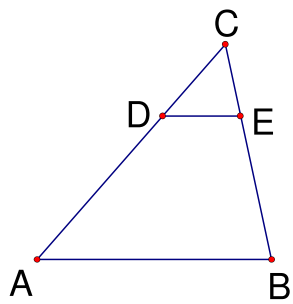
而 $\angle AOD=\angle COB$（對頂角相等），

故 $\Delta ADO\cong\Delta CBO$，於是 $\angle ADO=\angle CBO$，故 $\overline{AD}//\overline{BC}$；

同理，$\overline{CD}//\overline{AB}$，故 $ABCD$ 為平行四邊形。

4. 由平行截線定理知 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$，又$\because \overline{CD}=\dfrac{1}{3}\overline{AC}$，$\therefore \overline{AD}=\dfrac{2}{3}\overline{AC}$，

故 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{1}{2}$，於是 $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BE}}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \overline{BE}=2\overline{CE}$，



另由 $\Delta DEC\sim\Delta ABC$（AA 相似性質），

$\therefore \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \overline{DE}=\dfrac{1}{3}\overline{AB}$，即 $\overline{AB}=3\overline{DE}$。

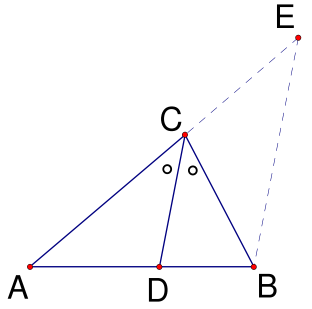
5. 利用平行截線定理，仿例 7 的方法可將 $\overline{PQ}$ 五等分。

6. 利用平行截線定理，仿例 7 將 0，2 之間的線段三等分，第一個等分點就代表 $\dfrac{2}{3}$，第二個等分點代表 $\dfrac{4}{3}$。

7. (1) 已知$\angle ACD=\angle BCD$，$\because \overline{BE}//\overline{DC}$，

$\therefore \angle ACD=\angle E$，$\angle BCD=\angle CBE$，

$\therefore \Delta CBE$為底角$\angle E$與$\angle CBE$的等腰△。

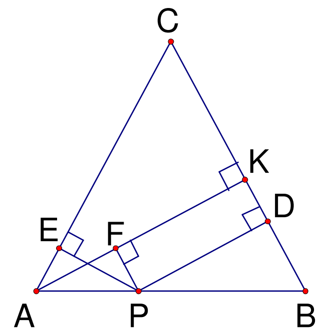


(2) $\because \overline{CD}//\overline{BE}$，$\therefore \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CE}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$，

又ΔCBE為兩腰長$\overline{BC}$，$\overline{CE}$的等腰三角形，$\therefore \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$。

8. 作$\overline{AK}\perp\overline{BC}$於$K$，過P作$\overline{PF}\perp\overline{AK}$於$F$，

則$PDKF$為矩形，$\therefore \overline{PD}=\overline{FK}$。



在二直角ΔPAE與ΔAPF中，

$\angle EAP=\angle B=\angle APF$，$\overline{AP}=\overline{PA}$，$\therefore \Delta PAE\cong\Delta APF$

$\therefore \overline{PE}=\overline{AF}$，$\therefore \overline{AF}+\overline{FK}=\overline{PE}+\overline{PD}$，

$\therefore \overline{PE}+\overline{PD}=\overline{AK}$為$A$到$\overline{BC}$邊上的高，故為定值。

八、教學注意事項：

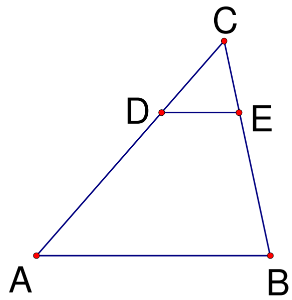
1. 教學時間分配建議如下：引起動機（含教學說明）約 5 分鐘；活動一約 10 分鐘，活動二約 20 分鐘，活動三約 10 分鐘（含第一節課指定作業）；活動四約 10 分鐘，活動五約 15 分鐘，活動六約 15 分鐘，活動七（含指定作業）約 5～10 分鐘。
2. 基本上，平行線被一直線所截產生八個角。我們僅專注同位角與內錯角，其它的同側內角或同側外角可以不必提出來，這

樣會比較單純些，應用上也就夠用了！

3. 一組平行線被兩條相交直線截出的線段成比例，反之，一組直線被兩條相交直線截出比例線段時，這一組直線一定是平行線。這個逆敘述比較不重要，應用機會也不多，雖然說明起來並不難(見下面的說明)，不過對國中二年級就學得這樣完整，恐怕負面的教學效果會較大。

試說明：如圖 ΔABC 中，D、E 分別在 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 邊上，

若 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$ 則 $\overline{DE}//\overline{AB}$。



說明：在 ΔCDE 與 ΔCAB 中，

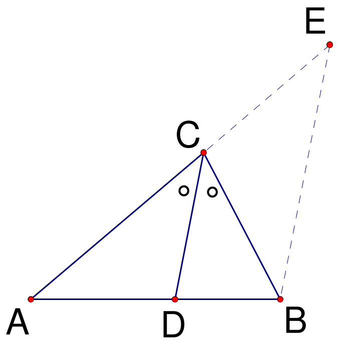
$\angle C=\angle C$，又 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$，則 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}$，故 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{CD}}+1=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}+1$，

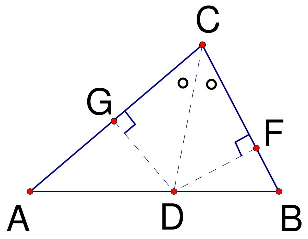
即 $\dfrac{\overline{AD}+\overline{CD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BE}+\overline{CE}}{\overline{CE}}$，$\therefore \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$，即 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$，配合 $\angle C=\angle C$，

$\therefore \Delta CDE\sim\Delta CAB$（SAS 相似），$\therefore \angle CDE=\angle A$，

$\therefore \overline{DE}//\overline{AB}$（同位角相等）。

4. 指定作業第 7 題重點在 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$，配合本單元使用，如下左圖，過 B 作 $\overline{BE}//\overline{CD}$ 且交 $\overline{AC}$ 的延長線於 E，而先得 $\overline{BC}=\overline{CE}$，再進一步利用平行截線定理去說明(2)。





單就(2)來說有一更直接的面積解說法：考慮ΔACD及ΔBCD，各以$\overline{AC}$、$\overline{BC}$為底，其高分別為$\overline{DG}$與$\overline{DF}$，利用 AAS 全等性質得知$\Delta CDG \cong \Delta CDF$，故$\overline{DG}=\overline{DF}$，如上右圖。

所以ΔACD的面積與ΔBCD的面積比為$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$，另一方面$\Delta ACD$、$\Delta BCD$也可看底分別為$\overline{AD}$與$\overline{BD}$而對應高為由 C 到$\overleftrightarrow{AB}$的垂直線段，故此時為同高，所以$\Delta ACD$的面積與$\Delta BCD$的面積比為$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$，於是可得$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$。

（這是內角平分線的一個簡易又極重要的性質。）

5. 在各活動間，教師宜巡堂走動，加強瞭解學生學習情形。
6. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 蘇進發（2013）。平行四邊形，陳昭地主編：國民中學數學教

材原型 C 冊(主題 4－1)。新北市：國家教育研究院。

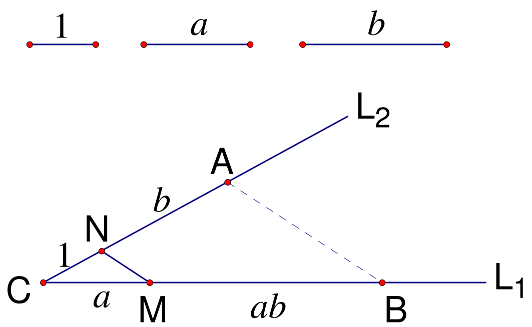
2. Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 39: The Criterion of Constructibility. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 278-279). Columbus, OH：Merrill.

3. 已知線段a、b及單位長，試解說如何用尺規作圖作出ab與$\frac{b}{a}$。

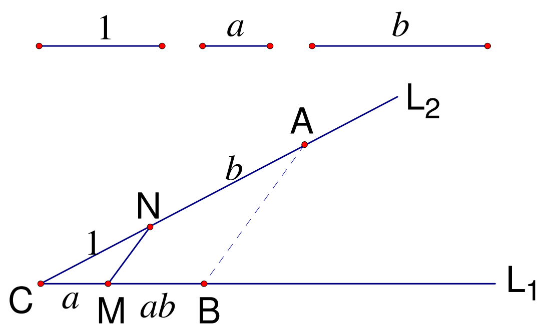
解說作法：已知a、b 兩線段及單位長，求作ab與$\frac{b}{a}$。

先作ab：

(i) $a>1$；$ab>b$



(ii) $a<1$；$ab<b$



(1) 不妨設$a\neq 1$（否則$ab=b$就不必再作了！）

(2) 作∠C，使得∠C 的兩邊分別為射線 L_1和 L_2。

（夾角只要取適當大，即使是 30°或 45°也未嘗不可。）

(3) 在 L_1上取 M 點使$\overline{CM}=a$，並在 L_2上取 N 點使$\overline{CN}=1$。

(4) 連接$\overline{MN}$。

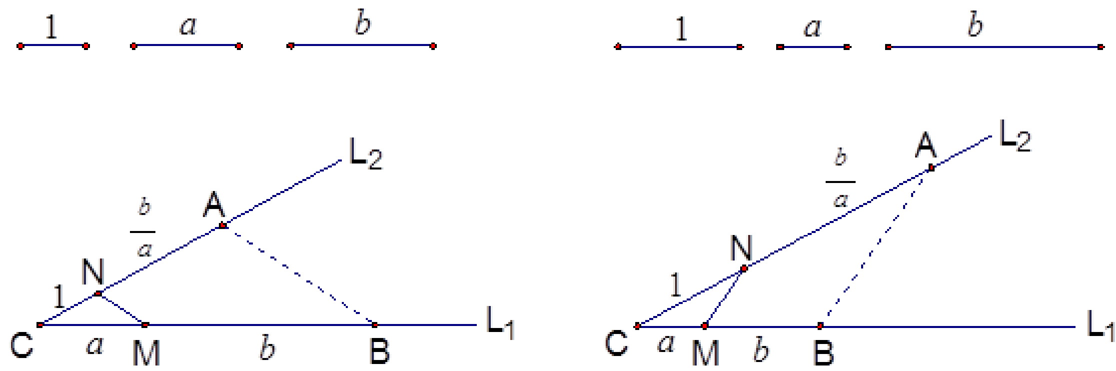
(5) 在 L_2 上 N 的右上方取 A 點使得 $\overline{NA}=b$。

(6) 過 A 點作平行 $\overline{MN}$ 的直線交 L_1 於 B。

(7) 則由平行截線定理知 $\overline{MB}=ab$ 即為所求。(如圖(i)或(ii)所示)

再作 $\dfrac{b}{a}$：

(iii) $a>1$；$\dfrac{b}{a}<b$ (iv) $a<1$；$\dfrac{b}{a}>b$



(1) 同理可設 $a\neq 1$。

(2) 同上作∠C，使得∠C 的兩邊分別為射線 L_1 和 L_2。

(3) 在 L_1 上取 M 點使 $\overline{CM}=a$，在 L_2 上取 N 點使 $\overline{CN}=1$。

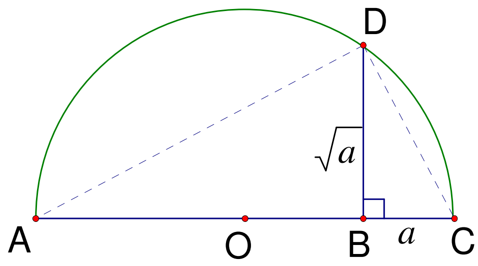
(4) 連接 $\overline{MN}$。

(5) 在 L_1 的右方取 B 點使得 $\overline{MB}=b$。

(6) 過 B 點作平行 $\overline{MN}$ 的直線交 L_2 於 A。

(7) 則由平行截線定理知 $\overline{NA}=\dfrac{b}{a}$ 即為所求。(如圖(iii)或(iv)所示)

4. 如果學生會作$\sqrt{a}$（當然給定單位長$\overline{AB}=1$）：



則可讓學生給定二線段a、b，試作$\sqrt{\dfrac{ab}{a+b}}$，這是略具挑戰性的問題。

主題 3－5：三角形的三心

一、授課對象：國中八年級下學期學生

撰寫者：傅淑婷
曹博盛
陳昭地

二、先備知識：

(一) 知道三角形的中線、中垂線與內角平分線的意義。

(二) 知道三角形全等的 SSS、SAS、ASA、AAS 條件，並知道直角三角形全等 RHS 條件。

(三) 知道等腰三角形的重心及重心到頂點的距離為重心到對邊中點距離的兩倍。

(四) 知道等腰三角形中，三邊上的三條中垂線交於一點，此點即將被稱為此等腰三角形的外心，外心到三頂點等距離。

(五) 知道等腰三角形中，三內角的三條平分線交於一點，此點被稱為此等腰三角形的內心，內心到三邊等距離。

(六) 知道平行四邊形的定義：兩組對邊互相平行的四邊形。

(七) 知道平行四邊形兩組對邊等長，且兩對角線互相平分。

(八) 知道對角線互相平分的四邊形必為平行四邊形。

(九) 知道平行截線性質。

(十) 知道線段之中垂線上任意點到線段兩端點等距離；平面上跟線段兩端等距離的點必在此線段的中垂線上。

(十一) 知道角平分線上任意點到角的兩邊等距離；平面上到

角的兩邊等距離的點必在此角的平分線上。

三、教學目標：

(一) 瞭解三角形之三中線交於一點 G，並稱 G 為此三角形的重心。

(二) 瞭解三角形的重心到頂點的距離等於重心到對邊中點距離的兩倍。

(三) 瞭解三角形之三條中線分三角形為六個面積相等（等積）的小三角形。

(四) 已知△ABC 之三中線長 m_a、m_b 及 m_c，能作出△ABC 使其中線長為 m_a、m_b 及 m_c。

(五) 知道不共線的三點，恰有唯一的圓通過此三點。(不共線的三點決定一圓)

(六) 瞭解三角形三邊上的三條中垂線交於一點，且此點到三頂點等距離。以此點為圓心，等距離的長為半徑，可作一圓，此圓被稱為三角形的外接圓；因此此點被稱為三角形的外心。

(七) 瞭解三角形三內角平分線交於一點，且此點到三邊等距離。以此點為圓心，等距離的長為半徑，可作一個內切於三角形的內切圓；因此此點被稱為三角形的內心。

(八) 知道三角形兩中線的交點就是重心，兩中垂線的交點就

是外心，而兩內角平分線的交點就是內心。

(九) 知道有兩條中線等長的三角形，一定是等腰三角形。

(十) 知道銳角三角形三高交於一點(垂心)的事實，並知道直角三角形的垂心就是直角頂點。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

(一) 本單元宜充分利用先前已介紹過等腰三角形三中線交於一點(重心)，三邊上的中垂線交於一點，且三內角平分線亦交於一點為動機，引入本單元主題：三角形三心的問題。

(二) 在三心中，以重心最為重要，外心、內心則為次要，故值得花一節課的時間來學習重心及其相關性質。

(三) 銳角三角形的垂心問題只是為將來學習第五章單元主題:銳角三角形的九點圓作準備,不準備教該單元的老師可以忽略掉不教活動五。畢竟它不是主角僅是配角而已。

(四) 本單元的寫法有別於一般國中數學教科書，教學時應花足夠時間閱讀本文(包含教學注意事項與教學參考資料)，以能順利圓滿的達到教學目標。

(五) 若教學時間不足，則可只選用本單元的部分適當題材來教學，其餘部分可充作學生自學用。

(六) 利用 Powerpoint 檔或學習單,可提昇本單元的教學效果。

六、教學活動：

我們學過了等腰三角形之三中線交於重心 G，而且重心到頂點的距離等於重心到對邊中點距離的兩倍，而正三角形不只三中線交於一點且此點有很特殊的性質。下面我們就來探討一般的三角形是否有類似的性質。

活動一：任意三角形也一樣，它們的三條中線也會交於一點，此點稱作三角形的重心。我們就以下列一系列的步驟 1～4 來完成這個特徵的想法,並把精簡的寫法表達在步驟 5。

步驟 1：由平面上不平行的兩直線必相交，如果三中線交於一點，那麼，這一點一定可以先由其中的兩條來決定。

如圖 1-(1)，△ABC 中，

D、E 分別為 $\overline{BC}$ 和 $\overline{AC}$ 的中點，

這兩條中線 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BE}$ 不會平行，

必然會相交於一個點 G；

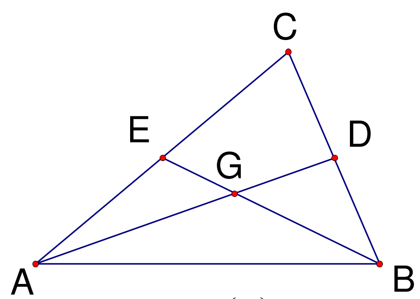


圖1-(1)

如果過頂點 C 的中線也過 G 點的話,那麼自然期待連 $\overline{CG}$ 並延長 $\overline{CG}$ 必交 $\overline{AB}$ 上的一點 F，F 必然會是 $\overline{AB}$ 邊上的中點，如何說明清楚呢？

事實上我們有更大的期待，三中線不僅交於一點 G，

且如同等腰三角形一樣 $\overline{CG}=2\overline{GF}$ 。

為此，我們將$\overline{CG}$延長交$\overline{AB}$於 F，

再更延長些取$\overline{GF}=\overline{FK}$ ，

再連接$\overline{AK}$與$\overline{BK}$ ，如圖 1-(2)

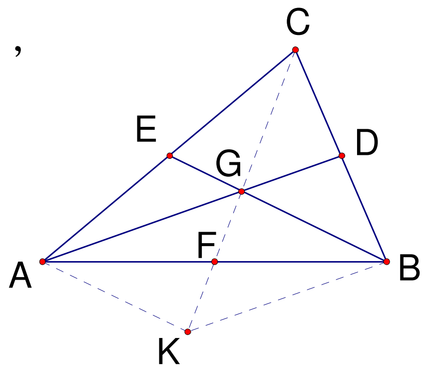


圖1-(2)

步驟 2：再盯注四邊形 AGBK，

如果 F 為$\overline{AB}$的中點，

則由$\overline{GF}=\overline{FK}$ ，$\overline{AF}=\overline{BF}$ ，

其對角線互相平分，

因此 AGBK 為平行四邊形。

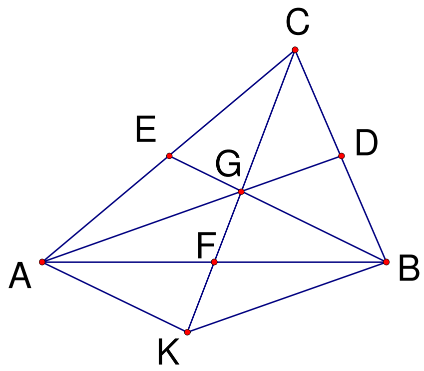


圖1-(3)

直接從上面的作法，要知道 AGBK 為平行四邊形，似乎找不出門路，基於這個觀點，原來圖 1-(2)的作法，就得作一些變通。至少使得$\overline{AK}/\!/\overline{BG}$ ，因此不直接取$\overline{GF}=\overline{FK}$，而取代成過 A 點作$\overline{BE}$的平行線交$\overline{CG}$的延長線於 K，此時仍然設$\overline{GK}$交$\overline{AB}$於 F，再連$\overline{BK}$ ，則得四邊形 AGBK，且知$\overline{AK}/\!/\overline{BG}$ ，只要再設法說明 F 同時是$\overline{GK}$與$\overline{AB}$的中點，那問題不就解決了！

步驟 3：(關鍵的一步)，盯住圖 1-(3)中的△AKC，

∵E 為$\overline{AC}$的中點，$\overline{EG}/\!/\overline{\mathrm{AK}}$ ，

∴G 為$\overline{\mathrm{CK}}$的中點。

再盯住△BKC，D 為 $\overline{BC}$ 的中點，G 為 $\overline{CK}$ 的中點，

$\therefore \overline{GD} // \overline{BK}$

$\therefore \overline{AG} // \overline{BK}$

而$\because \overline{AK} // \overline{BG}$ ，$\overline{AG} // \overline{BK}$

∴AGBK 為平行四邊形

步驟 4：最後由 AGBK 為平行四邊形，知其對角線互相平分於 F，即得 F 為 $\overline{AB}$ 的中點；綜合言之，三角形 ABC 之三中線交於一點 G，此點 G 稱為△ABC 的**重心**。

步驟 5：從步驟 1 到步驟 4 得 G 為三中線的交點，如果把它從頭到尾的想法都寫出來，其中還包括變更策略的情況，才得結論的話，那就有點像在寫一篇作文那麼長，如何用精簡的符號及程序寫出來？可以表述如下：

(1) △ABC 中，D、E 分別為 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 的中點，得中線 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ ，設此兩中線交於 G。如圖 2(不含虛線部分)

(2) 連 $\overline{CG}$ 並設 $\overline{CG}$ 的延長交 $\overline{AB}$ 於 F。

(3) 過 A 點作 $\overline{BE}$ 的平行線，交 $\overline{CG}$ 的延長線於 K。

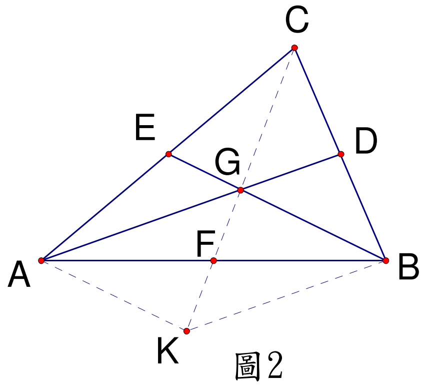


圖2

(4) 連 $\overline{BK}$ ，得四邊形 AGBK。

(5) △AKC 中，E 為 $\overline{AC}$ 的中點且 $\overline{EG} // \overline{AK}$ ，

∴G 為 $\overline{CK}$ 的中點。

(6) $\triangle$BKC，G 為 $\overline{CK}$ 的中點，D 為 $\overline{BC}$ 的中點，

$\therefore \overline{GD} // \overline{BK}$

$\therefore \overline{AG} // \overline{BK}$

(7) $\because \overline{AK} // \overline{BG}$ 且 $\overline{AG} // \overline{BK}$

$\therefore$AGBK 為平行四邊形

(8) $\because$AGBK 為平行四邊形，$\overline{AB}$、$\overline{GK}$ 為其對角線

$\therefore \overline{AF} = \overline{FB}$，亦即 $\overline{CG}$ 通過 $\overline{AB}$ 的中點，

故三中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 交於一點 G。

像這樣的精簡寫法，不把思考的過程寫出來，就是同學要學習才能達到的！

活動二：三角形重心的性質及其副產品

接著我們也學上面精簡的寫法來描述重心的性質。

步驟 6：我們接步驟 5 的(1)～(7)～(8)

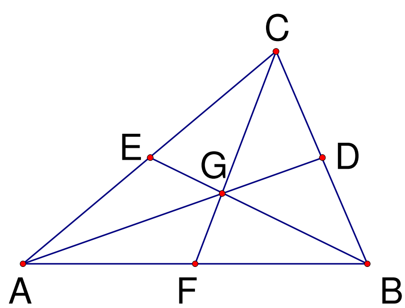


圖3

(9) 又$\because$AGBK 為平行四邊形，

$\therefore \overline{AG} = \overline{KB}$，$\overline{GB} = \overline{AK}$，$\overline{GF} = \overline{FK}$

(10)而△AKC 中，E、G 為 $\overline{AC}$ 、$\overline{CK}$ 的中點

$\therefore \overline{EG}=\frac{1}{2}\overline{AK}$ ，即 $\overline{AK}=2\overline{EG}$

同理，$\overline{GD}=\frac{1}{2}\overline{BK}$ ，即 $\overline{BK}=2\overline{GD}$

又 $\overline{CG}=\overline{GK}$ 得 $\overline{CG}=2\overline{GF}$

(11)由(9)、(10)得 $\overline{AG}=\overline{BK}=2\overline{GD}$ ，

$\overline{BG}=\overline{AK}=2\overline{EG}$ 而 $\overline{CG}=2\overline{GF}$

(12)綜合得之，重心 G 到各頂點的距離為重心到對邊中點距離的兩倍。

步驟 7：於是可簡化圖 2 到圖 3，三條中線將△ABC 分成六塊小三角形。在等腰三角形的情況，這六塊小三角形是面積相等的小角形，也就是每個小三角形的面積都是原三角形 ABC 面積的六分之一。在一般情況的△ABC 的三條中線是否也是分此三角形為六塊面積相等的小三角形呢？答案是肯定的。

步驟 8：

如何說明△AGF=△BGF=△BGD=△CGD=△CGE=△AGE？

(1) 先看△AGF=△BGF：

$\because \overline{GF}$ 為△AGB 的中線，中線把三角形分成面積相等的△AGF 與△BGF($\because$它們是等底同高)

$\therefore \triangle AGF = \triangle BGF$

(2) 同理，$\triangle BGD = \triangle CGD$，$\triangle CGE = \triangle AGE$

(3) 只要再說明$\triangle AGF = \triangle AGE$，$\triangle BGF = \triangle BGD$

亦即$\triangle AGF = \frac{1}{2}\triangle AGC$，$\triangle BGF = \frac{1}{2}\triangle BGC$ 即可。

為此，把$\triangle AGF$ 表成$\frac{1}{2}\overline{GF} \times$(A 到$\overline{CF}$ 的高)

$\triangle AGC$ 表成$\frac{1}{2}\overline{CG} \times$(A 到$\overline{CF}$ 的高)

於是$\frac{\triangle AGF}{\triangle AGC} = \frac{\overline{GF}}{\overline{CG}} = \frac{1}{2}$ $\therefore \triangle AGF = \frac{1}{2}\triangle AGC$

同理$\frac{\triangle BGF}{\triangle BGC} = \frac{\overline{GF}}{\overline{CG}} = \frac{1}{2}$ $\therefore \triangle BGF = \frac{1}{2}\triangle BGC$

(4) 綜合以上得到這六塊小三角形的面積彼此相等。

這就是三角形重心性質的一個極重要的副產品。

步驟 9： 由步驟 8 的肯定答案，

如果把圖 3 再簡化到圖 4，

其中 G 為$\triangle ABC$ 的重心。

又可以馬上得到

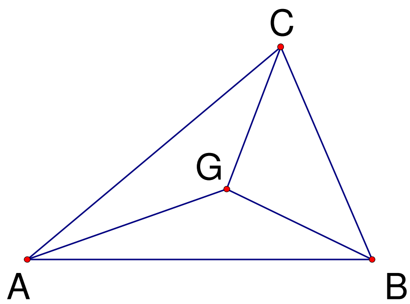


圖4

$\triangle AGB = \triangle BGC = \triangle CGA = \frac{1}{3}\triangle ABC$

換言之，重心 G 到三頂點的連線段把$\triangle ABC$ 的面積

三等分成$\triangle AGB$、$\triangle BCG$、$\triangle CGA$。

隨堂練習 1：

(1) 如果△ABC 內有一個 G 點，把 G 點跟三頂點連接起來，發現△AGB=△BGC=△CGA，那麼 G 點是否一定是△ABC 的重心？(答案是肯定的，請參見指定作業第 2 題。)

(2) 如果△ABC 中，有兩條中線等長，那麼△ABC 一定是等腰三角形嗎？(請簡述理由)

步驟 10：綜合活動一、二的 9 個步驟及隨堂練習 1-(1)，我們到目前得到如下的結論：

(一) 三角形三條中線交於一點，此交點稱為重心。

(二) 三角形重心到頂點的距離等於重心到對邊中點距離的兩倍。

(三) 三角形任一條中線把原三角形分成兩個面積相等的小三角形;三條中線把原三角形分成六個面積相等的小三角形。

(四) 重心到三頂點的連線把原三角形分成三個面積相等，具有共同頂點為重心的小三角形，這是一項三角形重心的特徵。

活動三：比照等腰三角形三邊上的三條中垂線交於一點，探究一般的三角形其邊上的三條中垂線也交於一點。我們以下列步驟 11～12 來逐序說明。

步驟 11：首先回憶一下，中垂線有甚麼性質：

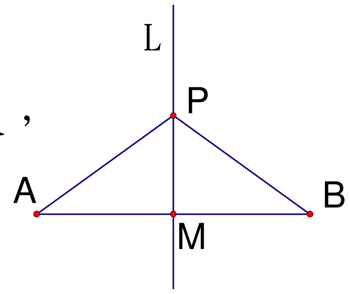


圖5

如圖 5，L 為通過 $\overline{AB}$ 中點 M 的中垂線，

P 為 L 上任一點，用 SAS 全等性質，

可知$\triangle AMP \cong \triangle BMP$　$\therefore \overline{PA}=\overline{PB}$。

即中垂線上的任意點 P 與線段的兩端 A、B 等距離。

相反地，若 $\overline{PA}=\overline{PB}$，則$\triangle AMP \cong \triangle BMP$(SSS 全等)，

故$\angle AMP=\angle BMP$，而$\angle AMP+\angle BMP=180^\circ$，

所以$\angle AMP=\angle BMP=90^\circ$，即 $\overline{PM}\perp\overline{AB}$，

$\therefore$P 在 $\overline{AB}$ 的中垂線上。

步驟 12：利用上面所提中垂線性質，就如等腰三角形的情況。

令$\triangle ABC$ 中，D、E 分別為 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 的中點，

$\overline{BC}$ 邊過 D 點的中垂線與 $\overline{AC}$ 邊過 E 點的中垂線

交於 O 點，如圖 6-(1)所示。

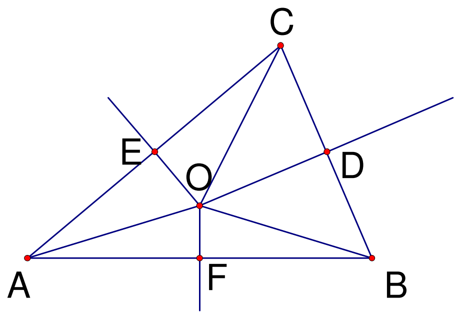


圖6-(1)

則 $\overline{OB}=\overline{OC}$，$\overline{OC}=\overline{OA}$

$\therefore \overline{OB}=\overline{OA}$

$\therefore$O 點在過 $\overline{AB}$ 邊中點 F 的中垂線上。

於是完成三條邊上的中垂線交於一點 O 的完整說明。

步驟 13：完成三中垂線交於一點 O 後，

我們可以發現 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$。

於是以 O 為圓心，

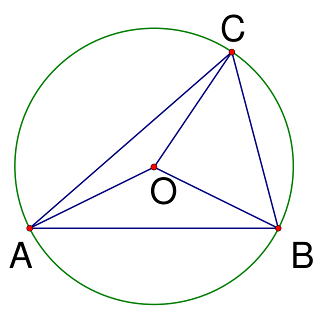


圖6-(2)

$\overline{OA}$ 為半徑得圓 O，

除 A、B、C 三頂點在圓 O 的圓周上，

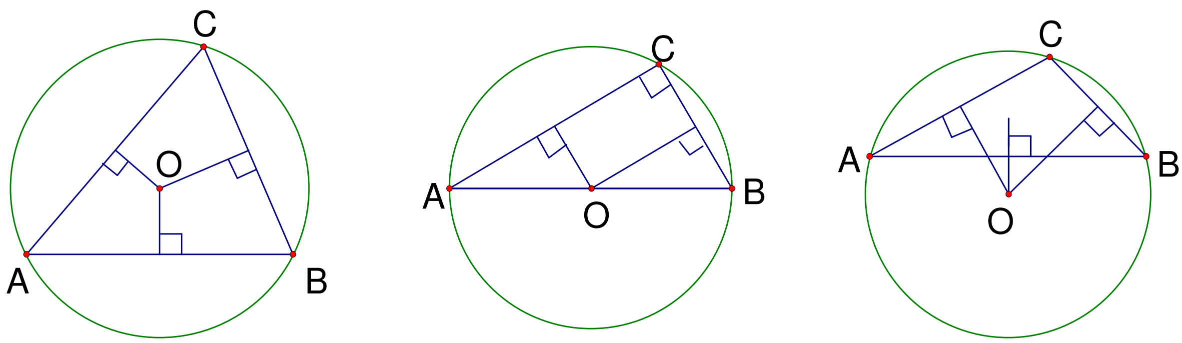
其餘△ABC 都在圓 O 的內部，我們稱圓 O 為△ABC 的**外接圓**，△ABC 為圓 O 的**內接三角形**。於是圓心 O，即三條邊上的中垂線交點，就被稱作△ABC 的**外心**，顧名思義，外心 O 就是△ABC 外接圓的圓心。

合併步驟 11～13，我們得到結論：△ABC 三邊的中垂線交於外心 O，外心 O 到三頂點等距離，此距離即為△ABC 外接圓的半徑長。

隨堂練習 2：

(1) 在平面上任意作兩圓，將這兩圓相交的情況一一列舉出來。

(2) 圖 6-(2)中，△ABC 的外接圓外，還有沒有其它的外接圓呢？請利用(1)中的發現，解釋你的答案。



(1)銳角三角形　　(2)直角三角形　　(3)鈍角三角形

圖7

隨著三角形的情況，外心在銳角三角形的內部，而直角三角形的外心恰好在斜邊的中點，鈍角三角形的外心則在三角形的外部，如圖 7 之(1)(2)(3)所示。

我們最後再來檢驗三角形三內角平分線是否如同等腰三角形一樣，會交於一點呢？若如此，其交點又有何性質呢？看下面的活動四。

活動四：比照等腰三角形三內角平分線交於一點，任意三角形的三內角平分線是否交於一點及此交點有何種的特徵呢？我們就以如下的步驟 14 來解說。

步驟 14：首先回顧一下角平分線有如下重要有用的性質：

(1) 所謂一點 P 到一直線 L 的距離，係指過 P 作 L 的垂直線段 $\overline{PQ}$ 之長，稱 Q 為**垂足**，

L 上其它異於垂足 Q 的點 M 或 M'，

$\overline{PM}$ 或 $\overline{PM'}$ 都大於 $\overline{PQ}$，如圖 8。

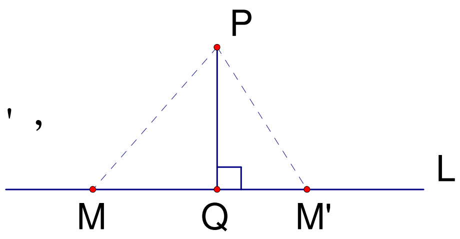


圖8

(2) 圖 9，∠A 的頂點 A，兩邊為 L_1，L_2；

L_3 為平分∠A 的平分線，

P 為 L_3 上任意異於 A 的點，

$\overline{PQ} \perp L_1$，$\overline{PQ'} \perp L_2$ (Q、Q' 為垂足)

則 $\triangle APQ \cong \triangle APQ'$ (SAS 全等)

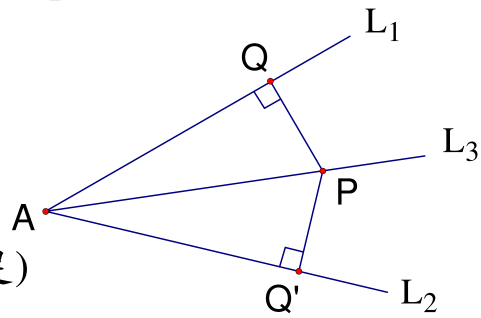


圖9

$\therefore \overline{PQ} = \overline{PQ'}$，亦即角平分線上的點到角的兩邊等距離。

(3) 相反地，若 P 點為 $\angle A$ 內部的一點，P 到 $\angle A$ 的兩邊等距離。即圖 9 中，已知 $\overline{PQ} \perp L_1$ ，$\overline{PQ'} \perp L_2$ 且 $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$

則△APQ 與△APQ 為斜股相等的全等三角形(RHS 全等)，

所以 $\angle PAQ = \angle PAQ'$。得知 P 在 $\angle A$ 的平分線 L_3 上。

步驟 15： 如圖 10-(1)，△ABC 中，$\overline{AD}$ 平分 $\angle CAB$，$\overline{BE}$ 平分 $\angle CBA$。設此兩條角平分線交於 I，過 I 點向三邊作垂線，分別交三邊於 P、R 及 Q。

$\because \overline{AI}$ 平分 $\angle CAB$

$\therefore \overline{IP} = \overline{IQ}$

又 $\because \overline{BI}$ 平分 $\angle CBA$

$\therefore \overline{IP} = \overline{IR}$

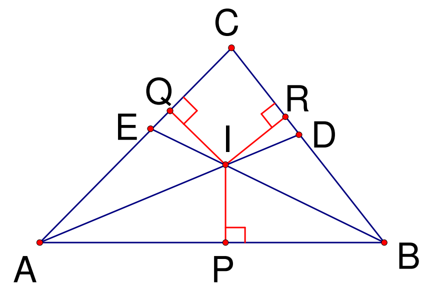


圖10-(1)

故得 $\overline{IQ} = \overline{IR}$

再由步驟 14-(3)知 I 在 $\angle C$ 的平分線上。

換言之，△ABC 三內角平分線交於一點 I，完成初步說明。

再者由圖 10-(1)中知 $\overline{IP} = \overline{IQ} = \overline{IR}$ ，

且 $\overline{IP} \perp \overline{AB}$ ，$\overline{IQ} \perp \overline{AC}$ 及 $\overline{IR} \perp \overline{BC}$ 。

故以 I 為圓心，

$\overline{IP}$ 為半徑的圓 I，

分別通過 P、Q、R 三點，

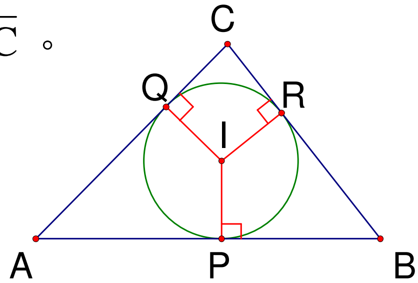


圖10-(2)

且圓 I 與三邊都恰有一交點，我們就說圓 I 與三邊相切。

於是圓 I 就稱為△ABC 的**內切圓**，於是交點圓心 I 就被稱作△ABC 的**內心**，△ABC 也就被稱為圓 I 的**外切三角形**，而圓 I 通過△ABC 三邊的點 P、Q、R 被稱作**切點**，如圖 10 之(2)所示。

活動五：比照等腰銳角三角形三邊上的高交於一點，那麼一般的銳角三角形之三高是否仍然交於一點，如果交於一點，此交點該如何被命名？為回答這個交點問題，以純幾何圖形的方法來解說是具有挑戰性，也頗技巧的，有如變魔術一樣，要借用如下的「變心」方法：

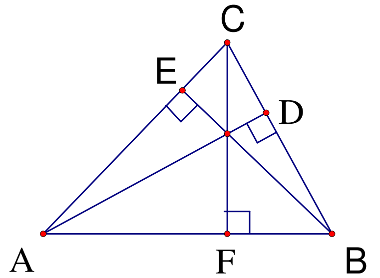


圖11–(1)

(1) 已知△ABC 是銳角三角形，$\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 及 $\overline{CF}$ 為其三高，如圖 11-(1)所示。

(2) 過三頂點 A、B、C 分別作與對邊 $\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 及 $\overline{BC}$ 平行的直線，其兩兩交點記作 A' 、B' 與 C'，如圖 11-(2)所示。

(3) 利用兩平行四邊形 A'CAB 與 B'CBA 中，

$\overline{A'C}=\overline{AB}$ ，$\overline{B'C}=\overline{AB}$ $\therefore$ $\overline{A'C}=\overline{B'C}$ ，

即知 C 為 $\overline{A'B'}$ 的中點。

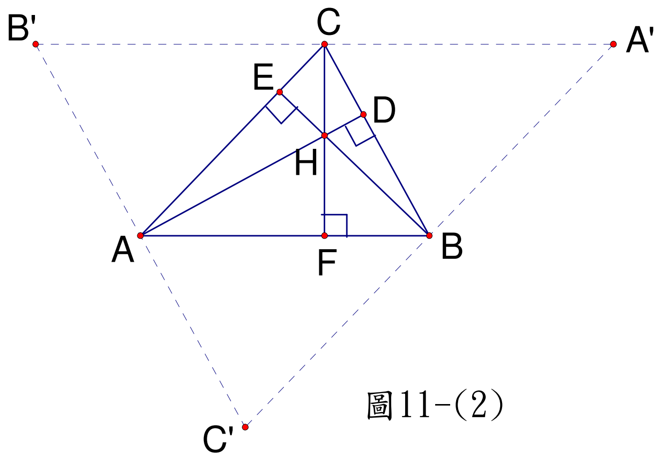


圖11-(2)

(4) 再由 $\overline{A'B'} // \overline{AB}$ ，$\overline{CF} \perp \overline{AB}$

知 $\angle B'CF=90^\circ$

即得 $\overline{CF}$ 為 $\overline{A'B'}$ 的中垂線。

(5) 同理，$\overline{AD}$ 為 $\overline{B'C'}$ 的中垂線，$\overline{BE}$ 為 $\overline{A'C'}$ 的中垂線。

(6) 由△$A'B'C'$之三邊中垂線交於一點(外心)，故原銳角三角形 ABC 的三高交於一點。

以上就是頗技巧的方法，新△$A'B'C'$的外心就是原△ABC 三條高的交點，此交點記作 H，被命名為△ABC 的**垂心**。

隨堂練習 3：

(1) 如果△ABC 是直角三角形，$\angle C=90^\circ$ ，則其垂心在哪裡？

(2) 如果△ABC 是鈍角三角形，則其三高顯然不交於一點，想想看三高的延長線會相交於一點？

活動六：(總結論)

(一) 本主題△ABC 的三心指的是重心、外心與內心，可能另有一心(垂心)，但它畢竟不在我們的主題範圍內。

(二) 三角形三中線交於重心，三邊中垂線交於外心，而三內角平分線則交於內心。

(三) 一條中線把三角形分成面積相等的兩個小三角形，三條中線把三角形分成六個面積相等的小三角形。

(四) 重心到三角形的頂點距離恆為重心到對邊中點距離的兩倍，而且重心與三頂點的連線把原三角形分成三個面積相等的小三角形。

(五) 有兩條等長中線的三角形必為等腰三角形。

(六) 三角形三邊中垂線交於外心，外心到三頂點等距離。以外心為圓心，外心到一頂點的距離長為半徑，可作三角形的外接圓，原三角形稱作此外接圓的內接三角形。

(七) 三角形的外心位置，當銳角三角形時在形內，當直角三角形時在邊上的中點，當鈍角三角形時在形外。

(八) 三角形三內角平分線交於內心，內心到三邊等距離。以內心為圓心，並以內心到任一邊的距離為半徑長作內切圓。原三角形稱作此內切圓的外切三角形，內切圓與其外切三角形之三邊都僅各交於一點(切點)，切點與內心的連線與原三角形的一邊互相垂直。

教學活動參考解答：

隨堂練習 1：

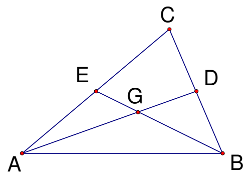
(1) 參考指定作業 2 之解答。

(2) 如圖：已知△ABC 中 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 為兩邊 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 上的中線，且 $\overline{AD}=\overline{BE}$，欲說明 $\overline{BC}=\overline{AC}$。

① 設 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BE}$ 於 G，則 G 為重心。

② $\because \overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BE}$，$\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$ 且 $\overline{BE}=\overline{AD}$

$\therefore \overline{AG}=\overline{BG}$，$\overline{EG}=\overline{DG}$



③ 在△AEG 與△BDG 中

$\because \overline{AG}=\overline{BG}$，$\overline{EG}=\overline{DG}$，$\angle AGE=\angle BGD$

$\therefore$△AGE ≅△BGD (SAS 全等)

$\therefore \overline{AE}=\overline{BD}$

④ $\because \overline{AC}=2\overline{AE}$，$\overline{BC}=2\overline{BD}$ 且 $\overline{AE}=\overline{BD}$

$\therefore \overline{BC}=\overline{AC}$

隨堂練習 2：

(1) 或者同圓，或者相交於二點，或者相交於一點，或者不相交。

(2) 沒有兩個外接圓，否則兩圓相交於三個點(不合)。

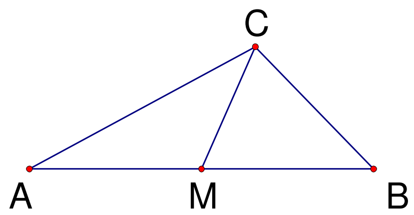
隨堂練習 3：

(1) 直角三角形的垂心是直角頂點 C。

(2) 鈍角三角形的三高延長線會相交於一點。理由可以仿照變心法去解說。

七、指定作業：

1. 如右圖△ABC 中，

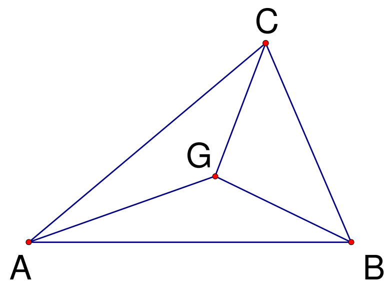


M 在 $\overline{AB}$ 上，且△AMB=△BMC，

試說明 $\overline{CM}$ 為△ABC 的一條中線。

2. 如圖，設 G 為△ABC 內部的一點，且△AGB=△BGC=△CGA，試說明 G 為△ABC 的重心。

(提示：延長 $\overline{AG}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D，則 $\dfrac{\triangle \mathrm{AGB}}{\triangle \mathrm{GBD}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AG}}}{\overline{\mathrm{GD}}}=\dfrac{\triangle \mathrm{AGC}}{\triangle \mathrm{GCD}}$)



3. 把△ABC 的三邊記作 $\overline{\mathrm{AB}}=c$、$\overline{\mathrm{AC}}=b$、$\overline{\mathrm{BC}}=a$，並把三中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 分別記作 m_a、m_b 及 m_c，試說明：$m_a+m_b>m_c$，$m_a+m_c>m_b$，$m_b+m_c>m_a$。

4. 給定三中線長 m_a、m_b 及 m_c，(任兩中線和大於第三條中線)試用尺規作圖作出△ABC，使其三條中線長為 m_a、m_b 及 m_c。

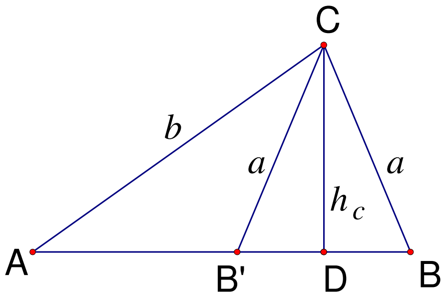
(提示：如圖 2，先以 $\dfrac{2}{3}m_a$、$\dfrac{2}{3}m_b$ 及 $\dfrac{2}{3}m_c$ 為邊長作出△GAK 得一頂點 A。)

5. 試用你認為最簡單的理由說明：直角三角形的外心恰為其斜邊上的中點。

6. 試說明正三角形的重心、外心與內心都是正三角形內的同一點

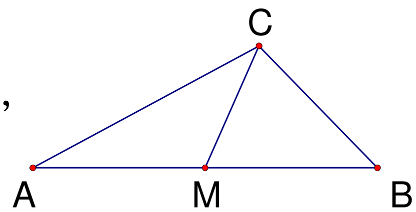
7. 試說明正三角形的垂心(三高的交點)也跟其它三心都是三角形內同一點。

8. 已知三線段$b>a>h_c$，試用尺規作圖，作出如圖的△ABC與△AB'C。要求其中$\overline{BC}=\overline{B'C}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}$和$\overline{AB'}$邊上的高$\overline{CD}=h_c$。



9. △ABC為銳角三角形，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$為其二條高，試說明A、B、D、E四點在同一圓上。(提示：圓心為$\overline{AB}$的中點O。)

指定作業參考解答：

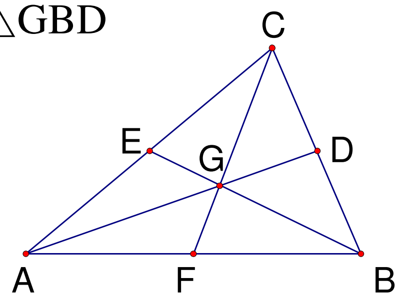


1. $\because \dfrac{\triangle AMC}{\triangle BMC}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{BM}}$ 而△AMC=△BMC，

$\therefore \dfrac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=1 \quad \therefore \overline{AM}=\overline{BM}$

$\therefore \overline{CM}$為△ABC的一條中線。

2. 解說法：



(1) 延長$\overline{AG}$交$\overline{BC}$於 D，得△GCD 與△GBD

(2) $\dfrac{\triangle AGB}{\triangle GBD}=\dfrac{\overline{AG}}{\overline{GD}}=\dfrac{\triangle AGC}{\triangle GCD}$

∵△AGB=△AGC

∴△GBD=△GCD

(3) $\because\dfrac{\triangle GBD}{\triangle GCD}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\quad\therefore\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=1$

即得$\overline{BD}=\overline{CD}$，D 為$\overline{BC}$的中點，即$\overline{AD}$為△ABC 的中線。

(4) 同理，$\overline{GB}$延長交$\overline{AC}$於 E 時，E 為$\overline{AC}$的中點，即$\overline{BE}$為△ABC 的另一條中線，其交點 G 就是△ABC 的重心。

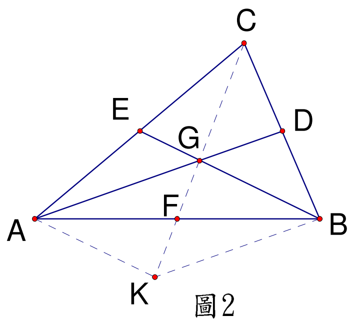


圖2

3. 說明：看步驟 5 之圖 2，△GAK 即為以$\frac{2}{3}m_a$、$\frac{2}{3}m_b$及$\frac{2}{3}m_c$為邊長作出的三角形，而三角形任兩邊長之和大於第三邊，

於是得$\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b>\frac{2}{3}m_c$，

$\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_c>\frac{2}{3}m_b$，

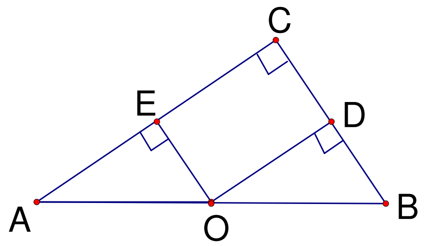
$\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c>\frac{2}{3}m_a$。

故得知：$m_a+m_b>m_c$，$m_a+m_c>m_b$，$m_b+m_c>m_a$。

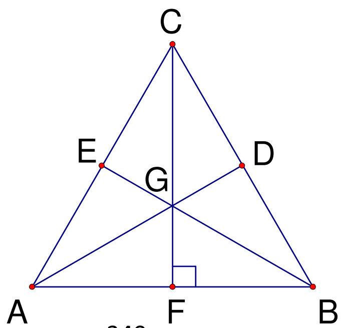
4. 說明(略解)(參考圖 2)：

由提示中先得頂點 A 後，取 $\overline{GK}$ 的中點 F，連 $\overline{AF}$ 並延長到 B，使 $\overline{BF}=\overline{AF}$ 而得到第二個頂點 B。最後向上延長 $\overline{KG}$ 到 C，使 $\overline{CG}=\overline{KG}$ 則作出第三個頂點 C，則△ABC 為所求。

5. 直角三角形斜邊上的中點跟三頂點等距離，故斜邊上的中點即為外心。如下圖，直角△ABC，∠C=90° 過 $\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$ 的中點分別作中垂線，則由此二中垂線分別平行兩股 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$，故此二中垂線必都過 $\overline{AB}$ 的中點，於是直角三角形的外心 O 就在斜邊上的中點。



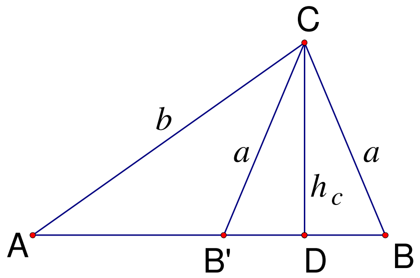
6. △ABC 為正三角形，$\overline{AB}$ 邊上的中垂線 CF 必過頂點 C，所以中垂線段 $\overline{CF}$ 即為 $\overline{AB}$ 邊上的中線；同時中垂線段 $\overline{CF}$ 平分∠C，故為∠C 的角平分線；同理，$\overline{BC}$ 邊上的中垂線段 $\overline{AD}$ 也是 $\overline{BC}$ 邊上的中線，同時也是∠A 的角平分線，其交點均為同一點 G。即正三角形中，重心=內心=外心。



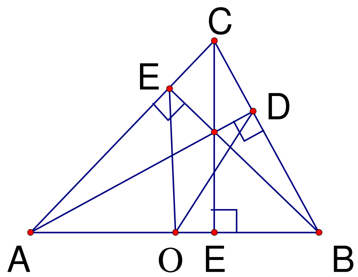
7. 仿 6，可說明 $\overline{CF}$ 、 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 都是△ABC 的三高，因此三高的交點 H，重心 H 也跟其他三心都是同一點 G(重心)。

8. (1) 先以 b 為斜邊，h_c 為一股長作出直角△ADC，∠D=90° 。

(2) 再以 C 為圓心，a 為半徑作圓弧，則圓弧交 $\overline{AD}$ 於 B'，交 $\overline{AD}$ 的延長線於 B，則△ABC 與△A B'C 即為所求。



9. 直角△ABD 及直角△ABE，直角頂點 D、 E 都跟 $\overline{AB}$ 的中點 O 等距離，即 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\overline{AB}$，故知 A、B、C、D 四點在同一圓上。



八、教學活動注意事項：

1. 教學時間分配建議如下：教學說明(含教學動機)約 5 分鐘，活動一(含步驟 1~5) 約 30 分鐘，活動二(不含隨堂練習 1 之(1)(2)，此練習經簡單提示後可充作第一堂課後指定作業用)

約 10 分鐘，活動三(含隨堂練習 2) 約 20 分鐘，活動四約 15 分鐘，活動五約 5 分鐘，活動六(含課後指定作業)約 5 分鐘。

2. 必要時，可將本單元主題彈性延長 30 分鐘。(加強作業指導)。
3. 在各活動間，教師宜巡堂走動，加強瞭解學生學習情形。
4. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 傅淑婷，曹博盛，陳昭地(2013)。處處多數是等腰三角形，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-3)。新北市：國家教育研究院。
2. 傅淑婷，曹博盛，陳昭地(2013)。平行線與平行截線定理，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-4)。新北市：國家教育研究院。
3. 蘇進發(2013)。平行四邊形，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 4-1)。新北市：國家教育研究院。
4. 李政豐，陳昭地(2013)。銳角三角形的九點圓，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 5-5)。新北市：國家教育研究院。
5. Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 37: The

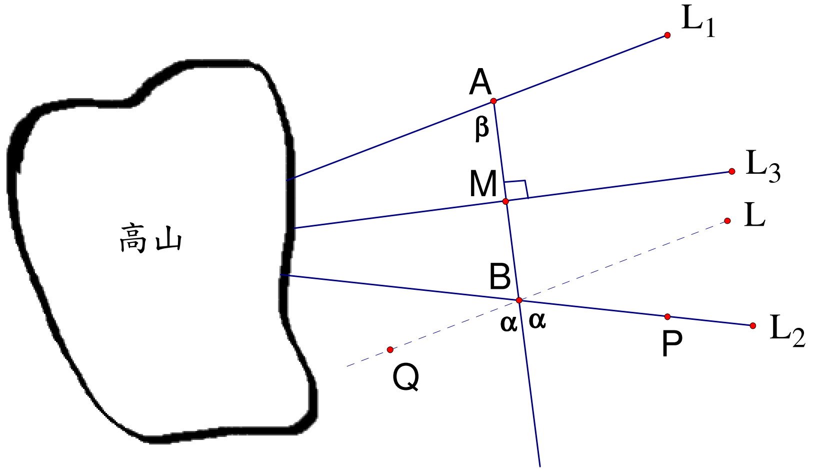
Inaccessible Angle. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 274-275). Columbus, OH：Merrill.

6. 可提供下列做模糊角的角平分線問題充作彈性教學補充用。

示意圖如下，在一高山的一邊山下，已建好兩條筆直的道路 L_1、L_2，L_1 與 L_2 不平行，其交點落在不可到達的山之內部。由於數年後兩道路交通使用太大，不符合居民的需求，為充分紓解交通，擬在 L_1、L_2 中間建第三條路 L_3。基於公平原則，要對原道路兩邊的居民同樣的方便起見，要求 L_3 恰好蓋在 L_1 與 L_2 的交點為頂角，L_1、L_2 為角的兩邊所形成的角之平分線上。請問應如何設計 L_3 的位置？

法(一) (模糊等腰三角形法)：

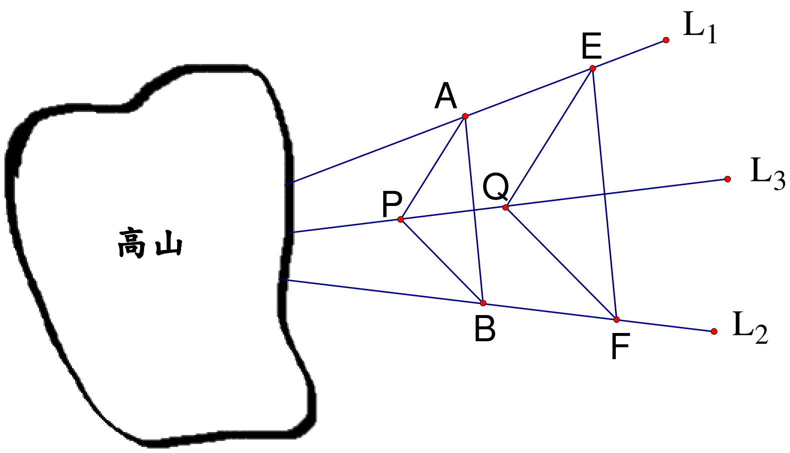
在 L_2 上取適當的點 B，作過 B 平行 L_1 的直線 L，在 L_2 上取一點 P，L 上取一點 Q，如下圖所示。



再作∠PBQ 的平分線，向上延長此平分線交 L_1 於 A，則 $\angle\beta=\angle\alpha$，形成模糊頂點及兩頂點 A、B 的等腰三角形，最後取 $\overline{AB}$ 的中點 M，過 M 作 $\overline{AB}$ 的中垂線 L_3 即為所求。

法(二)(內心法)：

在 L_1 上取一點 A，L_2 上取一點 B，則形成模糊△ABC(C 為模糊頂點)，作∠A 與∠B 的兩條角平分線交於山下同一邊的點 P。同理在 $\overline{AB}$ 的右側作平行 $\overline{AB}$ 的直線交 L_1、L_2 於 E、F 點，則形成模糊△EFC，作∠E 與∠F 的角平分線交於山下同一邊的點 Q，連 $\overline{PQ}$ 並延長 $\overline{PQ}$，即得直線 L_3 的位置。



主題 3－6：正五邊形與黃金三角形

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者：**傅淑婷

二、先備知識：

(一) 瞭解三角形全等的意義。

(二) 瞭解三角形 SSS、SAS、ASA、AAS、RHS 全等性質。

(三) 瞭解三角形相似的意義。

(四) 瞭解三角形 AA、SSS、SAS 相似性質。

(五) 能利用直尺圓規作基本作圖。

三、教學目標：

(一) 能在正五邊形連接五條對角線的複雜圖形中，分辨出全等三角形與相似三角形。

(二) 能瞭解正五邊形連接五條對角線的圖形中，各線段的比例關係。

(三) 能認識黃金三角形。

(四) 能尺規作圖畫出黃金三角形與正五邊形。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

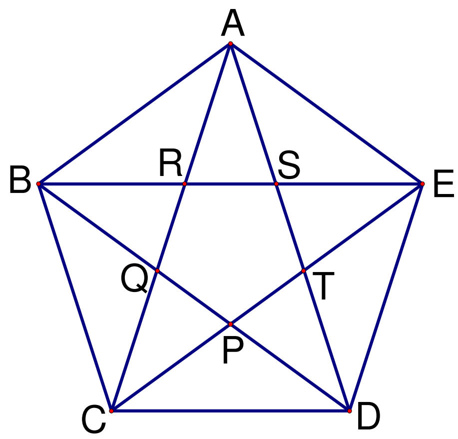
五、教學說明：

正五邊形連接五條對角線後，會形成很多三角形。先以全等三角形來分類，認識圖形中各種等腰三角形，並計數全部三角形的個數。再利用相似三角形的概念，認識正五邊形中各種線段間

的黃金比例關係。

六、教學活動：

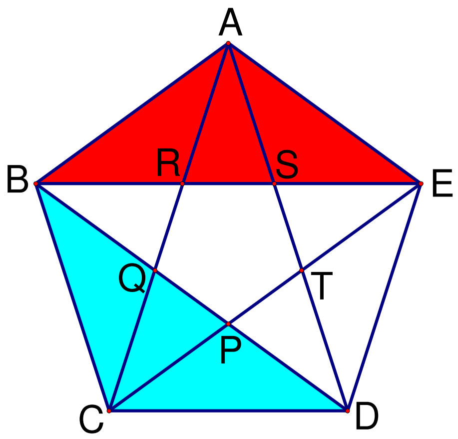
活動一：老師在黑板上畫了一個正五邊形 ABCDE，再把五條對角線連接起來，設交點為 P、Q、R、S、T，請同學觀察圖形中共有多少個三角形？



這個題目看起來很簡單，似乎連小學生也會做，但是如果毫無章法隨意數三角形，很容易遺漏任何一個。所以利用我們學過的全等三角形，將所有三角形分類計算，則可以達到事倍功半的效果。

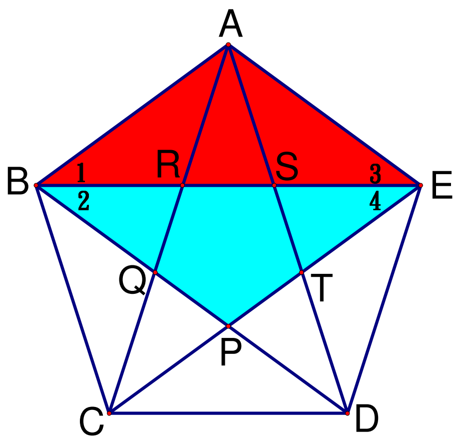
步驟 1：所謂正五邊形就是指五個邊都相等，五個內角也都相等的五邊形，可以求出每一個內角=_______度。請說明理由。

步驟 2：正五邊形 ABCDE 中，連接對角線 $\overline{BE}$ 、$\overline{BD}$，可以得到△ABE 和△BCD，請說明△ABE 和△BCD 是否全等？和△ABE 全等的這一類三角形共有______個。所以我們可以推理出正五邊形中，五條對角線等長。

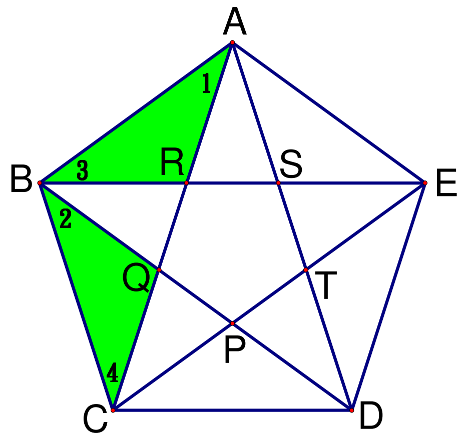


步驟 3： 觀察△ABE 中，因為△ABE 為等腰三角形，所以可以求出兩底角∠ABE=∠AEB=_______度，同理可以發現此類相同的角共有 10 個。再推算出五角星形的尖端∠EBD=______度，圖形中所有 36° 的角共有_____個。

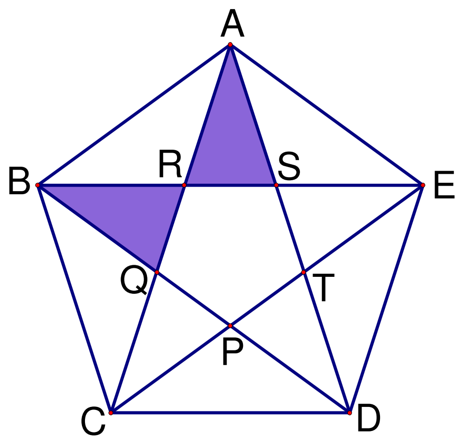
步驟 4： 請說明△ABE 和△PBE 是否全等？重新檢視步驟 2 中，和△ABE 全等的這一類三角形共有______個。



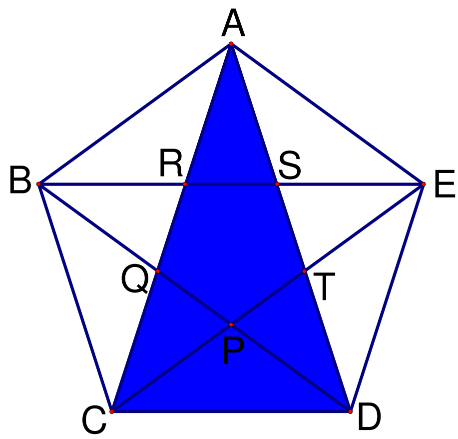
步驟 5： 請說明△ABR 和△BCQ 是否全等？和△ABR 全等的這一類三角形共有______個。



步驟 6：請說明△ARS 和△BRQ 是否全等？和△ARS 全等的這一類三角形共有______個。

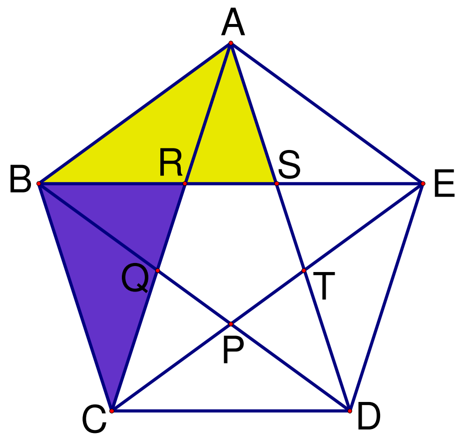


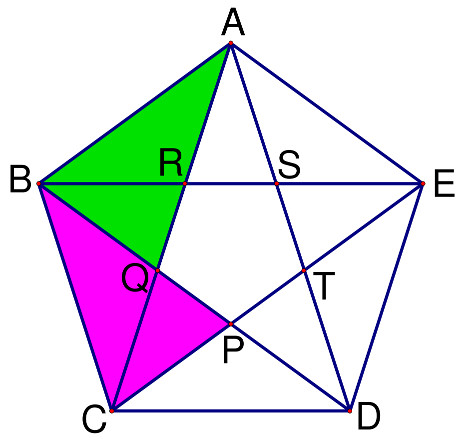
步驟 7：請說明△ACD 和△BDE 是否全等？和△ACD 全等的這一類三角形共有______個。



步驟 8：以 $\overline{AB}$ 為一邊，觀察△ABS 和△ABQ；又以 $\overline{BC}$ 為一邊，觀察△BCR 和△BCP，請說明上述四個△是否全等？和

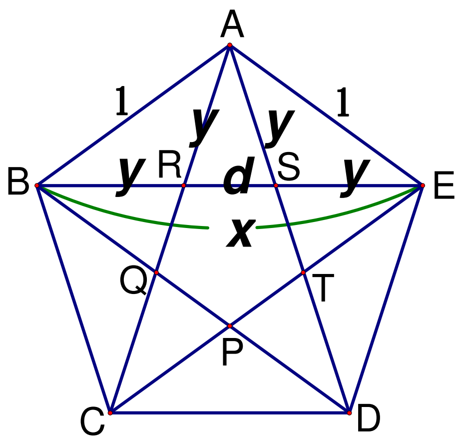
△ABS 全等的這一類三角形共有______個。





步驟 9：將所有三角形依全等的情況作分類，共有______種全等三角形，計算所有三角形總共有______個。

活動二：觀察活動一中數過的所有三角形，你是否發現它們都是等腰三角形？而且我們可以算出圖形中任意角的度數，所以用角度分類，可以將這些等腰三角形分成兩類：一種是 108°、36°、36°，一種是 36°、72°、72°。這些線段很多等長，不等長的也有很漂亮的比例關係，讓我們來研究看看。



步驟 10：觀察圖形中的各種線段，先將等長的分類如下：

(1) 設正五邊形邊長為 1，則 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EA}=1$

是否 $\overline{BS}=\overline{RE}=1$？請說明理由。＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(2) 設對角線長 $\overline{BE}=x$，則 $\overline{BE}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CE}=x$

(3) 設 $\overline{AR}=\overline{AS}=\overline{BR}=\overline{BQ}=\ldots\ldots=\overline{ES}=\overline{ET}=y$

(4) 想想看 PQRST 是正五邊形嗎？假設邊長為 d。

步驟 11：為了求出對角線的長度，可以觀察圖形中△ABE 和△ABR

是否相似？請說明理由。＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

利用等腰△ABE 和△ABR 相似，則對應邊成比例，

所以兩個等腰△的腰：底邊=1：x = (x－1)：1

列式得 $x^2-x-1=0$

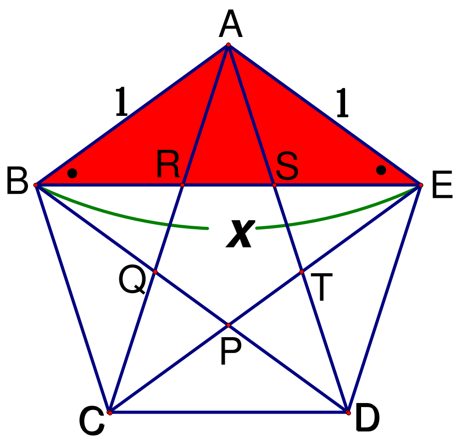
解出 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$(－不合)

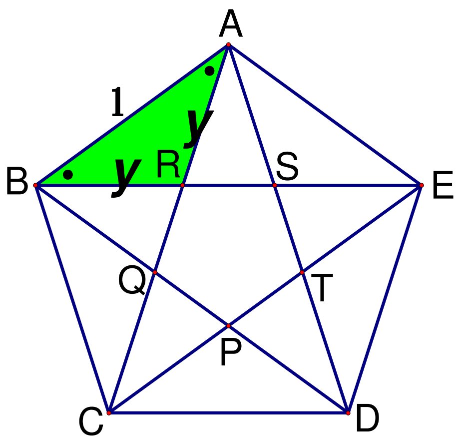
已知 $\sqrt{5}\fallingdotseq 2.236\cdots\cdots$ 代入可算出 $x\fallingdotseq 1.618\cdots\cdots$

這個數在數學上有很多美麗的特性，我們特別稱為大黃金比例。

步驟 12：接著算出△ABR 的腰長 y，有兩個想法可以求 y：

(1) 因為△ABE 和△ABR 相似。





所以兩個等腰△的腰：底邊=1：$x=y$：1

$$\therefore \quad y=\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(2) $\because y=\overline{\mathrm{B}R}=\overline{BE}-\overline{RE}=x-1$，

$$\therefore y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

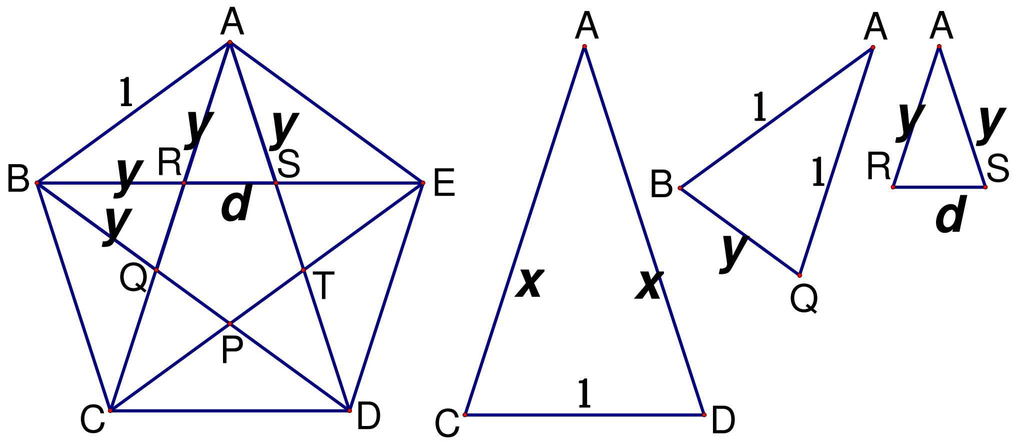
觀察這兩種作法求出的 y，

已知 $\sqrt{5}$ ≒2.236……代入可算出 y ≒0.618……

我們特別稱這個數為小黃金比例。

你發現大、小黃金比例有何關係？

步驟 13：觀察圖形中，角度是 36°、72°、72° 的所有等腰△，共有大、中、小三類。



如上圖中的△ACD～△ABQ～△ARS

所以大、中、小等腰△的腰：底邊=x：1=1：$y=y$：d

這四個不等長的線段 x、1、y、d 形成很漂亮的比例關係，

$x>1>y>d$ 依序以＿＿＿＿＿＿的比例縮小，

$d<y<1<x$ 依序以＿＿＿＿＿＿的比例放大。

歸納前面已算出 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，$y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

請算出 d 的長度= ＿＿＿＿＿＿。

而這些角度是 36° 、72° 、72° 的所有等腰△，因為腰長與底邊的比成大黃金比例，特別稱為**黃金三角形**。

步驟 14：瞭解正五邊形內的這些線段間的比例關係，請利用尺規作圖畫出下面兩類等腰三角形：

一是 36° 、36° 、108° ，其腰長：底邊=1：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

二是 36° 、72° 、72° ，其底邊：腰長=1：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

教學活動參考解答：

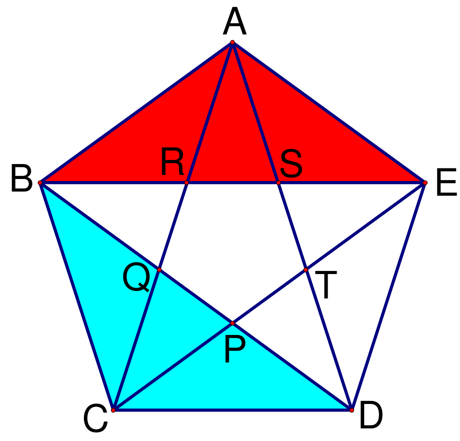
活動一：

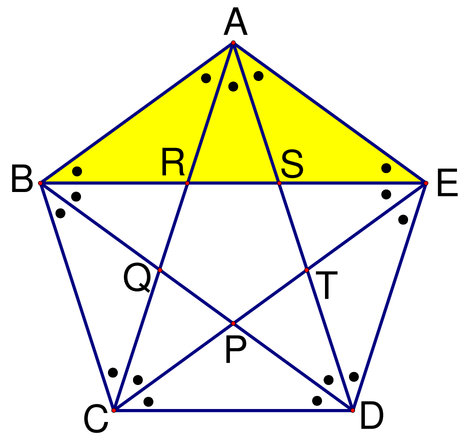
步驟 1：108°

步驟 2：下左圖中∵ $\overline{AB}=\overline{BC}$ ，$\overline{AE}=\overline{CD}$ $\angle$BAE=$\angle$BCD=108°

∴△ABE 和△BCD 全等(SAS 全等)。

和△ABE 全等的這一類三角形共有 5 個。



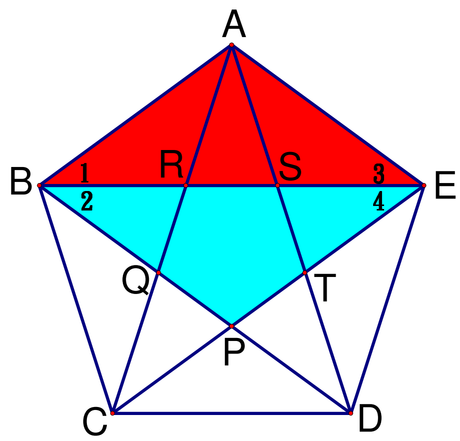


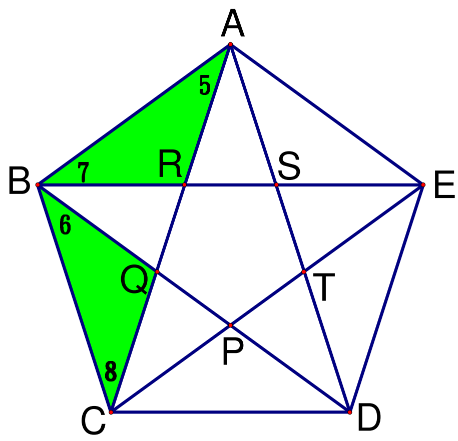
步驟 3：36° ，36° ，上右圖中所有 36° 的角共有 15 個。

步驟 4：下左圖中∵∠1=∠2，∠3=∠4 ，$\overline{BE}=\overline{BE}$

∴△ABE 和△PBE 全等(ASA 全等)。

重新檢視步驟 2 中，和△ABE 全等的△共有 10 個。





步驟 5：上右圖中∵∠5=∠6，∠7=∠8 ，$\overline{AB}=\overline{BC}$

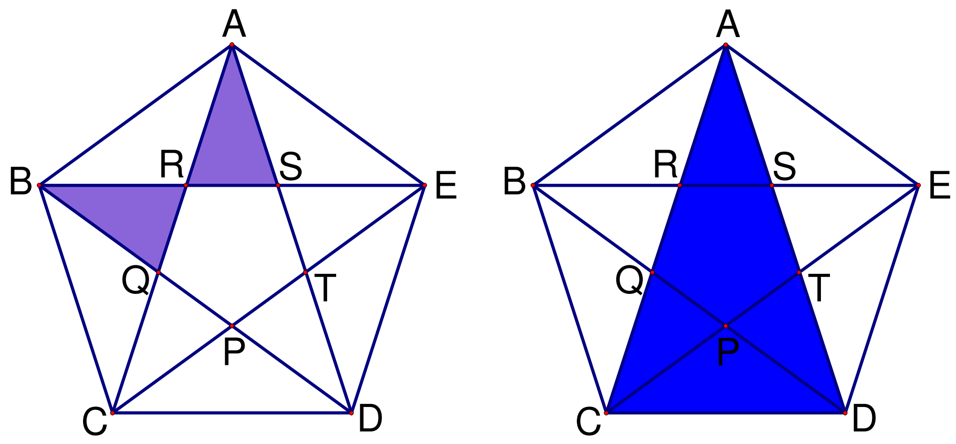
∴△ABR 和△BCQ 全等(ASA 全等)。

和△ABR 全等的這一類三角形共有 5 個。

步驟 6：下左圖中∵$\overline{AR}=\overline{BQ}$，$\overline{AS}=\overline{BR}$，∠RAS=∠QBR=36°

∴△ARS 和△BRQ 全等(SAS 全等)。

和△ARS 全等的這一類三角形共有 5 個。

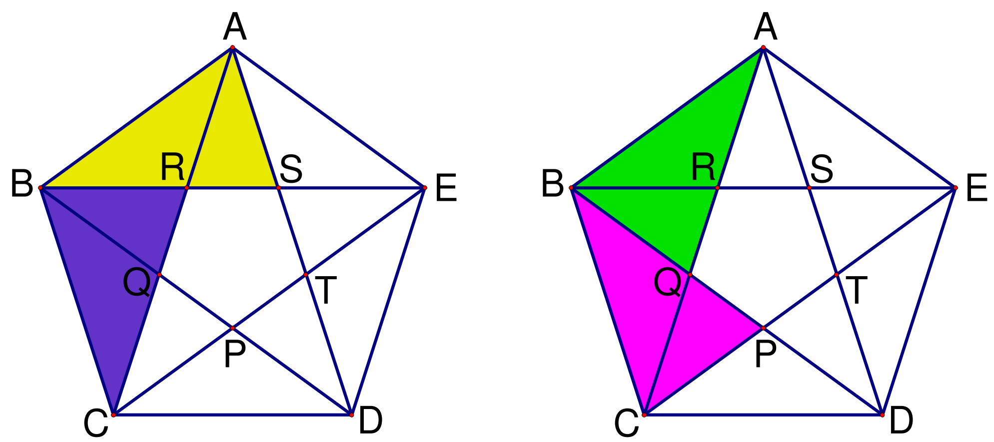


步驟 7：上右圖中∵ $\overline{AC}=\overline{BD}$，$\overline{AD}=\overline{BE}$，∠CAD=∠DBE=36°

∴△ACD 和△BDE 全等(SAS 全等)。

和△ACD 全等的這一類三角形共有 5 個。

步驟 8：下圖中觀察△ABS，△ABQ，△BCR 和△BCP，



∵ $\overline{AB}=\overline{BC}$，∠ABS=∠BAQ=∠BCR=∠CBP=36°

∠BAS=∠ABQ=∠CBR=∠BCP=72°

∴△ABS，△ABQ，△BCR 和△BCP 全等(ASA 全等)。

和△ABS 全等的這一類三角形共有 10 個。

步驟 9：共有 5 種全等三角形，計算所有三角形總共有 35 個。

活動二：

步驟 10：是；PQRST 是正五邊形。

∵△ABS 和△ARE 為等腰△

$\therefore \overline{\mathrm{B}S} = \overline{AB} = \overline{AE} = \overline{RE} = 1$

步驟 11：∵∠ABE=∠AEB=∠ABR=∠BAR=36°

∴△ABE 和△ABR 相似(AA 相似)。

步驟 12：大黃金比例 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，小黃金比例 $y = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

兩者的關係為 $xy=1$，$x-y=1$。

步驟 13：$x>1>y>d$ 依序以 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$(小黃金比例)縮小，

$d<y<1<x$ 依序以 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$(大黃金比例)放大。

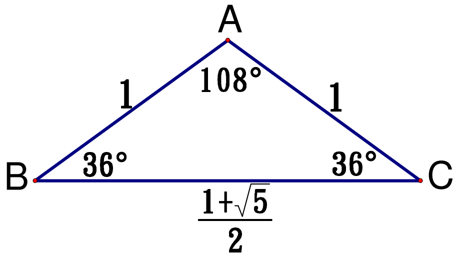
算出 d 的長度=$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$。

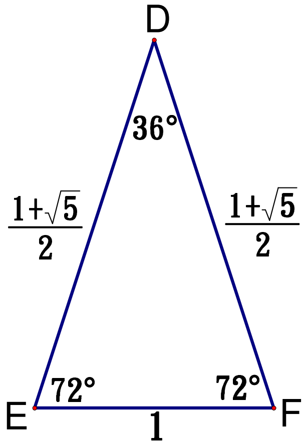
步驟 14：利用 SSS 全等作圖，畫出三邊長比為 1：1：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

的三角形，這是 108°、36°、36° 的等腰三角形，

若畫出三邊長比為 1：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$：$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，則是 36°、72°、

72° 的等腰三角形。

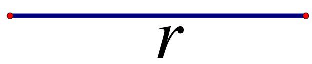




七、指定作業：

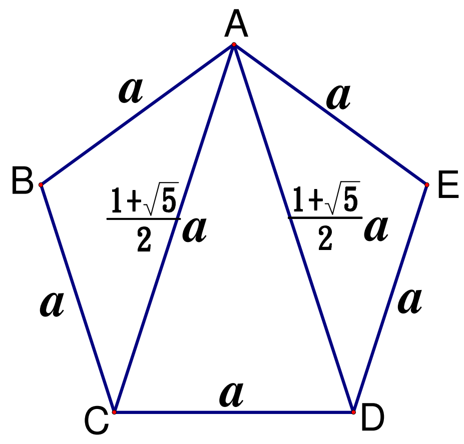
1. 已知線段a，請利用尺規作圖畫出以線段a為邊長的正五邊形。

2. 已知線段 r，請畫出以線段 r 為半徑的圓，並利用尺規作圖畫出此圓的內接正五邊形。



指定作業參考解答：

1. 先作出 36°、72°、72° 的黃金三角形，三邊長為 a、$\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$、$\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ 的等腰△ACD，再分別以 $\overline{AC}$ 、$\overline{AD}$ 為一邊向外作出兩個等腰△ACB、△ADE，使△ACB、△ADE 的腰長都是 a，則正五邊形 ABCDE 為所求。



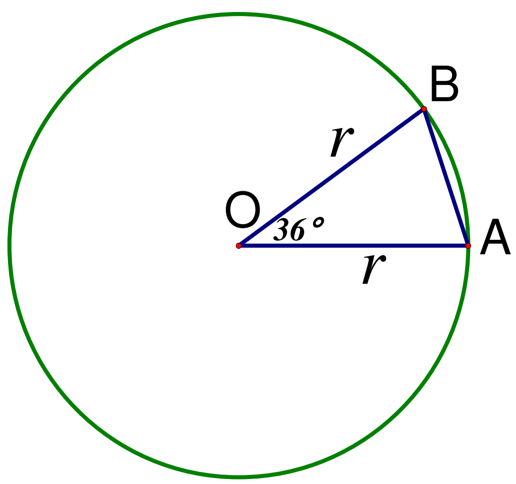
2. 如下左圖，先作出以線段 r 為半徑的圓 O，

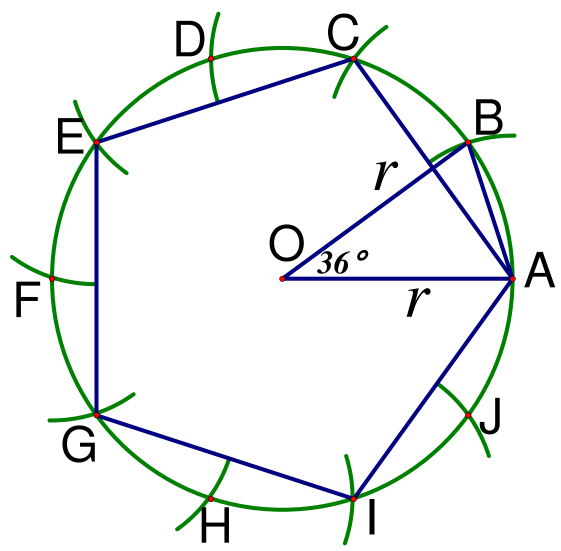
要作出圓心角 $\angle O=36^\circ$ ，觀察圓內等腰△OAB，

等腰△OAB 三邊長的比為 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}:\frac{1+\sqrt{5}}{2}:1=r:r:\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$

所以只需作出 $\overline{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ ，再依次取 $\overline{AB}$ 長將圓周十等

分，連接出正五邊形 ACEGI 為所求。





八、教學活動注意事項：

1. 教學活動時間建議如下：第一節課教學說明(含引起動機)：約 5 分鐘，活動一：約 40 分鐘；第二節課教學說明(含引起動機)：約 5 分鐘，活動二：約 25 分鐘，隨堂練習：約 15 分鐘。
2. 正五邊形是非常特別的正多邊形，部分特性對國中學生討論起來有一定的難度，本單元選用正五邊形最容易了解的部分，作為全等三角形與相似三角形的補充教材。首先於活動一尋找全等三角形，增進學生對正五邊形中各類等腰三角形的了解，教師不妨多引導學生歸納並比較異同之處。再引入活動二中，發現這麼多大大小小的三角形，其實只有兩類的相似三角形。最重要是利用相似三角形概念，了解正五邊形中各線段間的黃金比例，最後還能應用於正五邊形的尺規作圖。至於正五邊形的尺規作圖，有興趣的學生應該可以找到非常多經典的作法，值得引導學生繼續深入研究。
3. 在各活動間教師宜巡堂走動，加強瞭解學生學習情形。
4. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 嚴鎮軍著(2001)。從正五邊形談起(pp.10-20)。臺北市：九章出版社。

2. 傅淑婷(2013)。全等三角形，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-1)。新北市：國家教育研究院。

3. 傅淑婷(2013)。相似三角形，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-2)。新北市：國家教育研究院。

主題 3－7：直角三角形母子相似定理與海龍公式

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者：**傅淑婷

二、先備知識：　　　　陳昭地

(一) 知道銳角或直角三角形的三邊有三條高。

(二) 知道兩個三角形 AA 相似條件。

(三) 知道三角形的面積公式＝（底×高）÷ 2 。

(四) 知道直角三角形有畢氏定理(商高定理或勾股定理)。

(五) 知道並熟悉平方差公式。

(六) 知道 $x^2=r$ 的正根為 $\sqrt{r}$ $(r>0)$。

(七) 知道 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}\Leftrightarrow b^2=ac$ ，b 是二正數 a、c 的幾何平均數。

(八) 知道過直線外一點作已知直線的平行線。

(九) 知道坐標平面上，已知三頂點坐標 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 之三角形面積求法之測量師公式。

三、教學目標：

(一) 能理解直角三角形母子相似定理（直角三角形斜邊上的高，分此直角三角形成三個兩兩相似的三角形）。

(二) 能利用直角三角形母子相似定理，得知兩股及斜邊上的高都可以表成斜邊或高分斜邊成兩條線段的幾何平均數。

(三) 能利用(二)的結果給出畢氏定理之另一詮釋。

(四) 能知道給定三邊長之三角形面積求法。

(五) 能知道給定三邊長 a、b、c 之三角形面積海龍公式。

(六) 能選用較便捷的方法求出三角形的面積。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：本單元旨於乘法公式（特別是平方差與和、差平方的公式）、畢氏定理及平方根的概念之兩個應用：

(一) 活動一引導發現直角三角形母子相似定理，並將其應用到畢氏定理之另一詮釋，與引出過程中得出幾何平均數的幾何詮釋。

(二) 活動二藉由 5、6、7 三邊長的三角形面積求法。再探求邊長a、b及c的ΔABC($\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，且不妨設$c\geq a$，$c\geq b$)之面積求法過程，逐步達到海龍公式；續由不同給定條件所得三角形的不同求法中，引導訓練能選用較便捷的方法。

活動三是綜合結論，充分掌握本單元的主要結果，可提供數學題材應用的工具。

還有特別要注意的，本單元的直角三角形，很多的三邊長，都跟畢氏三元數組有關，能先備（但沒有絕對的必要）一些畢氏三元數組的知識，對學習效果會更顯現出來。

六、教學活動：

活動一：探求直角三角形母子相似定理，並將其應用到畢氏定理之另一詮釋。

步驟 1：給定ΔABC，如圖 1 中(1)、(2)或(3)，

三邊長$\overline{AB}=c$，$\overline{AC}=b$，$\overline{BC}=a$，其中 c 為最長邊。

如果 c 邊上的高$\overline{CD}$的長$=h_c$，

則ΔABC的面積可以用c與h_c表成 __________ 。

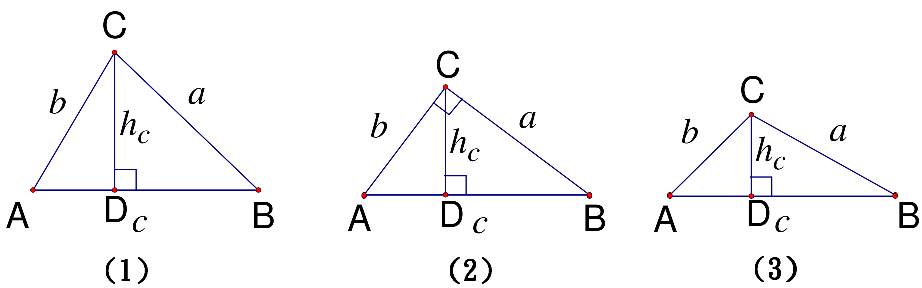


圖1

特別情況，當$a^2+b^2=c^2$時，則得$\angle C=90^\circ$的直角三角形，如圖 1(2)，此時直角ΔABC的面積可以用兩股a與b表成 __________，於是直角三角形斜邊上的高可用a、b、c表成 ___________。

步驟 2：看圖 2，直角ΔABC斜邊上的高$\overline{CD}$，將原直角△分成兩個較小的直角ΔACD與ΔCBD，其中$\angle ADC=\angle CDB=90^\circ$。

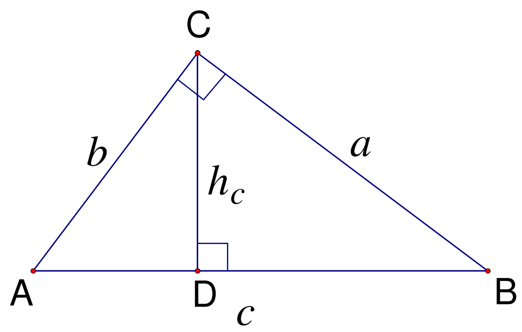


圖2

觀察原直角ΔABC與直角ΔACD它們是否相似呢？

理由如下：

$\because \angle A = \angle A$ ，$\angle ACB = \angle ADC = 90°$ 。

利用三角形的 AA 相似性質，

得到$\Delta ABC \sim \Delta ACD \cdots ①$

同樣的方式，得到$\Delta ABC \sim \Delta CBD \cdots ②$

由①②我們得到三個兩兩相似的直角三角形。

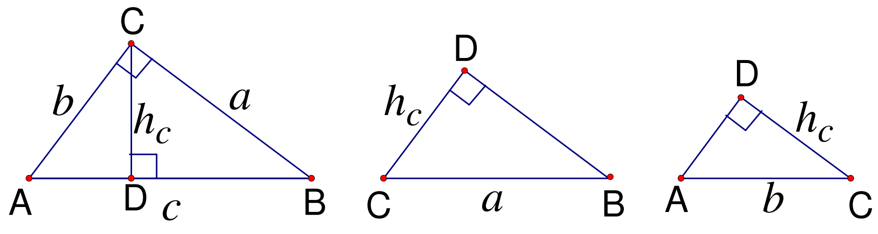
即$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD \cdots (*)$

也就是直角ΔABC中，斜邊上的高分此直角三角形為三個兩兩相似的直角三角形，這就是所謂的直角三角形母子相似定理。

步驟 3：(畢氏定理另外的一種詮釋)

從以上兩個步驟，自始至終我們都沒用到直角ΔABC的畢氏定理，現在可以利用直角三角形母子相似定理來說明畢氏定理。

看圖 3，將ΔACD和ΔCBD從ΔABC中分離出來，轉成同樣方向，你可以清楚看到邊長的對應情形：



(1)　　(2)　　(3)

圖3

利用$\Delta ABC \sim \Delta ACD$，可知$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$，

即$\dfrac{c}{b}=\dfrac{b}{\overline{AD}}$，亦即$b^2=c\times\overline{AD}\cdots$③

利用$\Delta ABC \sim \Delta CBD$，可知$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CB}}=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{BD}}$，

即$\dfrac{c}{a}=\dfrac{a}{\overline{BD}}$，亦即$a^2=c\times\overline{BD}\cdots$④

將③④兩式左右分別相加，得

$a^2+b^2=c\times\overline{BD}+c\times\overline{AD}=c\times(\overline{BD}+\overline{AD})=c\times c=c^2$

亦即 $a^2+b^2=c^2$，這就是畢氏定理。

結論：以上步驟就是畢氏定理的另一種詮釋。

活動二： ΔABC求面積的海龍公式。

步驟 4：在ΔABC中，$\overline{AB}=c$，$\overline{AC}=b$，$\overline{BC}=a$，不妨設c為最長邊，

如圖 4。

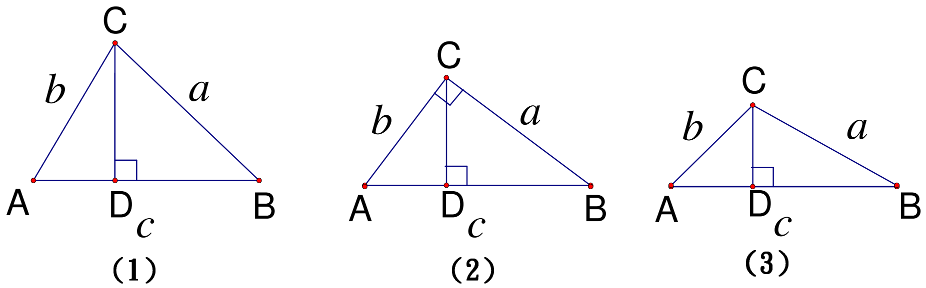


圖4

對應$\angle C$分別銳角、直角與鈍角的三種情況，利用三角形的面積等於(底×高)÷2。$\angle C$的直角狀況其面積直接用兩股a、b可取一個為底，另一個就是高，而其面積就是$\frac{1}{2}ab$，亦即直角ΔABC的面積等於兩股乘積之一半。但對非直角三角形的狀況，就需加工，另求最長邊c上的高$\overline{CD}=h_c$，此時即得

ΔABC的面積等於$(c\times h_c)\div 2=\frac{1}{2}c\times h_c=\frac{1}{2}ch_c$。

隨堂練習 1： 對直角三角形ΔABC，看圖 4 之(2)，ΔABC的面積是否仍然可寫成$\frac{1}{2}ch_c$？請簡單的說明你的理由。

步驟 5： 從圖 4 之(2)及以上的討論，我們知道

直角ΔABC的面積等於$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch_c \Leftrightarrow ab=ch_c \Leftrightarrow h_c=\frac{ab}{c}$，

換句話說斜邊上的高h_c等於兩股之乘積除以c。

再由$h_c=\frac{ab}{c}$改寫成$\frac{h_c}{a}=\frac{b}{c}$，

看圖 3 之（1）（2）$\because \frac{h_c}{a}=\frac{b}{c}$且$\angle CAB=\angle DCB$

這是保證$\Delta ABC \sim \Delta CBD$(SAS 相似)了！

另由圖 3 之（2）（3）它們有共同邊長$\overline{CD}=h_c$，

而$\Delta ACD \sim \Delta CBD$得$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$，即得$h_c^{\ 2}=\overline{CD}^2=\overline{AD}\times\overline{BD}$，

亦即$h_c=\sqrt{\overline{AD}\times\overline{BD}}$，$h_c$是$\overline{AD}$與$\overline{BD}$的**幾何平均數**。

隨堂練習 2：

(1) 圖 3 之(1)得知$a^2=c\times\overline{BD}$；請問a是否為c與$\overline{BD}$的幾何平均數？

(2) 再看圖 3 之(1)得知$b^2=c\times\overline{AD}$；請問b是否為c與$\overline{AD}$的幾何平均數？

至此，易得在直角ΔABC中，$b^2=c\times\overline{AD}$，$a^2=c\times\overline{BD}$

$\therefore \overline{AD}=\dfrac{b^2}{c}\ldots$⑤　同理得$\overline{BD}=\dfrac{a^2}{c}\cdots$⑥

最後由⑤⑥得$\overline{AD}:\overline{BD}=\dfrac{b^2}{c}:\dfrac{a^2}{c}=b^2:a^2$

隨堂練習 3：由$h_c^{\ 2}=\overline{AD}\times\overline{BD}=\dfrac{b^2}{c}\times\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{(ab)^2}{c^2}$是否可得$h_c=\dfrac{ab}{c}$？

由上知直角ΔABC斜邊上的高h_c至少有下列兩個求法：

(1) $h_c=\dfrac{ab}{c}$

(2) $h_c=\sqrt{\overline{AD}\times\overline{BD}}$ $(\overline{AD}=\dfrac{a^2}{c},\overline{BD}=\dfrac{b^2}{c})$

並且直角$\Delta ABC,\angle C=90°$之面積至少有下列兩個公式：

直角 $\Delta ABC=\dfrac{1}{2}ab$ 或 $\Delta ABC=\dfrac{1}{2}ch_c\cdots$ ⑦

隨堂練習 4：

(1) ΔABC三邊長分別為 3，4，5，試求斜邊上的高並求其面積。

(2) 直角ΔDEF中, $\angle E=90°,\overline{DF}=13,\overline{DE}=5,$且 $\overline{EG}$ 為 $\overline{DF}$ 邊上的高，試求 ΔDEF 的面積，並求 $\overline{EF},\overline{EG},\overline{DG}$ 與 $\overline{FG}$ 之長。

步驟 6：再回頭想一想當ΔABC不是直角三角形時，最長邊$\overline{AB}$上的高$\overline{CD}=h_c$要如何求得？先看一個邊長 5，6，7 的ΔABC，在圖 5 中，高$\overline{CD}$分ΔABC為兩個直角三角形ΔACD及ΔBCD，$\overline{CD}$是它們共有的一股：

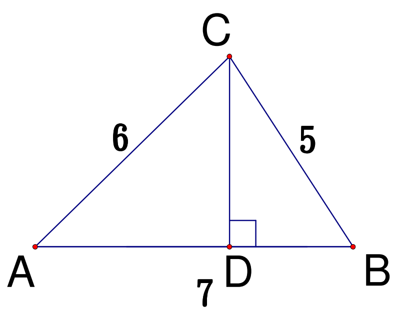


圖5

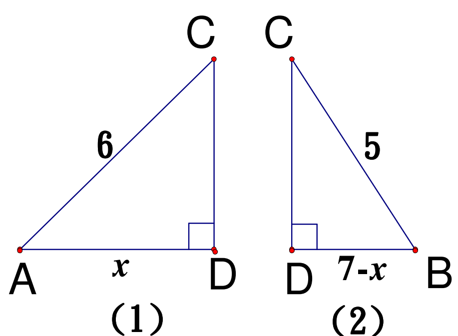


圖6

圖 5 中$\overline{AD}+\overline{DB}=7$只要能分別求得$\overline{AD}$，$\overline{DB}$就可以利用直角三角形的畢氏定理求出$\overline{CD}$。這兩個直角三角形同樣的一股$\overline{CD}$，也就是$\overline{AB}$邊上的高$h_c$，求出$h_c$後，

自然可求得ΔABC的面積了！

因此首要工作分別求得$\overline{AD}$或$\overline{BD}$，

為此可令$\overline{AD}=x$，則$\overline{BD}=7-x$，

比較圖 6 中兩個$\overline{CD}=h_c$，

考慮圖 6 之(1)中的直角ΔACD，

利用畢氏定理可得$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2=36-x^2\cdots$⑧

同理，由圖 6 之(2)可知$\overline{CD}^2=25-(7-x)^2\cdots$⑨

由⑧、⑨ 得到$36-x^2=25-(7-x)^2\cdots$⑩

亦即$36-x^2=25-(49-14x+x^2)\cdots$⑪

式子⑪的兩邊，x^2項可以抵消掉，得

$$\begin{aligned}36&=25-49+14x\\&=-24+14x\\\therefore 14x&=36+24\\&=60\\\therefore\quad x&=\frac{30}{7}\end{aligned}$$

所以$\overline{AD}=\dfrac{30}{7},\overline{BD}=\dfrac{19}{7}$

$$\begin{aligned}\overline{CD}^2&=5^2-(\frac{19}{7})^2=25-\frac{19^2}{7^2}=\frac{25\times49-19^2}{7^2}=\frac{35^2-19^2}{7^2}\\&=\frac{(35+19)(35-19)}{7^2}=\frac{16\times54}{7^2}=\frac{4^2\times3^2\times6}{7^2}\end{aligned}$$

於是$\overline{CD}=\sqrt{\dfrac{4^2\times3^2\times6}{7^2}}=\dfrac{12}{7}\sqrt{6}$

$\therefore\ \Delta ABC$的面積$=(\overline{AB}\times\overline{CD})\div2=(7\times\dfrac{12}{7}\sqrt{6})\div2$

$=6\sqrt{6}$（平方單位）

隨堂練習 5：

(1) 仿上步驟求邊長 13，14，15 的三角形中，次長邊 14 上的高並求其面積。

(2) 求邊長 7，24，25 的三角形，最長邊上的高並求其面積。

步驟 7： 至於一般的ΔABC，$\overline{AB}=c,\overline{BC}=a,\overline{AC}=b$，不妨令$\overline{AB}=c$還是最長邊（$c\geq a,c\geq b$），如圖 7，可以仿照邊長 5，6，7 的作法，來求得$\overline{AD},\overline{BD}$及$\overline{CD}$。

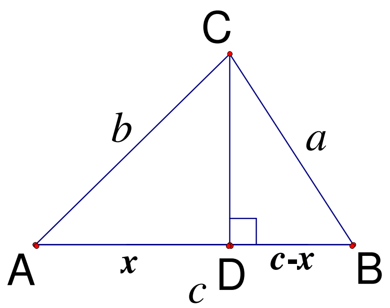


圖7

同樣的，令$\overline{AD}=x$，則$\overline{BD}=c-x$，

由直角ΔACD得$\overline{CD}^2=b^2-x^2$，

再由直角ΔBCD得$\overline{CD}^2=a^2-(c-x)^2$，

於是可得：$b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$

再得$b^2-x^2=a^2-(c^2-2cx+x^2)=a^2-c^2+2cx-x^2$

進一步得$b^2=a^2-c^2+2cx$，亦即$2cx=b^2+c^2-a^2$，

故得$x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$，即$\overline{AD}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}\cdots$⑫

所以$\overline{BD}=c-\overline{AD}=\dfrac{2c^2-(b^2+c^2-a^2)}{2c}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2c}\cdots$⑬

此時就可利用⑬式及直角ΔBCD，它是斜邊$\overline{BC}=a$，

兩股為$\overline{BD}$及$\overline{CD}$的直角三角形，

由畢氏定理$\overline{BD}^2+\overline{CD}^2=a^2$，求得$h_c=\overline{CD}$：

$$\begin{aligned}
\overline{CD}^2 &= a^2-\overline{BD}^2 \\
&= a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2 \\
&= \frac{(2ac)^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{(2c)^2} \\
&= \frac{[2ac+(a^2+c^2-b^2]\times[2ac-(a^2+c^2-b^2)]}{(2c)^2} \text{ (平方差公式)} \\
&= \frac{[(a+c)^2-b^2]\times[b^2-(a-c)^2]}{(2c)^2} \\
&= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{(2c)^2} \quad ...(14)
\end{aligned}$$

由⑭式就可以得到$\overline{\mathrm{CD}}^2$了！不過式子仍然有些繁複；為了簡化些，可令$a+b+c=2s$，即$s=\dfrac{a+b+c}{2}$（半周長）隨即

$$(a+c-b)=(a+b+c)-2b=2s-2b=2(s-b)\cdots ⑮$$

$$(b+a-c)=2(s-c)\cdots ⑯$$

$$(b-a+c)=2(s-a)\cdots ⑰$$

於是$\overline{\mathrm{CD}}^2$可以簡化成$\dfrac{16s(s-a)(s-b)(s-c)}{(2c)^2}=\dfrac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}$

故得$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\dfrac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}}=\dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdots ⑱$

因此，得ΔABC面積的海龍公式：

$$\Delta ABC=\frac{1}{2}c\times\overline{CD}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdots \text{（海龍公式）}$$

隨堂練習 6：

(1) 求三邊長 7，8，9 的三角形面積。

(2) 求在坐標平面上以三點 A（1，2）B（1，5）C（3，4）為頂點所形成ΔABC之面積。(提示:使用海龍公式不便捷。)

(3) 求在坐標平面上以三點 A（3，4）B（7，9）C（1，2）為頂點所形成ΔABC之面積。（提示：不方便使用海龍公式，可考慮利用測量師公式。）

活動三：（綜合討論）

由兩個活動；八個步驟，十八個式子及六個隨堂練習，我們綜合在一起，可以得到以下結論：

(1) 直角ΔABC中，$\angle$C=90°，$\overline{AB}=c$，$\overline{AC}=b$，$\overline{BC}=a$，斜邊上的高$\overline{CD}$，得到三個兩兩相似的直角三角形：$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$（見圖 8）。

(2) 直角ΔABC中，三邊長及斜邊上的高$\overline{CD}$有如下關係：

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2 = \overline{BD} \times c$$
$$b^2 = \overline{AD} \times c$$
$$\overline{CD}^2 = \overline{AD} \times \overline{BD}$$
$$\overline{BD} = \frac{a^2}{c},\ \overline{AD} = \frac{b^2}{c},\ \overline{CD} = \frac{ab}{c}$$

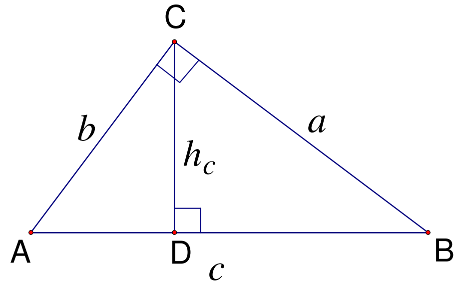


圖 8

(3) 見圖 8 及用上式我們得到：

a 是 c 與 $\overline{BD}$ 的幾何平均數；b 是 c 與 $\overline{AD}$ 的幾何平均數；

$\overline{CD}$ 是 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BD}$ 的幾何平均數。

(4) 三角形的三邊長為 a，b，c（$c \geq a$，$c \geq b$）

最長邊上的高度 h_c 及 Δ 面積分別如下：

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{(海龍公式)}$$

教學活動參考解答：

活動一：

步驟 1，$\frac{1}{2}ch_c$ ，$\frac{1}{2}ab$，$\frac{ab}{c}$ 。

活動二：

隨堂練習 1：當然可以，因為它們仍然表示（底×高）÷2

隨堂練習 2：(1) 是， (2) 是。

隨堂練習 3：可以（$h_c = \sqrt{(\frac{ab}{c})^2} = \frac{ab}{c}$）。

隨堂練習 4：(1) 高 $\frac{12}{5}$，面積 6 平方單位。

(2) $\Delta DEF = 30$, $\overline{EF} = 12$, $\overline{EG} = \frac{60}{13}$, $\overline{DG} = \frac{25}{13}$, $\overline{FG} = \frac{144}{13}$ 。

活動三：

隨堂練習 5：(1) 高 12，面積 84（平方單位）。

(2) 高為$\frac{168}{25}$，面積為 84（平方單位）。

隨堂練習 6：(1) 面積為$\sqrt{12\times5\times4\times3}$即$12\sqrt{5}$，

(2) 面積為$(\overline{BA}\times2)\div2=(3\times2)\div2=3$

(3) 用測量師公式$=\frac{1}{2}\left|(1\times4+3\times9+7\times2-2\times3-4\times7-9\times1)\right|=\frac{1}{2}|2|=1$

七、指定作業：

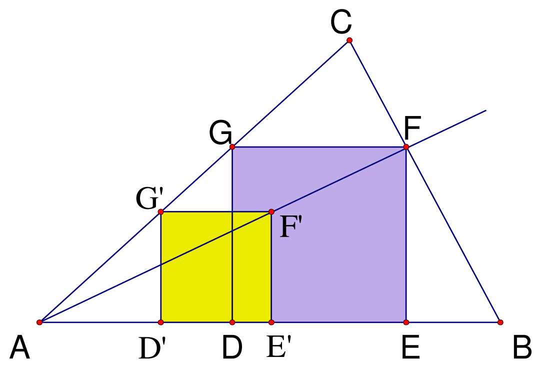
1. 用口頭敘述直角三角形母子相似定理。
2. 已知三邊長為 11，60，61 的三角形，則其最長邊 61 上的高為何?其面積又為何?
3. 選用你認為最便捷的方法，求下列各已知條件的ΔABC面積：

   (1) A、B、C 在坐標平面上之坐標分別為(0,0)、(5,0)、(0,13)。

   (2) A、B、C 在坐標平面上之坐標分別為(-1,0)、(3,0)、(13,12)。

   (3) $\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=11$，$\overline{AC}=12$。

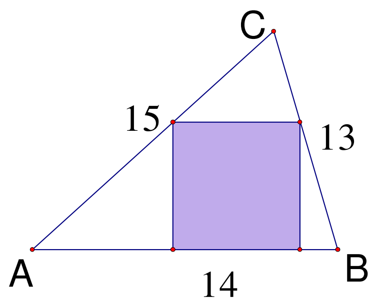
   (4) $\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=12$，$\overline{AC}=15$。
4. 用口頭說明ΔABC求面積的海龍公式。
5. 已知ΔABC為銳角三角形，$D'E'F'G'$為邊$\overline{D'E'}$在$\overline{AB}$邊上的一段且其另一頂點G'在$\overline{AC}$邊上的正方形，如下圖所示。



連 $\overline{AF'}$ 並延長交 $\overline{BC}$ 於 F，過 F 作 $\overline{FE} \perp \overline{AB}$，且交 $\overline{AB}$ 於 E，再過 F 作 $\overline{AB}$ 的平行線 $\overline{FG}$ 交 $\overline{AC}$ 於 G，最後過 G 作 $\overline{AB}$ 的垂直線交 $\overline{AB}$ 於 D。試說明：$DEFG$ 亦為正方形。

6. 已知 ΔABC 為銳角三角形，試利用作業第 5 題，作一邊在 $\overline{AB}$ 上且另二頂點在另二邊上的內接正方形 $DEFG$。

7. 已知三邊長為 13，14 及 15 的銳角 ΔABC，如下圖。試求 $\overline{AB}=14$ 邊上的內接正方形的邊長。



8. 承上題，試求 $\overline{AC}=15$ 邊上的內接正方形邊長。

指定作業參考解答：

1. 略。

2. 高為 $\dfrac{660}{61}$，面積為 330 平方單位

（註：先說明 $61^2=11^2+60^2$，三角形是直角三角形）。

3. (1) $\frac{65}{2}$（先說明或作坐標平面得知三角形為兩股長分別 5，13 的直角三角形；當然用測量師公式求得亦可）。

(2) 用測量師公式求得 24 最便捷。

(3) $8\sqrt{35}$（海龍公式）。

(4) 54（ΔABC 為兩股長 9 與 12 的直角三角形），或用海龍公式也是很便捷。

4. 略。

5. 看圖，由 $\overline{EF}\perp\overline{AB}$，$\overline{E'F'}\perp\overline{AB}$ $\therefore\Delta AEF\sim\Delta AE'F'$ $\therefore\frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AF'}}\cdots$①

再由 $\overline{GF}//\overline{AB}$，$\overline{G'F'}//\overline{AB}$ $\therefore\overline{GF}//\overline{G'F'}$ $\therefore\Delta AFG\sim\Delta AF'G'$

$\therefore\frac{\overline{AF}}{\overline{AF'}}=\frac{\overline{GF}}{\overline{G'F'}}\cdots$② 故由①②得 $\frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}}=\frac{\overline{GF}}{\overline{G'F'}}$，再由 $\overline{E'F'}=\overline{F'G'}$

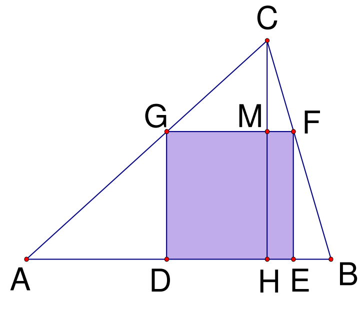
$\therefore\overline{GF}=\overline{EF}$ 又 $\overline{GD}\perp\overline{AB}$，$\overline{EF}\perp\overline{AB}$，故 $\overline{GD}//\overline{EF}$。於是 $EFGH$ 為有鄰邊等長且有一內角 $90°$ 的平行四邊形，故 $EFGH$ 為正方形。

6.（提示題 5 反向進行：先作正方形 $D'E'F'G'$ 再完成內接正方形 $DEFG$。）

7. (1) 先由海龍公式得 $\Delta ABC=84$，再由此得 $\overline{AB}$ 邊上的高 $\overline{CH}=h=\frac{2\times 84}{14}=12$。

(2) 設內接正方形的邊長 x，

並令 $\overline{CH}$ 交正方形 $\overline{FG}$ 於 M，



則 $\Delta CGF \sim \Delta CAB$，

且由 $\overline{MH}=x$，$\overline{CM}=\overline{CH}-\overline{MH}=12-x$，得 $\frac{x}{14}=\frac{12-x}{12}$，故得

$x=\frac{84}{13}=6\frac{6}{13}$。

8. 仿照題 7，$\Delta ABC=84$，$\overline{AC}$ 邊上的高為 $\frac{168}{15}=\frac{56}{5}$ 或 $11\frac{1}{5}$，內接正方形的邊長為 $\frac{840}{131}$ 或 $6\frac{54}{131}$。

八、教學活動注意事項：

1. 教學說明約 5 分鐘，活動一（含各步驟、隨堂練習）約 35 分鐘，指定作業(含提示)約 5 分鐘。活動二與綜合結論活動三，約 40 分鐘，第二節指定作業（含提示）約 5 分鐘。
2. 直角三角形母子相似定理之教學中，先強調原先二股就是二條高，且交於直角頂。轉而需要斜邊上的高是過直角頂點向斜邊作垂線，特別留意一下，高到斜邊上的垂足 D，把原直角 $\Delta ABC(\angle C=90°)$ 分成三個直角三角形，引導發現兩個小直角三角形（$\Delta ACD,\Delta CBD$）分別與 ΔABC 相似（先盯上其中一個，仔細觀察可以利用 AA 相似性質)。
3. 在上面的處理過程中，教師可採用分離出來平放的圖 3(1)(2)(3)，更能直接確認其相似性。

4. 圖 3 的擺放是採用對應頂點的方式來呈現，寫成ΔABC～ΔACD～ΔCBD（或其它同樣字母次序對應亦同）。這樣對應點相配，可正確的配對對應邊比例分別相等，進而引出$a^2 = c\times\overline{BD}$，$b^2 = c\times\overline{AD}$，$h_c^2 = \overline{CD}^2 = \overline{AD}\times\overline{BD}$重要的副產品，兩股 a、b 及斜邊上的高 h_c 分別為其中某兩線段長的幾何平均數，進而利用$a^2 = c\times\overline{BD}$，$b^2 = c\times\overline{AD}$，看出$a^2+b^2=c^2$～畢氏定理另一個簡潔的詮釋。

5. 三角形面積的求法要能活用選擇最便捷的方法（直角三角形面積公式、測量師公式或海龍公式）。

6. 我們採用求最大邊長上的高是為避免其它二邊更長而產生$\angle A$或$\angle B$為鈍角情形；不過根據ΔABC的面積$=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$能求出最長邊$h_c=\dfrac{2\Delta}{c}=\dfrac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，（$s=\dfrac{a+b+c}{2}$為半周長）就自然可知道$h_b=\dfrac{2\Delta}{b}$，$h_a=\dfrac{2\Delta}{a}$都可利用海龍公式表示，並進一步求得其它二高$h_b$、$h_a$之長。

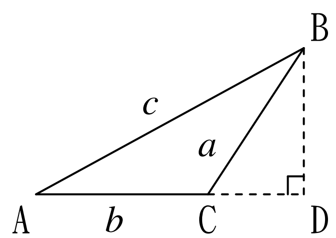
7. 以三正數a、b、c為邊長的ΔABC，當$c^2=a^2+b^2$時，ΔABC為$\angle C=90°$的直角三角形；當$c^2>a^2+b^2$時，ΔABC為$\angle C$是鈍角的鈍角三角形；而當$c\ge a$，$c\ge b$而$c^2<a^2+b^2$時，則最大角$\angle C$為銳角，ΔABC為銳角三角形。

8. 以 a、b 為兩股，c 為斜邊的直角ΔABC，可得$a^2=c\times\overline{BD}$及

$b^2 = c \times \overline{AD}$，其中 $\overline{CD}$ 垂直 $\overline{AB}$ 且 D 在 $\overline{AB}$ 上。據此說明 $a^2 + b^2 = c^2$ 是畢氏定理 300 多種解說法中，一個簡易新奇便捷的方法，學生務必學會，使得更欣賞這偉大的定理。

9. 經由特例的需要，求 ΔABC 最長邊 $\overline{AB}$ 上的高，要讓學生確實理解其高 $\overline{CD}$ 之垂足會落在最長邊 $\overline{AB}$ 上，較易計算出其高的長（這裡的高有兩種意義，或者指高這線段或指其長）。由上、下文知其意，學生務必弄清楚這個邊長 5、6、7 的三角形，邊長 7 上的高長求法，其高的垂足一定落在此邊上。至於隨後安排的隨堂練習(1)13、14、15 要熟練如法泡製的方法，至於第(2)小題 7、24、25，如果被識破它是兩股 7、24 的直角三角形，就已經達到目的，作法不像第(1)小題一樣，就是這個道理，畢竟數學還是以盡量簡單的作法為重要的訓練。

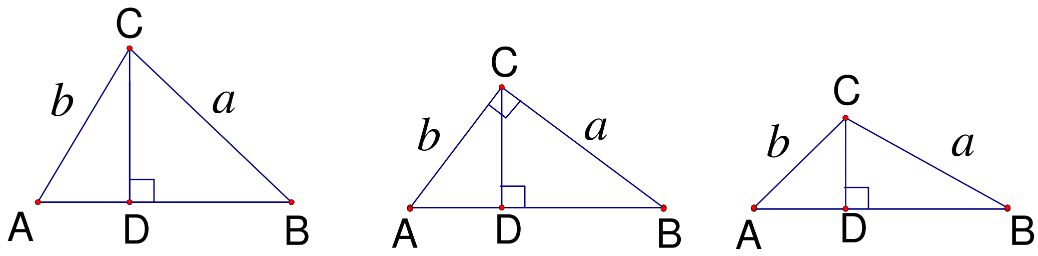
10. 當然教學上如果誤踏地雷，例如不是求最長邊上的高著手，如果原先是銳角三角形，從任何一邊都是同樣的方法，但如果鈍角三角形，從另兩個銳角所對應著手，就出現高的垂足落在一邊的延長線上，方法就要注意，如下圖：



從 B 點所作的高落在 $\overline{AC}$ 的延長上，當然它的面積仍然等於（$\overline{AC}\times\overline{BD}$）÷2，高 $\overline{BD}$ 仍然等於 $\frac{2\Delta ABC}{b}=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 計算方法難度均平行於課文中的方法（不相信可以試試），只是與步驟 7 中的等式略有差異，學生如果提問到這樣的問題，其實不會發生誤踏地雷的問題。顯然由 ΔABC 的面積等於 $\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$ 由 $h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，自然可知 $h_b=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 都可順理得到代數方法推得的海龍公式 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。至於其綜合幾何的原始方法，就有相當的繁度和難度，對一般接受國民教育的學生（甚至九到十二年級者），是頗具挑戰的方法。

11. 有了海龍公式以後，連同直角三角形或已知坐標平面上三頂點坐標的三角形，還是要避開海龍公式的求法為佳。三邊長為整數的情形或許才是選用海龍公式求面積的時機，很多方法都可以解的問題，當然要選用你認為最佳的解法，隨堂練習 6 及指定作業第 3 題，就是訓練用較簡潔便捷的解法為其目的之問題。

12. 由引出海龍公式過程採用在$c=\overline{AB}$平放在底，$c\geq a$，$c\geq b$而$\overline{AC}=b$，$\overline{BC}=a$，$\angle ACB$為最大內角，如圖：



此時，a、b為比c小或相等的邊長，國小幾何操作中，知任意三角形中兩邊長之和大於第三邊長的直觀詮釋，這裡就可以給出另一合理的詮釋，理由如下：$\overline{CD}\perp\overline{AB}$且D在$\overline{AB}$上（即$\overleftrightarrow{ADB}$成一直線）由$a$、$b$分別為直角$\Delta ACD$與$\Delta BCD$的斜邊，故$b>\overline{AD}$，$a>\overline{BD}$，$\Rightarrow a+b>\overline{AD}+\overline{BD}$，即$a+b>c$得知較小的兩邊長之和大於最長邊，因此任意兩邊長之和大於第三邊長。

13. 能審慎設計 Powerpoint 與學習單，應可大幅提高學習效率，教學活動期間，教師宜行間走動，並隨機要求學生口頭問答，加強瞭解學生學習情形。

九、教學參考資料：

1. 李政憲、陳昭地（2013）。畢氏三元數組，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 1-4)。新北市：國家教育研

究院。

2. 丁斌悅、陳彥廷、陳昭地（2013）。比較三種平均數，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 2-4)。新北市：國家教育研究院。

3. Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 98: Comparing Means. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 384-386). Columbus, OH：Merrill.

主題 4－1：平行四邊形

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　　**撰寫者**：蘇進發

二、先備知識：

(一) 能理解三角形的全等性質。

(二) 能理解平行的意義，平行線的截線性質，以及平行線的判別性質。

三、教學目標：

(一) 認識平行四邊形。

(二) 能理解平行四邊形的性質。

(三) 能理解平行四邊形的判別性質。

(四) 能活用平行四邊形的面積變化。

四、教學時間：120 分鐘(二節半)

五、教學說明：

從生活中尋找平行四邊形及思考它在生活的應用，進而引導學生瞭解其重要性並認識平行四邊形的意義。接著，藉由教具操弄，強化平行四邊形的概念，幫助學生學習平行四邊形的性質與平行四邊形的判別性質。

在不影響學生的學習情形下，將兩組對角相等的四邊形，必為平行四邊形的判別性質，置於作業中，供學生練習，教師在做活動總結時，仍需告訴學生全部的判別性質。且此處之解說部分，

學生能說明理由即可。

最後，活用平行四邊形的面積變化，題目較靈活，學生需要較多時間思考與討論，可以考慮用小組協同學習，會有比較好的學習效果。

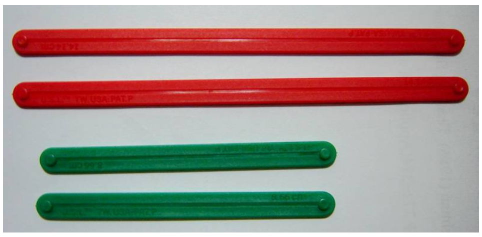
六、教學活動：

活動一：認識平行四邊形

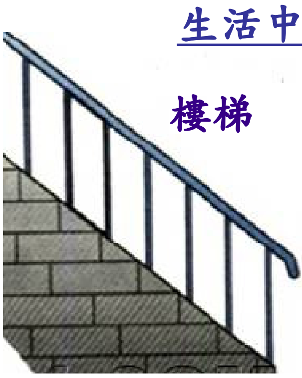
教師介紹生活中的平行四邊形與其應用。接著，引導學生討論與思考，除了教師所介紹的圖形之外，還有哪些平行四邊形的生活例子？最後，教師說明「平行四邊形的意義」做為結論。

步驟 1：教師帶領學生操弄平行四邊形教具，並在操弄過程中，觀察變與不變的是什麼？例如，周長不變，面積會變，…。之後，介紹生活中常見的平行四邊形與其創意應用。

平行四邊形教具



生活中常見的平行四邊形



樓梯

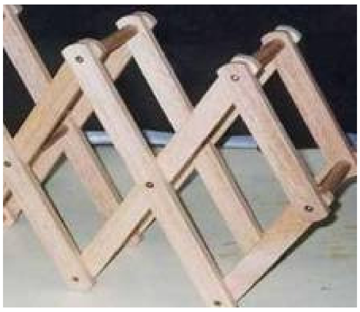
圍籬

門

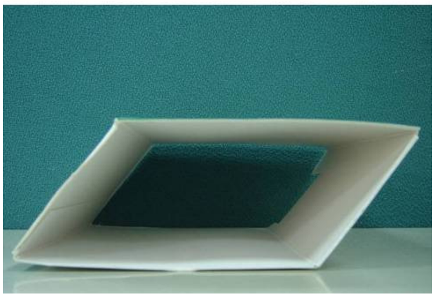
窗

置物盒

置物架



紙盒

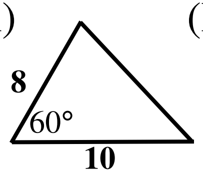


隨堂練習 1：上述的樓梯，圍籬、門、窗、置物盒、置物架、紙盒，都約略可以看到平行四邊形的形狀，在生活中，它們有何方便之處？

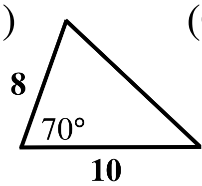
說明：

隨堂練習 2：下列各選項中，哪一個選項的三角形，其面積是最大的？

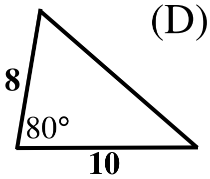
(A)



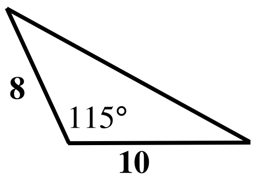
(B)



(C)



(D)



解：

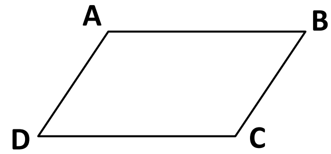
步驟 2：學生分組討論，分享在生活中，還有見過哪些平行四邊形？或者，分享利用平行四邊形的概念，做一些創意設計？

學生：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

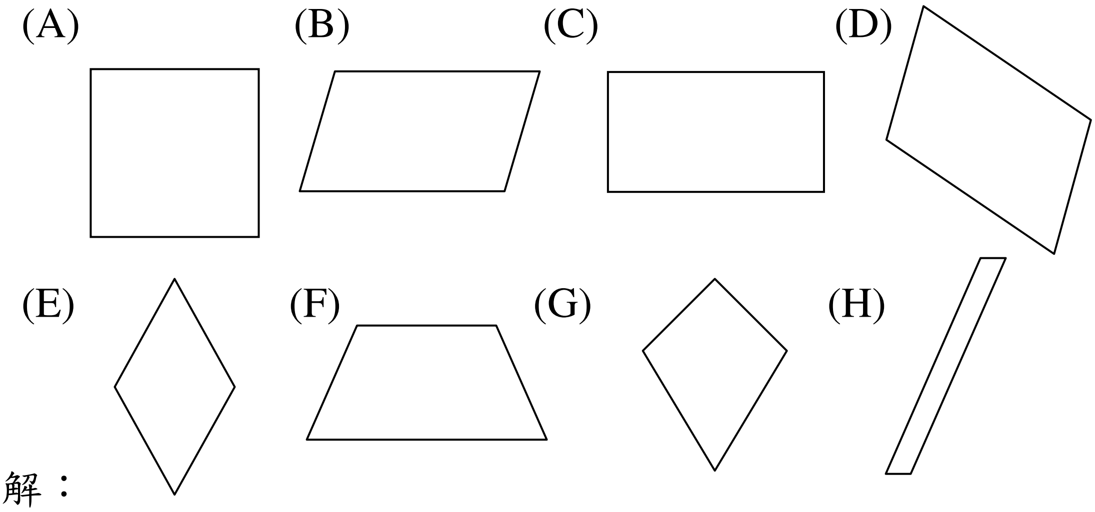
步驟 3：複習平行四邊形的意義。

「兩組對邊分別平行的四邊形，稱為平行四邊形。」

例如：在四邊形 ABCD 中，若 $\overline{AB}//\overline{CD}$、$\overline{AD}//\overline{BC}$，則四邊形 ABCD 稱為平行四邊形。



隨堂練習 3：下列各四邊形中，哪些選項可以稱它們為平行四邊形？(複選)



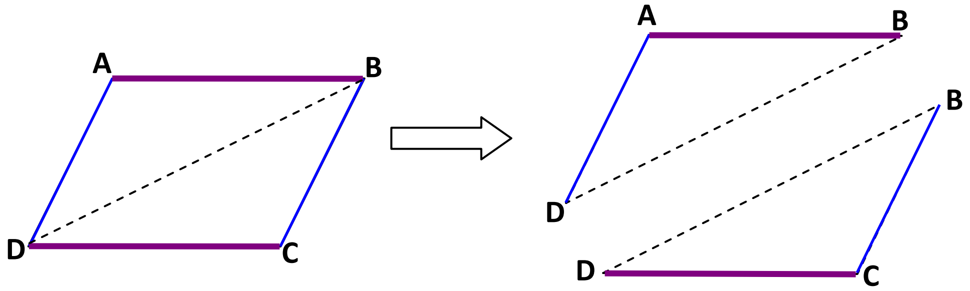
解：

結論： 兩組對邊分別平行的四邊形，稱為平行四邊形。

活動二：平行四邊形的性質

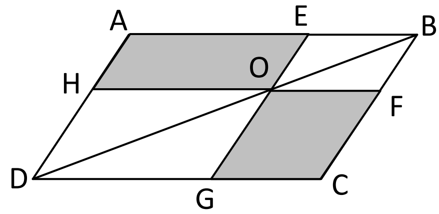
教師透過剪紙的操弄活動，引導學生發現平行四邊形的性質，再藉由學生間的互相分享，強化對平行四邊形性質的認知。最後，由教師帶領學生，進行平行四邊形性質的理由說明。

步驟 4： 請學生拿出一個平行四邊形紙張，沿著其中的一條對角線剪開，得到兩個三角形，透過操弄，互相分享你所看到的情形。接著，再由教師視學生討論結果，是否要補充說明，兩個圖形重合，則三角形全等。可知其面積相等，並知道對應邊與對應角的位置關係。



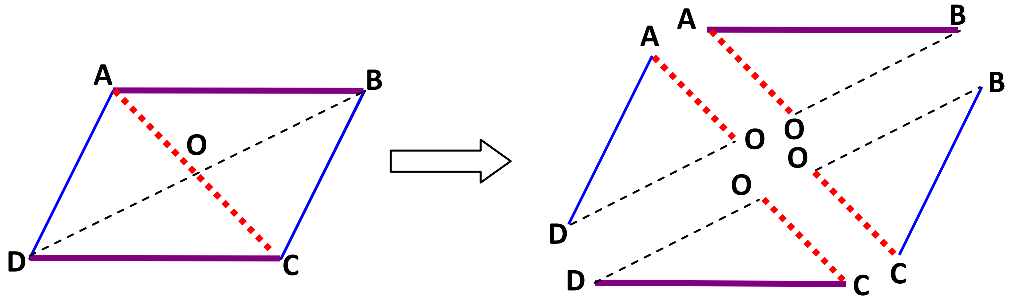
學生：________________________________。

隨堂練習 4： 已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，若 $\overline{FH} // \overline{AB}$ 、$\overline{EG} // \overline{AD}$ ，且 $\overline{FH}$ 與 $\overline{EG}$ 交於對角線 $\overline{BD}$ 上的 O 點，請說明平行四邊形 AEOH 與平行四邊形 OFCG 的面積相同。



說明：

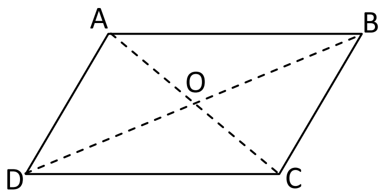
步驟 5： 請學生將兩個三角形，合併成原來的平行四邊形，再沿另外一條對角線剪開，得到四個三角形，透過操弄，互相分享你所看到的情形。接著，再由教師做補充，圖形分成兩組，每組有兩個重合圖形，它們分別都是全等三角形。同學是否清楚其對應邊的位置關係？且四個三角形的面積是否相等？



學生：________________________________。

步驟 6： 教師引導學生，理解平行四邊形的性質，如下例題 1。結束後並做重點整理：「在平行四邊形中，其兩組對邊分別相等、兩組對角分別相等、兩條對角線互相平分。」

例題 1： 已知平行四邊形 ABCD 的兩條對角線交於 O 點，試說明下列性質：



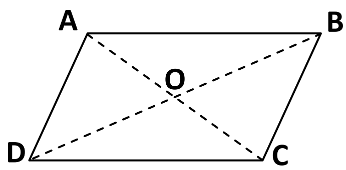
(1) $\overline{AB}=\overline{CD}$、$\overline{BC}=\overline{AD}$

(2) ∠DAB=∠BCD、∠ABC=∠ADC

(3) $\overline{AO}=\overline{CO}$、$\overline{BO}=\overline{DO}$

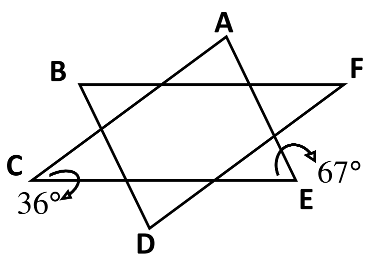
說明：

隨堂練習 5： 已知平行四邊形 ABCD 的兩對角線相交於 O 點，若△AOD 的面積為 5，則△AOB 的面積為多少？平行四邊形 ABCD 的面積為多少？



解：

隨堂練習 6： 如圖，$\overline{AC}//\overline{DF}$、$\overline{BD}//\overline{AE}$、$\overline{CE}//\overline{BF}$，若∠C=36°、∠E=67°，則∠D 為多少度？



解：

結論：

在平行四邊形中，下列性質都是成立的。

(1)兩組對邊分別相等

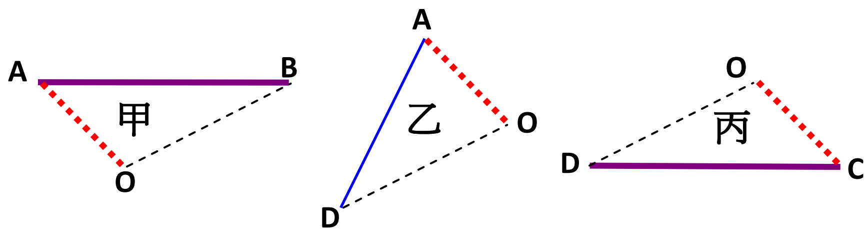
(2)兩組對角分別相等

(3)兩條對角線互相平分。

活動三：平行四邊形的判別性質

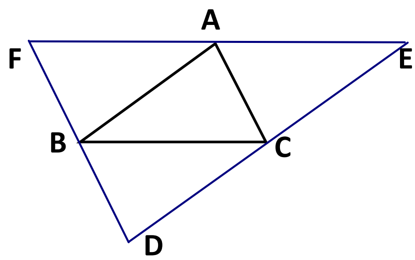
教師引導學生，利用三角形的拼圖，拼出平行四邊形的圖形，並透過操弄過程，發現平行四邊形的判別性質，進而瞭解原因並能說明其理由。

步驟 7：請學生從 3 個三角形中，任意選出 2 個嘗試操作，哪些可以拼出平行四邊形，並簡單猜測，說明其原因。之後，透過例題與隨堂練習的學習，建立「平行四邊形的判別性質」之觀念。



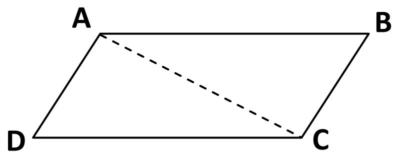
學生：________________________________。

隨堂練習 7：在△ABC 中，分別過三頂點 A、B、C，做對邊的平行線，此三直線分別交於 D、E、F 三點，若△ABC 的面積為 10，則△DEF 的面積為多少？



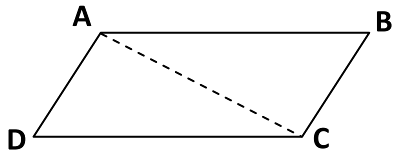
解：

例題 2：在四邊形 ABCD 中，已知 $\overline{AB}=\overline{CD}$、$\overline{BC}=\overline{AD}$，說出四邊形 ABCD 為平行四邊形的理由。



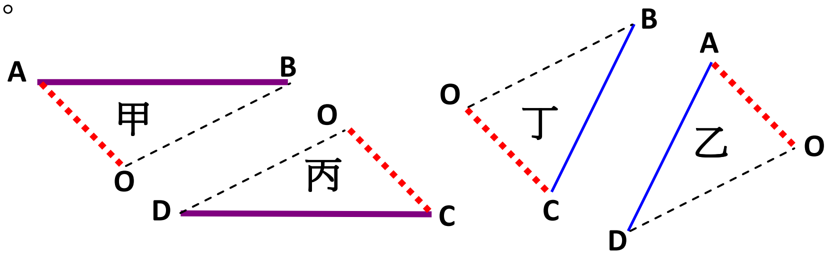
說明：

隨堂練習 8：在四邊形 ABCD 中，已知 $\overline{AB}//\overline{CD}$、$\overline{AB}=\overline{CD}$，說出四邊形 ABCD 為平行四邊形的理由。



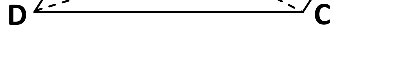
說明：

步驟 8：請學生嘗試操作 4 個三角形，利用此 4 個三角形，拼出一個平行四邊形，並簡單猜測，說明其原因。接著，透過例題與隨堂練習的學習，建立「平行四邊形的判別性質」之觀念。



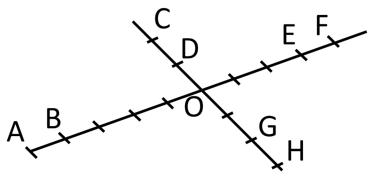
學生：________________________________。

隨堂練習 9：在四邊形 ABCD 中，已知 $\overline{AO}=\overline{CO}$、$\overline{BO}=\overline{DO}$，說出四邊形 ABCD 為平行四邊形的理由。



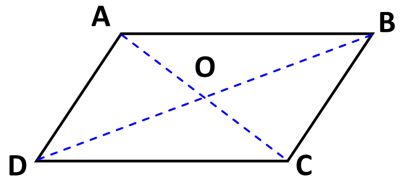
說明：

隨堂練習 10： 已知兩直線相交於 O 點，且線上相鄰兩刻度的距離都相等，請從線上 A、B、C、D、E、F、G、H 等 8 個點中，尋找 4 個點，依序連成平行四邊形。



解：

步驟 9： 教師整理重點，再次提醒學生，具有下列其中一個性質的四邊形 ABCD，都是平行四邊形。



(1) $\overline{AB}=\overline{CD}$ 、 $\overline{BC}=\overline{AD}$

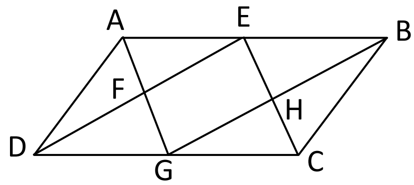
(2) $\overline{AO}=\overline{CO}$ 、 $\overline{BO}=\overline{DO}$

(3) $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$ 、 $\overline{AB}=\overline{CD}$

(4) ∠DAB=∠BCD、∠ABC=∠ADC

(第(4)項，告訴學生置於作業練習中)

例題 3： 四邊形 ABCD 為平行四邊形，已知 E、G 分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的中點，試說出四邊形 EFGH 為平行四邊形的理由。



說明：

結論：

四邊形具有下列其中一個條件，必為平行四邊形。

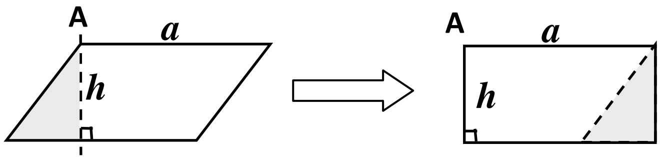
(1) 兩組對邊分別相等　　(2) 兩組對角分別相等

(3) 兩條對角線互相平分　　(4) 一組對邊平行且相等。

活動四：活用平行四邊形的面積變化

利用剪刀操作，引導學生將平行四邊形分割，再拼出矩形，回憶小學平行四邊形的面積公式。接著，利用此公式或與同底等高的等面積概念做變化，解決面積相關問題。

步驟 10：利用剪紙操作，複習平行四邊形的面積求法。



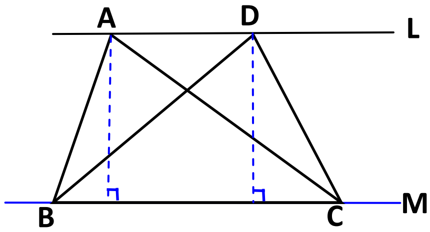
平行四邊形的面積= $a \times h$ (<u>底邊</u>乘以<u>高</u>)

步驟 11：複習同底等高的等面積概念。

已知 L//M (如圖)

因為△ABC 與△DBC

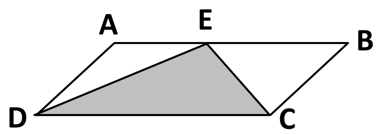
同底等高



所以△ABC 與△DBC 的面積相等。

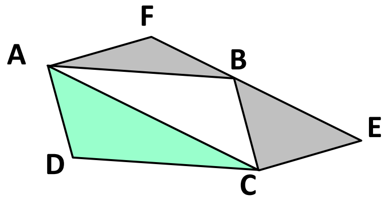
步驟 12：利用平行四邊形的面積公式或與同底等高的等面積概念做變化，解決相關觀念的面積問題。並以下列例題來進行說明，同時，也透過隨堂練習，來幫助學生瞭解。

例題 4：如圖，若平行四邊形 ABCD 的面積為 100，則△ECD 的面積為多少？



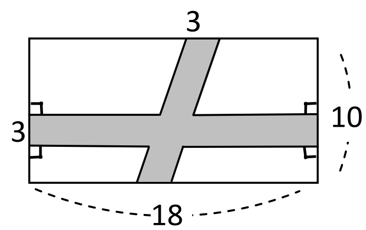
解：

隨堂練習 11： 已知四邊形 ABCD 與四邊形 ACEF，都是平行四邊形，且 $\overline{BF}$ ：$\overline{BE}$=2：3，若△ADC 的面積為 60，則△CBE 的面積為多少？



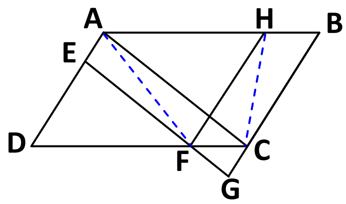
解：

例題 5： 如圖，在長方形的果園中，有一條矩形的道路及另一條平行四邊形的道路，則剩下的種植面積為多少？



解：

例題 6： 如圖，已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，$\overline{EG} // \overline{AC}$ 、$\overline{FH} // \overline{BG}$ ，若平行四邊形 ABCD 的面積為 80，$\overline{DF}=3\overline{CF}$ ，則四邊形 AEGC 的面積為多少？



解：

教學活動參考解答：

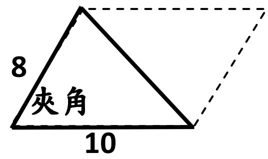
活動一：

隨堂練習 1：樓梯：台階上處處等高，行走時方便扶持。

圍籬：方便植物攀爬生長。

門、窗、置物盒、置物架、紙盒：方便收置。

隨堂練習 2：三角形兩邊皆為 8、10，只有夾角不同，今將三角形延展為平行四邊形。且知三角形面積為平行四邊形面積的一半。所以夾角越接近 90° 時，平行四邊形面積越大，即此時的三角形面積將為越大。故選(C)。



步驟 2：略。

隨堂練習 3：兩組對邊分別平行的四邊形，我們稱為平行四邊形。

故選(A)、(B)、(C)、(D)、(E)、(H)。

活動二：

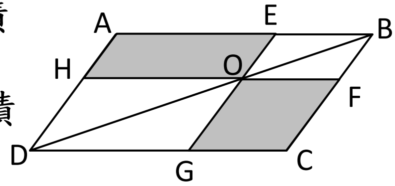
步驟 4：略。

隨堂練習 4：∵四邊形 ADCB、HDGO、EOFB 為平行四邊形

∴△ADB 的面積=△CDB 的面積

△HDO 的面積=△GDO 的面積

△EOB 的面積=△FOB 的面積



故平行四邊形 AEOH 的面積

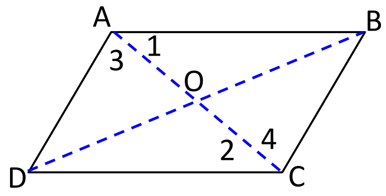
=△ADB 的面積−△HDO 的面積−△EOB 的面積

=△CDB 的面積−△GDO 的面積−△FOB 的面積

=平行四邊形 OFCG 的面積。

步驟 5：略。

例題 1：(1) 在△CBA 與△ADC 中



∵ $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$ ∴∠1=∠2

∵ $\overline{BC}\,//\,\overline{AD}$ ∴∠4=∠3

又∵ $\overline{AC}=\overline{AC}$ ∴△CBA≅△ADC (ASA 全等)

故 $\overline{AB}=\overline{CD}$、$\overline{BC}=\overline{AD}$……第(1)解說。

且∠ABC=∠ADC

(2) 同理 △ADB≅△CBD

故∠DAB=∠BCD……第(2)解說。

(3) 在△AOB 與△COD 中

∵∠1=∠2、$\overline{AB}=\overline{CD}$、∠AOB=∠COD

∴△AOB≅△COD (AAS 全等)

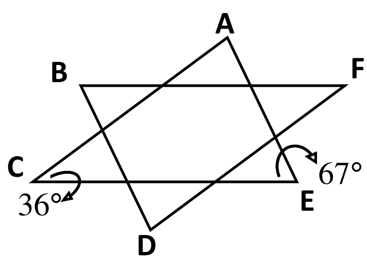
故 $\overline{AO}=\overline{CO}$、$\overline{BO}=\overline{DO}$……第(3)解說。

隨堂練習 5：(1) △AOB 的面積=△AOD 的面積(等底同高)=5

(2) 平行四邊形 ABCD 的面積= 4 個△AOD 的面積

=4×5=20。

隨堂練習 6：∵三角形內角和為180°



∴∠A=180°－36°－67°＝77°

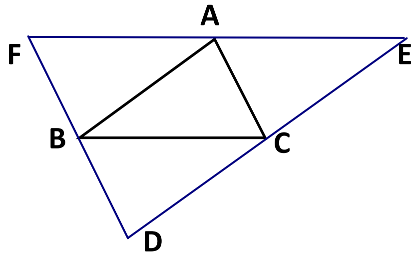
∵平行四邊形對角相等

∴∠D=∠A=77° 。

活動三：

步驟 7：略。

隨堂練習 7：∵ △BAF、△DCB、△CEA 皆與△ABC 全等



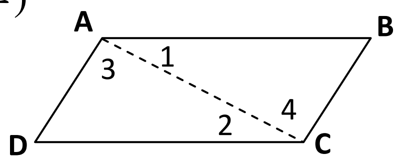
∴ △DEF 的面積

＝4 個△ABC 的面積 $=4\times10=40$ 。

例題 2：在△CBA 與△ADC 中

∵ $\overline{AB}=\overline{CD}$ 、 $\overline{BC}=\overline{AD}$ (已知) ， 且 $\overline{AC}=\overline{AC}$ (共同邊)

∴△CBA ≅△ADC (SSS 全等)



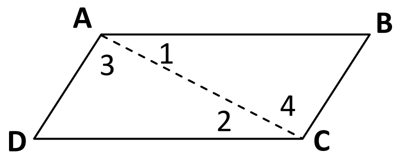
故∠1=∠2、∠4=∠3

⇨ $\overline{AB}//\overline{CD}$ 、 $\overline{BC}//\overline{AD}$

即四邊形 ABCD 為平行四邊形。

隨堂練習 8：在△CBA 與△ADC 中

∵ $\overline{AB}//\overline{CD}$ ∴∠1=∠2 ，



又∵ $\overline{AB}=\overline{CD}$ 且 $\overline{AC}=\overline{AC}$

∴△CBA≅△ADC (SAS 全等)

⇨∠4=∠3 故 $\overline{BC}//\overline{AD}$

即四邊形 ABCD 為平行四邊形。

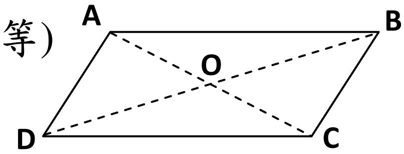
步驟 8：略。

隨堂練習 9：(1) 在△AOB 與△COD 中

$\because \overline{AO}=\overline{CO}$ 、 $\overline{BO}=\overline{DO}$ 且∠AOB=∠COD

∴△AOB≅△COD (SAS 全等)

故 $\overline{AB}=\overline{CD}$



(2) 同理 △AOD≅△COB (SAS 全等)

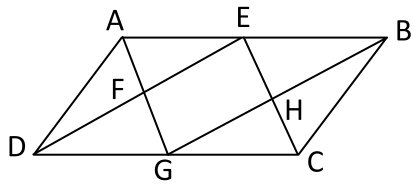
⇨ $\overline{AD}=\overline{BC}$

故四邊形 ABCD 為平行四邊形。

隨堂練習 10：利用四邊形對角線互相平分的性質，即可得平行四邊形。故依序選 B、C、F、G 四點。

例題 3：(1) $\because \overline{AB}//\overline{CD}$ ⇨ $\overline{BE}//\overline{DG}$ ，

且 $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\overline{DG}$



∴四邊形 EBGD 為平行四邊形

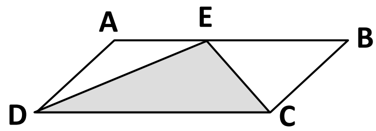
⇨ $\overline{BG}//\overline{DE}$

(2) 同理 $\overline{AG}//\overline{CE}$ ， 故四邊形 EFGH 為平行四邊形。

活動四：

例題 4：△ECD 的面積

$=\frac{1}{2}$ 平行四邊形 ABCD 的面積

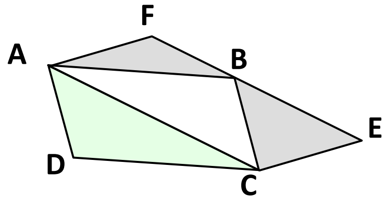


$=\frac{1}{2}\times 100=50$。

隨堂練習 11：∵△AFB 的面積+△CEB 的面積

=△ABC 的面積

=△ADC 的面積$=60$

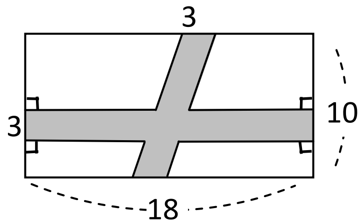


又∵$\overline{BF}$ ：$\overline{BE}=2:3$，

∴△AFB 的面積：△CBE 的面積$=2:3$(等高)

故△CBE 的面積=$\frac{3}{5}\times 60=36$ 。

例題 5：(方法一)



如圖，剩下的種植面積為

18×10-10×3-18×3+3×3=105

(矩形面積-2 條道路面積+重複扣除的重疊面積)

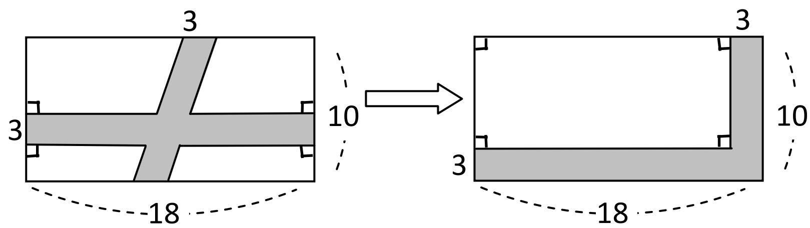
(方法二)

如圖，經過圖形變化，剩下的種植面積為

(18-3)×(10-3)

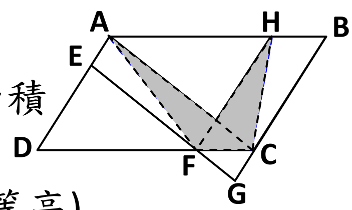
=15×7

=105。



例題 6：∵△AFC 的面積=$\frac{1}{2}$平行四邊形 AEGC 的面積

△FCH 的面積=$\frac{1}{2}$平行四邊形 FCBH 的面積



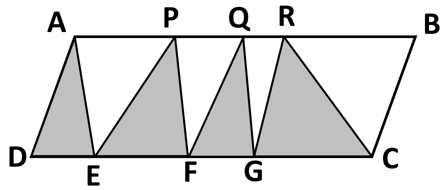
又∵△AFC 的面積=△HFC 的面積(同底等高)

$\therefore$平行四邊形 AEGC 的面積=平行四邊形 FCBH 的面積

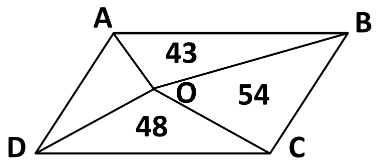
$=\dfrac{1}{4}$平行四邊形 ABCD 的面積$=\dfrac{1}{4}\times 80=20$。

七、指定作業：

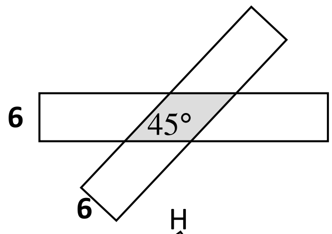
1.在平行四邊形 ABCD 中，若△ADE 的面積為 18，且$\overline{DE}$：$\overline{EF}$：$\overline{FG}$：$\overline{GC}=$ 2：3：2：4，則平行四邊形 ABCD 的面積為多少？



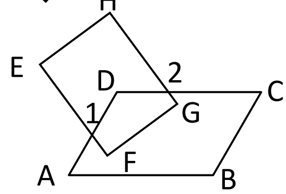
2.已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，O 為內部一點，若△AOB、△BOC、△COD 的面積分別為 43、54、48，則△AOD 的面積為多少？



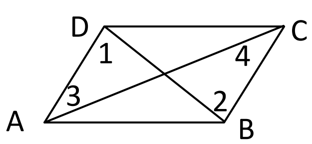
3.如圖，兩條寬為 6 公分的矩形，交錯放置，則重疊部分的面積為多少平方公分？



4.如圖，在平行四邊形 ABCD 與矩形 EFGH 中，若∠1=74°、∠2=142°，則∠B 為多少度？



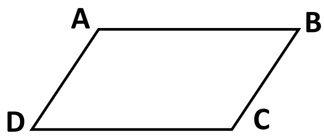
5.如圖，下列四個選項中，哪一個可以用來判定四邊形 ABCD 為平行四邊形？



(A) $\overline{AB}//\overline{CD}$ 且 $\overline{AD}=\overline{BC}$　　(B) $\overline{AD}=\overline{CD}$ 且 $\overline{AB}=\overline{BC}$

(C) ∠1=∠2 且∠3=∠4　　(D) ∠1=∠2 且 $\overline{AD}=\overline{BC}$

6.在四邊形 ABCD 中，∠A=∠C、∠B=∠D，說明四邊形 ABCD 為平行四邊形的理由。



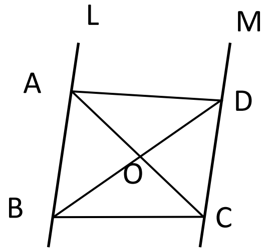
7.如圖，已知兩直線 L 與 M 平行，則下列哪一個敘述是錯誤的？

(A)△ABC 與△ABD 的面積相等

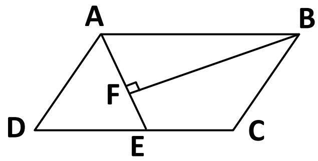
(B)△ABC 與△BCD 的面積相等

(C)△BCD 與△ACD 的面積相等

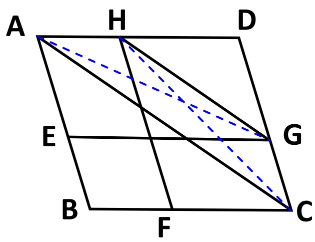
(D)△AOD 與△BOC 的面積相等



8.在平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AE}\perp\overline{BF}$，若 $\overline{AE}=8$、$\overline{BF}=12$，則平行四邊形 ABCD 的面積為多少？



9.在平行四邊形 ABCD 中，已知 $\overline{HG}//\overline{AC}$、$\overline{EG}//\overline{BC}$、$\overline{FH}//\overline{AB}$，說明平行四邊形 ABFH 與平行四邊形 BCGE 的面積相等。



指定作業參考解答：

1.∵ $\overline{DE}:\overline{EF}:\overline{FG}:\overline{GC}=2:3:2:4$，且△ADE 的面積為 18

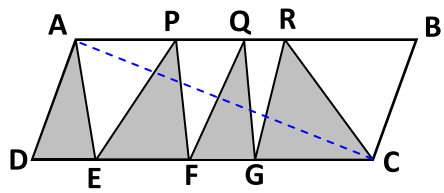
∴△PEF、△QFG、△RGC 的面積，分別為 27、18、36。

故平行四邊形 ABCD 的面積

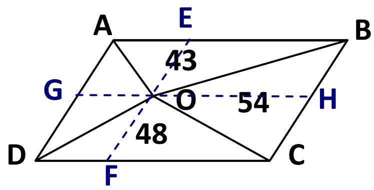
=2×△ADC 的面積

=2×(18+27+18+36)

=198 。



2.過 O 點分別作平行$\overline{AD}$與$\overline{AB}$的兩直線$\overline{EF}$與$\overline{GH}$，利用平行四邊形對角線將其面積平分的觀念，可得：



△AOD 的面積+△COB 的面積

=△AGO 的面積+△DGO 的面積+△COH 的面積+△BOH 的面積

=△AEO 的面積+△DFO 的面積+△COF 的面積+△BOE 的面積

=△AOB 的面積+△COD 的面積

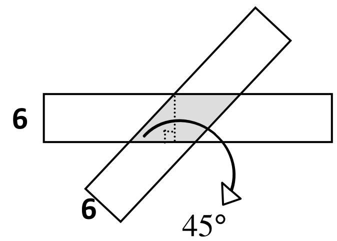
即△AOD 的面積+54 = 43+48

⇨△AOD 的面積=43+48−54=37。

3.∵等寬的矩形

∴重疊的平行四邊形為菱形

故重疊部分的面積為$6\sqrt{2}\times 6=36\sqrt{2}$。

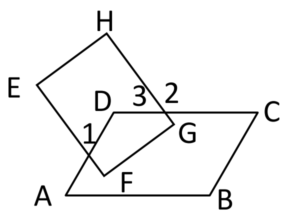


4. ∵∠D=∠1+∠3

$=74°+(180°-142°)=112°$

又∠B 與∠D 為平行四邊形的對角

∴∠B=∠D=112°。



5.∵∠1=∠2 ⇨$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，又$\overline{AD}=\overline{BC}$

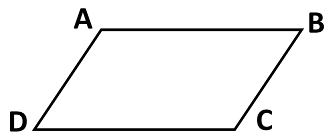
∴由四邊形中，有一組對邊平行且相等，可知為平行四邊形

故選(D)。

6. 在四邊形 ABCD 中，

∵ ∠A+∠B＋∠C＋∠D=360° 又∠A=∠C、∠B=∠D

∴ ∠A+∠D＋∠A＋∠D=360°



⇨2∠A +2∠D=360°

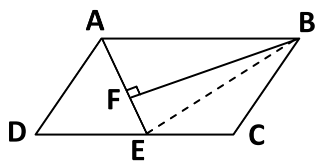
⇨∠A＋∠D=180° ⇨ $\overline{AB}//\overline{CD}$

同理：∠C+∠D=180° ⇨ $\overline{AD}//\overline{BC}$

故四邊形 ABCD 為平行四邊形。

7.利用三角形同底等高的等面積觀念做判斷，可知，選項(B)是錯誤的答案。

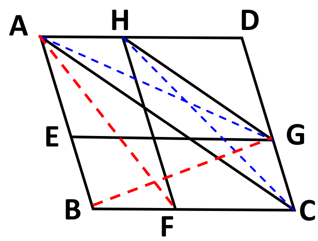
8.連 $\overline{BE}$



平行四邊形 ABCD 的面積

=2×△ABE 的面積 $=2\times\dfrac{8\times12}{2}=96$ 。

9. (1)連 $\overline{AF}$



∵四邊形 ABFH 為平行四邊形

∴△AHF 的面積=$\dfrac{1}{2}$平行四邊形 ABFH 的面積

又∵ $\overline{AD}//\overline{BC}$

∴△AHF 的面積=△AHC 的面積

即△AHC 的面積=$\dfrac{1}{2}$平行四邊形 ABFH 的面積

(2)同理，連$\overline{BG}$

△AGC 的面積=$\frac{1}{2}$平行四邊形 BCGE 的面積

(3)又∵$\overline{HG} // \overline{AC}$

∴△AHC 的面積=△AGC 的面積

故平行四邊形 ABFH 與平行四邊形 BCGE 的面積相等。

八、教學活動注意事項：

1.教學活動時間建議如下，活動一：約 25 分鐘，活動二：約 25 分鐘，活動三：約 40 分鐘，活動四：約 30 分鐘。

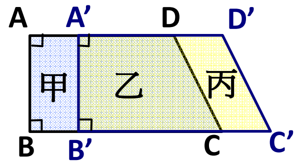
2.活動一的隨堂練習 3，幾何圖形有包含關係。正方形、矩形、菱形，也都是平行四邊形，但我們仍然要告訴學生，當平常看到這些幾何圖形時，仍然要稱為正方形、矩形、菱形。

3.活動二的隨堂練習 4，教師可視學生的作答情形，是否要給提示(相等面積塗上顏色或做記號)，或者學生用討論模式進行。

4.活動三的隨堂練習 8 與隨堂練習 9，教師可視學生作答反應，給於說明理由之提示，或將說明的答案，設計成填充形式，引導學生填入即可。

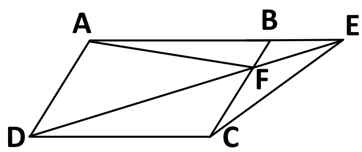
5.活動四的教學過程中，不論是平行四邊形或三角形的圖形，教師有時可以考慮斜放底邊，免得有些學生以為底邊一定要與水平線平行的錯誤觀念。

6.活動四的例題 5，教師可引導學生多角度思考，且在進行方法二的教學前，可以考慮先操作所預備的教具，將兩張重疊的全等梯形，其中一張往右平移，學生可以直接察覺到，甲面積=丙面積(甲+乙=乙+丙)，學習直觀感受，再輔以平行四邊形的面積公式，解釋甲面積=丙面積，會有較佳的學習效果。



7.活動四的例題 6，有關面積變化問題，教師可以放慢教學速度，依序引導學生掌握觀念，進行思考，方便對問題的解決。若時間允許，教師可以增加例子，供學生分組討論，幫助學生對此概念，能更加的熟悉與瞭解。補充參考例題如下：

例如：已知四邊形 ABCD 為平行四邊形，F 點在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overleftrightarrow{DF}$ 與 $\overleftrightarrow{AB}$ 交於 E 點，試說明△ABF 的面積與△CEF 的面積相等。

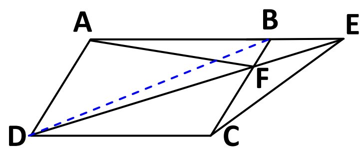


說明：

(1) 連 $\overline{BD}$，則△CBE 的面積=△DBE 的面積(同底等高)，

再同減△BEF 的面積，

則△CEF 的面積=△DBF 的面積



(2) 又△DBF 的面積=△ABF 的面積(同底等高)，

故△ABF 的面積=△CEF 的面積。

8.在各活動間，教師宜巡堂走動，加強瞭解學生學習情形。

9.在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1.教育部編著(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域(pp.175-177)。臺北市：教育部。

2.剛部恆治著(2005)。王秋陽等譯。訓練思考能力的數學書(pp.70-81)。上海市：上海世界圖書出版公司。

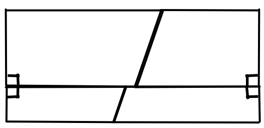
3.項武義著(2009)。基礎幾何學(pp.58-63)。臺北市：五南圖書出版公司。

4.何繼斌主編(2013)。尖子生培優教材(pp.125-131)。上海市：華東師範大學出版社。

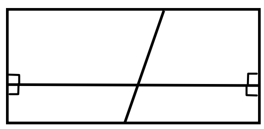
5.周春荔、王中峰主編(2005)。奧林匹克競賽解題方法(pp.215-227)。太原市：山西教育出版社。

6.活動四例題 5 的教學補充：

(1)若學生利用剪刀直接操弄，去掉道路後合併為矩形，其圖形應為圖(A)，而非圖(B)。



圖(A)



圖(B)

(2)對於本類型的題目，其道路設計應有一條為水平線或鉛直線，

否則無法計算答案。例如，將圖(C)經設想移動後為圖(D)，以圖(D)計算後的結果，來替代圖(C)的答案，是錯誤的。因為圖(C)中的小平行四邊形面積(道路重疊部分)，會隨著道路角度的變化而變動。

例如，在圖(C)中，設定不同度數，經過化簡，可得不同答案。

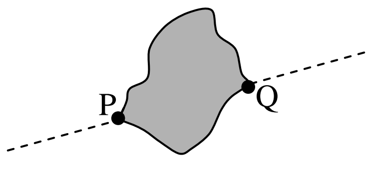
① 若 $\alpha=60°$、$\beta=45°$時，則小平行四邊形面積$=\dfrac{27-9\sqrt{3}}{4}$

② 若 $\alpha=60°$、$\beta=60°$時，則小平行四邊形面積$=\dfrac{27}{4}$

與圖(D)中的重疊部分面積為 9 是不相等的。

7.活用平行四邊形的性質，與生活做結合，是非常重要的，我們將提供兩個例子，方便老師參考與使用。

(1)已知一座山，今欲節省時間，從山的兩邊同時開挖一條直線形的隧道，通過 P、Q 兩點，試問如何從 P、Q 兩邊，確定方向來進行開挖，且 P、Q 兩點會在一直線上？



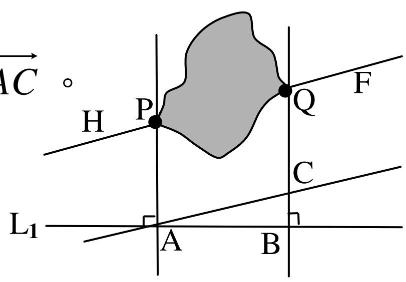
說明：

①過 P 點作一直線與另一直線 L_1 垂直於 A 點。

②過 Q 點作一直線與直線 L_1 垂直於 B 點。

③在 $\overline{BQ}$ 上取一點 C，使 $\overline{CQ}=\overline{PA}$ 。並連 $\overleftrightarrow{AC}$ 。

④作∠HPA=∠PAC。

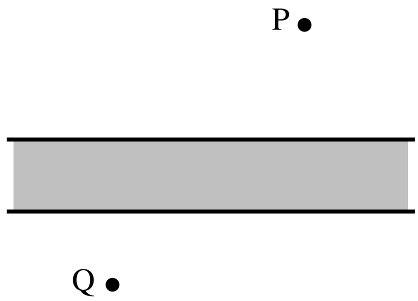


⑤作$\angle FQC=\angle QCA$。

⑥則$\overline{HP}$、$\overline{FQ}$兩線段，同在$\overleftrightarrow{PQ}$上，故從 H 往 P 與從 F 往 Q 開挖的方向為所求。

(2)今欲建造一條垂直河邊的大橋，以連絡 P、Q 兩地方，且從 P 到 Q 的道路要最短，試問應建於何處？

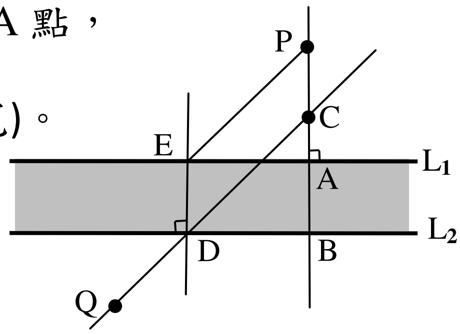
(假設河的兩岸為平行線)



說明：

①過 P 點作直線與河邊直線 L_1 垂直於 A 點，並交河的另一邊 L_2 於 B 點($\overline{AB}$為河寬)。

②在$\overline{PA}$上取一點 C，使$\overline{PC}=\overline{AB}$，並連$\overline{CQ}$，交河邊直線 L_2 於 D 點。



③過 D 點作直線與直線 L_2 垂直，交直線 L_1 於 E 點，並連$\overline{EP}$。

④$\overline{DE}$為所求，且最短路徑為：從 Q 點經 D 點與 E 點到達 P 點。

主題4－2：費氏數列與黃金矩形

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者：**蘇進發

二、先備知識：

(一) 能知道平面圖形放大、縮小對長度的影響。

(二) 能知道斜率的意義。

(三) 能理解比、比例式的意義，並能解決生活中有關比與比例的問題。

(四) 能理解畢氏定理。

(五) 能理解三角形全等的性質。

(六) 能利用配方法解一元二次方程式。

三、教學目標：

(一) 認識費氏數列。

(二) 能理解黃金比例的意義。

(三) 認識黃金矩形。

(四) 能理解黃金矩形與費氏數列的關係。

四、教學時間：90分鐘(二節課)

五、教學說明：

透過消失的面積，引起學生的好奇心，願意主動探索與思考，且在活動的討論過程中，期待他們發現，隱藏於圖形間的關係數列-費氏數列。之後，我們將教導學生認識費氏數列，也認識費氏

數列與生活的關係，令學生驚訝的事，費氏數列竟然與讓人賞心悅目的黃金比例，有密切的關係。

接著，引導學生理解黃金比例的意義，再藉由作圖，作出黃金矩形，進而認識黃金矩形。在此學習過程中，我們除了看到美麗的螺線之外，透過代數運算的重複進行，意外發現，費氏數列又再次出現了。

最後，我們將透過紙卡操弄，利用費氏數列做創意連結，在正方形與矩形間做變化。

六、教學活動：

活動一：消失的面積

藉由消失的面積，引起學生的學習動機，並複習數學原型教材 B 冊的斜率概念，再透過可找出正方形與矩形，其面積相差 1 平方單位的圖形間之數據關係，發現它們間隱藏著一個秘密，只要同學找到此秘密的規律，便可快速畫出更多所要的相關圖形。

步驟 1：透過圖 1 與圖 2 兩圖形的比較，引導學生觀察，兩圖形間相差 1 平方單位，其原因為何？

圖 1

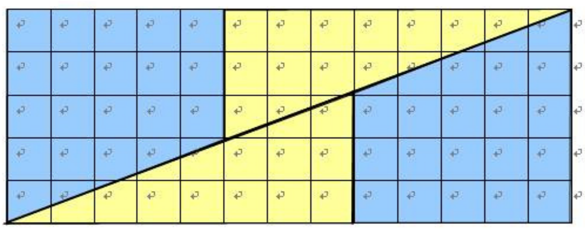
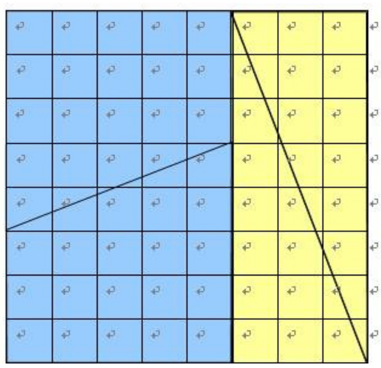


圖 2



學生說明：________________________。

隨堂練習 1：試模仿步驟 1，畫出一個矩形與一個正方形，其面積相差 1 個平方單位，且數據不同步驟 1。

解：

步驟 2：教師將步驟 1 與隨堂練習 1 的數據整理出來，並請學生觀察與比較，是否有何規律？

$\mathbf{8^2+1=5\times13}$ …(可以畫出)；$7^2\pm1=$？ …(不可以畫出)

$6^2\pm1=$？ …(不可以畫出)；$\mathbf{5^2-1=3\times8}$ …(可以畫出)

$4^2\pm1=$？ …(不可以畫出)；$\mathbf{3^2+1=2\times5}$ …(可以畫出)

(其中 $\mathbf{3^2+1=2\times5}$ 可以畫出，但有些勉強，仍可以接受。)

學生說明：____________________________。

隨堂練習 2：試依據步驟 2 的規律，再找出不同的 2 組數據，可以符合步驟 1 的條件，使正方形與矩形的面積，相差 1 個平方單位的相關圖形。

解：

活動二：費氏數列

教師介紹費氏數列的由來，並舉例說明，不少的費氏數列，存在於生活的事物中，也請學生思考，還有哪些事物隱藏著費氏數列。最後，藉由計算偶數項除以其前項所形成的數列，與奇數項除以其前項所形成的數列，這兩個數列，都會靠近一個數(黃金比例)，為下一個活動做預備。

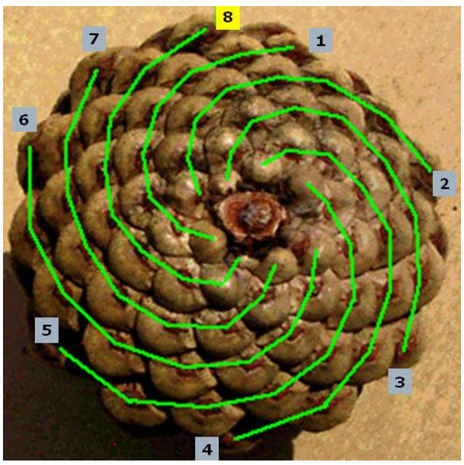
步驟 3：介紹費氏數列的由來。

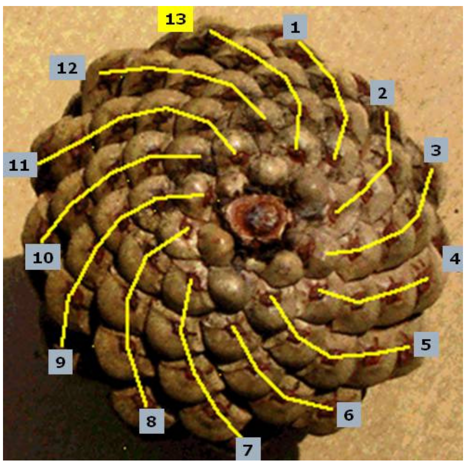
義大利十三世紀數學家費波納奇(Fibonacci)，觀察兔子的繁殖現象，在西元 1202 年提出今日所謂的費氏數列。假設任何一對新生兔子，經過兩個月後，開始生育一對兔子，其後每隔一個月生育一對兔子。今在年初有一對新兔子，繁殖到年末，共有幾對兔子？

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
第一代	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
第二代			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
第三代					1	3	6	10	15	21	28	36
第四代							1	4	10	20	35	56
第五代									1	5	15	35
第六代											1	6
隊數	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

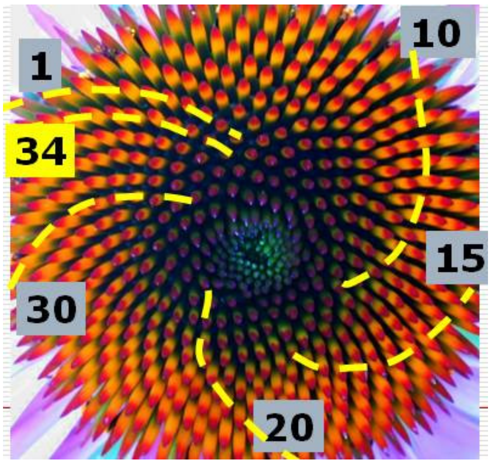
步驟 4：介紹生活中與費氏數列有關的事物。

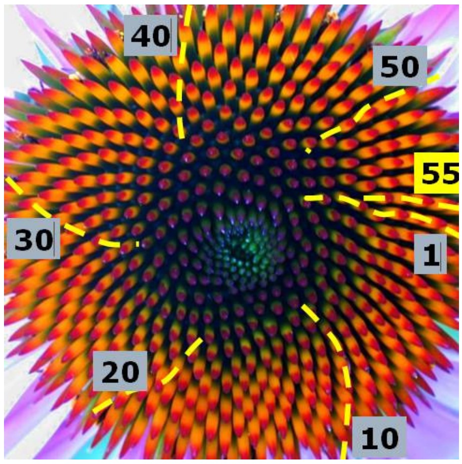
(1)松果中的費氏數列，左旋與右旋不同。





(2)向日葵中的費氏數列，左旋與右旋不同。





隨堂練習 3： 請學生思考在生活中，還有哪些事物，也有費氏數列隱藏於其中。

解：

隨堂練習 4： 已知費氏數列：1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144⋯，其中 $a_1=1$、$a_2=1$、$a_3=2$、$a_4=3$、⋯，試回答下列問題：（四捨五入至小數第 3 位）

(1)求數列(A)：$\frac{a_2}{a_1},\frac{a_4}{a_3},\frac{a_6}{a_5},\frac{a_8}{a_7},\frac{a_{10}}{a_9},\frac{a_{12}}{a_{11}}=$________________。

(2)求數列(B)：$\frac{a_3}{a_2},\frac{a_5}{a_4},\frac{a_7}{a_6},\frac{a_9}{a_8},\frac{a_{11}}{a_{10}}=$____________________。

(3)觀察數列(A)與數列(B)，則

①數列(A)越來越 ______。(填入大或小)

②數列(B)越來越 ______。(填入大或小)

③兩數列會漸漸庫靠近一個數，此數為 ______。

解：

活動三：黃金比例

學生透過紙筆計算，發現古文明的建築物，已有黃金比例的影子，我們也希望透過網路搜尋，期待學生在作業中，找到其它不同例子。畢竟，黃金比例在人的視覺感受中，是最美好的。又如人的身材比或臉形比，讓人感受到，其外形之美的時候，聽說也有黃金比例藏於其中。最後，我們將說明黃金比例的意義，來結束活動三。

步驟 5：引導學生從文獻中，認識埃及古夫金字塔(KHUFU PYRAMID)，底邊長約為 230.37 公尺、高約為 146.59 公尺的正方形錐體。之後，請同學拿出計算機，利用畢氏定理，計算金字塔斜面的高除以底邊長之半，你將有驚奇的發現。

學生：________________________________。

步驟 6：教師告知學生，在幾何原本中，黃金比例是非常重要的部分，尤其是應用於正五邊形的作圖上。所謂黃金比例是指，將一線段分成長短兩線段，長線段除以短線段等於全長除以長線段，此等值即為黃金比例。今我們以簡單的幾何，如下例題 1 所示，來說明黃金比例的意義。

例題 1：如圖，已知 $\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AB}:\overline{AC}$，

若 $\overline{BC}=1$，則 $\overline{AC}$ 為何？

解：

隨堂練習 5：據說：「人的身材，從肚臍到腳底的距離除以肚臍到頭頂的距離，等於全身長除以肚臍到腳底的距離，是最完美的身材。」意思是說，符合黃金比例。若<u>小英</u>身高 170 公分，要穿上 10 公分的高跟鞋，才能達到最完美的身材，試問，<u>小英</u>從肚臍到腳底的距離為多少？(請四捨五入取整數值)

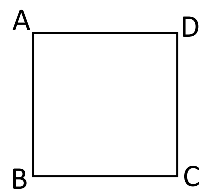
解：

活動四：黃金矩形

利用圓規操作，畫出黃金矩形，並瞭解黃金矩形的一些性質，進而透過不斷地計算「黃金比例(ϕ)之乘方」，發現費氏數列，也隱藏於其中。

步驟 7：教師解說：「當矩形的長與寬之比值為黃金比例時，我們稱它為黃金矩形。」接著，引導學生從所給的正方形圖形，延伸作出黃金矩形，如下例題 2 所示，透過操作，幫助學生熟悉黃金矩形。

例題 2： 已知邊長為 1 單位的正方形 ABCD，求在 $\overline{AB}$ 的右邊，作一個黃金矩形 ABEF。

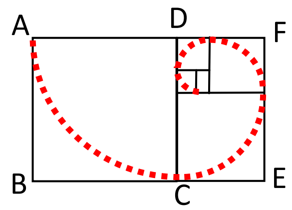


作法：

隨堂練習 6： 承例題 2，說明矩形 CDFE 為黃金矩形。

說明：

步驟 8： 從步驟 7 的過程中，我們發現，將黃金矩形切去一個以寬為邊的正方形後，仍然為黃金矩形，且動作可以不斷地重複，令人驚豔不已。當學生再將正方形的頂點(如下圖)，以圓弧線連結時，你將又看到一條漂亮的螺線。今我們也將黃金比例(ϕ)，重複做乘方運算，如下例題 3，看看有何發現？



例題 3： 已知黃金比例$(\phi)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，計算$\phi^2$、$\phi^3$、$\phi^4$、$\phi^5$、$\phi^6$、$\phi^7$、$\phi^8$，結果以$\phi$的一次方及非負整數，用一行一行的形式列出，並觀察此結果，是否有新的發現？

解：

活動五：矩形與正方形之變變變

透過紙卡的操弄，並利用費氏數列的規律，將多個不同的正方形拼成矩形，亦可將多個不同的矩形拼成正方形，我們將可發現，費氏數列不經意地，就出現在我們眼前。

步驟 9：教師預備邊長為 1 單位的正方形兩個，與邊長分別為 2、3、5、8 單位的正方形各一個，請同學利用這些正方形，拼成面積最大的矩形。

學生畫圖紀錄：__________________________。

隨堂練習 7：承步驟 9，利用教師所預備的正方形，你可以拼出多少種邊長不等的相異矩形？

解：

步驟 10：教師預備邊長分別為 1×1、1×2、2×3、3×5、5×8、8×13、13×21 的矩形各一個，請同學利用這些矩形，拼成面積最大的正方形。

學生畫圖紀錄：__________________________。

隨堂練習 8：承步驟 10，利用教師所預備的矩形，你可以拼出多少種不同的正方形？

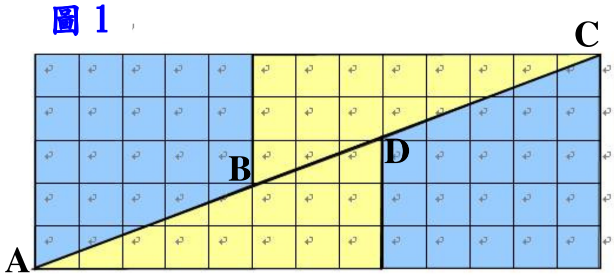
解：

教學活動參考解答：

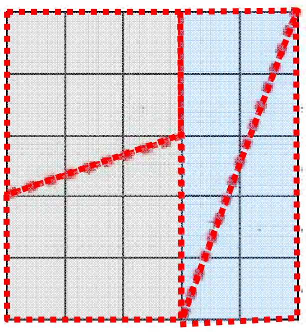
活動一：

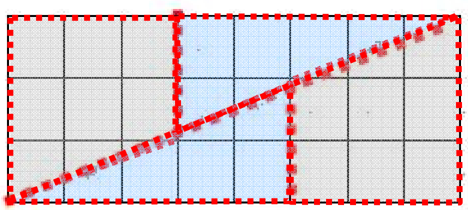
步驟 1：圖 1 的矩形中，看似直線的對角線 $\overleftrightarrow{AC}$，利用斜率的概念得知，$\overline{AB}$ 的斜率為 $\frac{2}{5}$，$\overline{AD}$ 的斜率為 $\frac{3}{8}$，$\overline{AC}$ 的斜率為 $\frac{5}{13}$，因為 $\frac{2}{5}\neq\frac{3}{8}\neq\frac{5}{13}$，所以不在同一條直線，若圖形放大，則將發現是一個面積為 1 平方單位的平行四邊形 ABCD。

圖 1



隨堂練習 1：5×5−1=3×8





步驟 2：可以畫出的圖形，其數據有下列關係：

$$\begin{cases} 3^2+1=2\times 5 \\ 5^2-1=3\times 8 \\ 8^2+1=5\times 13 \end{cases}$$

，…都是費氏數列的數字，且其規則為：費氏數列的任三個連續數(不要太小)，中間數的平方加 1 或減 1，會等於前後兩數的乘積。

隨堂練習 2：$13^2-1=8\times21$，$21^2+1=13\times34$。

活動二：

隨堂練習 3：鳳梨的鱗片、雛菊的葉片、達利(dali)1955 年的畫作-最後的晚餐。

隨堂練習 4：(1) 數列(A)：1，1.5，1.6，1.615，1.618，1.618。

(2) 數列(B)：2，1.667，1.625，1.619，1.618。

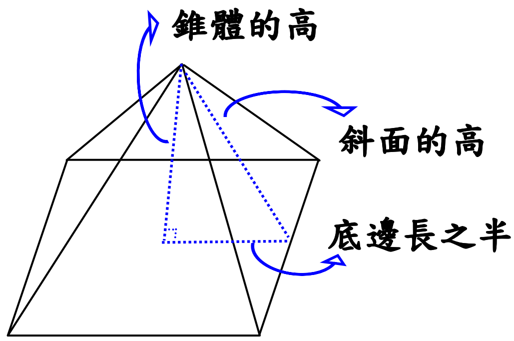
(3) ① 大。② 小。③ 1.618 。

活動三：

步驟 5：

$$\sqrt{146.59^2+(\frac{230.37}{2})^2}$$
$$=\sqrt{21488.628+13267.584}$$
$$=\sqrt{34756.212}$$

≒186.430 (斜面的高)



186.430÷115.185≒1.6185。

例題 1：設 $\overline{AC}=x$，則 x：1=(1+x)：x

化簡得：$x^2-x-1=0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (負不合)………近似值約 1.618。

隨堂練習 5：方法(一)

設小英從肚臍到腳底的距離為 x，則可得：

$(x+10)$：$(170-x)=(170+10)$：$(x+10)$

$(x+10)^2=180(170-x)$

$x^2+200x=30500$

$x^2+200x+10000=30500+10000$

$(x+100)^2=40500$

$x=-100\pm\sqrt{40500}$ (負不合)，四捨五入後為 101(公分)。

方法(二)：

設小英從肚臍到腳底的距離為 x，則可得：

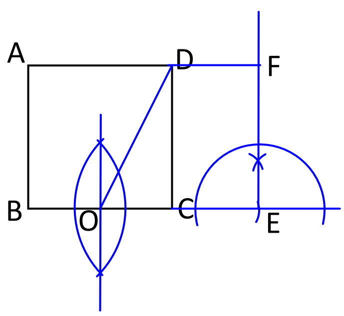
$$\frac{x+10}{170-x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$2x+20=170+170\sqrt{5}-x-\sqrt{5}x$

$(3+\sqrt{5})x=150+170\sqrt{5}$

$x=\dfrac{150+170\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$，四捨五入為 101(公分)。

活動四：



例題 2：(1)做 $\overline{BC}$ 的中點 O，並連 $\overline{OD}$ 。

(2)以 O 點為圓心，$\overline{OD}$ 為半徑，

畫弧交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 E 點。

(3)做矩形 ABEF，則黃金矩形 ABEF 為所求。

隨堂練習 6：$\because \overline{EF} \div \overline{CE} = 1 \div \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 \times \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$

$$= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$\therefore$矩形 CDFE 為黃金矩形。

例題 3：$\because \phi$ 為 $x^2 - x - 1 = 0$ 的一根

$\therefore \phi^2 - \phi - 1 = 0$，即 $\phi^2 = \phi + 1$

故 $\phi^3 = \phi \times \phi^2 = \phi \times (\phi + 1) = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$

$$\phi^4 = \phi \times \phi^3 = \phi \times (2\phi + 1) = 2\phi^2 + \phi = 2(\phi + 1) + \phi = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = \phi \times \phi^4 = \phi \times (3\phi + 2) = 3\phi^2 + 2\phi = 3(\phi + 1) + 2\phi = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = \phi \times \phi^5 = \phi \times (5\phi + 3) = 5\phi^2 + 3\phi = 5(\phi + 1) + 3\phi = 8\phi + 5$$

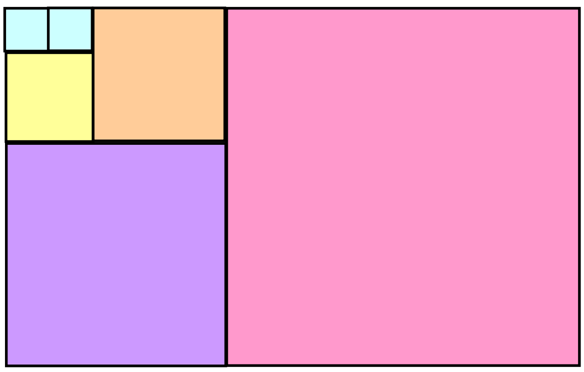
$$\phi^7 = \phi \times \phi^6 = \phi \times (8\phi + 5) = 8\phi^2 + 5\phi = 8(\phi + 1) + 5\phi = 13\phi + 8$$

$$\phi^8 = \phi \times \phi^7 = \phi \times (13\phi + 8) = 13\phi^2 + 8\phi = 13(\phi + 1) + 8\phi = 21\phi + 13$$

從 $\phi^2, \phi^3, \ldots \phi^8$ 的計算，我們發現，ϕ 的係數成費氏數列，常數項也成費氏數列。

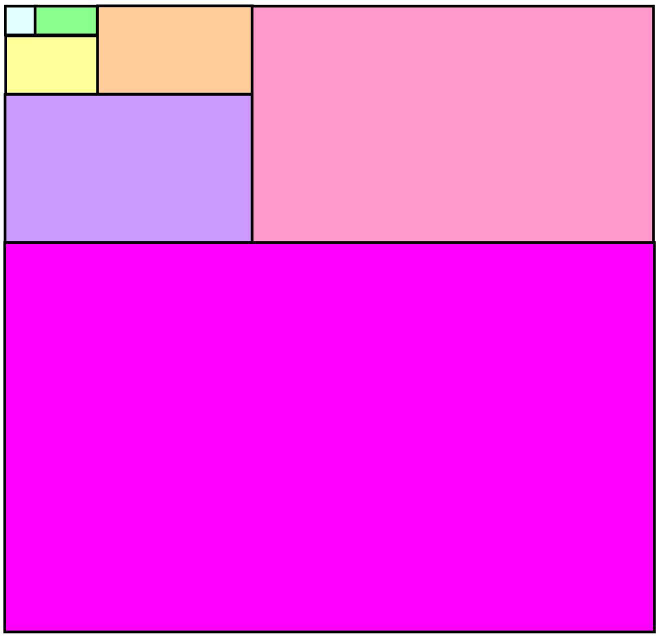
活動五：

步驟 9：



隨堂練習 7：矩形 1×2、2×3、3×5、5×8、8×13，共 5 種。

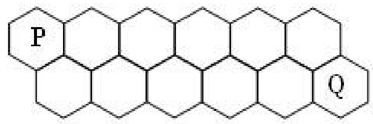
步驟 10：



隨堂練習 8：邊長為 1、3、8、21 的正方形，共 4 種。

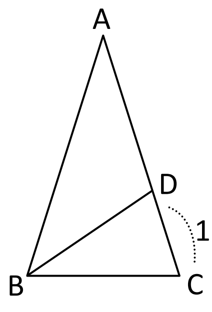
七、指定作業：

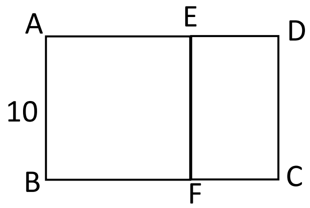
1.右圖為 12 個相連的蜂窩，假設有一隻蜜蜂，要由 P 點位置經過蜂窩到達 Q 點位置，今規定只能往右邊移動(包含右上與右下)，且蜜蜂不可回頭。試問，蜜蜂有幾種不同的移動路線，可以從 P 點前進到 Q 點？



2.尋找一個與黃金比例有關的事物。

3.已知等腰△ABC 與等腰△BCD 相似，其對應邊會成比例，即 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{BC}:\overline{CD}$，若 $\overline{CD}=1$，且 $\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{AD}$，則 $\overline{AD}$ 為多少？





4.已知矩形 ABCD 為黃金矩形，且短邊 $\overline{AB}=10$，今切去一正方形 ABFE 後，則

(1) $\overline{CD}:\overline{DE}$ 的比值為多少？

(2) $\overline{DE}$ 為多少？

5.承活動四的例題 3，試回答下列問題：

(1) $\phi^{12}=a\phi+b$，其中 a、b 為常數，則 a、b 各為多少？

(2) $\phi^{n}=610\phi+k$，其中 n、k 為常數，則 n、k 各為多少？

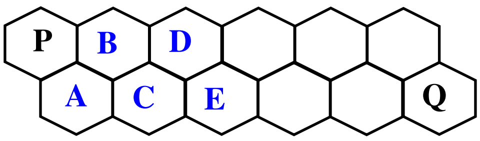
6.利用費氏數列：1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,⋯，依序做出矩形 1×1、1×2、2×3、3×5、5×8、8×13、13×21⋯，規定使用矩形需從小到大，來拼出最大正方形，試回答下列問題：

(1)若今日利用 9 個矩形，則所拼出的最大正方形面積為多少？

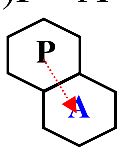
(2)若所拼出的最大正方形面積為 $142129=(377^2)$，則今日所用的矩形有多少個？

指定作業參考解答：

1.首先標上部分字母於蜂窩上，以利說明。

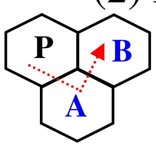


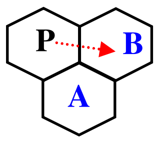
(1)P➡A



共 1 種。

(2) P➡B





共 2 種。

(3) P➡C

從 B 過來有 2 種 從 A 過來有 1 種

共 3 種。

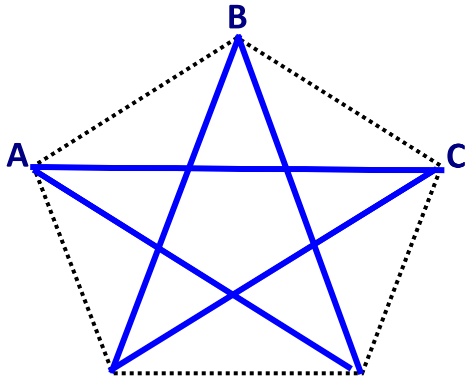
(4) P➡D

從 B 過來有 2 種 從 C 過來有 3 種

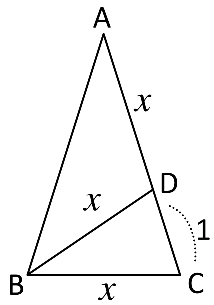
共 5 種。

以此類推得費氏數列模式 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,⋯，
故 P➡Q 有 144 種不同移動路徑。

2.畢氏學派的五芒星符號(五角星)。(其中$\overline{AC}$：$\overline{AB}$的比值=$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$)



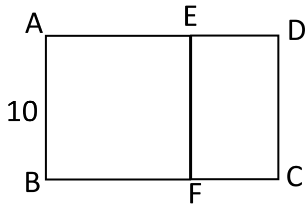
3.設$\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{AD}=x$，則



$(x+1):x=x:1$

$x^2-x-1=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$(負不合)



4. (1) $\overline{CD}$：$\overline{DE}$的比值=$\overline{BC}$：$\overline{AB}$的比值

$=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$(黃金比例)

(2) $\overline{DE}=(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1)\times10=5\sqrt{5}-5$。

5. (1)$\because \phi^{12}=144\phi+89$　　$\therefore$ $a=144$、$b=89$。

(2)$\because \phi^{15}=610\phi+233$　　$\therefore$ $n=15$、$k=233$。

6.由費氏數列的每一項，依序與下一項所做出的矩形1×1、1×2、2×3、3×5、5×8、8×13、…，其面積所形成的新數列$\langle B_n \rangle$，我們從圖形中發現，其和有一些規律：

$S_1=1\times1=\mathbf{1^2}$

$S_3=1\times1+1\times2+2\times3=1\times(1+2)+2\times3=1\times3+2\times3=(1+2)\times3=3\times3=\mathbf{3^2}$

$S_5=3\times3+3\times5+5\times8=3\times(3+5)+5\times8=3\times8+5\times8=(3+5)\times8=8\times8=\mathbf{8^2}$

…，至奇數項的和為完全平方數，以拼成的圖形來說，即是拼成正方形。

今將費氏數列與新的<B_n> 數列對應

1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21	,…
⇳	⇳	⇳	⇳	⇳	⇳	⇳	⇳	⇳
1×1,	1×2,	2×3,	3×5,	5×8,	8×13,	13×21,	21×34,	…

可知：

使用 n(奇數)個矩形，其拼成的最大正方形面積為對應費氏數列第 n+1 項值的平方。

故 (1) 使用 9 個，拼成的最大正方形面積為 $55^2=3025$

(2) 拼出的最大正方形面積為 142129=(377^2)，使用 13 個。

八、教學活動注意事項：

1. 教學活動時間建議如下，活動一：約 15 分鐘，活動二：約 15 分鐘，活動三：約 20 分鐘， 活動四：約 25 分鐘，活動五：約 15 分鐘。
2. 本單元的教學與練習過程中，有時計算較為繁雜，教師請同學先預備計算機，以增加運算之效率。

3. 活動一的步驟 1，若教師未曾教過斜率的概念，可以考慮另外利用 20 分鐘的時間，進行此部分的教學，資料可以參考國民中學數學教材原型 B 冊的內容。
4. 活動一的隨堂練習，教師可視學生的反應，分成 6 組進行，邊長分別為 3、4、5、6、7、9 的正方形面積，加 1 或減 1 後，面積看起來會等於矩形的面積，如同步驟 1 中之圖 1 與圖 2 的關係一般，如此，可以節省一些上課時間，也增進學生的互動。
5. 活動三的步驟 5，數據雖然比較繁雜，確是比較接近事實的資訊，讓學生體會到生活的資料，不會常常是那麼好算的整數值，而是需要使用計算機幫助計算。
6. 活動四的步驟 7，我們刻意從正方形出發，作出黃金矩形，然後，再讓學生從練習中，發現小矩形也是黃金矩形，重覆此規律，進而認識黃金矩形的特徵。
7. 活動四的步驟 8，教師先帶領學生計算ϕ^2、ϕ^3、ϕ^4，且結果一行一行地呈現於黑板，然後請學生幫忙計算ϕ^5、ϕ^6、ϕ^7、ϕ^8，增加其瞭解度，並將答案寫於黑板上，幫助學生發現其規律。
8. 在各活動間，教師宜巡堂走動，加強瞭解學生學習情形。
9. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上

的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 傅淑婷(2013)。比例教學篇斜率，陳昭地主編：國民中學數學教材原型B冊(pp. 173-192)。新北市：國家教育研究院。

2. 王懷全編著(1994)。數學發展史(pp.259-261)。新北市：學英文化事業有限公司。

3. Mario Livio 著。邱宏義譯(2004)。黃金比例。臺北市：遠流出版。

4. 蔡聰明著(2005)。數學的發現趣談(pp.179−205)。臺北市：三民書局。

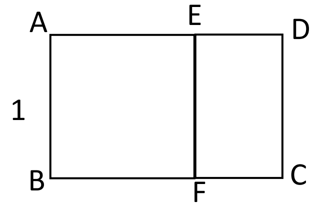
5. 李光淵著。吳敏琪譯(2010)。數學三國志(pp.26−34)。新北市：美藝學苑。

6. 朴炅美著(2005)。王海娟譯。無所不在的數學現象(pp.44−45, pp.75-78, p.114)。臺中市：晨星出版。

7. 黃敏晃著(2011)。玩弄數學問題(pp.10−25)。新北市：翰品文教出版社。

8.活動四例題3之補充：

(1)在例題 3 中，我們發現ϕ $(=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})$的乘方隱藏著費氏數列。故我們猜想，右圖中的$\overline{FC}$，是否也有如此？



(2)令 $\varphi=\overline{FC}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，則：(其中$\varphi$也等於$\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\phi}$)

$2\varphi=-1+\sqrt{5}$ ⇨ $2\varphi+1=\sqrt{5}$，兩邊平方化簡可得：$\varphi^2+\varphi-1=0$

(3) $\varphi^2=-\varphi+1$

$$\varphi^3=\varphi\times\varphi^2=\varphi\times(-\varphi+1)=-\varphi^2+\varphi=-(-\varphi+1)+\varphi=+(2\varphi-1)$$

$$\varphi^4=\varphi\times\varphi^3=\varphi\times(2\varphi-1)=2\varphi^2-\varphi=2(-\varphi+1)-\varphi=-3\varphi+2=-(3\varphi-2)$$

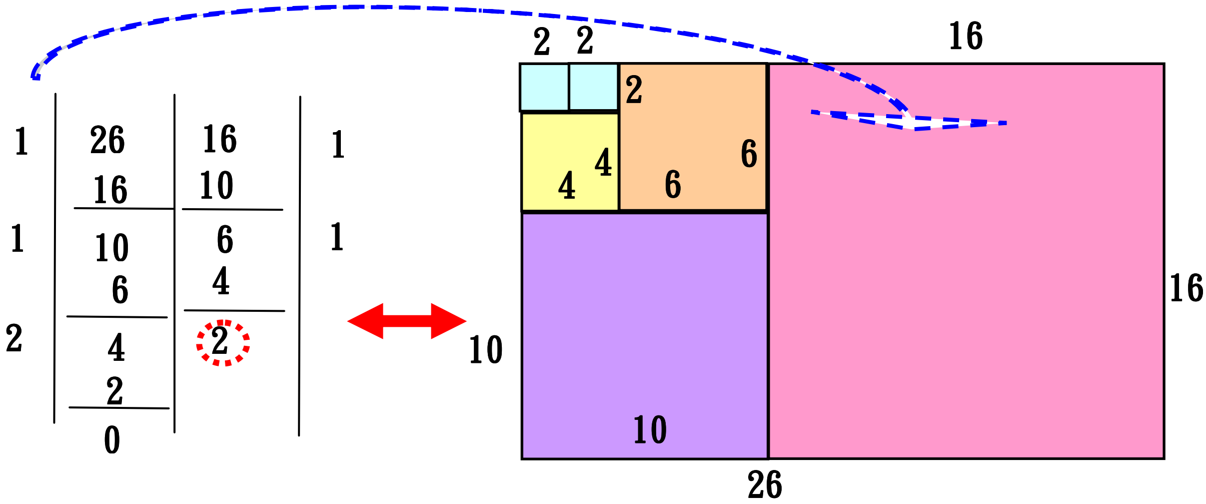
$$\varphi^5=\varphi\times\varphi^4=\varphi\times(-(3\varphi-2))=-3\varphi^2+2\varphi=-3(-\varphi+1)+2\varphi=+(5\varphi-3)$$

$\varphi^6=-(8\varphi-5)$ ； $\varphi^7=+(13\varphi-8)$ ；…

從$\varphi^2,\varphi^3,\ldots\varphi^7$的計算，我們發現，$\varphi$的係數及常數項都與費氏數列有關，且要考慮正負的情形。。

9.活動五的步驟 9，其拼圖的逆向思維，可以用來解說，輾轉相除法求最大公因數的原理，教師可以考慮，是否用來解說與複習。

例如：求 26 與 16 最大公因數為多少？



最小正方形的邊長 2，即為兩數的最大公因數。

說明：

∵如圖所示，正方形邊長 2 是正方形邊長 4 的因數，也是矩形 4×6 的邊長之 6 因數，重複動作，最後可知，邊長 2 是邊長 16 與 26 的因數。

又∵邊長 2 的正方形，是滿足分割條件，最先完成的正方形，也是滿足分割條件，最大的正方形。(此正方形若繼續分割，還可以產生小正方形。)

∴兩數的最大公因數即為 2。

(且輾轉相除法中，兩旁數字相加，也為圖中正方形個數的總和。)

10.在黃金矩形中，切割以寬為一邊的正方形，仍然為黃金矩形，其意思告訴我們，這些矩形都是相似的圖形，如右圖 1，矩形 ABCD 與矩形 FCDE 是相似的圖形，且直觀感受到，大的矩形縮

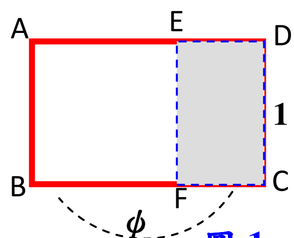


圖 1

小$\frac{1}{\phi}$倍後成為小的矩形。意思是說，$\overline{DE}=\overline{AB}\times\frac{1}{\phi}=1\times\frac{1}{\phi}=\frac{1}{\phi}$ 。

重複此動作，如右圖 2，我們可以得到：

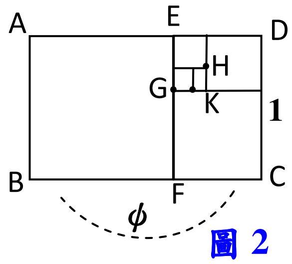


圖 2

$$\overline{EG}=\overline{DE}\times\frac{1}{\phi}=\frac{1}{\phi}\times\frac{1}{\phi}=\frac{1}{\phi^2}$$

$$\overline{GK}=\overline{EG}\times\frac{1}{\phi}=\frac{1}{\phi^2}\times\frac{1}{\phi}=\frac{1}{\phi^3}$$

$\overline{HK}=\overline{GK}\times\frac{1}{\phi}=\frac{1}{\phi^3}\times\frac{1}{\phi}=\frac{1}{\phi^4}$ ，…的規律結果。

主題 4－3：梯形

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者**：蘇進發

二、先備知識：

(一) 能認識梯形。

(二) 能運用切割重組，理解梯形的面積公式。

(三) 能理解三角形的全等性質。

(四) 能認識平行四邊形及理解其性質。

(五) 能理解三內角為 30°–60°–90° 與 45°–45°–90° 的三角形之邊長比例關係。

(六) 能理解三角形兩邊中點連線，會平行第三邊且為其長度的一半。

三、教學目標：

(一) 複習梯形的意義與理解其面積公式。

(二) 能理解等腰梯形的性質與判別性質。

(三) 能理解梯形兩腰中點連線性質並能應用。

(四) 能透過觀察、發現與解說，尋找梯形內的一個點，在部分條件下，過此點的切割線，可將梯形面積平分。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

從尋找平行四邊形內的一個點，過此尋找到的點做任意切割

線，都可將其面積平分為開始，培養學生發現、猜測、歸納與驗證。在此我們發現，除了以對角線為切割線外，其餘所切割後的圖形，都是一樣的梯形。因而，反向思考，引導學生操作兩個一樣的梯形，來認識梯形與理解其面積公式。

接著，透過操弄認識等腰梯形，學習等腰梯形的性質與判別性質，及兩腰中點連線的性質與應用。在這過程中，我們安排了一些梯形的問題，學生需要用作高或作平行線的解題技巧，即可順利解決。

最後，我們以尋找梯形內的一個點，過此點做切割線，在部分的條件下，可將梯形的面積平分，與開始的動機做前後呼應，來結束本單元。

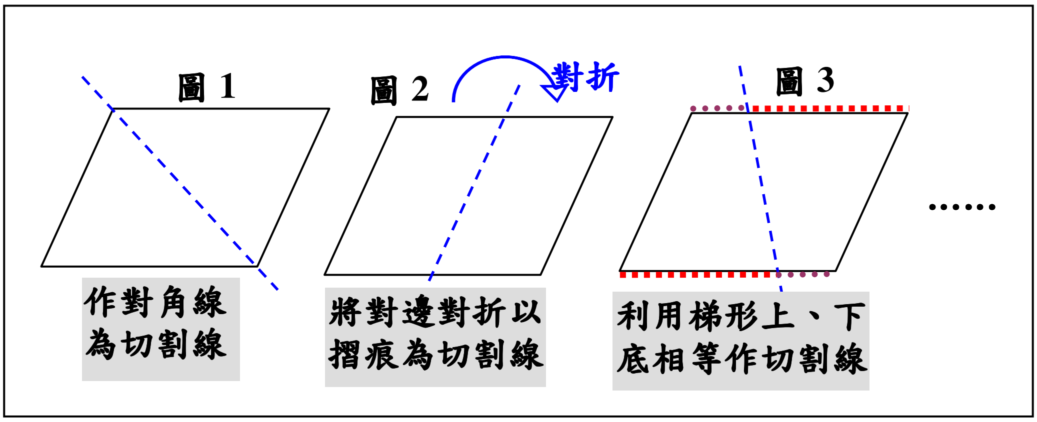
六、教學活動：

活動一：認識梯形與理解其面積公式

教師以「平行四邊形的平分問題」為動機，引導學生透過操作，進入觀察、猜測與解說，來尋求問題的答案。接著，複習梯形的意義，並明瞭兩個一樣的梯形，可以拼出平行四邊形，再次回憶梯形的面積公式。

步驟 1：請學生拿出預備的平行四邊形紙張，思考與討論，如何切割一刀(直線)，將其面積平分為二，並說明你的理由。

(教師可依學生的操作情形，考慮是否要提示：)



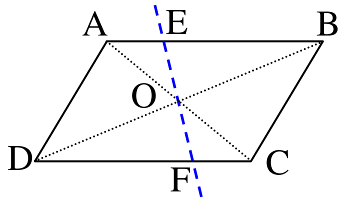
學生說明：______________________________。

步驟 2：請學生猜測，若將平行四邊形面積平分之不同方式的切割線，畫在同一個平行四邊形上，好像會通過某個定點，你可以猜出哪個點的大概位置嗎？

(教師可預備 3 張，畫有相同平行四邊形的透明投影片，再畫上圖 1~3 的切割線，利用圖形疊合，方便學生觀察。)

學生回答：______________________________。

步驟 3：教師解說：「過平行四邊形對角線交點的切割線，必將平行四邊形的面積平分。」今簡單說明於下：



【說明】：

四邊形 AEFD 的面積

=四邊形 AOFD 的面積+△AEO 的面積

=四邊形 AOFD 的面積+△CFO 的面積(∵△AEO≅△CFO)

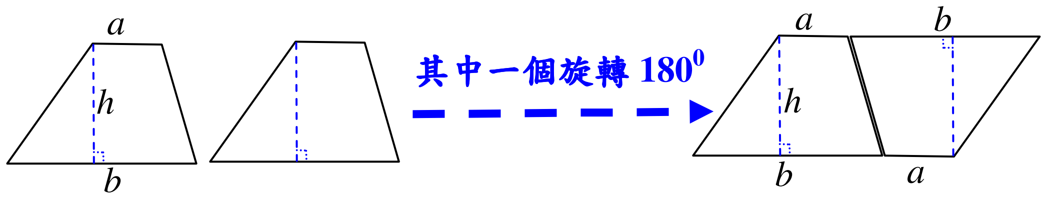
=△ACD 的面積=$\frac{1}{2}$平行四邊形 ABCD 的面積

即過對角線交點的切割線，必將平行四邊形面積平分。

結論：

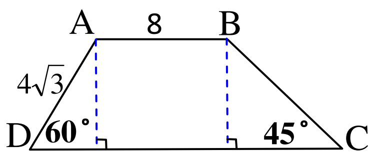
過平行四邊形對角線交點的切割線，必將其面積平分。

步驟 4：教師先複習梯形的意義：「有一組對邊平行，另一組對邊不平行的四邊形，我們稱為梯形。」再透過拼圖的操弄，將 2 個全等梯形，其中一個旋轉 180°，拼成平行四邊形，觀察其面積關係，瞭解梯形面積公式的由來。



梯形的面積=$\frac{1}{2}$平行四邊形的面積=$\frac{(a+b)\times h}{2}$。

隨堂練習 1：已知梯形 ABCD 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$，若 $\overline{AD}=4\sqrt{3}$、$\overline{AB}=8$、∠ADC=60°、∠BCD=45°，則 $\overline{CD}$ 為多少？又梯形 ABCD 的面積為多少？



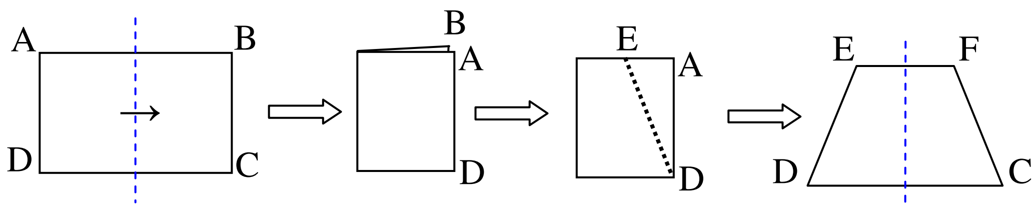
解：

活動二：理解等腰梯形性質與判別性質

透過摺紙與剪紙，引導學生發現，等腰梯形為一線對稱圖形，並藉由操作，觀察其底角是否相等？再輔以解說，幫助學生認識等腰梯形的性質與判別性質。接著，利用等腰梯形的問題告訴學

生，梯形問題除了作高之外，尚有另一種解題模式-作平行線，利用平行四邊形的性質來解決問題。最後，我們將等腰梯形的對角互補，置於指定作業中，供學生練習，為以後的圓內接四邊形做預備。

步驟 5：請學生拿出一張矩形紙張，將 $\overline{AD}$ 摺至 $\overline{BC}$，如下圖所示，再依教師指示，沿著虛線減下三角形，然後把紙張展開，得到一個梯形，此梯形的**兩腰相等**，我們稱為**等腰梯形**。



隨堂練習 2：等腰梯形是否為線對稱圖形？

說明：

隨堂練習 3：承步驟 5，若 $\overline{AB}$ =20，減去的其中一個△ADE 的面積為 30，且 $\overline{AE}$ =5，則梯形 EFCD 的周長為多少？

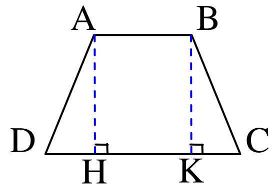
解：

步驟 6：在步驟 5 中，沿著 $\overline{ED}$ 減去三角形後展開，∠C、∠D 原是重疊的角，所以它們必定相等，意思是說：「等腰梯形的兩底角相等。」我們也可以換一個角度來思考，從等腰梯形直接說明兩底角相等，如下例題 1。

例題 1： 在梯形 ABCD 中，$\overline{AB} // \overline{CD}$ 且 $\overline{AD} = \overline{BC}$，

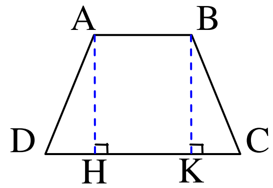
試說明∠C=∠D。

說明：



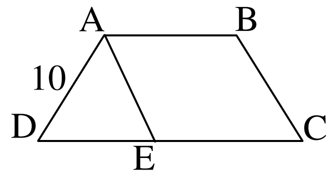
隨堂練習 4： 在梯形 ABCD 中，$\overline{AB} // \overline{CD}$ 且∠C=∠D，試說明 $\overline{AD} = \overline{BC}$。

說明：



步驟 7： 教師請學生利用平行四邊形的性質，解隨堂練習 5。並當學生完成練習後，告知學生，在第(2)小題中，有時，$\overline{AE}$ 是要自己畫的，即為解題過程中的輔助線。

隨堂練習 5： 已知等腰梯形 ABCD，$\overline{AB} // \overline{CD}$ 且 $\overline{AE} // \overline{BC}$，



(1)若 $\overline{AD}$=10，則 $\overline{AE}$ 為多少？

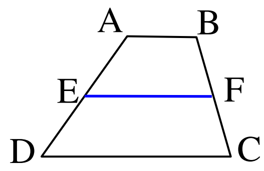
(2)若 $\overline{AD}$=10、$\overline{AB}$=15、$\overline{CD}$=25，則梯形 ABCD 的面積為多少？

解：

活動三： 理解梯形兩腰中點連線性質並能應用

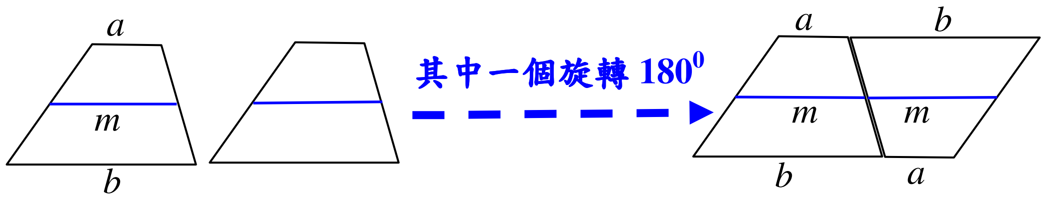
利用摺紙與拼圖的操弄，引導學生發現「梯形兩腰中點連線」性質，再透過概念解說，幫助學生明瞭此性質，並能活用它，來解決相關問題。

步驟 8： 請學生拿出 2 個全等的梯形紙張，將其中一張的上底摺至下底，然後展開，並將摺痕 $\overline{EF}$ 用筆劃出，如圖，試說明 E、F 分別為 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 的中點。



學生說明：____________________________。

步驟 9： 同樣操作，再畫出另一個梯形的兩腰中點連線，並將其中一個梯形旋轉 180°，合併成一個平行四邊形。再觀察上底(a)、下底(b)與兩腰中點連線(m)的關係。



觀察知：兩腰中點連線長 $m=\dfrac{a+b}{2}$ (且平行上底與下底)。

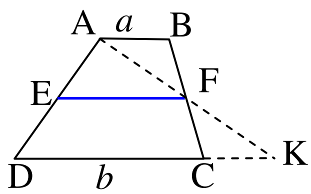
今我們也用不同的方式，簡單解說於下：

【說明】：

(1).連 $\overleftrightarrow{AF}$ 交 $\overline{DC}$ 延長線於 K 點，則

△ABF≅△KCF，(ASA 或 AAS 性質)

故 $\overline{CK}=\overline{AB}=a$，且 $\overline{AF}=\overline{KF}$ 。



(2).在△ADK 中，∵E、F 分別為 $\overline{AD}$ 與 $\overline{AK}$ 的中點

$\therefore \overline{EF}=\dfrac{1}{2}\overline{DK}=\dfrac{a+b}{2}$，且 $\overline{EF}\,/\!/\,\overline{DK} \Rightarrow \overline{EF}\,/\!/\,\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$ 。

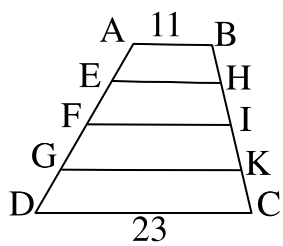
結論：

梯形兩腰中點連線長，等於上底與下底和之半且平行上、下底。

隨堂練習 6： 若梯形兩腰中點連線長為 10 公分，高為 8 公分，則梯形的面積為多少平方公分？

解：

隨堂練習 7： 在梯形 ABCD 中，$\overline{AB}//\overline{EH}//\overline{FI}//\overline{GK}//\overline{CD}$，且 E、F、G 四等分 $\overline{AD}$，H、I、K 也四等分 $\overline{BC}$，若 $\overline{AB}=11$、$\overline{CD}=23$，則 $\overline{FI}$、$\overline{EH}$、$\overline{GK}$ 分別為多少？



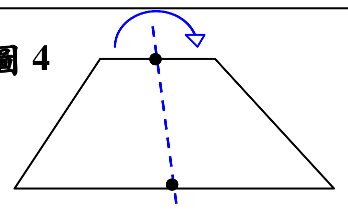
解：

活動四： 平分梯形面積

步驟 10： 請學生拿出預備的梯形紙張，思考與討論，如何切割一刀(直線)，將其面積平分為二，並說明你的理由。

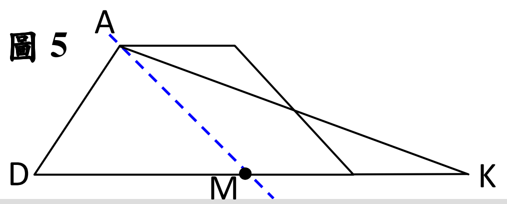
(教師可依學生的操作情形，考慮是否要提示：)

圖 4



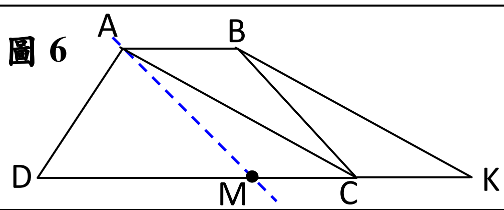
先摺疊找出上底中點，再找出下底中點，畫出切割線。

圖 5



先作△AKD，使其底邊等於梯形的上底加下底，再作△AKD 的中線(切割線)。

圖 6



連 $\overline{AC}$，過 B 點作直線平行 $\overline{AC}$，交 $\overline{CD}$ 延長線於 K 點，再作 $\overline{DK}$ 的中點 M，連 $\overline{AM}$ 即為切割線。

學生說明：____________________________________。

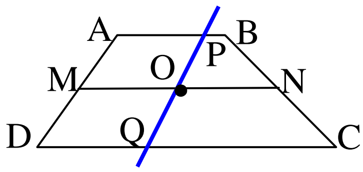
步驟 11： 請學生猜測，若將梯形面積平分之不同方式的切割線，畫在同一個梯形的圖形上，好像會通過某個定點，你可以說出哪個點的大概位置嗎？

(教師可預備 3 張，畫有相同梯形的透明投影片，再畫上圖 4~6 的切割線，利用圖形疊合，方便學生觀察。)

學生回答：____________________________。

步驟 12： 教師解說：「過梯形兩腰中點所連線段的中點，且與上底及下底都有交點的切割線，必將梯形面積平分。」今簡單說明於下：

如圖，已知 M、N 分別為梯形兩腰 $\overline{AD}$ 、$\overline{BC}$ 的中點，O 為 $\overline{MN}$ 的中點，且 $\overline{PQ}$ 通過 O 點，分別交 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 於 P、Q，試說明 $\overline{PQ}$ 將梯形 ABCD 的面積平分。

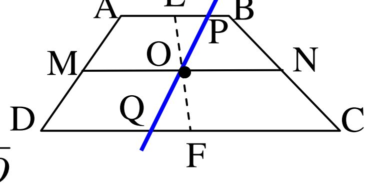


【說明】：

(1)作 $\overline{AB}$ 的中點 E，並連 $\overline{EO}$ 交 $\overline{CD}$ 於 F 點。

(2)$\because \overline{AB} // \overline{MN} // \overline{CD}$ 且 $\overline{AM} = \overline{DM}$ ，$\therefore \overline{EO} = \overline{FO}$

⇨△OEP≅△OFQ(ASA 或 AAS 性質)



(3)$\because \overline{AE} // \overline{MO} // \overline{DF}$ 且 $\overline{AM} = \overline{DM}$ ，$\overline{EO} = \overline{FO}$

$$\therefore \overline{DF} = 2\overline{MO} - \overline{AE} = \frac{1}{2}(4\overline{MO} - 2\overline{AE}) = \frac{1}{2}(2\overline{MN} - \overline{AB}) = \frac{1}{2}\overline{CD}$$

即 F 點為 $\overline{CD}$ 的中點

(4)故四邊形 APQD 的面積

=五邊形 AEOQD 的面積+△OEP 的面積

=五邊形 AEOQD 的面積+△OFQ 的面積

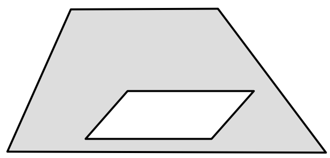
=四邊形 AEFD 的面積=$\frac{1}{2}$梯形 ABCD 的面積

即過梯形兩腰中點連線的中點之切割線，必將梯形面積平分。

結論：

過梯形兩腰中點所連線段的中點，且與上底及下底都有交點的切割線，必將梯形面積平分。

隨堂練習 8：如圖所示，在梯形內部挖除一個平行四邊形，試作出一條切割線，將此圖形的面積平分。



解：

教學活動參考解答：

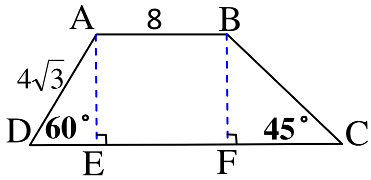
活動一：

步驟 1：略。

步驟 2：略。

隨堂練習 1：∵△ADE 為 30°−60°−90°的三角形

$\therefore \overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ ，



$\overline{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{3}=6$

又∵△BCF 為等腰直角三角形， $\therefore \overline{CF}=\overline{BF}=\overline{AE}=6$

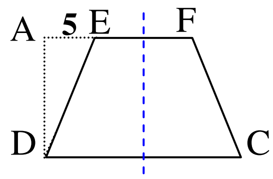
故 $\overline{CD}=2\sqrt{3}+8+6=14+2\sqrt{3}$ ，

且梯形 ABCD 的面積= $\frac{(8+14+2\sqrt{3})\times 6}{2}=66+6\sqrt{6}$ 。

活動二：

隨堂練習 2：是。

隨堂練習 3：∵△ADE 的面積為 30，且 $\overline{AE}=5$，



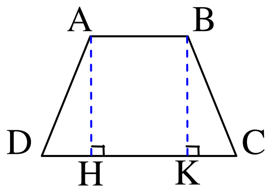
$\therefore \frac{\overline{AD}\times 5}{2}=30$ ，⇨ $\overline{AD}=12$ ，

再利用畢氏定理可知，$\overline{DE}=\sqrt{5^2+12^2}=13$

故梯形 EFCD 的周長=13+10+13+20=56。

例題 1：在△ADH 與△BCK 中

∵ $\overline{AD}=\overline{BC}$ 、 $\overline{AH}=\overline{BK}$ (高)

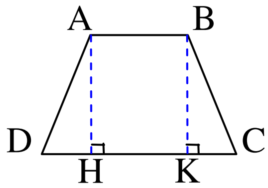


且∠AHD=∠BKC=90°

∴△ADH≅△BCK(RHS 性質)

故∠C=∠D。

隨堂練習 4：在△ADH 與△BCK 中



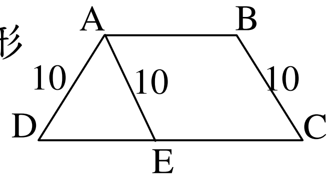
$\because \overline{AH}=\overline{BK}$ (高)、∠C=∠D

且∠AHD=∠BKC=90°

∴△ADH≅△BCK(AAS 性質)

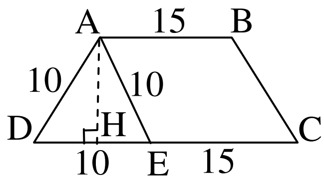
故 $\overline{AD}=\overline{BC}$ 。

隨堂練習 5：(1) ∵四邊形 ABCE 為平行四邊形



$\therefore \overline{AE}=\overline{BC}=\overline{AD}=10$

(2) ∵△ADE 為正三角形



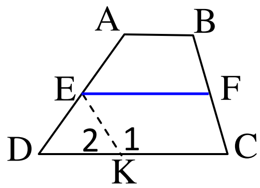
$\therefore \overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 10=5\sqrt{3}$

故梯形 ABCD 的面積=$\dfrac{(15+25)\times 5\sqrt{3}}{2}=100\sqrt{3}$ 。

活動三：

步驟 8：(1) 將 $\overline{AB}$ 摺至 $\overline{CD}$ 上，則 A 點摺至 K 點，

此時∠A=∠1、$\overline{AE}=\overline{EK}$ 。



(2) 又∵∠A+∠D=180°($\overline{AB}//\overline{CD}$)

且∠1+∠2=180°(平角)

∴∠D=∠2 ⇨ $\overline{EK}=\overline{ED}$ ，即 $\overline{AE}=\overline{ED}$

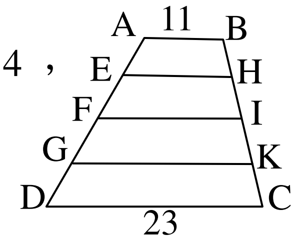
(3) 同理，$\overline{BF}=\overline{FC}$ 。

隨堂練習 6：10×8=80(平方公分)

隨堂練習 7：∵梯形兩腰中點連線長等於上底與下底和之半

$\therefore \overline{FI}=\dfrac{11+23}{2}=17$ ，$\overline{EH}=\dfrac{11+17}{2}=14$ ，

$\overline{GK}=\dfrac{17+23}{2}=20$



活動四：

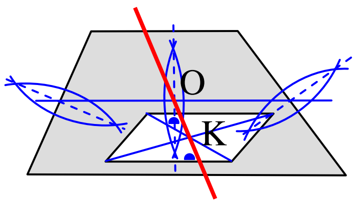
步驟 10：略。

步驟 11：略。

隨堂練習 8：(1) 作梯形兩腰中點連線的中點 O

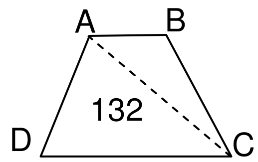
(2) 作平行四邊形對角線的交點 K

(3) 連 $\overleftrightarrow{OK}$ ，此切割線 $\overleftrightarrow{OK}$ 即為所求。

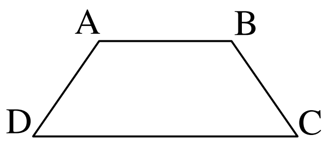


七、指定作業：

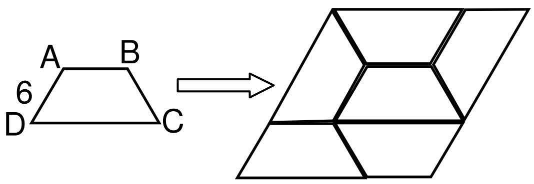
1.在梯形 ABCD 中，若 $\overline{AB}$ ：$\overline{CD}$=5：11 且△ACD 的面積為 132，則梯形 ABCD 的面積為多少？



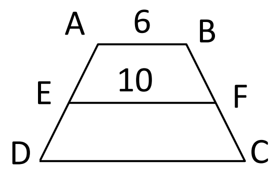
2.在等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$ ，試說明 ∠A+∠C=180°。



3.已知等腰梯形 ABCD，其中 $\overline{AD}=6$，若利用此等腰梯形 6 個，恰可拼成一個大菱形，試問等腰梯形 ABCD 的面積為多少？

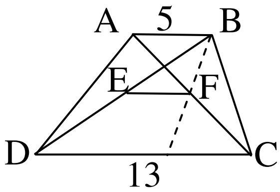


4.在梯形 ABCD 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$ 且 $\overline{EF}$ 為兩腰中點連線，若 $\overline{AB}$=6、$\overline{EF}$=10，則梯形 AEFB 與梯形



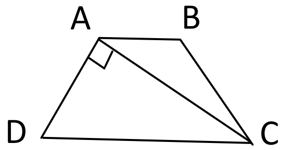
ABCD 的面積比為多少？

5.在梯形 ABCD 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$，若 E、F 分別為 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 的中點，且 $\overline{AB}$=5、$\overline{CD}$=13，則 $\overline{EF}$ 為多少？

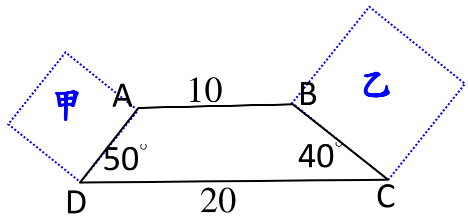


6.在等腰梯形 ABCD 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$，若 $\overline{AB}$=6、$\overline{CD}$=8、$\overline{BC}=\overline{AD}$=5，則梯形對角線 $\overline{BD}$ 的長度為多少？

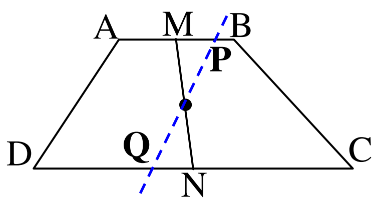
7.如圖，梯形 ABCD 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$，$\overline{AC}\perp\overline{AD}$，若 $\overline{AD}$=15、$\overline{AC}$=20，且 $\overline{AB}$=10，則 $\overline{BC}$ 的長度為多少？



8.在梯形 ABCD 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$，若 $\overline{AB}=10$、$\overline{CD}=20$、$\angle$D=50°、$\angle$C=40°，今分別以 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 為邊作正方形甲與乙，則甲、乙兩正方形的面積和為多少？



9.過梯形上底中點與下底中點之連接線段的中點做切割線，且與上、下底有交點，試說明此切割線將梯形面積平分。(即 $\overline{PQ}$ 平分梯形 ABCD 的面積)



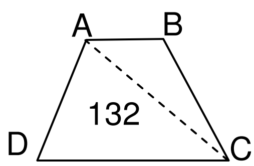
指定作業參考解答：

1.∵△ABC 的面積：△ACD 的面積 $=\overline{AB}$：$\overline{CD}$= 5：11(同高)

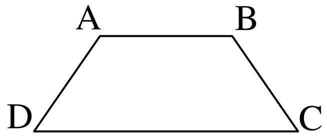
∴△ABC 的面積：132 = 5：11，

⇨△ABC 的面積= 60

故梯形 ABCD 的面積= 132+60 = 192。



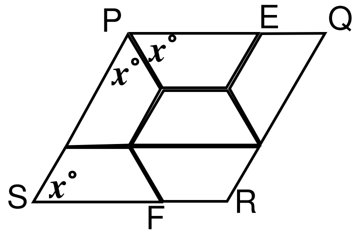
2.$\because \overline{AB} // \overline{CD}$，$\therefore \angle A+\angle D=180^\circ$



又$\because$四邊形 ABCD 為等腰梯形，

$\therefore \angle D=\angle C$ ，　故$\angle A+\angle C=180^\circ$。

3.設等腰梯形底角為 x°

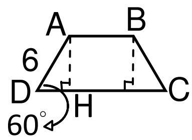


$\because \overline{PQ} // \overline{SR}$　$\therefore$　$x+2x=180$　⇨ $x=60$

又$\because \overline{PQ}=\overline{SR}$　$\therefore \overline{PE}+\overline{EQ}=\overline{SF}+\overline{FR}$

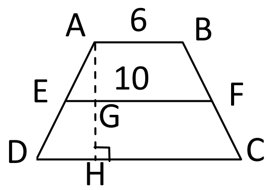
⇨ $\overline{EQ}=\overline{FR}=6$ (腰長等於上底)

故 $\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$ ，$\overline{DH}=\dfrac{1}{2}\times 6=3$



⇨等腰梯形的面積=$\dfrac{(6+12)\times 3\sqrt{3}}{2}=27\sqrt{3}$ 。

4.作梯形的高$\overline{AH}$ ，交$\overline{EF}$於 G 點，交$\overline{CD}$於 H 點



$\because \overline{AB} // \overline{CD} // \overline{EF}$ 且 $\overline{AE}=\overline{ED}$　$\therefore \overline{AG}=\overline{GH}$ (設為 k)

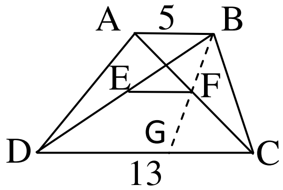
又$\because \overline{EF}$為兩腰中點連線

$\therefore \dfrac{6+\overline{CD}}{2}=10$　⇨ $\overline{CD}=14$

故梯形的面積 AEFB：梯形 ABCD 的面積

$=\dfrac{(6+10)\times k}{2}$ ： $\dfrac{(6+14)\times 2k}{2}=16：40=2：5$。

5.連$\overleftrightarrow{BF}$交$\overline{CD}$於 G 點，則



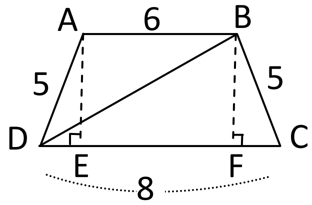
△ABF≅△CGF(AAS 或 ASA 性質)

⇨ $\overline{BF}=\overline{FG}$ 、 $\overline{CG}=\overline{AB}=5$

又∵E、F分別為$\overline{BD}$與$\overline{BG}$的中點

$\therefore \overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{DG}=\frac{13-5}{2}=4$ 。

6.作等腰梯形 ABCD 的高$\overline{AE}$與$\overline{BF}$，則

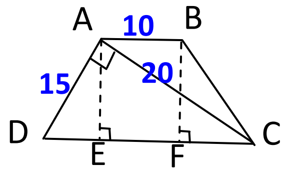


$\overline{DE}=\overline{CF}=\frac{8-6}{2}=1$(∵等腰梯形)

故$\overline{BF}=\sqrt{5^2-1^2}=\sqrt{24}$，

⇨$\overline{BD}=\sqrt{(8-1)^2+\sqrt{24}^2}=\sqrt{49+24}=\sqrt{73}$ 。

7.作梯形 ABCD 的高$\overline{AE}$與$\overline{BF}$，則



$\overline{AE}=\frac{\overline{AD}\times\overline{AC}}{\overline{CD}}=\frac{15\times 20}{25}=12$

(其中$\overline{CD}=\sqrt{15^2+20^2}=25$)

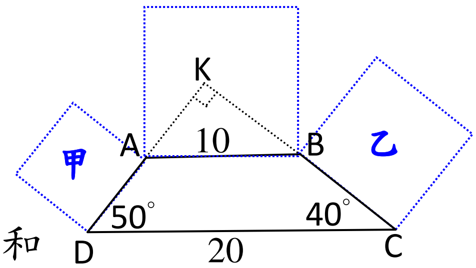
故$\overline{DE}=\sqrt{15^2-12^2}=9$，

⇨$\overline{BC}=\sqrt{12^2+(25-9-10)^2}=\sqrt{144+36}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$ 。

8.方法一：

延長$\overline{AD}$、$\overline{BC}$交於 K 點，則△AKB 為直角三角形，且$\overline{CD}=2\overline{AB}$

⇨$\overline{KA}=\overline{DA}$ 、 $\overline{KB}=\overline{BC}$



故甲、乙兩正方形的面積和

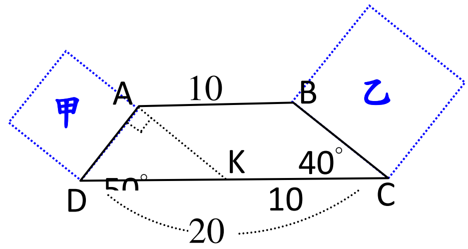
=分別以$\overline{AK}$ 、 $\overline{BK}$為邊的正方形面積和

$=\overline{AB}$為邊的正方形面積(畢氏定理)

$=10^2=100$ 。

方法二：

作 $\overline{AK}//\overline{BC}$，交 $\overline{CD}$ 於 K 點，



則四邊形 ABCK 為平行四邊形，

⇨ $\overline{AK}=\overline{BC}$ 、 $\overline{AB}=\overline{CK}=10$

且因△AKD 為直角三角形

故甲、乙兩正方形面積和

=分別以 $\overline{AD}$ 、 $\overline{AK}$ 為邊的正方形面積和

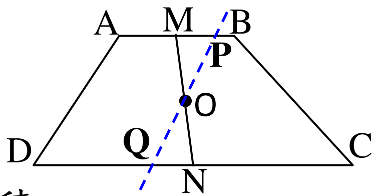
= $\overline{DK}$ 為邊的正方形面積(畢氏定理)

$=(20-10)^2=100$ 。

9.在△PMO 與△QNO 中

∵ $\overline{MO}=\overline{NO}$ 、∠PMO=∠QNO、∠MOP=∠NOQ

∴△PMO≅△QNO(ASA 性質)



故四邊形 APQD 的面積

=五邊形 AMOQD 的面積+△OMP 的面積

=五邊形 AMOQD 的面積+△OQN 的面積

=四邊形 AMND 的面積

$=\frac{1}{2}$梯形 ABCD 的面積

即過梯形上底中點與下底中點之連接線段的中點做切割線，必將梯形面積平分。

八、教學活動注意事項：

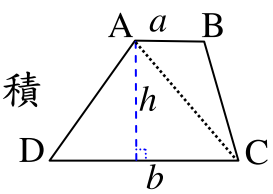
1. 教學活動時間建議如下，活動一：約 25 分鐘，活動二：約 22 分鐘，活動三：約 23 分鐘，活動四：約 20 分鐘。

2. 教師於每個活動結束時，可以做內容歸納，再次提醒學生該活動的學習重點。

3. 本單元教材設計，期待學生能利用，發現、臆測、歸納與驗證(解說)的方法，學習本單元並建立學習的自信心。

4. 在活動一的步驟 4 中，關於梯形的面積求法，有非常多種方式，今再舉一個例子，方便教師引導學生做多角度思考，如下：

連接四邊形的對角線 $\overline{AC}$ ，則：



梯形 ABCD 的面積=△ACD 的面積+△CAB 的面積

$$=\frac{1}{2}\times b\times h+\frac{1}{2}\times a\times h$$

$$=\frac{1}{2}\times(a+b)\times h=\frac{(a+b)\times h}{2}$$ 。

5. 教師在活動二的隨堂練習 5 結束後，可以告訴學生，在梯形問題的解題方法中，大多數的題目，不是作高(利用畢氏定理)、就是作平行線(利用平行四邊形的性質)，請同學留意。

6. 在活動三的隨堂練習 6 結束後，教師請學生注意，梯形面積公式，除了「上底與下底和之半乘以高」之外，也等於「兩

腰中點連線長乘以高」。

7. 在活動三的步驟 8 中，梯形兩腰中點所連的線段，課程綱要(P185)以「中線」稱之，與三角形的中線概念無法一致，故建議教師以「兩腰中點所連的線段」稱之即可，大陸教材則以「中位線」稱之。
8. 在活動四的步驟 11 中，我們所設想的梯形面積平分切割線，是通過梯形兩腰中點連線的中點，若有學生猜想為，上底中點與下底中點所連線段的中點，則應給於大大地鼓勵，只是非我們目前課程教學所設定，但我們也安排於作業中，提供學生當做練習的教材。
9. 在各活動間，教師宜巡堂走動，加強瞭解學生學習情形。
10. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

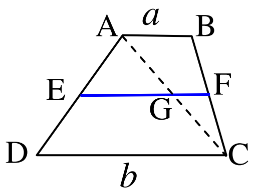
九、教學參考資料：

1. 教育部編著(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域(pp.176-177)。臺北市：教育部。
2. 周春荔、王中峰主編(2005)。奧林匹克競賽解題方法(pp.227-234)。太原市：山西教育出版社。
3. 王姣慧主編(2013)。全國初中數學競賽(pp.233-242)。杭州市：

浙江大學出版社。

4. 活動三的步驟 8 之補充。

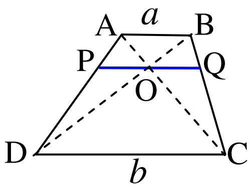
(1)若教師已經教過「平行線截比例線段性質」，可以引導學生，再用不同的方式進行，簡單說明於下：



連 $\overline{AC}$ 交 $\overline{EF}$ 於 G 點，則 G 點為 $\overline{AC}$ 中點

故 $\overline{EF}=\overline{EG}+\overline{FG}=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}a=\frac{a+b}{2}$ 。

(2)承(1)，我們稱 $\overline{EF}$ 為 a、b 的算術平均數，若繼續連 $\overline{BD}$，並過兩對角線的交點 O，作一直線 $\overline{PQ}$ 平行 $\overline{AB}$，如圖所示，我們將再發現，$\overline{PQ}$ 為 a、b 的調和平均數，



與兩腰中點連線不同，即 $\overline{PQ}=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$，

簡單說明於下：

【說明】：

$\because \overline{PO}//\overline{CD}$ $\therefore \dfrac{\overline{PO}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AD}}$；同理 $\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}$

又 $\because \overline{AB}//\overline{PQ}//\overline{CD}$ $\therefore \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{BC}}$，

即 $\dfrac{\overline{PO}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{CD}}$，可知：$\overline{PO}=\overline{OQ}$ (設為 k)

故 $\dfrac{k}{a}+\dfrac{k}{b}=\dfrac{\overline{DP}}{\overline{AD}}+\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AD}}=1$ ⇨ $bk+ak=ab$ ⇨ $k=\dfrac{ab}{a+b}$

推得：$\overline{PQ}=2k=\dfrac{2ab}{a+b}$ 。

主題 4－4：菱形與箏形

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者**：蘇進發

二、先備知識：

(一) 能瞭解線對稱的意義，並能透過平面直角坐標系，來理解圖形之線對稱的鏡射圖形。

(二) 能理解三角形的全等性質。

(三) 能認識尺規作圖，並能做基本的尺規作圖。

(四) 能理解三內角是 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 或是 $45^\circ-45^\circ-90^\circ$ 的三角形之邊長比例關係。

三、教學目標：

(一) 能從線對稱概念，理解菱形與箏形等平面圖形。

(二) 能理解菱形與箏形等圖形的面積公式。

(三) 能將菱形與箏形作圖轉換成等面積的正方形圖形。

(四) 能利用菱形與箏形的圖形做創意變化。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

從線對稱的操作，引導學生理解菱形與箏形等平面圖形，在此操弄過程中，也為後續的菱形與箏形概念說明做預備，我們更期待學生，在教師解說菱形與箏形的面積公式後，能有多元的想法。接著，透過尺規作圖，如何作等面積的圖形變換，意思是說，

將菱形或箏形轉換成等面積的矩形或正方形。

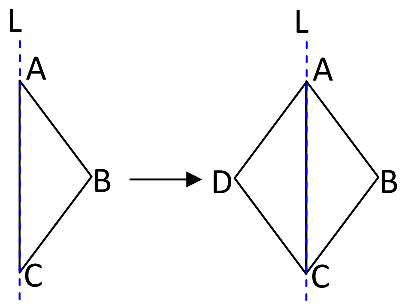
最後，我們藉由「艾薛爾鑲嵌藝術」的介紹，帶領學生做圖形切割與重組，除了知道前後圖案的面積不變之外，也與藝文領域做結合，開啟學生不同的視野，期待能激發他們的創造思考能力。

六、教學活動：

活動一：菱形與箏形

透過線對稱概念，引導學生理解菱形與箏形等平面圖形，並藉由操作與討論，瞭解菱形與箏形兩條對角線的關係，在此活動過程中，我們除了直接感受菱形與箏形的概念外，也輔以說明，幫助學生多元思考。

步驟 1：教師請學生拿出預備的等腰三角形紙片，將底邊$\overline{AC}$與直線 L 重合，然後畫出△ABC。接著，$\overline{AC}$邊不動，將等腰三角形紙片翻至直線 L 的另一側，再畫出△ADC，如右圖。



隨堂練習 1：在步驟 1 的四邊形 ABCD 中，其四個邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$的大小關係為何？

說明：

隨堂練習 2： 在步驟 1 的過程中，若學生拿出其它三角形紙片，且 $\overline{AB} \neq \overline{BC}$，則翻轉後的四邊形 ABCD 中，$\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 的大小關係為何？$\overline{BC}$ 、$\overline{CD}$ 的大小關係為何？

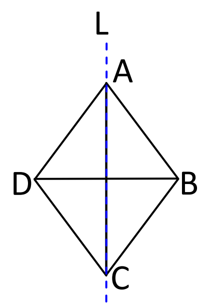
說明：

結論：

1.若四邊形的四邊等長，則我們稱此四邊形為菱形。

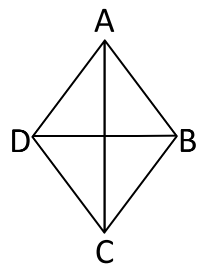
2.若四邊形的兩組鄰邊等長，則我們稱此四邊形為箏形。

步驟 2： 在步驟 1 的菱形 ABCD 中，請同學連上 $\overline{BD}$，然後觀察 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的關係，並請與同學分享你的心得。教師做最後補充說明：



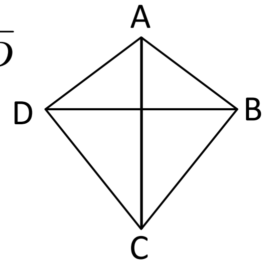
因為直線 L 為線對稱軸，所以直線 L 垂直平分 $\overline{BD}$，即 $\overline{AC}$ 垂直平分 $\overline{BD}$。若將圖形旋轉 90°，同理，$\overline{BD}$ 垂直平分 $\overline{AC}$ ，意思是說：「$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直平分。」，我們也可利用三角形全等的概念來說明，如下例題 1 所示。

例題 1： 已知四邊形 ABCD 為菱形，試說明 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 互相垂直平分。



說明：

隨堂練習 3： 已知四邊形 ABCD 為箏形，其中 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 、$\overline{BC} = \overline{CD}$ ，試說明 $\overline{AC}$ 垂直平分 $\overline{BD}$ 。



說明：

步驟 3：教師在學生練習後，做重點整理與說明，敘述如下：

(1)菱形對角線互相垂直平分。

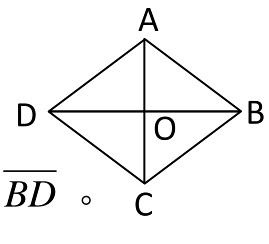
(2)箏形有一條對角線將另一條對角線垂直平分。

活動二：菱形與箏形的面積公式

說明菱形與箏形的面積公式，期待學生理解後，也能用不同的解說方式，嘗試表達與說明。

步驟 4：教師引導學生理解菱形面積公式，並透過同樣的概念練習，瞭解箏形面積公式，如下例題 2 與隨堂練習 4 所示，期待學生能有不同的說明方法，因此安排練習於指定作業中，提供學生表達的機會。

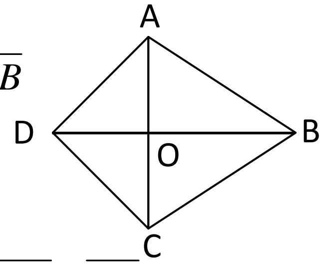
例題 2：已知菱形 ABCD，請依下列條件作答：



(1)試說明菱形 ABCD 的面積為 $\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$ 。

(2)若 $\overline{AO}=6$、$\overline{BO}=8$，則菱形 ABCD 的面積與周長分別為多少？

說明：



隨堂練習 4：已知箏形 ABCD，$\overline{AD}=\overline{CD}$ 、$\overline{AB}=\overline{CB}$，請依下列條件作答：

(1) 試說明箏形 ABCD 的面積為 $\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$ 。

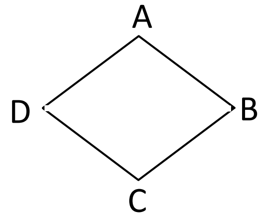
(2) 若∠ADC=90°，$\overline{DO}=5$、$\overline{BO}=8$，則箏形 ABCD 的面積為多少？

說明：

活動三：轉換菱形與箏形成等積的正方形

利用尺規操作，引導學生做等積的圖形變化，先將菱形轉換成矩形，再轉變為正方形，在此操作中，矩形的圖形並不一定要呈現，也可跳過直接做出正方形，但為了讓學生體會圖形間的變化，所以我們做出矩形，且此矩形作法並不唯一，最後，我們將箏形轉變成正方形，當作隨堂練習，供學生練習。

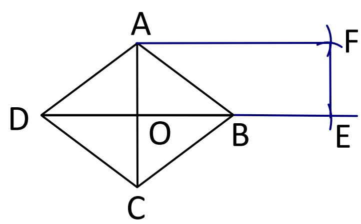
步驟 5：教師畫出菱形 ABCD，請同學討論與分享，如何作出一個面積與菱形 ABCD 相等的矩形。教師可視學生學習情況，是否要進行解說。



【解說】：

(1) 連接 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$，兩線交於 O 點。

(2) 延長 $\overline{OB}$ ，在直線上找一點 E，



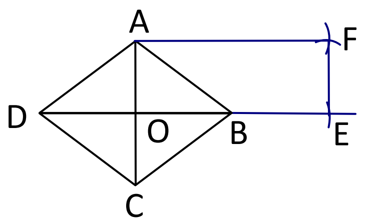
使 $\overline{OE}=\overline{BD}$ 。

(3) 作矩形 AOEF，則矩形 AOEF 與菱形 ABCD 等面積為所求。

隨堂練習 5：試問步驟 5 中，同學用不同方式，所作出的等面積矩形，其圖形是否一定是全等的圖形？

說明：

步驟 6：承步驟 5，請同學繼續思考與討論，如何作出一個面積與菱形 ABCD 相等的正方形。教師可視學生討論情況，是否要進行解說。

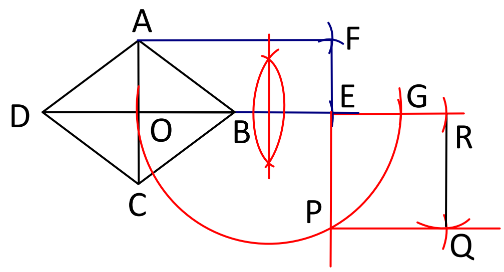


【解說】：

(1) 延長 $\overline{OE}$ ，在直線上找一點 G，使 $\overline{EG}=\overline{EF}$ 。

(2) 以 $\overline{OG}$ 為直徑，作半圓。

(3) 過 E 點作直線垂直 $\overline{OG}$ ，交半圓於 P 點。

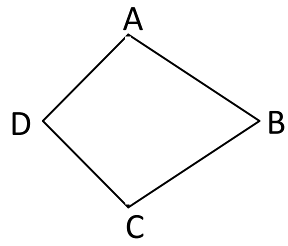


(4) 以 $\overline{EP}$ 為邊，作正方形 EPQR，則正方形 EPQR 與矩形 AOEF 的面積相等，即與菱形 ABCD 的面積相等。

隨堂練習 6：試問步驟 6 中，同學用不同方式，所作出的等面積正方形，其圖形是否一定是全等的圖形？

說明：

隨堂練習 7：試作出一個正方形，使其面積與箏形 ABCD 的面積相等。

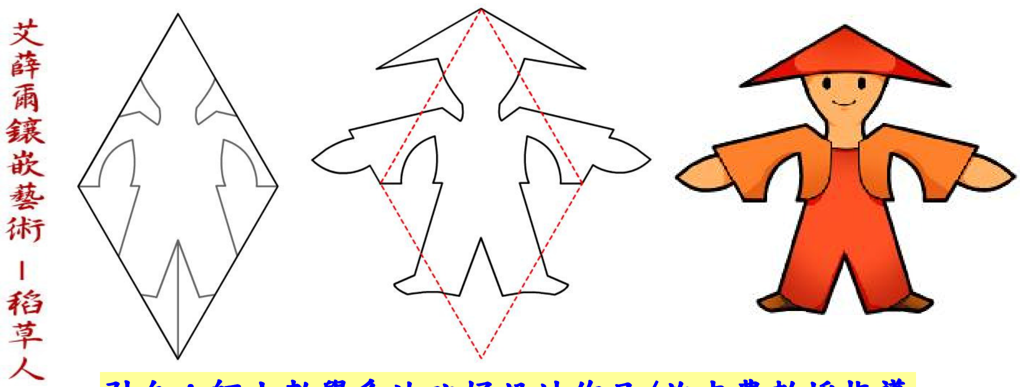


說明：

活動四：創意圖形變化

透過艾薛爾鑲嵌藝術作品之介紹，將菱形與箏形切割，藉由移動、轉動或翻動，組合成一幅全新的等面積圖案，融入藝術氣息，激發學生創造與思考，開啟他們新視野。在此活動過程中，仍不忘數學學習，提醒學生注意，圖形轉換的前後，其面積是不變，最後，我們將箏形的圖形創作，留於作業中，讓學生有足夠時間，可以呈現較完美的作品。

步驟 7：教師介紹「艾薛爾鑲嵌藝術」作品，啟發學生創造能力，並將數學與藝文做結合。

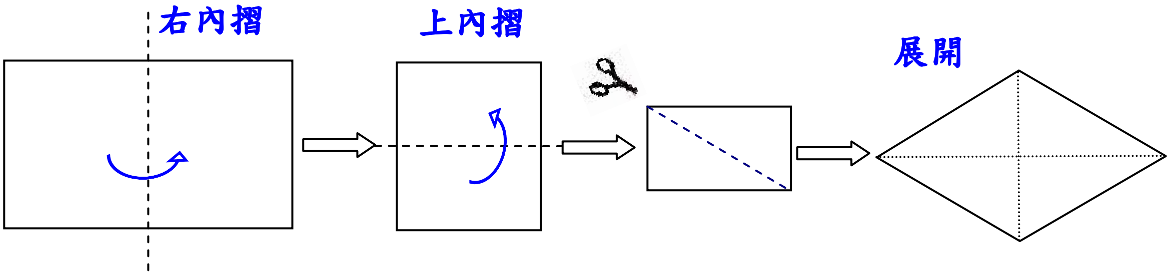


引自：師大數學系沈玟妤設計作品/許志農教授指導

步驟 8：請學生拿出矩形紙張，A4 紙張的四分之一，依教師指示，對折再對折，然後，畫上對角線的直線，並用剪刀剪開，

最後攤開紙張，可得一個菱形的圖形。

(注意對折方向與剪刀所剪的對角線位置)



步驟 9：接著，4 人一組，其中一人，先在菱形的右上與右下畫出曲線，其餘三人也描出一樣的曲線(如圖 1)。然後，剪下所描出的圖形，依指示位置移動後黏上。再將黏後圖形的左邊，畫出曲線並剪下(如圖 2)，最後，將剪下圖形移置最右邊並黏上，則一條魚即將被完成(如圖 3)。學生也可以將它們著色，並列在一起(如圖 4)。

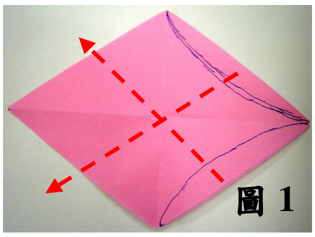


圖 1

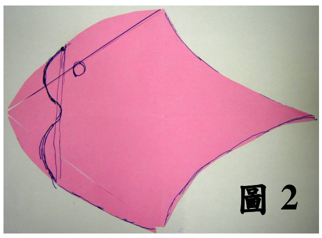


圖 2

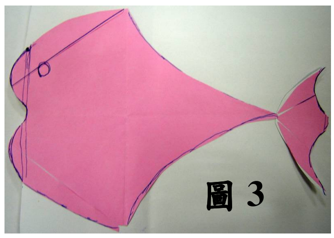
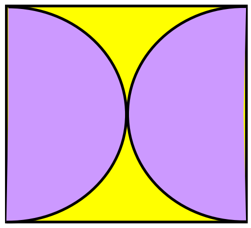


圖 3

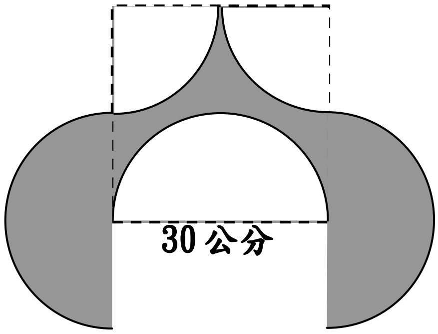

圖 4

隨堂練習 8：請學生發揮你的想像力，將右圖部分圖形剪下，做平行移動，拼成一個花瓶。



操作：

隨堂練習 9：有一頂玩具帽，其正面圖形如右圖，則其面積約為多少平方公分？



解：

教學活動參考解答：

活動一：

隨堂練習 1：$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}$ 。

隨堂練習 2：(1) $\overline{AB}=\overline{AD}$ ，(2) $\overline{BC}=\overline{CD}$ 。

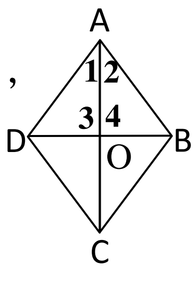
例題 1：方法(一)

(1) ∵四邊形 ABCD 為菱形，

∴ $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}$ ，又∵ $\overline{AC}=\overline{AC}$ ，

∴△ADC≅△ABC(SSS 性質)

⇨∠1=∠2



(2) ∵ $\overline{AB}=\overline{AD}$ 、∠1=∠2、$\overline{AO}=\overline{AO}$

∴△ADO≅△ABO(SAS 性質)

⇨ $\overline{OD}=\overline{OB}$ 、∠3=∠4

(3) ∵$\angle 3=\angle 4$，又$\angle 3+\angle 4=180^\circ$，

∴$\angle 3=\angle 4=90^\circ$ ⇨ $\overline{AC}\perp\overline{BD}$

故$\overline{AC}$垂直平分$\overline{BD}$

(4) 同理，$\overline{BD}$垂直平分$\overline{AC}$

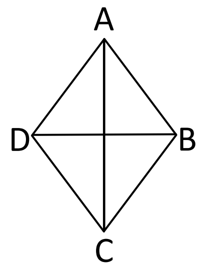
⇨ $\overline{AC}$與$\overline{BD}$互相垂直平分。

方法(二)：

(1) ∵$\overline{AB}=\overline{AD}$， ∴A 點在$\overline{BD}$的垂直平分上

又∵$\overline{BC}=\overline{CD}$，∴C 點在$\overline{BD}$的垂直平分上

故$\overline{AC}$垂直平分$\overline{BD}$



(2) 同理，$\overline{BD}$垂直平分$\overline{AC}$

⇨ $\overline{AC}$與$\overline{BD}$互相垂直平分。

隨堂練習 3：方法(一)

∵$\overline{AC}$為箏形 ABCD 的線對稱軸，

且 B、D 兩點為對稱點

∴$\overline{AC}$垂直平分$\overline{BD}$。

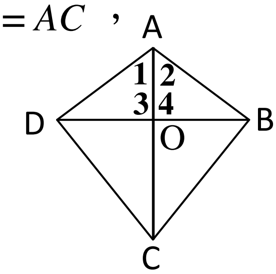
方法(二)：

(1) ∵四邊形 ABCD 為箏形，

可知$\overline{AB}=\overline{AD}$、$\overline{BC}=\overline{CD}$，又∵$\overline{AC}=\overline{AC}$，

∴$\triangle ADC\cong\triangle ABC$(SSS 性質)

⇨ $\angle 1=\angle 2$



(2) $\because \overline{AB}=\overline{AD}$ 、$\angle 1=\angle 2$、$\overline{AO}=\overline{AO}$

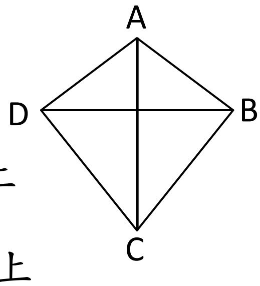
$\therefore \triangle ADO \cong \triangle ABO$(SAS 性質)

$\Rightarrow \overline{OD}=\overline{OB}$ 、$\angle 3=\angle 4$

(3) $\because \angle 3=\angle 4$，又 $\angle 3+\angle 4=180^\circ$，

$\therefore \angle 3=\angle 4=90^\circ$ $\Rightarrow \overline{AC}\perp\overline{BD}$

故 $\overline{AC}$ 垂直平分 $\overline{BD}$



方法(三)：

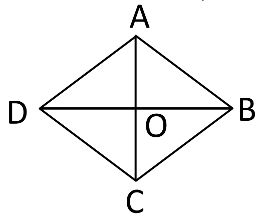
$\because \overline{AB}=\overline{AD}$， $\therefore$A 點在 $\overline{BD}$ 的垂直平分上

又 $\because \overline{BC}=\overline{CD}$，$\therefore$C 點在 $\overline{BD}$ 的垂直平分上

故 $\overline{AC}$ 垂直平分 $\overline{BD}$。

活動二：

例題 2：(1) $\because$四邊形 ABC D 為菱形，$\therefore \overline{AC}\perp\overline{BD}$ 於 O 點



故菱形 ABCD 的面積

=△ADB 的面積+△CDB 的面積

$=\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{BD}+\frac{1}{2}\times\overline{CO}\times\overline{BD}$

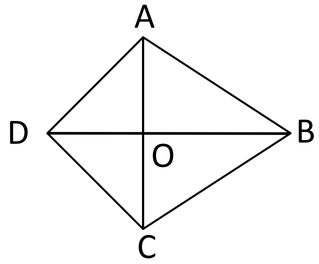
$=\frac{1}{2}\times(\overline{AO}+\overline{CO})\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$ 。

(2) 菱形 ABCD 的面積=$\frac{1}{2}\times 12\times 16=96$

菱形 ABCD 的周長=$4\times\sqrt{6^2+8^2}=4\times 10=40$ 。

隨堂練習 4：(1) ∵四邊形 ABC D 為箏形，∴$\overline{AC}\perp\overline{BD}$於 O 點

故箏形 ABCD 的面積



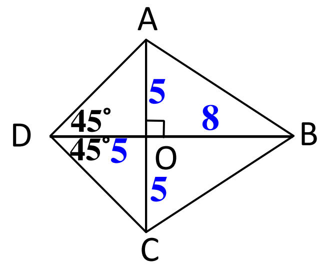
=△ADB 的面積+△CDB 的面積

$=\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{BD}+\frac{1}{2}\times\overline{CO}\times\overline{BD}$

$=\frac{1}{2}\times(\overline{AO}+\overline{CO})\times\overline{BD}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}$ 。

(2) 箏形 ABCD 的面積



$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times10\times13=65$ 。

活動三：

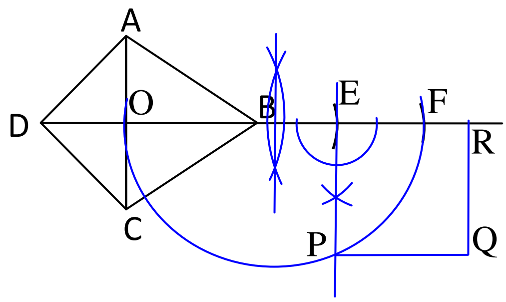
隨堂練習 5：否。

隨堂練習 6：是。

隨堂練習 7：(1) 連接$\overline{AC}$與$\overline{BD}$，兩線交於 O 點。

(2) 延長$\overline{OB}$，在直線作

$\overline{BE}=\overline{OD}$ 、$\overline{EF}=\overline{AO}$ 。



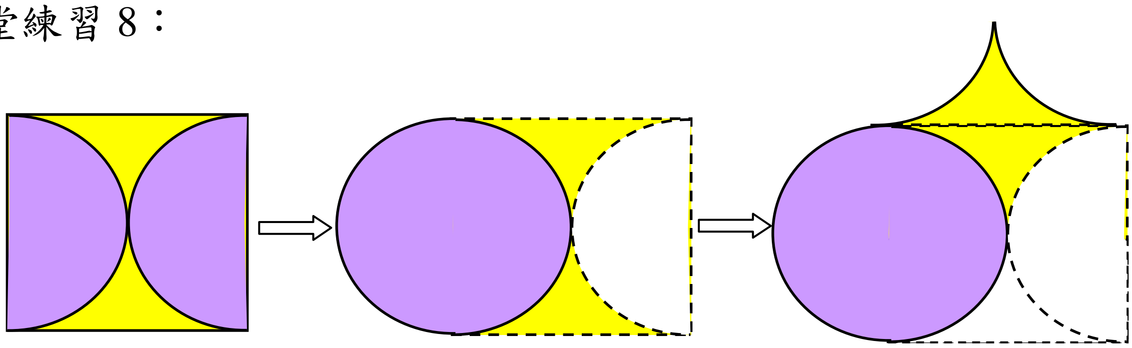
(3) 以$\overline{OF}$為直徑作半圓。

(4) 過 E 點作直線垂直$\overline{OF}$，交半圓於 P 點。

(5) 以$\overline{EP}$為邊，作正方形 EPQR，則正方形 EPQR 與箏形面積相等為所求。

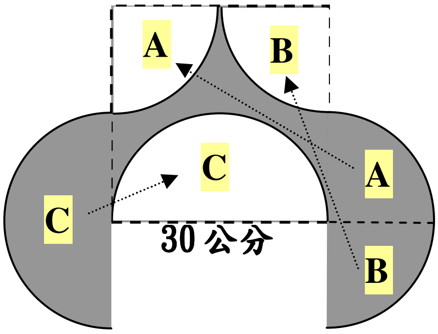
活動 4：

隨堂練習 8：



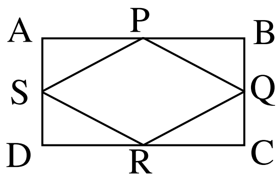
隨堂練習 9：將圖形做切割移動，可得：

$30 \times 30 = 900$ (平方公分)

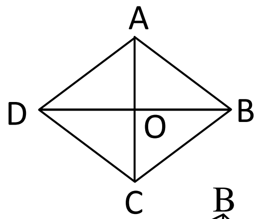


七、指定作業：

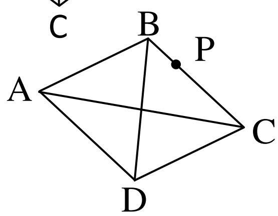
1.已知矩形 ABCD，試說明連接各邊中點所形成的新四邊形 PQRS 為菱形。



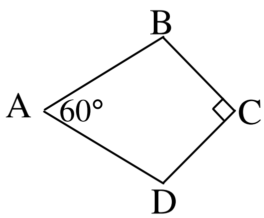
2.請用異於活動二的例題 2 之教師解釋方法，解說菱形的面積公式。



3.如圖，在菱形 ABCD 中，P 為 $\overline{BC}$ 上一點，若 $\overline{AC}=16$、$\overline{BD}=12$，則 P 點到 $\overline{AD}$ 的距離為多少？



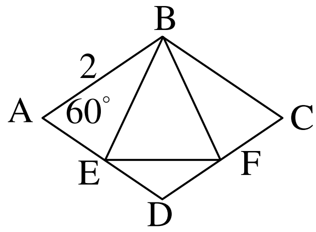
4.如圖，在四邊形 ABCD 中，若 $\overline{AB}=\overline{AD}=6$、$\overline{BC}=\overline{CD}$、$\angle A=60^\circ$、$\angle C=90^\circ$，則四邊形 ABCD 的面積為多少？



5.在菱形 ABCD 中，E、F 為 $\overline{AD}$ 、$\overline{CD}$ 的中點，

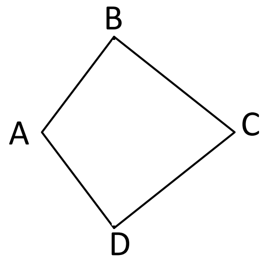
若 $\overline{AB}$ =2 公分、∠A=60°、則△BEF 的周長為

多少公分？



6.在箏形 ABCD 中，請仿照活動四，做切割後

平移與旋轉等動作，設計創意的圖案。

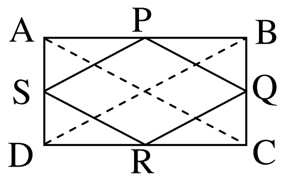


指定作業參考解答：

1. 連接 $\overline{BD}$ 、$\overline{AC}$ ，

$\because$S、P 為 $\overline{AD}$ 與 $\overline{AB}$ 的中點，

$\therefore\ \overline{SP}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ ，



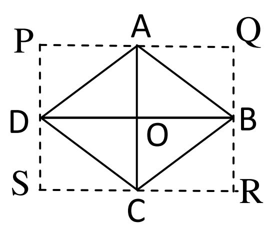
同理 $\overline{RQ}=\frac{1}{2}\overline{BD}$ 、$\overline{PQ}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ 、$\overline{SR}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

又 $\because \overline{BD}=\overline{AC}$ (四邊形 ABCD 為矩形)

$\therefore \overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{SP}$ ，故四邊形 PQRS 為菱形。

2.過菱形各頂點，作平行對角線的直線，則所形

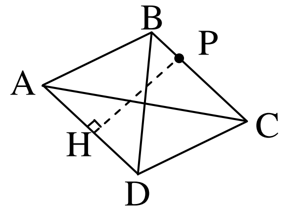
成的新四邊形 PQRS 為矩形。



故菱形 ABCD 的面積= $\frac{1}{2}$ 矩形 PQRS 的面積

$$=\frac{1}{2}\overline{PQ}\times\overline{PS}=\frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{AC}\ 。$$

3. $\because$四邊形 ABCD 為菱形，$\therefore \overline{AD}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

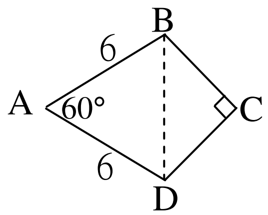


再作$\overline{PH}\perp\overline{AD}$於 H 點，則：

菱形 ABCD 的面積=$\frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{AC}=\overline{AD}\times\overline{PH}$

故$\frac{1}{2}\times12\times16=10\times\overline{PH}$，⇨$\overline{PH}$=9.6。

4.連$\overline{BD}$，$\because$四邊形 ABCD 為箏形，



$\therefore \overline{AB}=\overline{AD}=6$、$\overline{BC}=\overline{CD}$

又$\because \angle A=60^\circ$、$\angle C=90^\circ$，

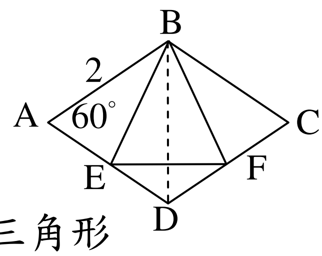
$\therefore\triangle$ABD 為正三角形、$\triangle$CBD 為等腰直角三角形

⇨$\overline{BD}=6$、$\overline{BC}=\overline{CD}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{BD}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BD}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times6=3\sqrt{2}$

故箏形 ABCD 的面積=$\triangle$ABD 的面積+$\triangle$CBD 的面積

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2+\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=9\sqrt{3}+9$$ 。

5. (1) 連$\overline{BD}$，$\because$四邊形 ABCD 為菱形，



$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}=2$

又$\because \angle A=60^\circ$，$\therefore\triangle$ABD、$\triangle$CBD 皆為正三角形

(2) $\because\triangle$ABD 為正三角形，且 E 點為$\overline{AD}$的中點

$\therefore \overline{BE}$為$\triangle$ABD 的高，也為角平分線

⇨$\overline{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$，且$\angle EBD=30^\circ$

(3) 同理，$\overline{BF}=\sqrt{3}$，且∠FBD=30°

故∵$\overline{BE}=\overline{BF}$，且∠EBF=30°+30°=60°

∴△BEF 為正三角形，⇨△BEF 的周長為$3\sqrt{3}$。

6 .略。

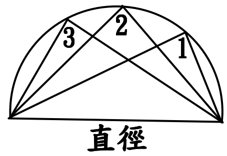
八、教學活動注意事項：

1. 教學活動時間建議如下，活動一：約 27 分鐘，活動二：約 18 分鐘，活動三：約 20 分鐘，活動四：約 25 分鐘。
2. 在活動一的教學過程中，可以請學生預備方格紙，除了方便畫圖之外，更容易明瞭線對稱的概念，此時的對稱軸，以鉛直線的方向為最佳位置，學生較易解讀。
3. 在活動一的教學過程中，透過操作認識菱形與箏形，除了吸引學生學習興趣外，也無形中建立菱形與箏形的性質，如對稱軸左右兩個三角形全等，對稱軸有垂直平分的概念，方便後續解說的進行。
4. 在活動二的教學中，教師解說過程，可以依學生的想法進行，不一定要完全按教學參考解答方式進行。
5. 在活動三的尺規作圖操作，步驟較多易出錯，教學過程應放慢速度，留意學生的作圖情形，以達最佳學習效果。
6. 在活動三之步驟 6 的解說(4)中，有關「正方形 EPQR 與矩形

AOEF 的面積相等」情形，教師請先利用一些時間與學生互動，過程如下：

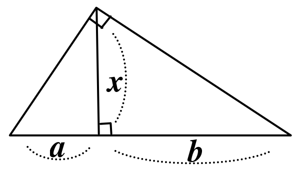
(1)請用量角器測量圖中半圓上的∠1、∠2、∠3 的度數為多少？

答：∠1=∠2=∠3=90°。



（教師可先簡單說明，容下單元再說明。）

(2)利用畢氏定理或直角三角形母子相似性質，



說明 $x^2 = a \cdot b$ 。

7. 在活動四的教學中，若教師有播放「艾薛爾鑲嵌藝術-稻草人」教學版，在播放過程中，可同時告知學生圖形的平移、旋轉，並於結束後，再次提醒學生，其面積是不變的。

8. 活動四的步驟 8，教師提醒學生注意摺紙方向，避免操作錯誤，剪紙後才發現失敗。

9. 活動四的步驟 9，因為學生在操作過程中，需要重複剪裁與黏貼等動作，容易產生誤差，所以提醒學生細心進行，則所呈現的作品，會有較佳的效果。

10. 在各活動間，教師宜巡堂走動，加強瞭解學生學習情形。

11. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 教育部編著(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域(pp.175-177)。臺北市：教育部。

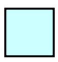
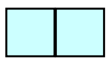
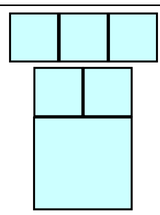
2. 傅淑婷(2013)。直角三角形母子相似定理與海龍公式，陳昭地主編：國民中學數學教材原型C冊(pp. 347-372)。新北市：國家教育研究院。

3.李光淵著。吳敏琪譯(2010)。數學三國志(pp.143-153)。新北市：美藝學苑。

4.裘宗滬著(1997)。趣味數學300題(p.219)。新竹市：凡異出版社。

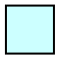
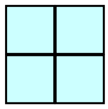
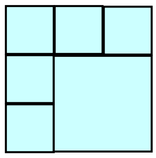
5.教師在進行活動三的作圖變化時，亦可讓學生操作並思考，不等面積的正方形轉化成矩形或正方形的變化，如下例所示：

(1)利用可以不全等的正方形鋪成矩形，依下列說明，求出 n=4、n=5 時，有多少種矩形？

n表正方形個數	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
拼法					
形狀不同的矩形個數	1	1	2		

(2)利用可以不全等的正方形鋪成正方形，求所使用的正方形之個數最少為多少？

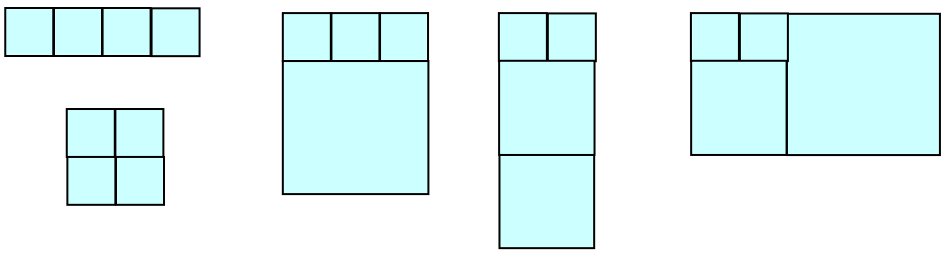
（使用的正方形邊長要小於所鋪成正方形的邊長）

n為所鋪成正方形的邊長	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5
拼法					
使用的最少正方形個數	1	4	6		

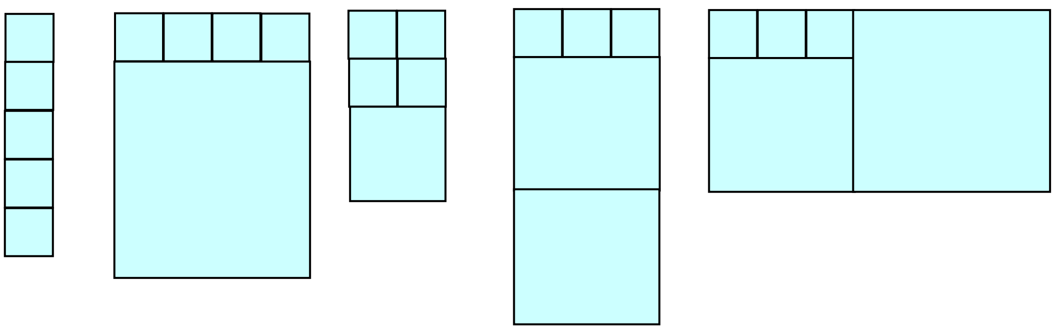
更多學習資料(http://www.squaring.net/)

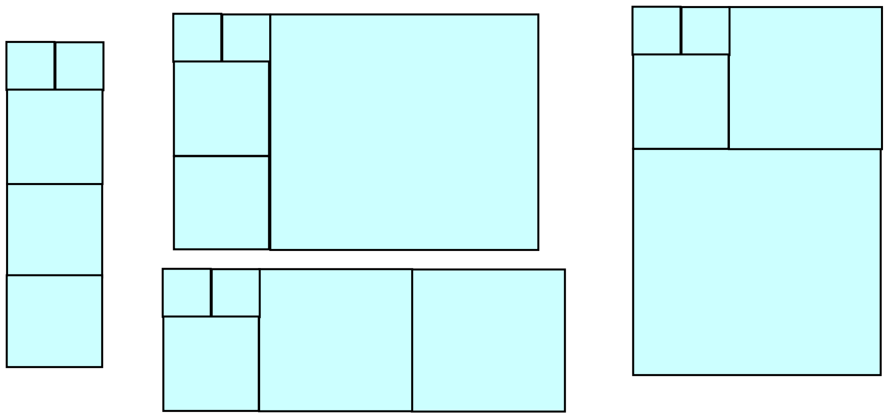
參考答案：

(1) n=4 時，形狀不同的矩形個數有 5 種。

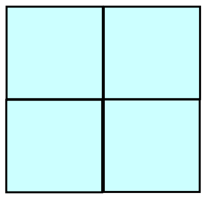


n=5 時，形狀不同的矩形個數有 9 種。

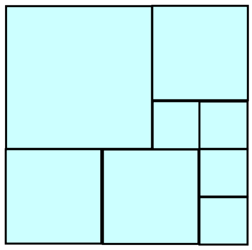




(2) n=4 時，使用的最少正方形個數 4 個。



n=5 時，使用的最少正方形個數 8 個。



主題 5－1 圓周角與圓內接四邊形

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者：**李政豐

二、先備知識：

(一) 知道圓與直線的位置關係。

(二) 知道什麼是圓的切線與切點。

(三) 知道圓的相關名詞弦、弧、弓形、扇形。

(四) 知道三角形的相似及全等性質。

(五) 知道任意三角形恰可決定一個外接圓。

(六) 能理解一線段的垂直平分線上一點，到線段的兩端點等距離。

(七) 能由圓上相異四點，按逆時針方向，依序畫出一個圓內接四邊形，並理解什麼是兩組對角。

三、教學目標：

(一) 能理解圓心到圓周上任一點都等距離。

(二) 能理解不共線三點，恰可決定一個圓。

(三) 能瞭解什麼是圓心角、圓周角、弦切角。

(四) 能瞭解同弧(弦)所對圓周角度量是圓心角的一半。

(五) 能瞭解弦切角度量等於所夾弧所對的圓周角度量。

(六) 能由圓 O 外一點 A 作圓的切線 $\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{AQ}$，瞭解 $\overline{AP}=\overline{AQ}$，連心線 $\overline{AO}$ 平分 $\angle PAQ$、$\angle POQ$，且 $\overline{AO}$ 垂直平分 $\overline{PQ}$。

(七) 能理解同弧(或弦)所對的所有圓周角都相等。

(八) 能瞭解四邊形有外接圓的充要條件是其對角互補。

(九) 已知 $\overline{AB}$ 為 ΔADB 與 ΔACB 的公共邊，則

$\angle ADB = \angle ACB \Leftrightarrow A,B,C,D$ 四點共圓。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

(一) 要讓學生能用代數計算，求得線段的中垂線方程式。

(二) 要讓學生能用尺規作圖，作出不共線三點的圓心及外接圓。

(三) 要讓學生能用尺規作圖，由圓外一點作圓的兩條切線與切點。

(四) 要能讓學生體會弦切角度量等於所夾弧所對的任意一個圓周角度量。

(五) 要讓學生能直觀的說明四點共圓的兩個條件。

六、教學活動：

活動一：平面上不共線三點，恰可決定一圓。亦即存在唯一的圓通過這三點。

例題1：給定三點坐標為$A(-2,4)$、$B(3,9)$、$C(7,7)$

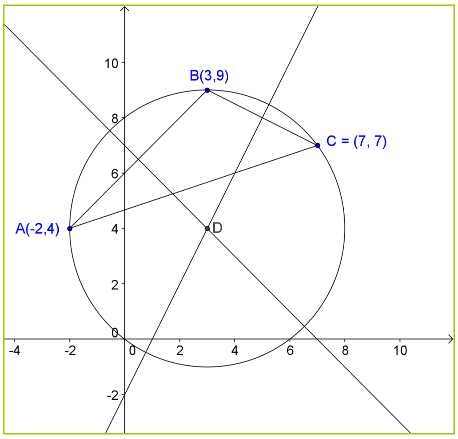


圖1

則A、B、C是否共線＿＿＿＿＿

如果$P(x,y)$是$\overline{AB}$的垂直平分線上一點，則

$\overline{PA}=\overline{PB} \Leftrightarrow (\overline{PA})^2=(\overline{PB})^2$ 則 $(x+2)^2+(y-4)^2=(x-3)^2+(y-9)^2$

展開消去平方項，即可得到垂直平分線方程式。

則$\overline{AB}$的垂直平分線方程式是＿＿＿＿＿

$\overline{BC}$的垂直平分線方程式是＿＿＿＿

兩條垂直平分線的交點坐標D是＿＿＿

$\overline{AD}=$＿＿＿＿　　$\overline{BD}=$＿＿＿＿＿　　$\overline{CD}=$＿＿＿＿

與A、B等距離的點一定在$\overline{AB}$的垂直平分線上，與B、C等距離的點一定在$\overline{BC}$的垂直平分線上。所以要與A、B、C均等距離的點必定在兩垂直平分線的交點，但是AB直線與BC直線不平行，所以兩垂直平分線也不平行，故恰有一個交點。以此交點即為圓心，圓心與三點相等的距離稱為半徑，故恰有一個圓通過三點A、B、C。

隨堂練習1：求通過$A(-3,4)$,$B(4,3)$,$C(-5,0)$的圓的圓心O及半徑

圓心坐標 ________ ，半徑=___________。

活動二：什麼是圓心角。

如圖 1，AB 弦把圓弧分成兩部分，比較長的 ADB 弧稱為優弧，比較短的 ACB 弧稱為劣弧。$\angle AOB$ 是 ACB 弧(或 AB 弦)所對應的角度，則稱以圓心 O 為頂點的 $\angle AOB$ ，是 ACB 弧(或 AB 弦)所對的圓心角。

如果我們稱ACB弧的度數,就是指ACB弧所對應的圓心角的度數。

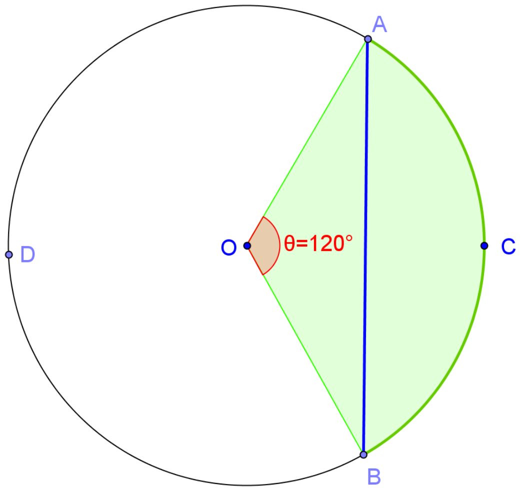


圖 1

隨堂練習 2：

(1) 若 $\angle AOB = 120^\circ$ ，則優弧 ADB 弧所對的圓心角度量是多少度__________。

(2) 半圓(或直徑)所對的圓心角是幾度_______。

(3) 四分之一圓所對的圓心角是幾度________。

(4) 圓內接正六邊形的一個邊所對的圓心角是幾度________。

活動三：什麼是圓周角

例題 1：如圖 2，足球場上有一個半徑固定的圓，若足球門是圓 O 上的一條弦，則足球員在球門之外的圓周上，哪一點 P 的射角最大？

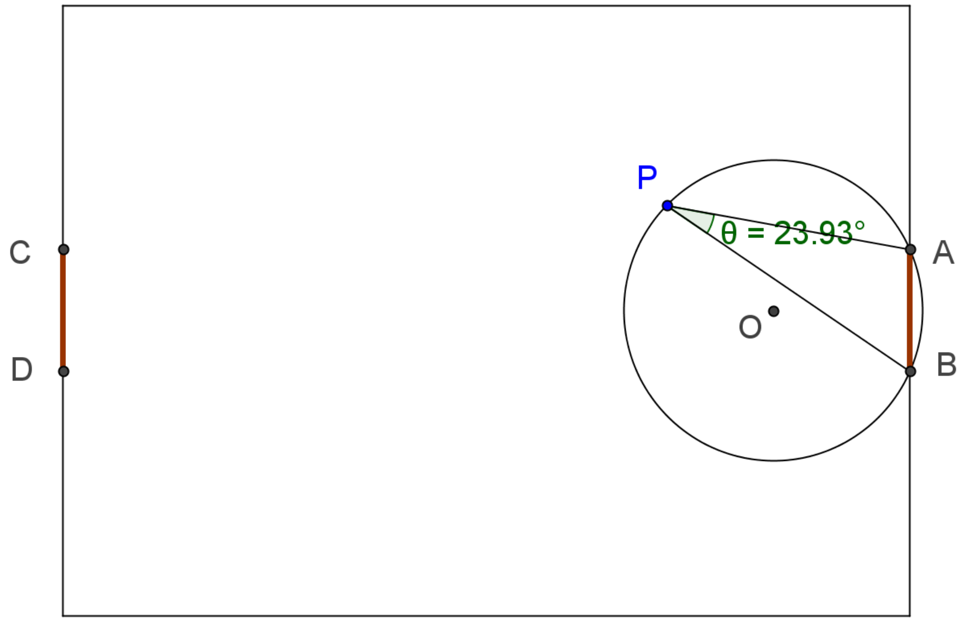


圖 2

解說 1：這個射角是指圖 2 的 $\angle APB$，若排除守門員的因素，當射角愈大，愈容易把球射入球門。

解說 2：$\angle APB$ 的頂點 P 在圓周上，稱 $\angle APB$ 是 $\overline{AB}$ 弦(或 AB 弧)所對的圓周角。

隨堂練習 3：

(1) 圓內接正三角形 ABC，BC 弧(劣弧)所對應的圓周角，即 $\angle BAC$ 是________。

(2) 圓內接正方形 $ABCD$，AB 弧(劣弧)所對應的圓周角 $\angle ACB$ 或 $\angle ADB$ 是________。

解說 3： 如圖 2，足球場上 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 是足球門，$\overline{AB}$ 是半徑固定的圓 O 上的一弦，P 是圓周上的動點，則足球員要找優弧上的哪一點 P，其射角最大？

步驟 1： 我們先來探討同弧(或弦)所對應的圓心角與圓周角的大小關係，再回來解答例題 1 的問題。

性質： 同弧所對的圓心角的度量是圓周角的兩倍。

情形一： 如圖 3,圓心 O 在 $\angle APB$ 內部，連 PO 直線交 $\overline{AB}$ 於 C。

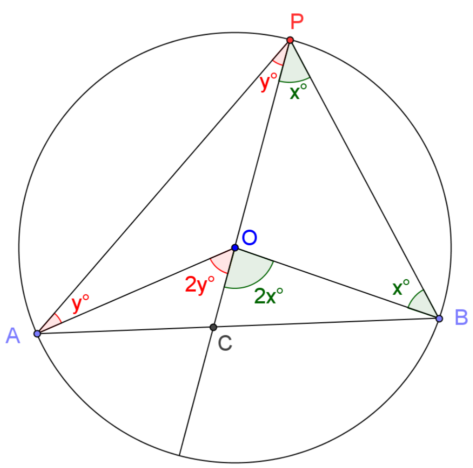


圖 3

說明： 等腰三角形 ΔAPO 中 $\angle O$ 的外角等於不相鄰的兩內角和，

$\angle OAP=\angle OPA=\ y^{\circ}$ 故 $\angle AOC=2y^{\circ}$。

等腰三角形 ΔBPO 中 $\angle O$ 的外角等於不相鄰的兩內角和，

$\angle OBP=\angle OPB=\ x^{\circ}$ 故 $\angle BOC=2x^{\circ}$。

$\angle AOB=2x^{\circ}+2y^{\circ}=2\angle APB$。

情形二：如圖 4，圓心 O 在 $\angle APB$ 的左邊外部，由 P 過 O 作直徑 $\overline{PD}$。

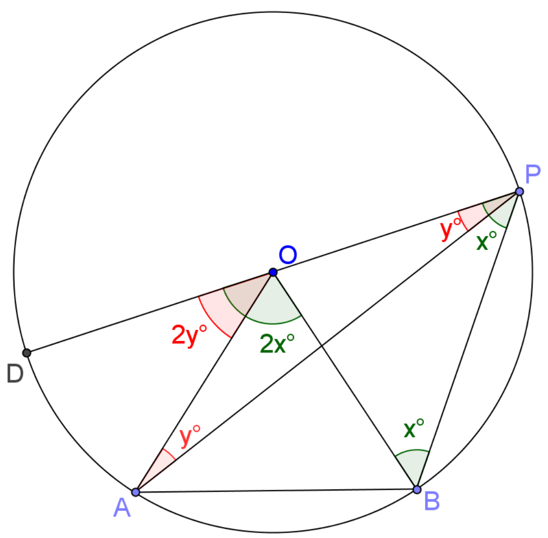


圖 4

說明：

等腰 ΔAPO 中 $\angle O$ 的外角等於不相鄰的兩內角和，

$\angle OAP=\angle OPA=y^{\circ}$， $\angle AOD=2y^{\circ}$

等腰 ΔBPO 中 $\angle O$ 的外角等於不相鄰的兩內角和，

$\angle OBP=\angle OPB=x^{\circ}$， $\angle BOD=2x^{\circ}$

$\angle \mathrm{AOB}=2x^{\circ}-2y^{\circ}=2\angle APB$

情形三： 如圖 5，圓心 O 在 $\angle APB$ 的右邊外部，由 P 過 O 作直徑 $\overline{PD}$。

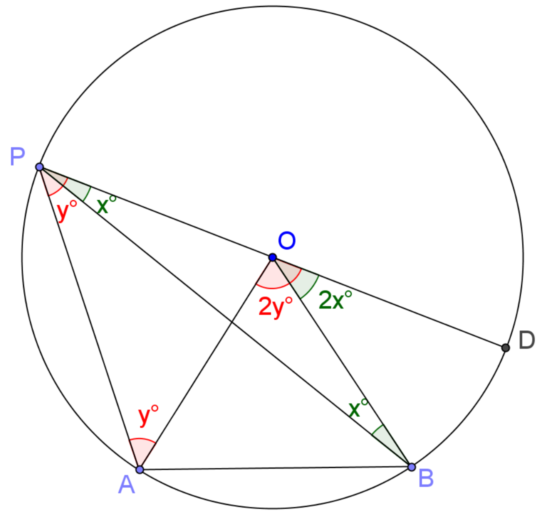


圖 5

用情形二相同的方法，可得 $\angle AOB = 2y^\circ - 2x^\circ = 2\angle APB$

因為 AB 弧(或 AB 弦)所對應的圓心角 $\angle AOB$ 是唯一的度量，而圓周角的度量是圓心角的一半。

因此例題 1 中，圓周上球門外任一點對於球門的射角都相同。在不考慮守門員等因素的情況下，射中球門的機會都相等。

隨堂練習 4： 如圖 6，ΔABC 是圓 O 的內接正三角形。$\overline{BD}$ 是直徑，E 是優弧 ACB 上的一點。

(1) 圓心角 $\angle AOB$ 是幾度__________

(2) $\angle OAD$ 的度數是多少__________

(3) $\angle AEB$ 的度數是多少__________

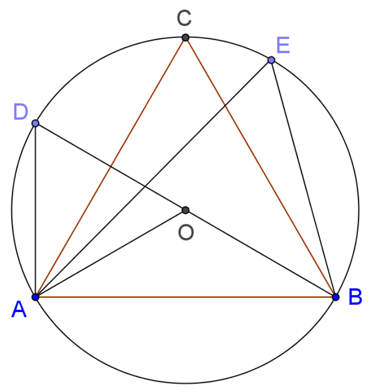


圖 6

活動四：圓的切線。

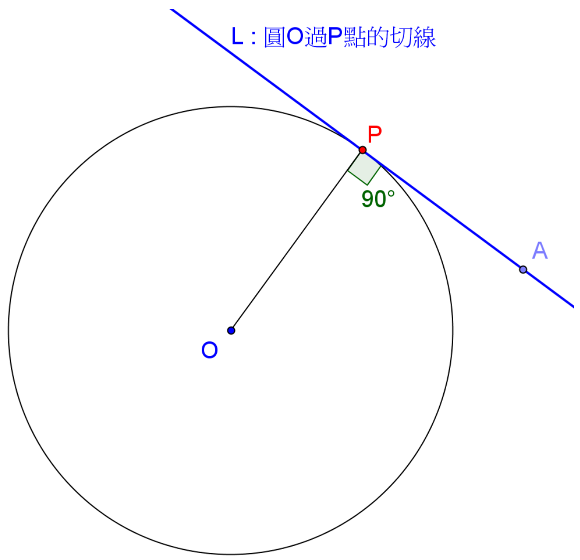


圖 7

說明 1：如圖 7，P 是圓 O 上一點，$\overline{OP}$ 是半徑，則過 P 而與半徑 $\overline{OP}$ 垂直的直線 L，稱為圓 O 過切點 P 的切線。

說明 2：圓 O 是以圓心 O 對稱的曲線，如果圓 O 與直線 L 交在 A,B 兩點，過 O 作 $\overline{AB}$ 的垂直線段 $\overline{OP}$，垂足為 $\overline{AB}$ 的中點 P，若直線 L 平行移動離開 O 點，當 L 與圓 O 恰交在一點 P

(此時 A,B,P 重合，半徑 $\overline{OP}$ 與 L 垂直)，則稱直線 L 是圓 O 過切點 P 的切線。

步驟 2：如何過圓外一點 A 作圓的切線。

我們知道過圓內一點，無法向圓作切線。過圓上一點 P，恰可作圓的一條切線(參考說明 1)，若 A 是圓外一點，過 A 如何向圓作切線，總共可以作幾條切線？

讓我們做逆向思考：

如圖 8，假設我們已經作好了由圓外一點 A，向圓作的兩條切線段，且切點分別是 P 與 Q。

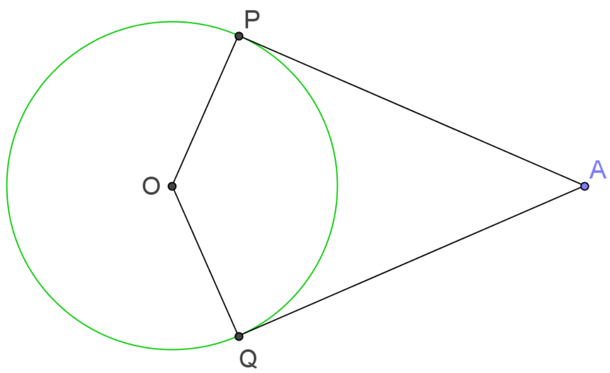


圖 8

那麼底下的條件必定成立：

(1) $\angle APO = 90^\circ$ ，亦即切線 AP 與半徑 $\overline{OP}$ 互相垂直。

(2) $\angle AQO = 90^\circ$ ，亦即切線 AQ 與半徑 $\overline{OQ}$ 互相垂直。

(3) $\angle APO$、$\angle AQO$ 必可以是，由某一個圓的直徑所對應的圓周角。

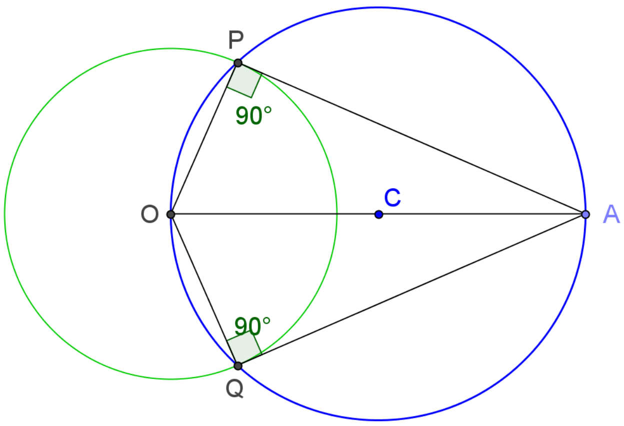


圖 9

如圖 9，若有一個圓，過不共線三點 O、A、P，且它的直徑是 $\overline{OA}$，則 $\angle APO$ 是 $\overline{OA}$ 所對應的圓周角。同理此圓也過 O、A、Q，$\angle AQO$ 也是 $\overline{OA}$ 所對應的圓周角，其度數都是 90 度。則直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{AQ}$ 就是過圓外一點 A 向圓 O 所做的切線。

於是我們經由以下的做圖方法，可以完成：『過圓外一點 A 向圓作切線的程序步驟』。

(1)找 $\overline{OA}$ 的中點 C。

(2)以 C 為圓心，$\overline{OA}$ 為直徑作圓。

(3)兩圓交在 P,Q 兩點。

(4)連接 $\overleftrightarrow{AP}$ 、$\overleftrightarrow{AQ}$ 兩直線，即為過 A 點的兩條切線。

於是，經由三角形的全等，可得到下面的三個結論：

(1) $\overline{AP}=\overline{AQ}$，過圓外一點 A 向圓作切線則切線段等長

(2)連心線 $\overline{AO}$ 平分 $\angle PAQ$ 、$\angle POQ$

(3) $\overline{AO}$ 垂直平分 $\overline{PQ}$

隨堂練習 5： 若圓 O 的半徑為 5，圓心在 $O(0,0)$，A 點坐標是 $(13,0)$，過 A 向圓作切線，切點為 P,Q，則

(1) 切線段 $\overline{AP}$ 或 $\overline{AQ}$ 的長度為____________

(2) 四邊形 $OPAQ$ 的面積為_________

(3) 直角 ΔOAP，斜邊上的高為___________

隨堂練習 6： 如圖 10，$ABCD$ 是圓 O 的外切四邊形(在圓上找四個切點分別作切線交在 A、B、C、D)，如果 $\angle AOB=70$ 度，則 $\angle COD=$______度。

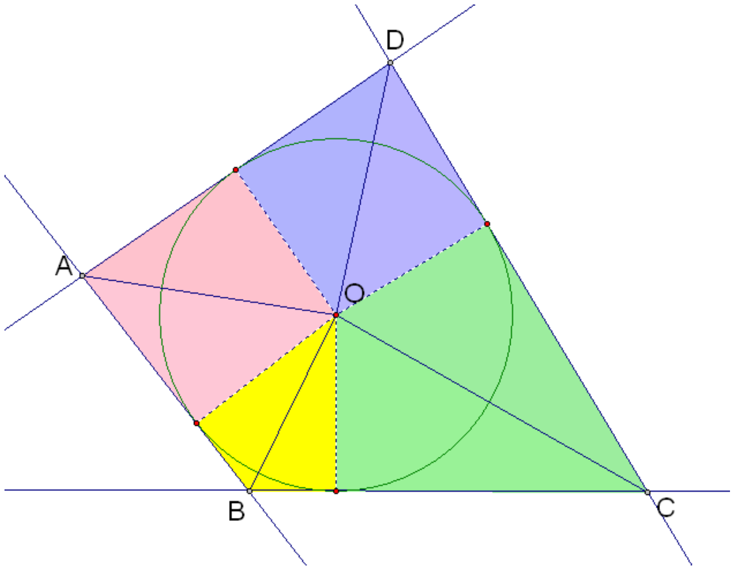


圖 10

活動五： 弦切角

圓周上兩點所連成的線段稱為弦，如圖 11，$\overline{AC}$ 是圓 O 的一弦，過端點 A 做圓的切線 AP，則 $\angle PAC$，是由切線 AP 與弦 $\overline{AC}$ 所成的夾角，稱為弦切角。

步驟 3： 如圖 12，當 $\angle PAC$ 是銳角，要如何度量弦切角 $\angle PAC$ 與劣弧 AC 弧的度數之間的關係？

(1) 過 A 作圓 O 的直徑 $\overline{AB}$，切線 AP 與半徑 $\overline{OA}$ 互相垂直

(2) $\angle PAC + \angle CAB = 90^\circ$

(3) 直徑 $\overline{AB}$ 所對的圓周角 $\angle C = 90^\circ$

(4) $\angle CBA + \angle CAB = 90^\circ$ (三角形的內角和是 180 度)

(5) 將(2)與(4)作比較，得到 $\angle PAC = \angle CBA$ 。

(6) 弦切角度數=所夾弧所對的圓周角之度數(或所夾弧度數之半)

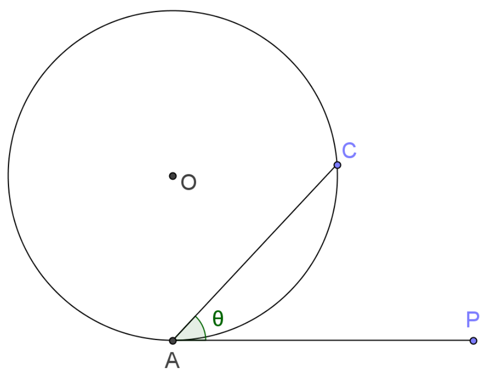


圖 11

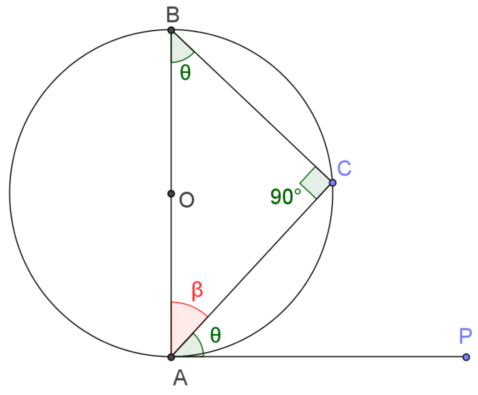


圖 12

(7) 弦切角度數=所夾弧所對應的任意圓周角度數。如圖 13(1)，因為同弧所對的圓周角都相等，$\angle CBA = \angle CDA$ ，故 $\angle PAC = \angle CDA$ 。

如圖 13(2)，鈍角 $\angle PAC = 90^\circ + \angle BAC = (1/2)$(優弧$ABC$弧度數) 也成立。

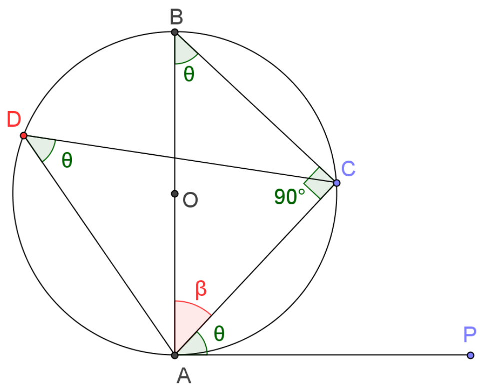


圖 13(1)

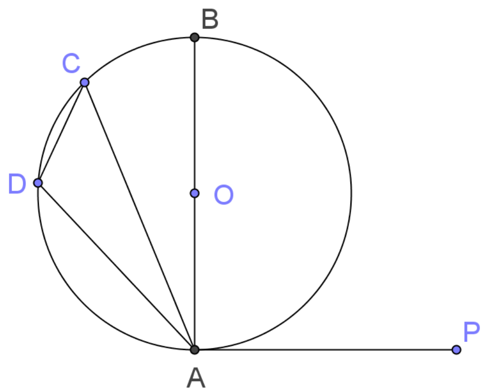


圖 13(2)

例題 1：

如圖 14，如果把圓周內部看成反射鏡，以切線為基準，光線的入射角等於反射角，則由圓周上任一點 A 的切線，以弦切角 60 度，逆時針方向往圓內發射一光束，會碰到 B 點，由 B 點的切線，以弦切角 60 度，逆時針方向反射的光束，會碰到 C 點，由 C 點的切線，以弦切角 60 度，逆時針方向反射的光束，會碰到 A 點，則光束的軌跡，亦即 ΔABC ，是一個正三角形。

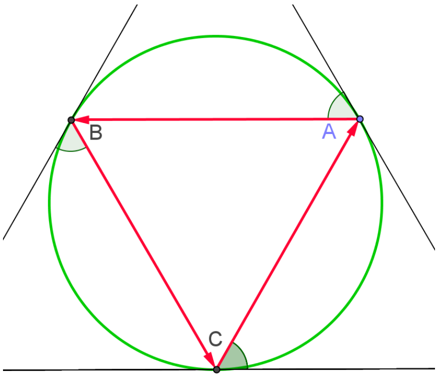


圖 14

如圖 15，如果由圓周上任一點 A 的切線，以弦切角 45 度，逆時針方向往圓內發射一光束，會碰到 B 點。B 點的反射光會碰到 C 點，C 點的反射光會碰到 D 點，D 點的反射光會碰到 A 點，則光束的軌跡，亦即四邊形 $ABCD$，是一個正方形。

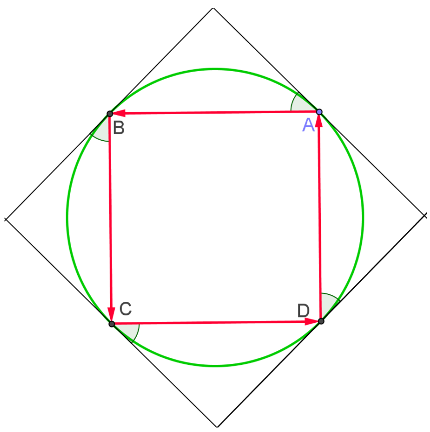


圖 15

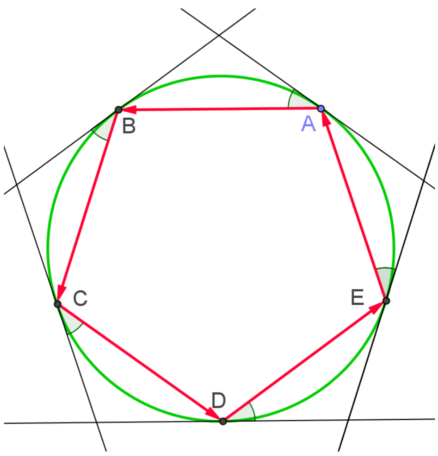


圖 16

(1) 仿照上面的作法，如果我希望軌跡是正五邊形，如圖 16，則最初由 A 射出光線的弦切角是幾度___________ 。

(2) 若由 A 射出光線的弦切角是 30 度，則軌跡是正_____邊形。

(3) 仿照上面的作法，如果我希望軌跡是正八邊形，如圖 17，則最初由 A 射出光線的弦切角是幾度___________ 。

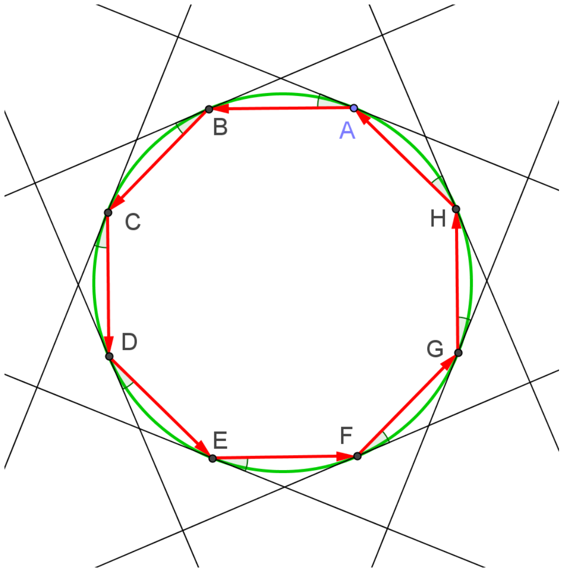


圖 17

活動六：

圓內接四邊形的條件(一)

讓我們倒過來想,若四邊形 $ABCD$ 是圓內接四邊形，如圖 18。

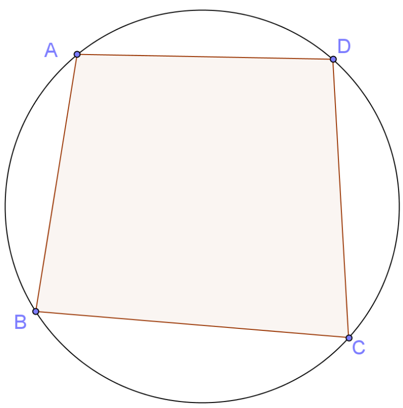


圖 18

(1) $\angle A$ 是 BCD 弧所對的圓周角

(2) $\angle C$ 是 BAD 弧所對的圓周角

(3) BCD 弧的度數+BAD 弧的度數=360 度

(4) 因為一弧所對圓周角的度數是它所對圓心角度數的一半，故 $\angle A+\angle C=180$ 度。

(5) 四邊形的內角和是 360 度，故 $\angle B+\angle D=180$ 度

我們得到一個結論：『圓內接四邊形的對角互補』

反過來想，『若一個四邊形 $ABCD$ 的對角互補，它是不是圓內接四邊形』。

如下圖 19、20，不共線的三點 A,B,C，形成一個三角形，它恰有一個外接圓，且已知 $\angle B+\angle D=180$ 度。

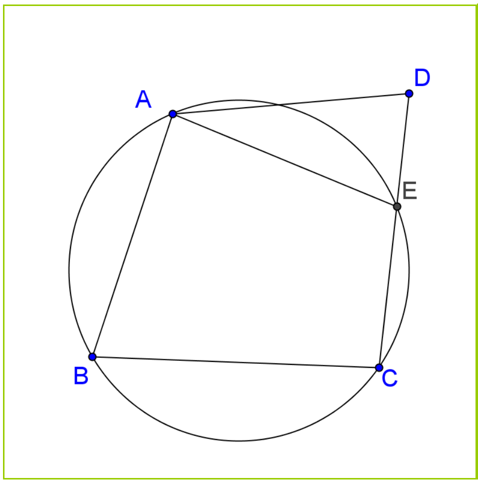


圖 19

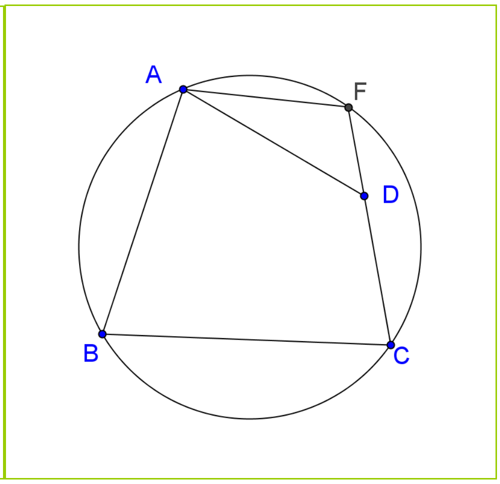


圖 20

(1) 若 D 在圓外，如圖 19，設直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 交圓於 E，因為外角 $\angle AEC>\angle D$，則 180 度$=\angle B+\angle AEC>\angle B+\angle D$，它不是對角互補。

(2) 若 D 在圓內，如圖 20，設直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 交圓於 F，因為外角 $\angle ADC > \angle F$，則 180 度$=\angle B+\angle F < \angle B+\angle ADC$，它不是對角互補。

故 D 在圓上才正確。

亦即：『若四邊形對角互補必為圓內接四邊形』。

隨堂練習 7：如下圖 21，圓內接四邊形 $ABCD$，已知 $\angle C = 110$ 度，則 $\angle BOD =$________

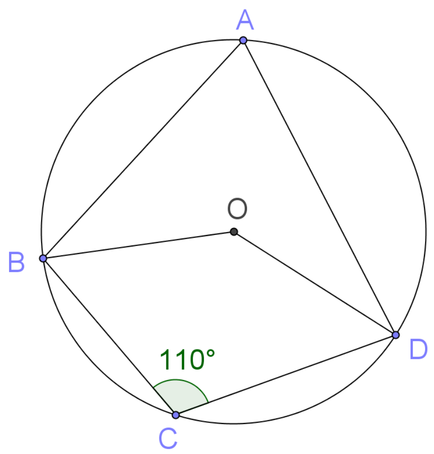


圖 21

圓內接四邊形的條件(二)

已知 $\overline{AB}$ 為 ΔADB 與 ΔACB 的公共邊，且已知 $\angle ADB = \angle ACB$，則 A,B,C,D 是否四點共圓？

已知 ΔADB 有唯一的外接圓，若已知 $\angle ADB = \angle ACB$，我們來討論 C 點與外接圓的相關位置。

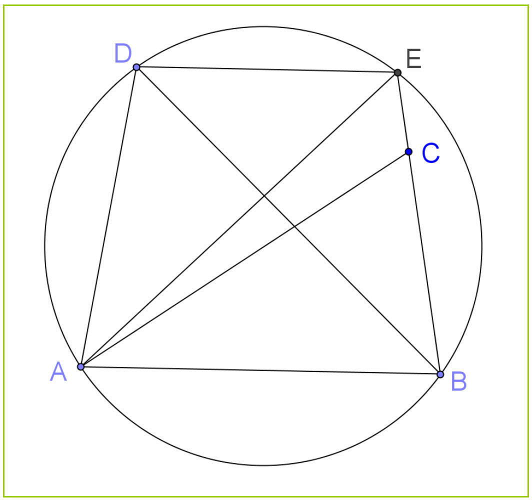


圖 22

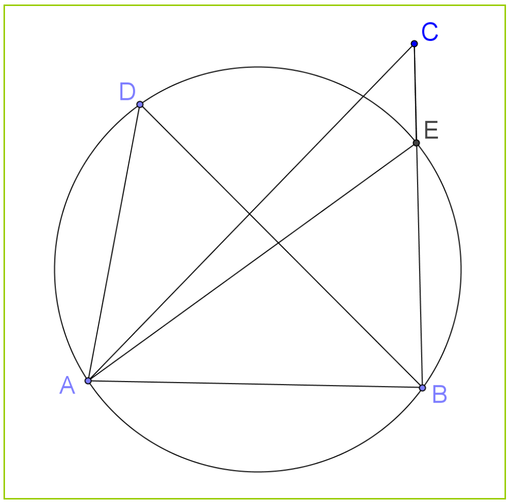


圖 23

(1) 若 C 在圓內，如圖 22，連直線 $\overleftrightarrow{CB}$，交圓於 E，

$\angle ADB = \angle AEB < \angle ACB$，不合。

(2) 若 C 在圓外，如圖 23，連直線 $\overleftrightarrow{CB}$，交圓於 E，

$\angle ADB = \angle AEB > \angle ACB$，不合。

(1)(2)兩種情形都與假設 $\angle ADB = \angle ACB$ 不合，故 C 在圓上才正確。亦即：『已知 $\overline{AB}$ 為 ΔADB 與 ΔACB 的公共邊，且已知 $\angle ADB = \angle ACB$，則 A,B,C,D 四點共圓』。

隨堂練習 8：如圖 24$ABCD$ 四點共圓，ΔBAD 是等腰直角三角形，

則 $\angle C =$______

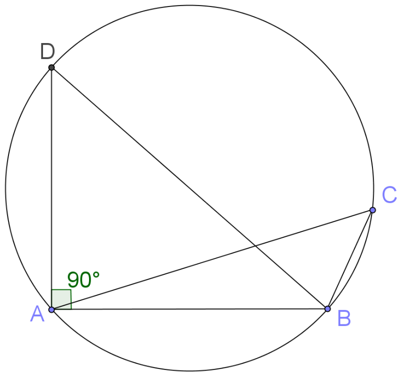


圖 24

教學活動參考解答：

活動一：

A、B、C 是否共線 <u>否</u>，$\overline{AB}$ 的中垂線是 <u>$x+y=7$</u>，$\overline{BC}$ 的中垂線是 <u>$2x-y=2$</u>。

交點坐標D是<u>(3,4)</u>，$\overline{AD}$=<u>5</u>，$\overline{BD}$=<u>5</u>，$\overline{CD}$=<u>5</u>。

隨堂練習1：過$A(-3,4)$,$B(4,3)$,$C(-5,0)$的圓心座標(0,0)，半徑=5。

活動二：

隨堂練習 2：

(1) 則優弧 ADB 弧所對圓心角度量是<u>240 度</u>。

(2) 半圓(或直徑)所對的圓心角是<u>180 度</u>。

(3) 四分之一圓所對的圓心角是<u>90 度</u>。

(4) 圓內接正六邊形的一個邊所對的圓心角是<u>60 度</u>。

活動三：

隨堂練習 3：

(1) $\angle BAC$ 是<u>60 度</u>。(2) 圓周角 $\angle ACB$ 或 $\angle ADB$ 是<u>45 度</u>。

隨堂練習 4：

(1) 圓心角 $\angle AOB$ 是<u>120 度</u>

(2) $\angle OAD$ 的度數是<u>60 度</u>

(3) $\angle AEB$ 的度數是<u>60 度</u>

活動四：

隨堂練習 5：

(1) 切線段 $\overline{AP}$ 或 $\overline{AQ}$ 的長度為<u>12</u>

(2) 四邊形 $OPAQ$ 的面積為<u>60</u>

(3) 直角ΔOAP，斜邊上的高為<u> 60/13 </u>

隨堂練習 6：$\angle COD=$<u>110 </u>度。

活動五：

例題 1：(1) 最初由 A 射出光線的弦切角是<u> 36 度 </u>。

(2) 軌跡是正<u> 六 </u>邊形。

(3) 希望軌跡是正八邊形,則最初的弦切角是<u> 22.5 度 </u>。

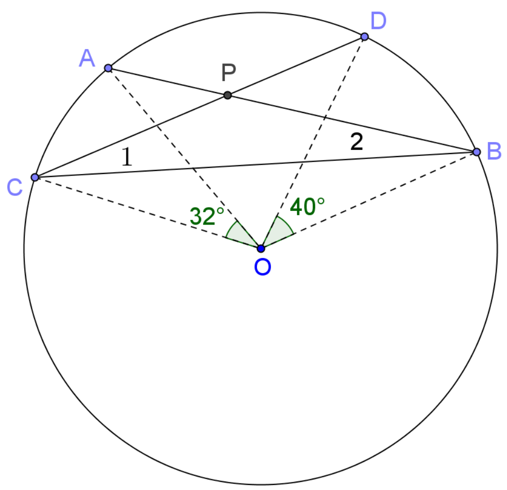
活動六：

隨堂練習 7： $\angle BOD=$<u>140 度</u>。

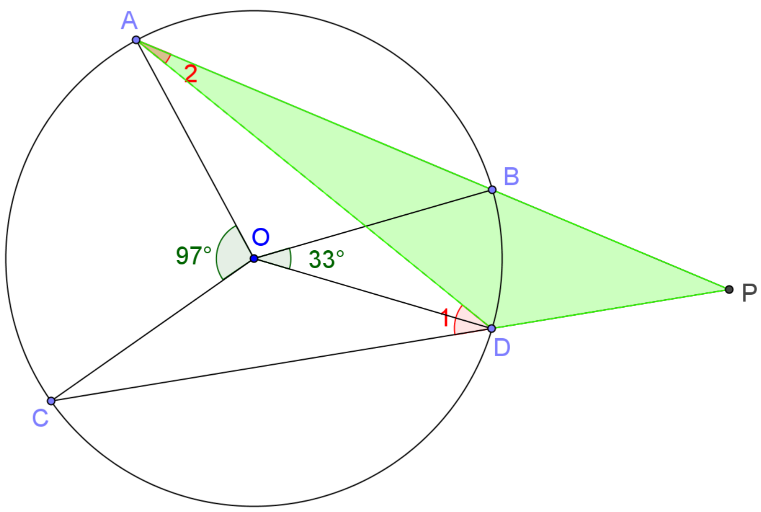
隨堂練習 8： $\angle C=$<u>45 度</u>。

七、指定作業：

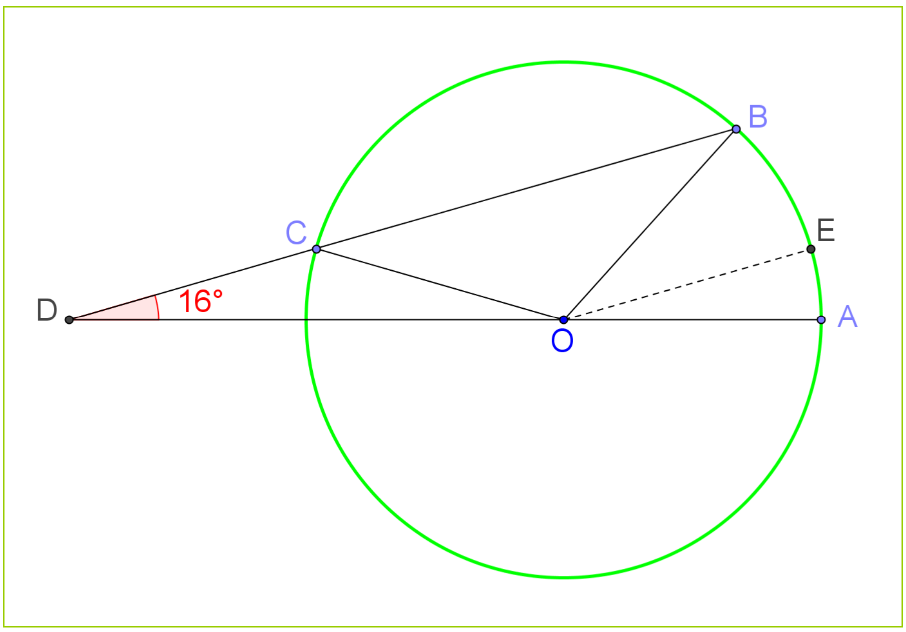
1. 如下圖，圓 O 的兩弦 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 交於 P，已知 AC 弧的度數 $=\angle AOC=32^\circ$，BD 弧的度數$=\angle BOD=40^\circ$，則圓內角 $\angle APC$ 或 $\angle BPD$ 的度數是多少？



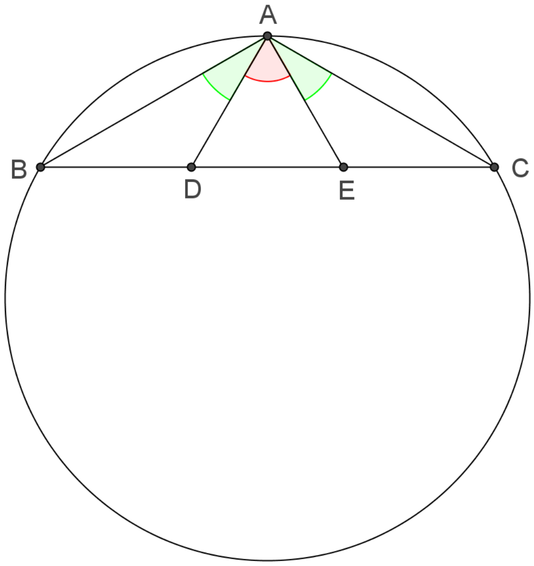
2. 如下圖，圓 O 的兩弦 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 的延長線交於 P，已知 AC 弧的度數=$\angle AOC = 97^\circ$ ，BD 弧的度數=$\angle BOD = 33^\circ$ ，則圓外角 $\angle APC$ 的度數是多少？



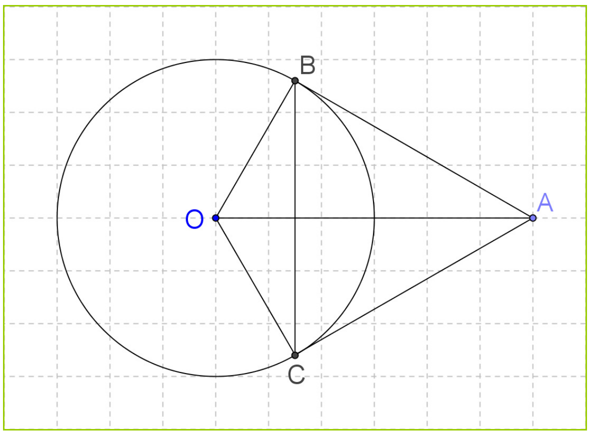
3. 如下圖，ABC 是圓 O 上的三點，BCD 三點共線，AOD 也是三點共線，且 $\overline{CD} = \overline{CO}$ ，若 $\angle CDO = 16^\circ$ 則 $\angle BOA =$______



4. 如下圖，圓內接ΔABC，$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}$，亦即 D,E 是線段$\overline{BC}$的三等分點，$\overline{BD}=\overline{AD}$，$\overline{AE}=\overline{EC}$，則$\angle BAD=$________ $\angle DAE=$________，$\angle CAE=$________。



5. 如下圖，由圓外一點 A 向圓 O 作切線，切點是 B,C，已知 $\overline{AO}=6$，$\overline{BO}=3$，則$\overline{BC}=$________。



指定作業參考答案：

1. 在三角形ΔPCB 中，三角形的外角等於不相鄰的兩內角和

$\angle APC = \angle 1 + \angle 2$，同弧所對的圓周角度數是圓心角的一半，圓周角$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle BOD$，圓周角$\angle 2 = \frac{1}{2}\angle AOC$。

故圓內角$\angle APC = \frac{1}{2}(32^\circ + 40^\circ) = 36^\circ$

2. ΔAPD 的外角等於不相鄰的兩內角和，$\angle 1 = \angle APD + \angle 2$

$\angle APD = \angle 1 - \angle 2$，同弧所對的圓周角度數是圓心角的一半，圓周角$\angle 1 = \frac{1}{2}\angle AOC$，圓周角$\angle 2 = \frac{1}{2}\angle BOD$。

故圓外角$\angle APC = \angle APD = \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}(97^\circ - 33^\circ) = 32^\circ$

3. 方法(1)：作$\overline{OE} // \overline{DB}$，$\overline{CD} = \overline{CO} \Rightarrow \angle COD = \angle CDO = 16^\circ$，

三角形ΔCDO 的外角$\angle BCO = 32^\circ$，由$\overline{BO} = \overline{CO}$ 等腰

$\Rightarrow \angle CBO = \angle BCO = 32^\circ$，

兩平行線被一截線所截則內錯角相等，且同位角相等。

$\overline{OE} // \overline{DB} \Rightarrow \angle BOE = \angle CBO = 32^\circ$，$\angle EOA = \angle CDO = 16^\circ$

$\angle BOA = \angle BOE + \angle EOA = 32^\circ + 16^\circ = 48^\circ$。

方法(2)：用圓外角，由$\angle COD = \angle CDO = 16^\circ$

$\angle CDO = \frac{1}{2}(\angle BOA - \angle COD) = 16^\circ$

將$\angle COD = 16^\circ$ 代入，得到$\angle BOA = 32^\circ + 16^\circ = 48^\circ$

4. 圓內接ΔABC，$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}$，亦即 D,E 是線段$\overline{BC}$的三等分點，

$\overline{BD}=\overline{AD}$ ，$\overline{AE}=\overline{EC}$ 。ΔADE 為正Δ ，$\angle DAE=60^{\circ}$ 。

則$\angle BAD=30^{\circ}$ ，$\angle CAE=30^{\circ}$ 。

我們可以看出當弦三等分時，圓周角或弧不一定是三等分。

5. 由圓外一點 A 向圓 O 作切線，切點是 B,C，直角ΔAOB ，已知斜邊$\overline{AO}=6$，短股$\overline{BO}=3$，則長股$\overline{BC}=3\sqrt{3}$ 。

八、教學注意事項：

1. 教學時間分配建議如下：活動一約 10 分鐘，活動二約 10 分鐘，活動三約 10 分鐘，活動四約 20 分鐘，活動五約 25 分鐘，活動六約 15 分鐘。

2. 活動一，給定三角形，求作外接圓，老師務必走動巡視學生的幾何作圖，隨時校正學生的作圖步驟與方法，務必指導每位同學熟練尺規作圖的技巧。

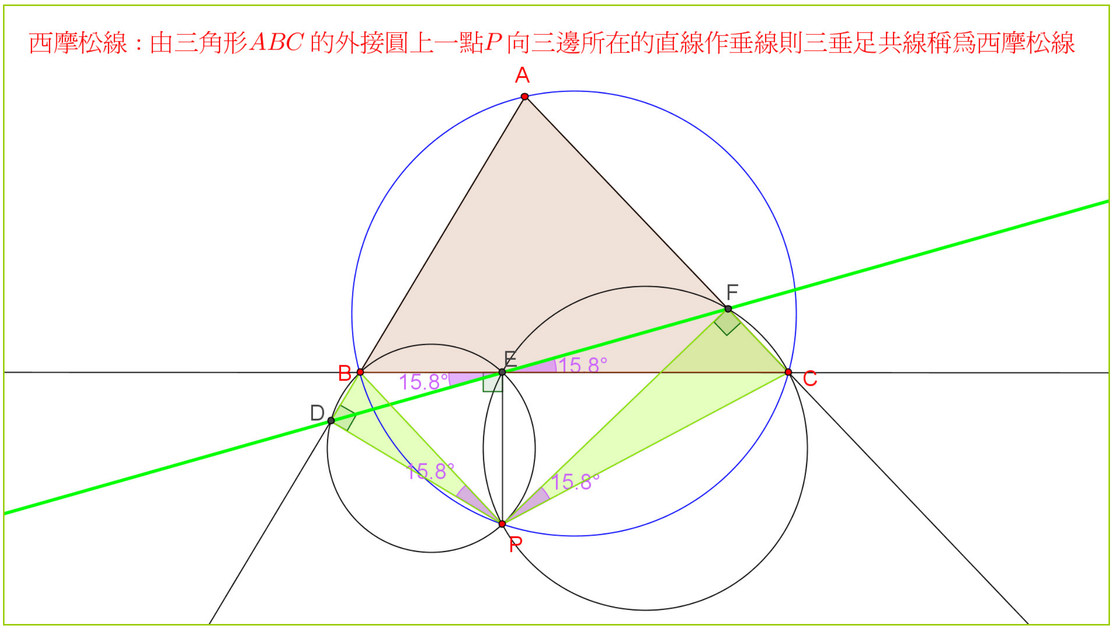
3. 弦切角的體驗，活動五的例題 1，是一個由 *Geogebra* 軟體所設計的教學元件，它能讓學生體會「弦切角的度數，等於所夾弧所對的圓周角度數，也等於所夾弧所對的圓心角度數的一半」，有了這個概念，才能去設計正多邊形的構圖，當所給的弦切角，無法在繞完一圈而形成正多邊形時，它會出現許多美麗的圖案，建議老師能帶著學生來操作這個教學元件，

體會數學學習的美感與樂趣。

4. 活動六，圓內接四邊形的條件，我們用到窮舉法，需要仔細分析三種情況，捨去不合的情形，只得到正確的結果。對國中學生而言，這是一個新的體驗，是一種分析能力的訓練，需要老師詳細的解說。
5. 教學活動的過程中，希望常常能稍微停頓一下，讓學生有思考的時間，老師熟練的課程，對初學者常感覺陌生，此時走動巡堂十分必要，藉此了解學生的困難所在。
6. 教學過程的師生互動十分重要，經常指定學生回答，討論與訂正是必要的交流，能增進學習的效果。

九、教學參考資料：

1. 西摩松線，西摩松(*Robert Simson*) 西元 1687~1768，是一位蘇格蘭數學家、格拉斯哥大學的數學教授。



西摩松線：三角形 ABC 的外接圓上一點 P 向三邊所在的直線做垂線，則三垂足 D,E,F 共線稱為西摩松線。

解說：連接直線 DE、FE，如能說明 $\angle BED = \angle FEC$，對頂角相等，也就得到三垂足 D,E,F 共線。如上圖：

$BDPE$ 四點共圓(對角互補)

$EPCF$ 四點共圓(PC 為直徑)

已知 $ABPC$ 四點共圓，故對角互補，$\angle ABP + \angle ACP = 180^\circ$

$\angle DBP = \angle FCP$，所以 $\Delta BDP \sim \Delta CFP$ (AA 相似)

故得到 $\angle BPD = \angle CPF$

$\angle BED = \angle BPD = \angle CPF = \angle FEC$，故三垂足 D,E,F 共線。

2. 托勒密定理，托勒密($Ptolemy$)西元 90 ~168，是一個古希臘時代亞歷山大里亞(現在的埃及亞歷山大里亞)的數學家、天文學家、地理學家。我們把托勒密定理，用淺顯的敘述表示為

『圓內接四邊形，對邊的乘積和等於對角線的乘積』。如圖 1：

托勒密定理：圓內接四邊形 $ABCD$，其對角線為 $\overline{AC}$ 、$\overline{BD}$，滿足

$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$ 。

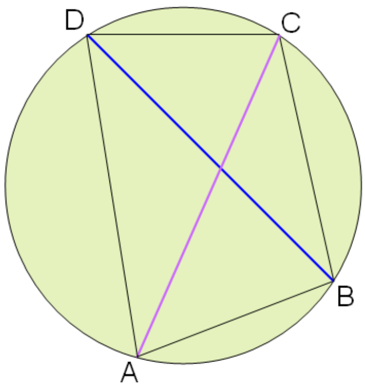


圖 1

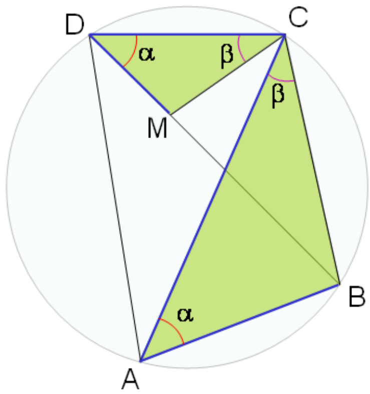


圖 2

解說: 如圖 2，取 $\angle DCM=\angle ACB=\beta$

$\angle CDM=\angle CAB=\alpha$ (同弧所對的圓周角)

$\Delta\, CDM \sim \Delta\, CAB$，$\overline{CD}:\overline{DM}=\overline{AC}:\overline{AB}$，

$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\overline{DM}\cdots\cdots(1)$

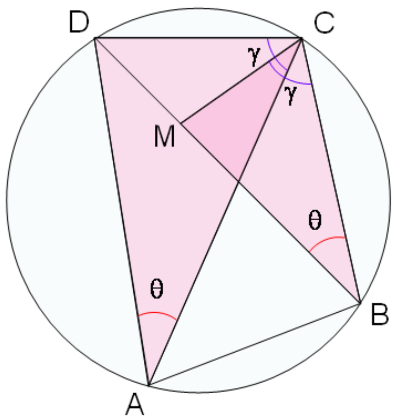


圖 3

如圖 3

$\angle DCA=\angle MCB=\gamma$ ，

$\angle DAC = \angle MBC = \theta$ (同弧所對的圓周角)

$\Delta DAC \sim \Delta MBC$，$\overline{AD} : \overline{AC} = \overline{BM} : \overline{BC}$

$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BM}$ ……(2)

(1)+(2) $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot (\overline{BM} + \overline{DM}) = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

3. 托勒密定理的應用：

(1) 如圖 1，等腰梯形上底長為 6，下底長為 8，腰長為 5，

則對角線 $\overline{AC}$ 或 $\overline{BD}$ 的長度是多少？

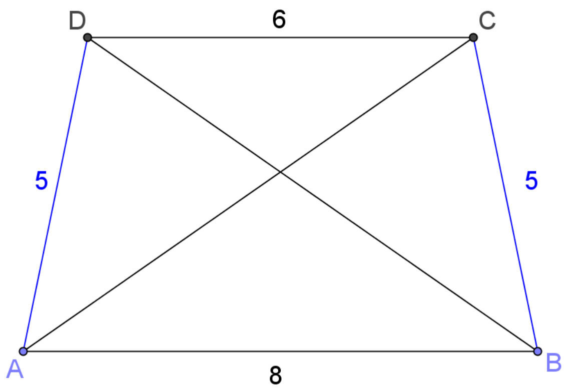


圖 1

解說：如圖 2，$ABCD$ 是等腰梯形，它一定是圓內接四邊形，

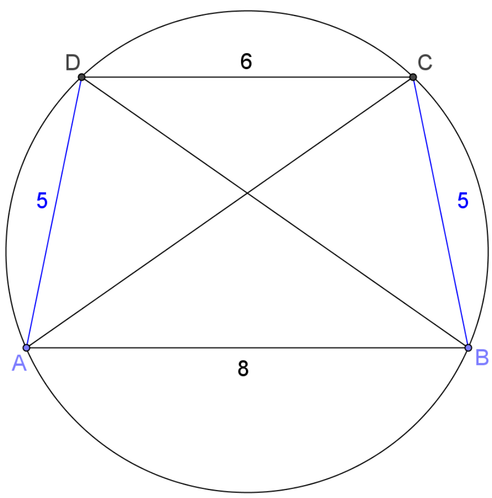


圖 2

由托勒密定理：

圓內接四邊形，對邊的乘積和等於對角線的乘積。

令 $\overline{AC}=\overline{BD}=$ d， $5\times5+6\times8=d^2 \Rightarrow d=\sqrt{73}$

(2) ΔABC 是圓內接正三角形，P 是圓上劣弧 AB 異於兩端的一點，如圖 3，則 $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PC}$

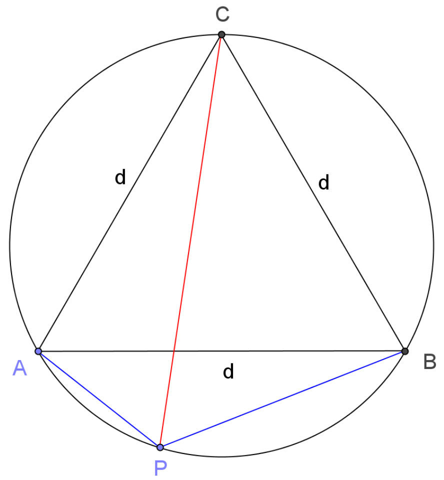


圖 3

解說：令 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=d$，由托勒密定理：圓內接四邊形，

對邊的乘積和等於對角線的乘積。

$\overline{PA}\times d+\overline{PB}\times d=\overline{PC}\times d \Rightarrow \overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PC}$

(3) 如圖 4，$ABCD$ 是正方形，兩對角線交於 E，ΔDFC 是直角三角形，$\angle F=90^\circ$，已知 $\overline{DF}=6$，$\overline{CF}=8$，試求 $\overline{EF}$ 之長。

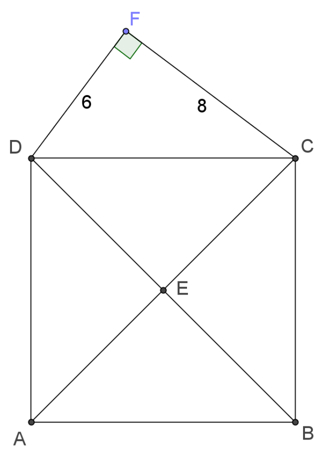


圖 4

如圖 5，四邊形 $FDEC$ 對角互補，是圓內接四邊形，由畢氏定理，正方形邊長 $\overline{CD}$ 為 10，對角線長為 $10\sqrt{2}$，

$\overline{DE}=\overline{EC}=5\sqrt{2}$。

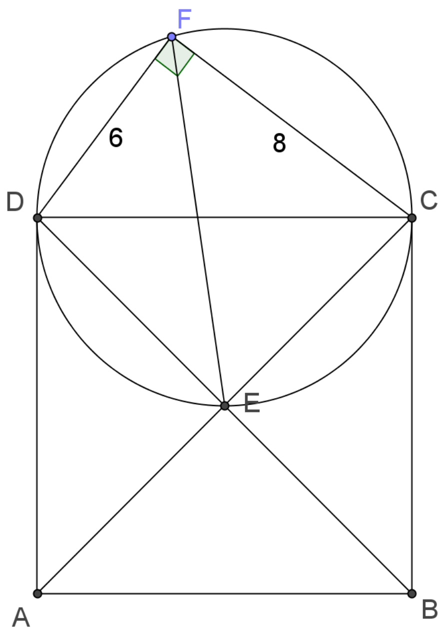
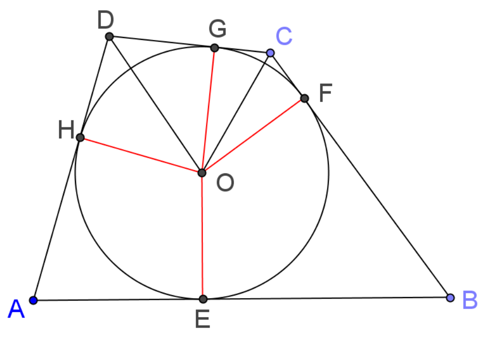


圖 5

由托勒密定理：$8\times5\sqrt{2}+6\times5\sqrt{2}=\overline{EF}\times10 \Rightarrow \overline{EF}=7\sqrt{2}$。

4. 凸四邊形 $ABCD$ 有一個內切圓 $\Leftrightarrow$ $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$



解說：$(\Rightarrow)$

設四邊形 $ABCD$ 有一個內切圓 O，故由圓外一點向圓作切線，則兩條切線段等長。由 $\overline{AH}=\overline{AE}$，$\overline{BE}=\overline{BF}$，

$\overline{CF}=\overline{CG}$，$\overline{DG}=\overline{DH}$，得到 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$。

($\Leftarrow$) 如下圖

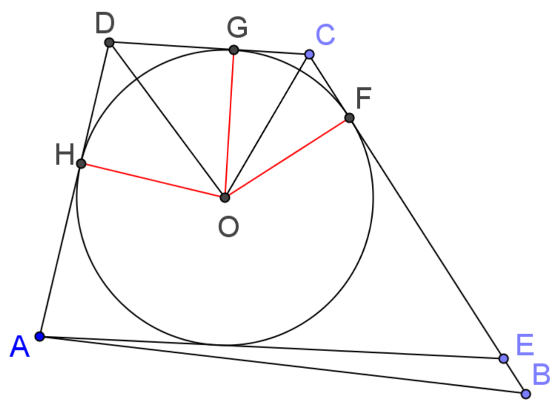
若已知 $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AD}$ ......(1)

作 $\angle ADC$、$\angle DCB$ 的分角線交於 O，以 O 為圓心 O 到直線 AD 的距離為半徑作圓。則圓 O 與 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$ 相切。

由 A 向圓 O 作切線，交直線 BC 於 E，且設 $B\neq E$。

則 $AECD$ 是圓 O 的外切四邊形，

$\overline{AE}+\overline{CD}=\overline{EC}+\overline{AD}$ ....(2)



(1)-(2) $\overline{AB}-\overline{AE}=\overline{BC}-\overline{EC}=\overline{BE}$(當 E 在 B,C 之間)

或 (2)-(1) $\overline{AE}-\overline{AB}=\overline{EC}-\overline{BC}=\overline{BE}$ (當 B 在 E,C 之間)

與「三角形兩邊之差小於第三邊」不合。故 $B=E$。

亦即 $ABCD$ 是圓 O 的外切四邊形。

5. 參考文獻：

(1) 李政豐、陳昭地 (2013)。內切圓和直角三角形。陳昭地主

編：國民中學數學教材原型 C 冊。新北市：國家教育研究院。

(2) 洪有情等(2010)。九年國教國中數學課本第五冊。新北市：康軒文教事業股份有限公司。

主題 5－2 圓冪性質

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者：**李政豐

二、先備知識：

(一) 知道兩平行線被一截線所截，則內錯角相等。

(二) 知道兩三角形相似，則對應邊成比例。

(三) 知道等腰梯形的意義及其性質。

(四) 知道什麼是兩圓的內、外公切線。

(五) 能由圓外一點向圓做切線，並能計算切線段長。

(六) 知道圓外切四邊形，兩組對邊和相等。

(七) 能瞭解四邊形有外接圓的充要條件是其對角互補。

(八) 知道弦切角度數等於所夾弧所對的圓周角度數。

(九) 知道直角三角形的短股：長股：斜邊=1：$\sqrt{3}$：2，則對應的內角度數為 30 度,60 度,90 度。

三、教學目標：

(一) 能理解平行線截等弧(或等弦)的性質。

(二) 能瞭解每一個等腰梯形恰有一個外接圓。

(三) 能理解公切線段長度計算的方法(包括內外公切線)。

(四) 能理解應用圓的外冪性質。

(五) 能理解應用圓的內冪性質。

(六) 能瞭解應用切割線定理。

(七) 能理解圓外角的計算方法。

(八) 能理解圓內角的計算方法。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

(一) 首先由平行線截等弧開始，鋪陳後續的工具。

(二) 說明等腰梯形恰有一個外接圓。

(三) 解釋兩圓內、外公切線的作法與長度的計算。

(四) 解說生活中的切割線定理與應用。

(五) 說明內冪性質。

(六) 由實例切入外冪性質及應用。

六、教學活動：

活動一：平行線截等弧(或等弦)

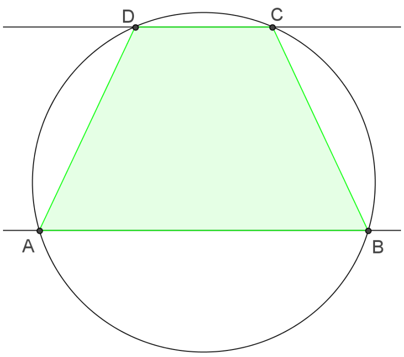


圖 1(1)

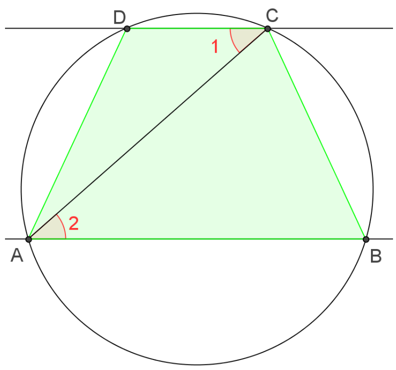


圖 1(2)

觀察圖 1(1)，要解說平行線截等弧，讓我們把解說倒過來想：

(1) 如果我們想解說「DA 弧長等於 CB 弧長」或「DA 弦長等於 CB 弦長」。

(2) 我們要先能證得「DA 弧所對的圓心角等於 CB 弧所對的圓心角」,或是「DA 弧所對的圓周角等於 CB 弧所對的圓周角」。

(3) 我們已知的條件是 $\overleftrightarrow{DC} // \overleftrightarrow{AB}$ ，要如何連貫這個解說？

如圖 1(2)，作一條補助線 $\overline{CA}$ 。

則 $\overleftrightarrow{DC} // \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow$ 內錯角相等 $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow$ 圓周角相等

$\Rightarrow$ DA 弧長等於 CB 弧長 $\Rightarrow$ 弦長相等，$\overline{DA} = \overline{CB}$，解說完畢。

隨堂練習 1： 如圖 2，A,B,C,D 在圓 O 上，圓 O 的半徑為 5，兩平行線 $\overleftrightarrow{DC}$ 、$\overleftrightarrow{AB}$ 間的距離為 3，直徑 $\overline{AB}$ 通過圓心 O，則所截弦長 $\overline{DA}$ =________ 。

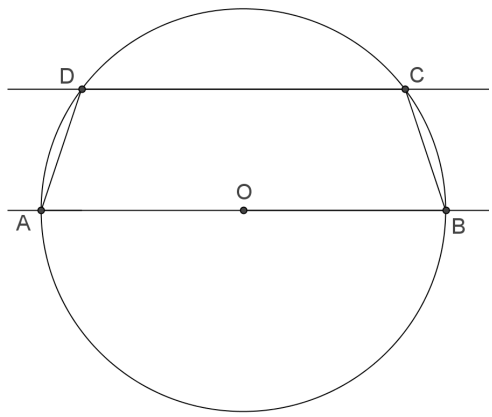
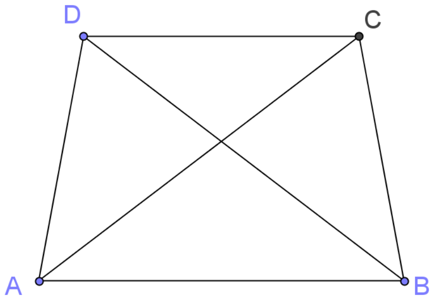


圖 2

活動二： 梯形 $ABCD$ 有外接圓的充要條件

梯形 $ABCD$，$\overline{DC}$ 平行 $\overline{AB}$ ，如下圖

若 $\angle ADC = \angle DCB \Leftrightarrow$ 梯形 $ABCD$ 有外接圓



解說：(⇒)

作 ΔABD 的外接圓，設此圓交 $\overleftrightarrow{DC}$ 直線於 E，

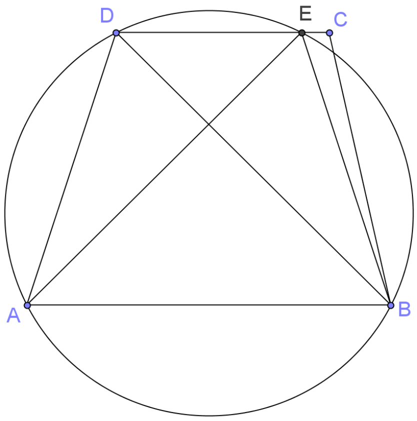


圖 3

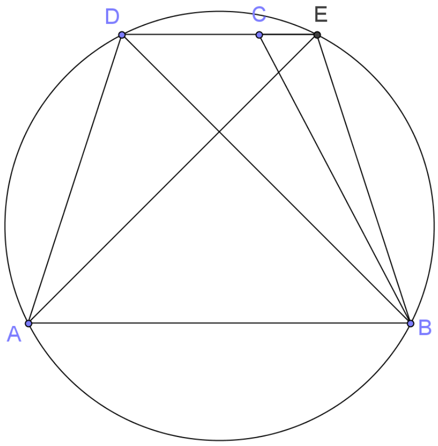


圖 4

(1) 若 C 在圓外，如圖 3

則因 $\overline{DE}$ 平行 $\overline{AB}$，AD 弧等於 BE 弧，$\overline{AD}=\overline{BE}$，$ABED$ 是等腰梯形，$\angle ADE=\angle DEB>\angle ECB$(外角)，亦即

$\angle ADC > \angle DCB$，與已知不合。

(2) 若 C 在圓內，如圖 4

則因 $\overline{DE}$ 平行 $\overline{AB}$，AD 弧等於 BE 弧，$\overline{AD}=\overline{BE}$，$ABED$ 是等腰梯形，$\angle ADE=\angle DEB < \angle DCB$(外角)

亦即 $\angle ADC < \angle DCB$，與已知不合。

(3) 故 C 在圓上，$C=E$，即梯形 $ABCD$ 四點共圓。

($\Leftarrow$)若梯形 $ABCD$ 有外接圓，如圖 5；

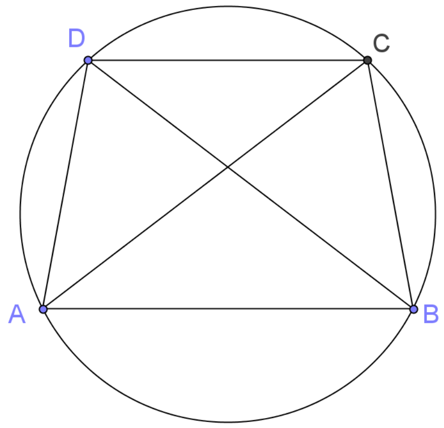


圖 5

則因 $\overline{DC}$ 平行 $\overline{AB}$ ，平行線截等弧，AD 弧等於 BE 弧，DAB 弧等於 ABC 弧，故 $\angle DCB = \angle ADC$ (等弧對等圓周角)。

隨堂練習 2：我們知道每一個等腰梯形都恰有一個外接圓。如圖已知有一個等腰梯形 $ABCD$，上底 $\overline{DC}=6$，下底 $\overline{AB}=8$ ，高 $\overline{FH}=7$ ，則外接圓 O 的面積=______

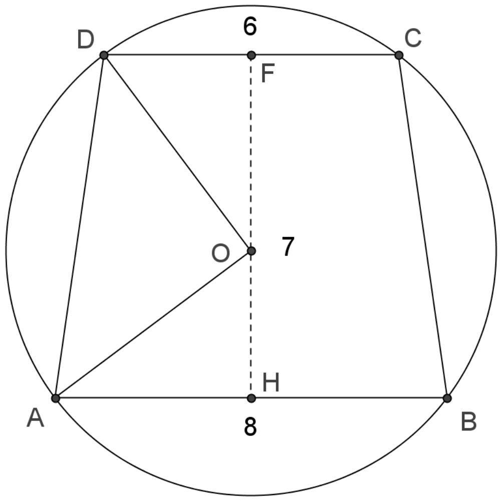
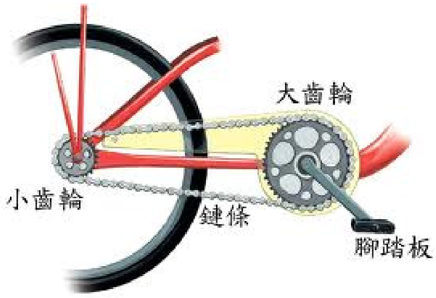


圖 6

活動三：自行車的鏈條有多長？



如上圖，你每天上學所騎的自行車它的鏈條有多長?

如下圖，爸爸的汽車引擎，帶動發電機，這傳動皮帶有多長？

如果你仔細觀察，鏈條或傳動皮帶的長度都可分成四部份來計算，用數學語言來說是：

鏈條的長度＝大圓弧長＋小圓弧長＋兩倍的外公切線段長。我們先來解釋外公切線段長的計算公式：

如圖 7，小圓的圓心為 P，小半徑為r。大圓的圓心為 O，大半徑為 R。$\overline{OP}$ 是兩圓連心線段的長度。如果我們想要用幾何作圖，要作兩圓的外公切線，讓我們先做逆向思考：

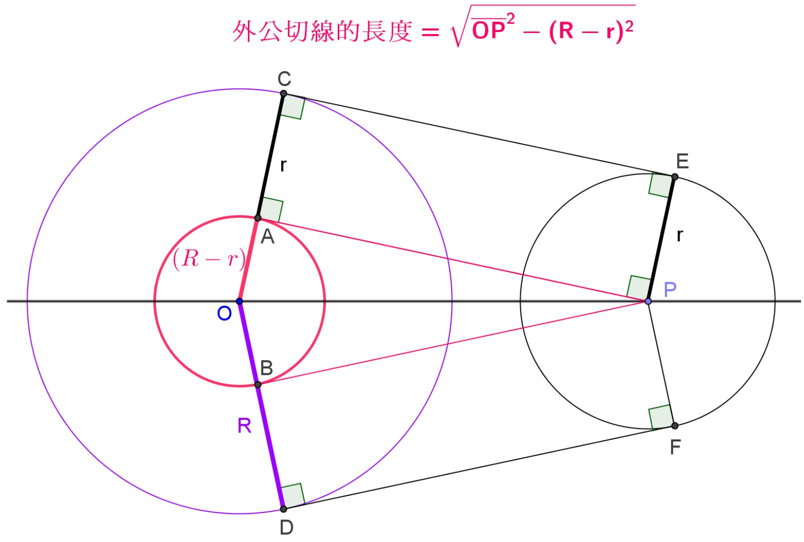


圖 7

(1) 假設$\overline{CE}$、$\overline{DF}$是兩圓的外公切線段。

(2) $EPAC$、$PFDB$是長方形(因為外公切線段$\overline{CE}$與大半徑$\overline{OC}$、小半徑$\overline{PE}$都垂直)。

(3) $\overline{OA}$是大小兩圓的半徑差$(R-r)$。

(4) 如果由P點向圓心為O，半徑是$(R-r)$的圓作切線，假設能找到切點是A,B。則切線段$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{CE}$，$\overline{BP}=\overline{DF}$。

(5) 則作直線OA交大圓於C，過P做直線OA的平行線交小圓於E。

(6) 則$\overline{CE}$就是我們的外公切線段，同理可作得另一條是$\overline{DF}$。

現在我們可以考慮外公切線正向作圖的步驟：

(1) 以O為圓心，$(R-r)$為半徑作圓。

(2) 由P向步驟(1)的圓作兩條切線，切點為A,B。

(3) 作直線OA交大圓於C，過P做直線OA的平行線交小圓於E。

(4) 則$\overline{CE}$就是我們的外公切線段，同理可作得另一條是$\overline{DF}$。

(5) 由畢氏定理，外公切線段的長度：$\overline{CE}=\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-(R-r)^2}$。

隨堂練習 3：假設圖 8 是自行車的鏈條示意圖，連心線段 $\overline{AP}=6$，

大齒輪半徑 $\overline{AE}=4$，小齒輪半徑 $\overline{PG}=1$，則鏈條長=____

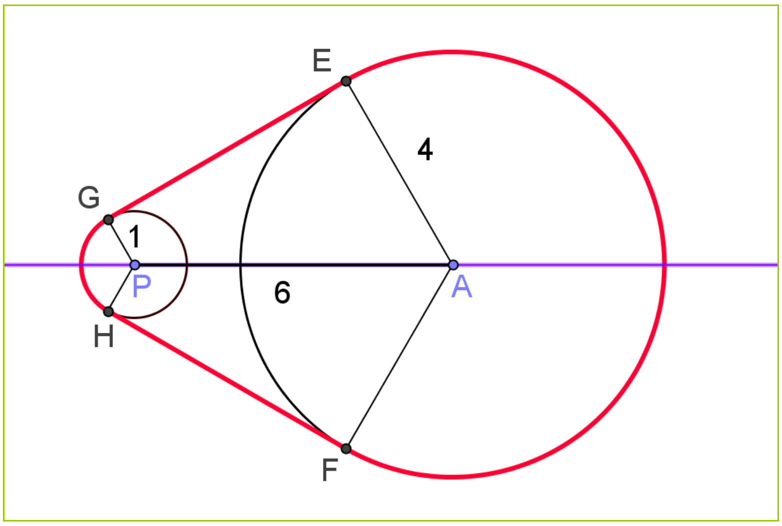
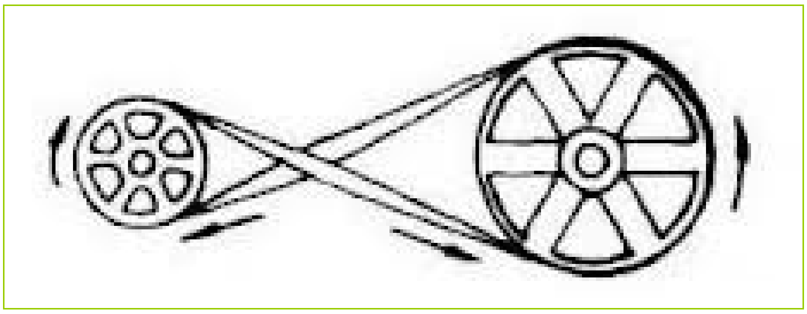


圖 8

活動四：交叉傳動的皮帶有多長？

機械傳動裝置中，有一項叫做交叉傳動，它會把馬達 A 的正方向旋轉的動力，藉由傳動皮帶(粗線)，轉變成被帶動輪軸 B 反方向旋轉的動力。因為大型電動馬達的價格比較貴，為了省錢，在工廠，常用一顆馬達 A，裝有較長的軸，可以傳動好幾個被帶動輪軸 B_1、B_2、B_3，同時做幾件工作。



例題 1：如圖 9，如果交叉傳動馬達 A 的輪軸半徑 2 公寸，被帶動

輪軸 B 的半徑 3 公寸，$\overline{AB}$ 長 10 公寸，如果只考慮平面

圖形，請問交叉傳動的皮帶(粗線)總長度是多少公寸？

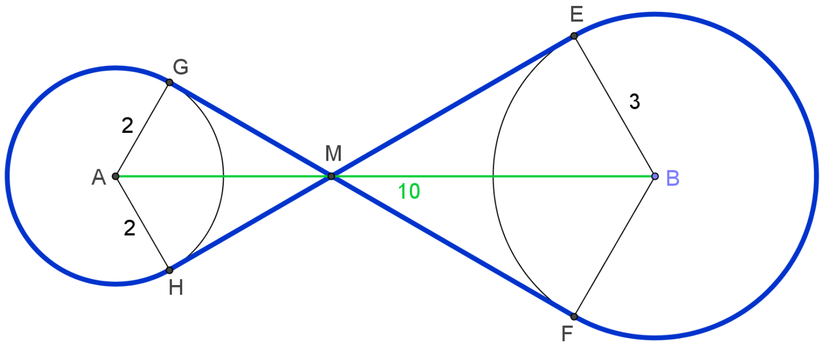


圖 9

其中線段$\overline{GF}$與小圓半徑$\overline{AG}$及大圓半徑$\overline{BF}$均垂直，且與兩圓恰交於一點，且兩圓心在$\overline{GF}$的異側，則我們稱$\overline{GF}$為圓 A 與圓 B 的一條內公切線段。上圖的二條內公切線段$\overline{HE}$與$\overline{GF}$的夾角是 60 度。

說明: (1) ΔAGM 相似於ΔBFM，對應邊成比例，$\overline{AM}$ ： $\overline{BM}=2:3$ 。

(2) $\overline{AM}+\overline{BM}=10$，故$\overline{AM}=4$, $\overline{BM}=6$ 。

(3) 直角ΔAGM，斜邊$\overline{AM}=4$，短股$\overline{AG}=2$ 。

(4) $\angle AMG=30^{\circ}$，$\angle HMG=60^{\circ}$ 。

(5) 小圓優弧 GH(較大弧)及大圓優弧 EF 的度數為 240 度。

皮帶(粗線)總長度可分四個部份：兩段內公切線長$\overline{HE}$與$\overline{GF}$，一段小圓 A 的優弧(較大弧)，一段大圓 B 的優弧。

如圖 10，ΔAJB 是一個 30 度,60 度,90 度的直角三角形

(1) $\overline{HE}=\overline{AJ}=5\sqrt{3}$ ， (2) $\overline{GF}=5\sqrt{3}$

(3) 小圓 A 的優弧 $GH = 2\pi r \cdot \frac{240^\circ}{360^\circ} = \frac{8\pi}{3}$

(4) 大圓 B 的優弧 $EF = 2\pi R \cdot \frac{240^\circ}{360^\circ} = 4\pi$

故皮帶總長度為 $\frac{20\pi}{3} + 10\sqrt{3}$

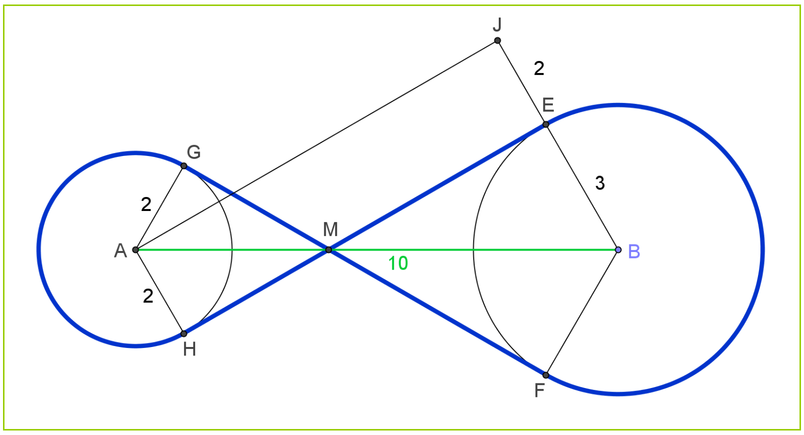


圖 10

回顧與整理：

當兩圓外離時，要如何做兩圓的內公切線？

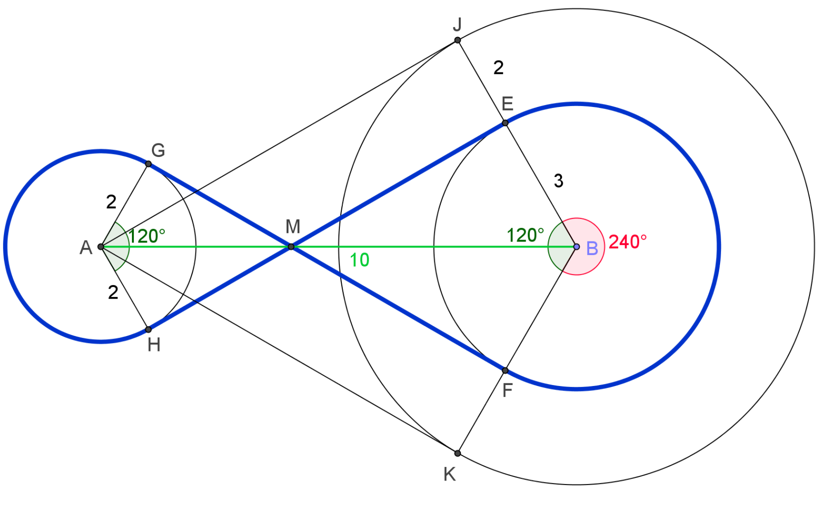


圖 11

如圖11，$AHEJ$是長方形，$\overline{HE} = \overline{AJ}$ ，只要能求得$\overline{AJ}$ ，就能得到$\overline{HE}$ 。於是整理出內公切線作圖的順序與步驟。

(1) 以B為圓心，以兩圓半徑和為新半徑，做一個同心圓。

(2) 以$\overline{AB}$為直徑作圓(由A向圓心在B的同心圓作切線)，與同心圓交在兩點J,K。

(3) 連$\overline{BJ}, \overline{BK}$，交圓$B$於$E,F$。

(4) 過A作$\overline{BK}$的平行線交圓A於G，過A作$\overline{BJ}$的平行線交圓A於H，連接HE，連接GF，則$\overline{HE}$、$\overline{GF}$為兩條內公切線段。

隨堂練習 4：已知兩圓的連心線$\overline{AB}$長為 13，圓 A 的半徑是 2，圓 B 的半徑是 3，則內公切線長度為__________ 。

活動五：土樓的直徑是多少？

圖 12 摘自 http://big5.huaxia.com/zt/zhwh/09-034/1453830.html

如圖 12，『福建土樓』是聯合國教科文組織的世界遺產，它是中國古代百姓群居和防衛合一的大型圓形樓房，形如天外飛碟，散布在青山綠水之間。

如**圖 13**，福建永定的振成樓位於湖坑鎮洪坑村，建於 1912 年，大家稱它為土樓王子。假設土樓是圓形，一位遊客很想知道振成樓的直徑是多少？但是當天卻沒開放，於是向居民借了一只 50m 的皮尺，接下來他不知道要如何去量振成樓的直徑，聰明的同學們，你要如何幫助這位遊客想辦法？

(一) 李同學想到了一個圓周長公式 $L = 2\pi r$，r 是圓的半徑。

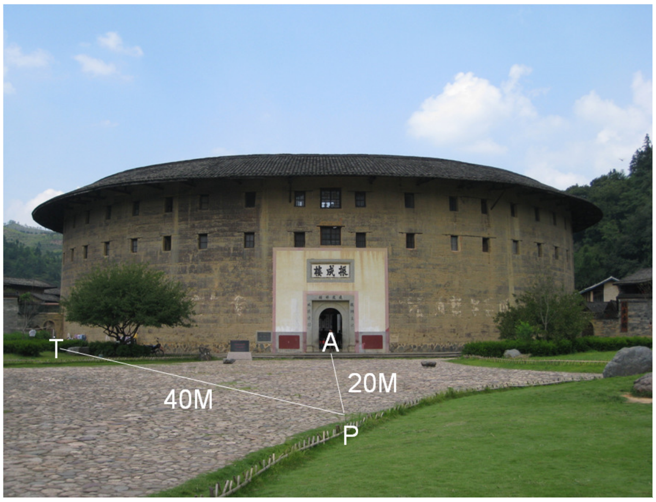
於是李同學與遊客兩人各執了 50m 皮尺的一端，繞著圓形土樓周圍量了一圈，總長為 50m×3+38.5m=188.5m，

$2\pi r = 188.5$m，$r \approx 30$m，直徑 $2r \approx 60$m。

(二) 王同學則想到了一個切割線定理 $(\overline{PT})^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$。

如圖 13，王同學則與遊客兩人各執了 50m 皮尺的一端，由土樓正門中央點起，量取正前方 20m 的定點 P，再由 P 點拉一條直線（把 50m 皮尺拉直），線上恰有一切點 T，碰到土樓的邊，量得 $\overline{PT} = 40$m。由土樓上方的俯視圖，如圖 14。

$(\overline{\mathrm{PT}})^2 = \overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PB}}$，$r$ 是圓的半徑，$(40)^2 = 20 \times (20 + 2r)$ 得 $2r = 60$m。



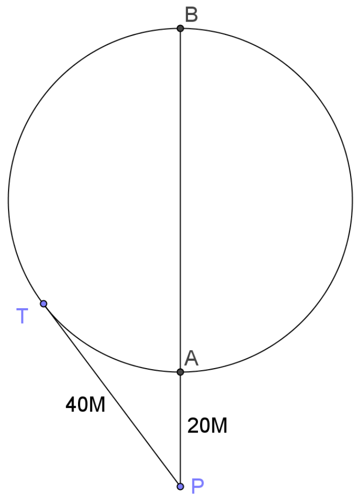


圖 13　　　　　　　　圖 14

圖 13 摘自 http://www.wretch.cc/blog/vin1070/6168987

王同學是用切割線定理$\left(\overline{PT}\right)^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$，要瞭解切割線定理，必先複習弦切角定理：「弦切角的度數等於所夾弧所對的圓周角度數」。

切割線定理：如圖 15，$\overline{PT}$ 是切線段，$\overline{PB}$ 是割線段交圓於 A、B，則$\left(\overline{PT}\right)^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$。

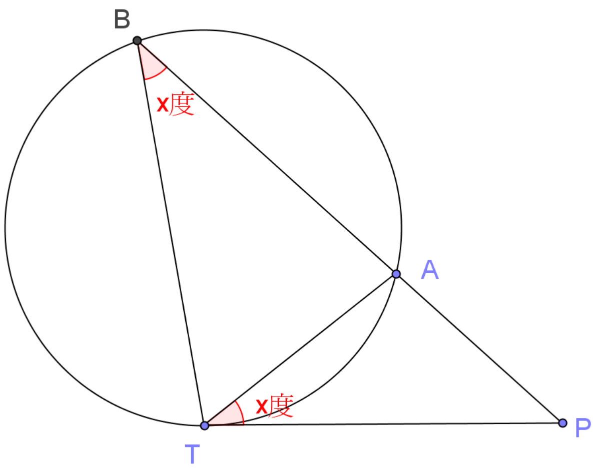
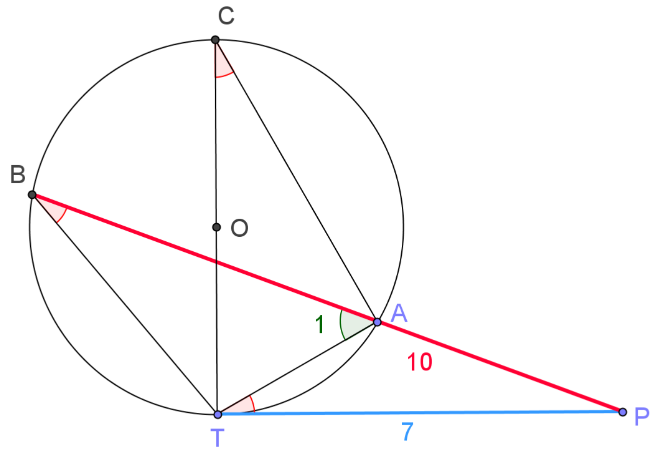


圖 15

解說：ΔPTA與ΔPBT 中，由弦切角定理$\angle PTA=\angle PBT$ ，$\angle P=\angle P$，得知ΔPTA與ΔPBT 相似，由相似三角形對應邊成比例，則$\overline{PA}$: $\overline{PT}=\overline{PT}$: $\overline{PB}$，故得到$(\overline{PT})^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$。

隨堂練習 5：如下圖，切線段$\overline{PT}=7$，$\overline{PB}=10$，$\angle TAB=50^\circ$，$\angle C=30^\circ$。



則$\angle PTA=$____，$\angle B=$____，$\angle P=$____，$\overline{PA}=$___ 。

活動六：內冪性質

內冪性質：圓上兩弦$\overline{AB}$、$\overline{CD}$交於E，則$\overline{AE}\times\overline{BE}=\overline{CE}\times\overline{DE}$

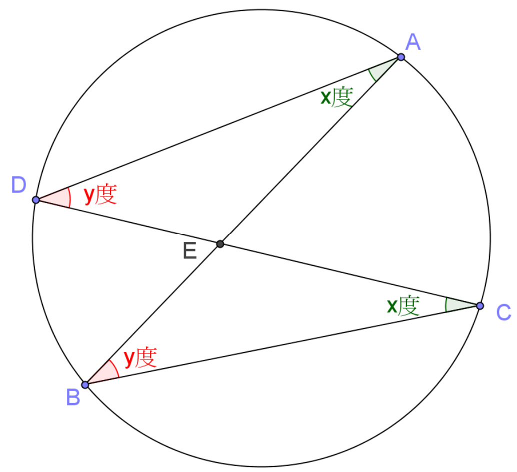


圖 16

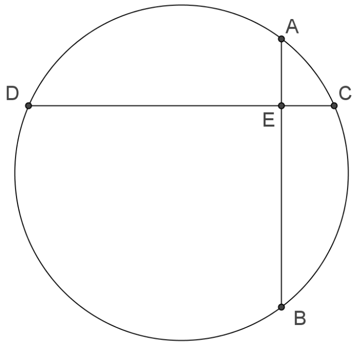
解說：同弧 BD 所對的圓周角相等，得 $\angle A=\angle C$ ，對頂角相等，得

$\angle AED=\angle CEB$ ，故由 AA 相似 $\Rightarrow \Delta AED$ 與 ΔCEB 相似

由三角形相似其對應邊成比例 $\Rightarrow \overline{AE}:\overline{DE}=\overline{CE}:\overline{BE}$

因此得到 $\overline{AE}\times\overline{BE}=\overline{CE}\times\overline{DE}$ 。

隨堂練習 6：如下圖 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 垂直，$\overline{DE}=\sqrt{21}+3$，$\overline{CE}=\sqrt{21}-3$，且 $\overline{BE}=3\cdot\overline{AE}$ ，則 $\overline{AE}$ =____ ，圓的半徑=______ 。



活動七: 外冪性質

如圖 17，有一個半徑超過 40m 的圓形深水湖泊，湖邊有兩個涼亭 A、B。兩位同學的手邊只有 30m 的皮尺可以當測量工具，也有許多樹枝可以當標竿，但是可明顯的估計，$\overline{AB}$ 距離一定超過 30m，在不能下水的情況下，我們要如何量得兩個涼亭 A、B 的距離？

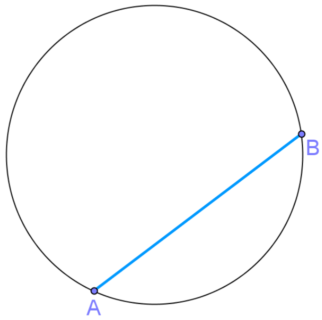


圖 17

方法(1)：用切割線定理：$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PT}^2$(如圖 18)。

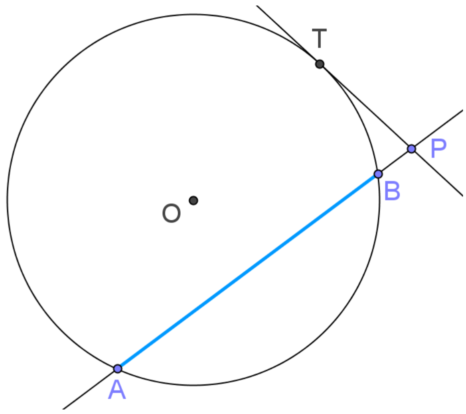


圖 18

解說：如圖 18，同學先在直線$\overleftrightarrow{AB}$上，近 B 處取 P 點，量得$\overline{PB}$=5，再把 30m 的皮尺，過 P 沿湖邊拉直線，使得直線與湖邊恰有一交點 T，此時量得$\overline{PT}$=17.32。則由切割線定理 $(5+\overline{AB})\times 5=(17.32)^2$，解得$\overline{AB}\doteq 55\,\text{m}$。

方法(2)：用外冪性質：兩弦$\overline{AB},\overline{CD}$所在的直線交在圓外一點 P，則$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。

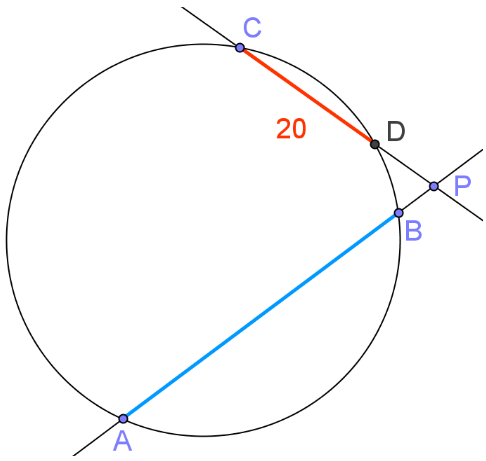


圖 19

解說：如圖 19，同學先在直線$\overleftrightarrow{AB}$上，近 B 處取 P 點，量得$\overline{PB}$=5，再把 30m 的皮尺，過 P 沿湖邊拉直線，使得直線與湖邊恰有兩個交點 C,D，此時兩位同學量得$\overline{PC}$=20，$\overline{PD}$=10。

則由外冪性質 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$，

$(5+\overline{AB})\times 5=(10+20)\times 10$，得 $\overline{AB}=55\text{m}$。

兩位同學用了「外冪性質」這個法寶，道理何在？

圖 20 中，$\angle 1$ 與 $\angle 3$ 互補，$\angle 1+\angle 3=180^{\circ}$。圓內接四邊形對角互補，$\angle 2+\angle 3=180^{\circ}$。故 $\angle 1=\angle 2$。

ΔPDB 與 ΔPAC 中，$\angle 1=\angle 2$，$\angle P$ 共用，$\Delta PDB\sim\Delta PAC$。

相似三角形對應邊成比例，$\overline{PD}:\overline{PB}=\overline{PA}:\overline{PC}\Rightarrow\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

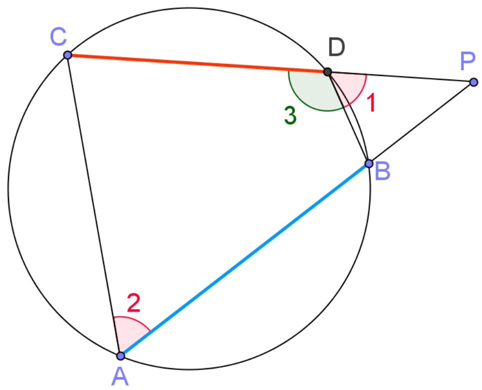
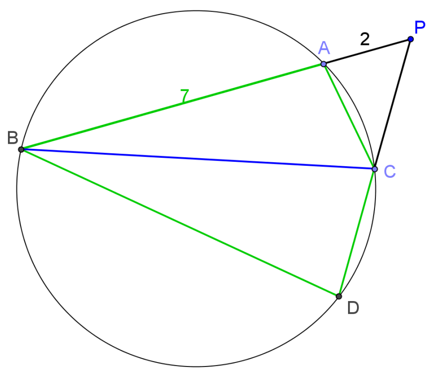


圖 20

隨堂練習 7：如下圖 A,B,C,D 為圓上四點直線 AB,直線 CD 交於圓外一點 P，已知 $\overline{PC}=\overline{CD}$，且 $\overline{PA}=2$，$\overline{AB}=7$，則 $\overline{PC}=$______。

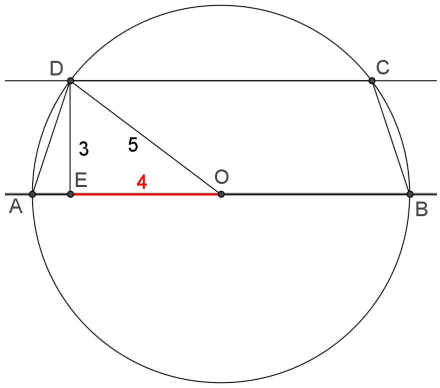


教學活動參考解答：

活動一：

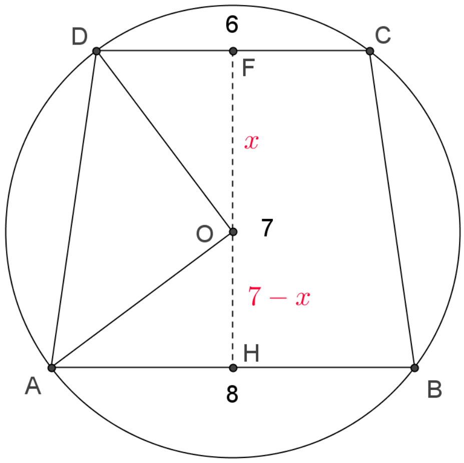
隨堂練習 1：$\overline{AB}$ 為直徑，則所截的 $\overline{DA}$ 弦長=$\sqrt{10}$ 。

因為 $\overline{DO}=5$，$\overline{DE}=3$，$\overline{EO}=4$，$\overline{AE}=1 \Rightarrow \overline{DA}=\sqrt{10}$ 。



活動二：

隨堂練習 2：我們知道每一個等腰梯形都恰有一個外接圓，已知有一個等腰梯形 $ABCD$，上底 $\overline{DC}=6$，下底 $\overline{AB}=8$，高 $\overline{FH}=7$ ，則外接圓的面積=25π



說明：令外接圓半徑為 r，$\overline{FO}=x$ ，則 $\overline{OH}=7-x$ 。

$$\overline{DF}^2+\overline{FO}^2=\overline{OH}^2+\overline{HA}^2=r^2$$

$$\Rightarrow 3^2+x^2=(7-x)^2+4^2 \Rightarrow x=4 \Rightarrow r=5$$

活動三：

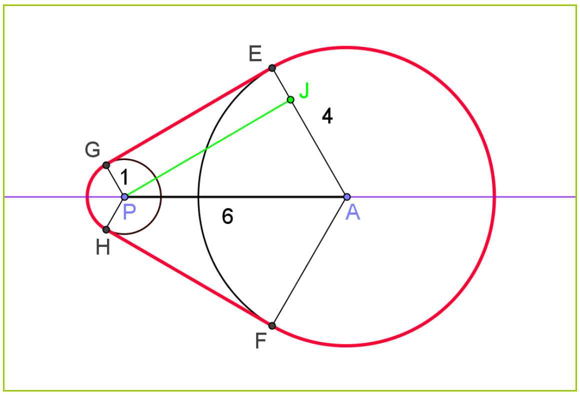
隨堂練習 3：假設圖 8 是自行車的鏈條示意圖，連心線 $\overline{AP}=6$，

大齒輪半徑 $\overline{AE}=4$，小齒輪半徑 $\overline{PG}=1$，

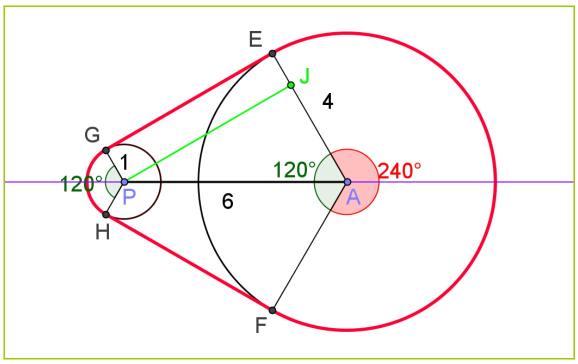
則鏈條長=$11\pi+6\sqrt{3}$

解說：觀察下圖；

由 P 做 $\overline{GE}$ 的平行線交 $\overline{AE}$ 於 J，則 $\overline{GE}=\overline{PJ}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$ 。



參考下圖，直角三角形 PAJ 的斜邊 $\overline{AP}=6$，短股 $\overline{AJ}=3$。直角三角形的邊長比是 1：$\sqrt{3}$：2，則對應的內角度數為 30 度,60 度,90 度。$\angle APJ=30^\circ$，$\angle PAJ=60^\circ$，$\angle EAF=\angle GPH=120^\circ$，優弧 EF 的度數是 240°，劣弧 GH 的度數是 120° 。



鏈條的長度＝大圓弧長＋小圓弧長＋兩倍的外公切線長。

＝(優弧 EF 的長度)＋(劣弧 GH 的長度)+$6\sqrt{3}$

＝(大圓周長的三分之二)＋(小圓周長的三分之一)＋$6\sqrt{3}$

$=\frac{2}{3}(16\pi)+\frac{\pi}{3}+6\sqrt{3}=11\pi+6\sqrt{3}$

說明：優弧 EF 的度數 240° 佔整個圓周度數 360° 的三分之二。

劣弧 GH 的度數 120° 佔整個圓周度數 360° 的三分之一。

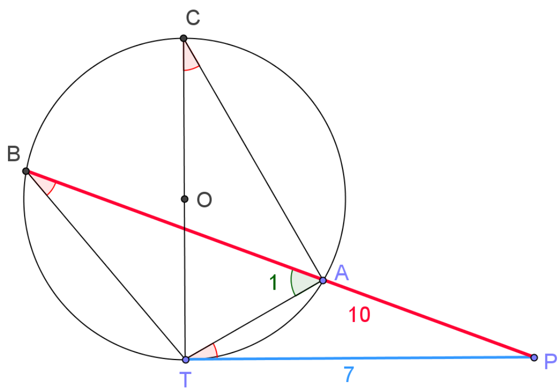
活動四：

隨堂練習 4：已知兩圓的連心線 $\overline{AB}$ 長為 13，圓 A 的半徑是 2，

圓 B 的半徑是 3，則內公切線長度為 __12__ 。

活動五：

隨堂練習 5：如下圖，$\angle TAB=50^{\circ}$，$\angle C=30^{\circ}$，$\overline{PB}=10$，切線段 $\overline{PT}=7$。

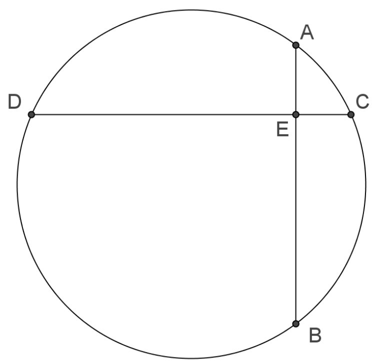


則 $\angle PTA$=30 度，$\angle B$=30 度，$\angle P$=20 度，$\overline{PA}$=4.9。

活動六：

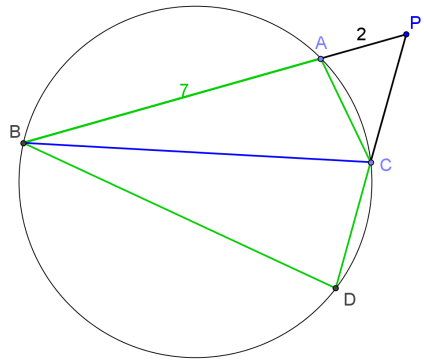
如下圖，$\overline{DE}=\sqrt{21}+3$，$\overline{CE}=\sqrt{21}-3$，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 垂直，且 $\overline{BE}=3\cdot\overline{AE}$，

則 $\overline{AE}$= __2__ ，圓的半徑= __5__ 。



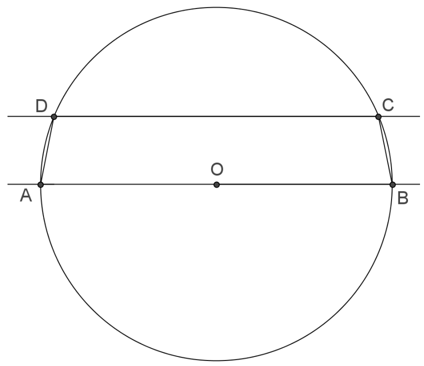
活動七：

隨堂練習 7：如下圖，$\overline{PA}=2$，$\overline{AB}=7$，若 $\overline{PC}=\overline{CD}$，則 $\overline{PC}=$__3__

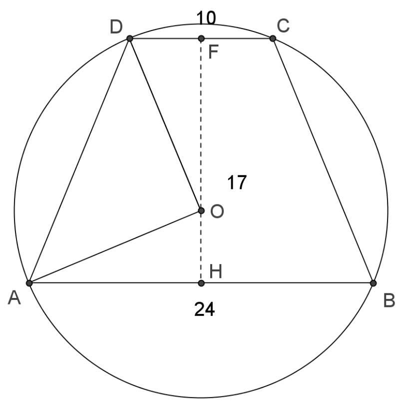


七、指定作業：

1. 如圖，圓 O 的半徑為 13，兩平行線 $\overleftrightarrow{DC}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 間的距離為 5，$\overline{AB}$ 為直徑，則所截的弦長 $\overline{DA}$ =________

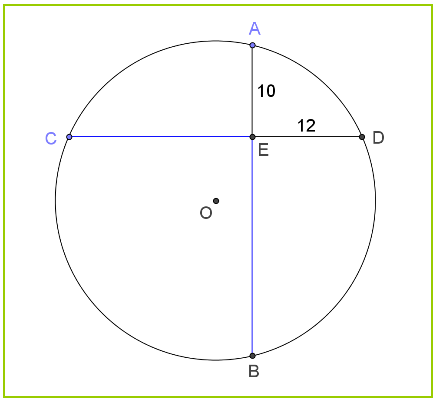


2. 如圖，等腰梯形 $ABCD$，上底 $\overline{DC}=10$，下底 $\overline{AB}=24$，高 $\overline{FH}=17$，則其外接圓 O 的面積=________



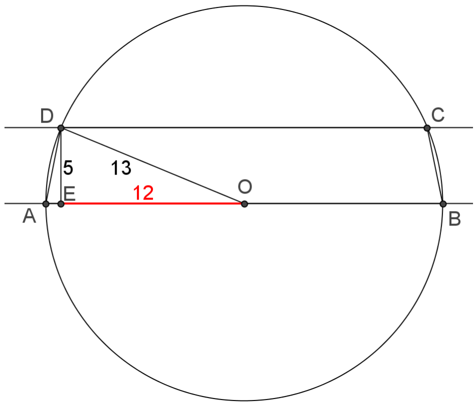
3. 內冪性質與垂直步道：

如下圖，有一個圓心為 O，半徑為 $\sqrt{305}$ m 的圓形大池塘，池塘中有一個小島 E，景觀設計師，想要經過小島 E，建造兩條互相垂直的跨池步道 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$。只知道 $\overline{AE}$=10m，$\overline{DE}$=12m，則垂直步道的總長度是多少 m？



指定作業參考答案：

1. 如下圖，因為 $\overline{DO}=13$，$\overline{DE}=5$，$\overline{EO}=12$，$\overline{AE}=1 \Rightarrow \overline{DA}=\sqrt{26}$。

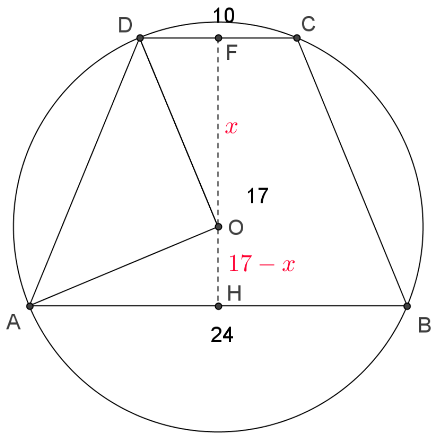


2. 如下圖，已知有一個等腰梯形 $ABCD$，上底 $\overline{DC}=10$，下底 $\overline{AB}=24$，高 $\overline{FH}$=17，則外接圓的面積= $\underline{169\pi}$。

說明：令外接圓半徑為 r，$\overline{FO}=x$，則 $\overline{OH}=17-x$。

$$\overline{DF}^2+\overline{FO}^2=\overline{OH}^2+\overline{HA}^2=r^2$$

$$\Rightarrow 5^2+x^2=(17-x)^2+12^2 \Rightarrow x=12 \Rightarrow r=13$$



3. 內冪性質與垂直步道：如下圖 1(1),1(2)，圓形大池塘的半徑 $\sqrt{305}$ m，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 是互相垂直的跨池步道。$\overline{AE}$=10m，$\overline{DE}$=12m，則垂直步道的總長度是多少 m？

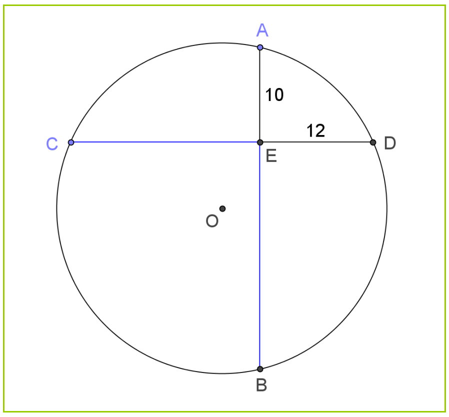


圖 1(1)

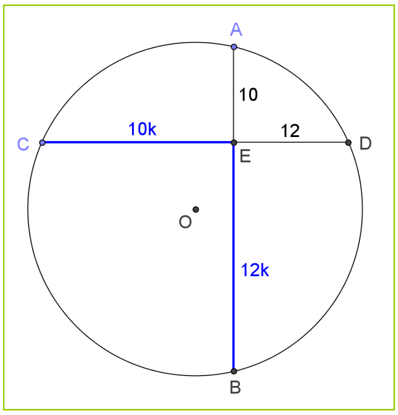


圖 1(2)

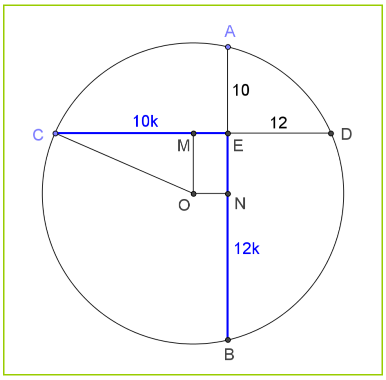


圖 1(3)

由內冪性質 $\overline{AE}\times\overline{EB}=\overline{CE}\times\overline{ED}$ ，$10\times\overline{EB}=\overline{CE}\times 12$ ，

$\overline{EB}$ ： $\overline{CE}=12:10$ ，如圖 1(3)，可令 $\overline{EB}$=12k，$\overline{CE}$=10k。

弦心距：弦中點到圓心的距離。如圖 1(3)

弦心距 $\overline{OM}=\overline{NE}=\left(\dfrac{10+12k}{2}\right)-10=6k-5$，$\overline{CM}=\left(\dfrac{10k+12}{2}\right)=5k+6$

由畢氏定理 $\overline{CM}^2+\overline{OM}^2=\overline{CO}^2$ 即 $(5k+6)^2+(6k-5)^2=305$

$61k^2+61=305\Rightarrow k=2$，步道總長度是 66m。

八、教學注意事項：

1. 教學時間分配建議如下：活動一約 10 分鐘，活動二約 10 分鐘，活動三約 10 分鐘，活動四約 20 分鐘，活動五約 25 分鐘，活動六約 15 分鐘。
2. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
3. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。
4. 內、外公切線的作法，要能啟發學生做逆向思考。亦即要讓學生知道，作圖完成之後呈現的表徵，它的前面一步是什麼現象，前面第二步是什麼條件，依序逆推回去。如果從正向來看，那就是我們要引導學生思考的步驟。
5. 外公切線的自行車的鏈條長及內公切線交叉傳動的皮帶長，其中弧長的計算，都是設計特殊角 30 度、60 度以方便計算，實際生活中絕大部分都不可能是特殊角，老師需要跟學生說明，也可以舉例：當非特殊角時，如何用「非特殊角的圓心

角」與 360 度的比，來算得弧長。

6. 活動 5 計算土樓直徑，活動七算涼亭間的距離，都是可以用皮尺測量就能帶動的教學，非常希望老師能把學生帶到戶外，實際操作，尤其要注意測量的精確度，例如找切點，要讓學生自己操作體驗:「少許的誤差」可能會造成差距很大的結果。這將是一堂有效而難忘的教學。

九、教學參考資料：

1. ΔABC 的內切圓為 I，半徑為 r，$\angle A$ 的對邊為 a，$\angle B$ 的對邊為 b，$\angle C$ 的對邊為 c。則

(1)當 $\angle C < 90^\circ \Leftrightarrow 2r< a+b-c$

(2)當 $\angle C = 90^\circ \Leftrightarrow 2r= a+b-c$

(3)當 $\angle C > 90^\circ \Leftrightarrow 2r> a+b-c$

解說：由 $\angle A$ 、$\angle B$ 作內角平分線交於 I 點，以 I 為圓心，以 I 到直線 AB 的垂直距離 $\overline{IF}$ 為半徑作圓。

則圓 I 為 ΔABC 的內切圓，$\overline{IF}=\overline{ID}=\overline{IE}= r$ 是圓心 I 到三邊的垂直半徑。

假設由 A 向圓 I 所作的切線段長為 z，

由 B 向圓 I 所作的切線段長為 x，

由 C 向圓 I 所作的切線段長為 y。

則 $a=x+y$，$b=y+z$，$c=x+z$，$a+b-c=2y$。

(1) 如圖 1：當 $\angle C < 90^{\circ} \Leftrightarrow \angle ICD < 45^{\circ} \Leftrightarrow r < y \Leftrightarrow 2r < a+b-c$。

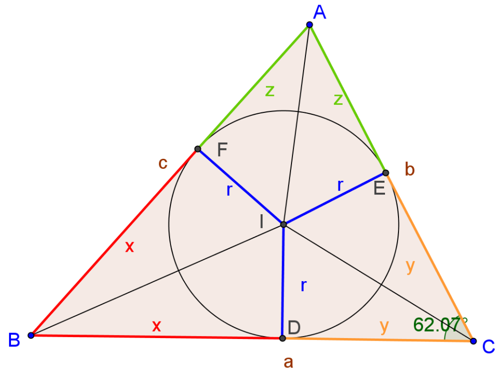


圖 1

(2) 如圖 2：當 $\angle C = 90^{\circ} \Leftrightarrow \angle ICD=45^{\circ} \Leftrightarrow r = y \Leftrightarrow 2r = a+b-c$。

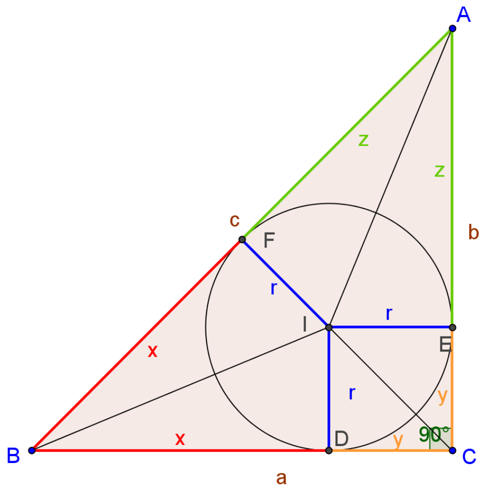


圖 2

(3) 如圖 3：當 $\angle C > 90^{\circ} \Leftrightarrow \angle ICD > 45^{\circ} \Leftrightarrow r > y \Leftrightarrow 2r > a+b-c$。

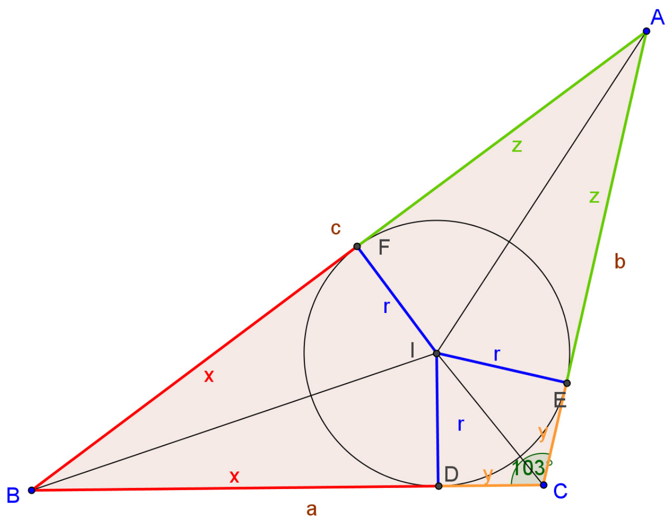


圖 3

2. 銳角三角形 ABC 的垂心，也是垂足三角形 DEF 的內心

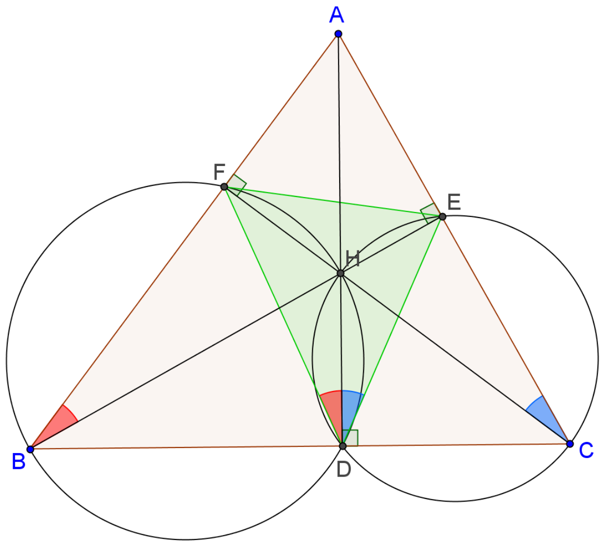
解說: 如下圖 F,B,D,H 四點共圓，E,C,D,H 也四點共圓，

$\angle FBH + \angle A = 90^\circ$ ，$\angle ECH + \angle A = 90^\circ$ ，則

$\angle FBH = \angle ECH$ ，因為同弧所對的圓周角相等

$(\angle FBH = \angle FDH$ 且 $\angle ECH = \angle EDH) \Rightarrow \angle FDH = \angle EDH$

亦即 H 在 $\angle FDE$ 的內角平分線上。同理可證 H 在 $\angle DFE$ 、$\angle FED$ 的內角平分線上。亦即 H 是垂足三角形 DEF 的內心。



3. 參考文獻：

(1) 李政豐、陳昭地(2013)。內切圓和直角三角形。陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊。新北市：國家教育研究院。

(2) 李政憲、陳昭地(2013)畢氏三元數組。陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊。新北市：國家教育研究院。

(3) 洪有情等(2010)，九年國教國中數學課本第五冊。新北市：康軒文教事業股份有限公司。

(4) J. H. Silverman (2006). A Friendly Imtrodution to Number

Theory (3rd ED), Pearson Education International.

Http://www.guailih.com.tw。

主題 5－3 圓方程式及單位圓上的最簡真分數點

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者：**李政豐

二、先備知識：

(一) 能理解直線方程式及斜率所代表的意義。

(二) 能理解聯立方程式解的幾何意義。

(三) 能舉例常見的畢氏三元數組。

(四) 知道什麼是『本原畢氏三元數組』之意涵。

(五) 能理解直角坐標平面的距離公式與圓方程式的關連性。

(六) 知道圓的相關名詞，例如圓心、圓心角、圓周、圓周角、弦、弦切角、弧長、扇形面積、半圓的內接正方形。

(七) 能理解圓的幾何性質，例如：圓周上任一點與圓心等距離、同弦(弧)所對的圓周角都相等。

(八) 瞭解什麼是平面單位圓上的最簡真分數點。

三、教學目標 (含核心概念或相關概念)：

(一) 能由距離公式推得圓心在原點的圓方程式。

(二) 至少能熟悉本原畢氏三元數組的一種作法。

(三) 能理解單位圓上在第一象限內的坐標都是最簡真分數的點與本原畢氏三元數組的關係。

(四) 能利用本原畢氏三元數組有無限多組，說明第一象限內的坐標都是最簡分數的點有無限多點。

(五) 能計算圓的弧長公式及扇形面積公式。

(六) 能理解圓柱表面積的計算。

(七) 能由圓的基本尺規做圖，連貫解析幾何的圓方程式。

(八) 能由一組本原畢氏三元數組，利用對稱性質得到單位圓上八組最簡真分數點。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

(一) 我們只希望同學能熟練圓心在原點的圓方程式，圓心不在原點的圓方程式，留待高中再做介紹。

(二) 藉由『探討單位圓上在第一象限內的最簡真分數點有多少？』，利用本原畢氏三元數組，推得單位圓上有無限多組最簡真分數點的作法。

(三) 熟悉一種本原畢氏三元數組的生成公式： 當 $m,n\in N$，$m>n$，$(m,n)=1$，m,n 是一奇一偶，則 $a=m^2-n^2$ 為奇數，b=2mn 為偶數，$c=m^2+n^2$ 為奇數，且 a,b,c 形成一組本原畢氏三元數組。

(四) 在單位圓上，透過在四個象限內，利用本原畢氏三元數組所建構的最簡真分數點，及(1,0)、(-1,0)、(0,1)、(0,-1)四點，構成單位圓上所有的最簡真分數點。

六、教學活動：

活動一：溫習平面上任意兩點的距離公式，若 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 是平面上任意兩點，則兩點間的距離如何計算？

隨堂練習 1：請同學先計算下列距離。

(1) $P(3,-2)$，$Q(9,-2)$ 則 P、Q 兩點間的距離為__________

(2) $A(3,9)$，$B(3,-3)$ 則 A、B 兩點間的距離為__________

(3)以一公分為單位，$R(-3,2)$，$S(5,8)$，請用直尺量 R、S 兩點間的距離為__________

步驟 1： $P_1(x_1,y_1)$ 、 $P_2(x_2,y_2)$ 是平面上任意兩點，則

$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ 。

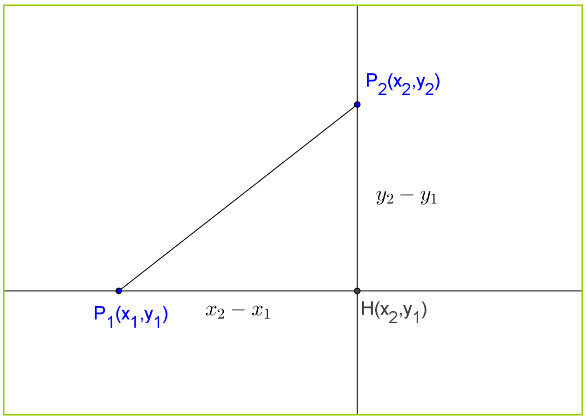


圖 1

說明：如上圖 1，$P_1(x_1,y_1)$ 、 $P_2(x_2,y_2)$ 是坐標平面上任意兩點，由 P_1 點作水平線，由 P_2 點作鉛直線，兩線交於 $H(x_2,y_1)$，由畢氏定理 $\left(\overline{P_1P_2}\right)^2=\left(\overline{P_1H}\right)^2+\left(\overline{P_2H}\right)^2=|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2$ ，則 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

隨堂練習 2：仿照上面的方法，$P(-3,2)$、$Q(9,7)$，請計算 $\overline{PQ}$ 的長度。

活動二：如何求得圓方程式。

圓心在原點，半徑為 r 的圓方程式為 $x^2+y^2=r^2$

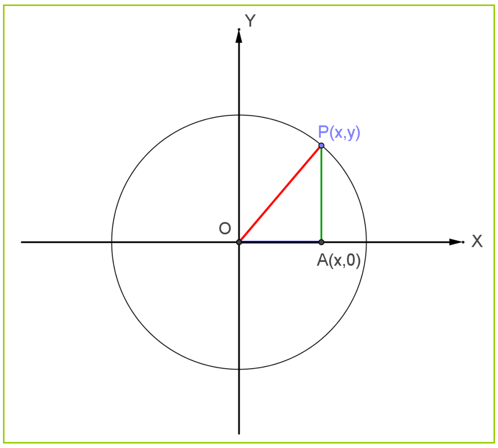


圖 2

說明：如上圖(二)，P(x,y)是圓周上一點，P 到圓心 O 的距離是

半徑 r，由畢氏定理 $\overline{PO}^2=\overline{AO}^2+\overline{PA}^2$；亦即

$r^2=(x-0)^2+(y-0)^2$，故圓心在原點半徑為 r 的圓方程式為

$x^2+y^2=r^2$

由另一個看法：平面上到一定點為固定距離的所有點所成的集合稱為圓。由距離公式 $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r$，將它平方去根號，化成 $x^2+y^2=r^2$。亦即 $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r$ 的圖形就是 $x^2+y^2=r^2$ 的圖形，它是一個圓。

隨堂練習3：圓心在原點，半徑為5的圓方程式為________

步驟2：單位圓的解說

如果把 $x^2+y^2=r^2$，r 是一個正整數，在等號兩邊同除以 r^2，則得到 $\left(\dfrac{x}{r}\right)^2+\left(\dfrac{y}{r}\right)^2=1$，令 $x'=\dfrac{x}{r}$、$y'=\dfrac{y}{r}$，亦即把圓上任一點的兩

坐標縮為原來的$\frac{1}{r}$，則方程式為$x'^2+y'^2=1$就是單位圓。

其中$-1\le x'\le 1$，$-1\le y'\le 1$。

單位圓$x^2+y^2=1$上，當$x=\frac{4}{5}$，則$y=\frac{\pm 3}{5}$，亦即直線$x=\frac{4}{5}$與單位圓交在兩點$\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$及$\left(\frac{4}{5},\frac{-3}{5}\right)$。

於是我們只要討論單位圓的性質，就能瞭解所有圓的性質。

隨堂練習4：單位圓$x^2+y^2=1$與水平線$y=\frac{5}{13}$的交點坐標為______

及 __________。

活動三：方程式為$x^2+y^2=r^2$的上半圓，它的內接正方形(底邊與直徑重合，兩個頂點在圓周上)的邊長是多少？

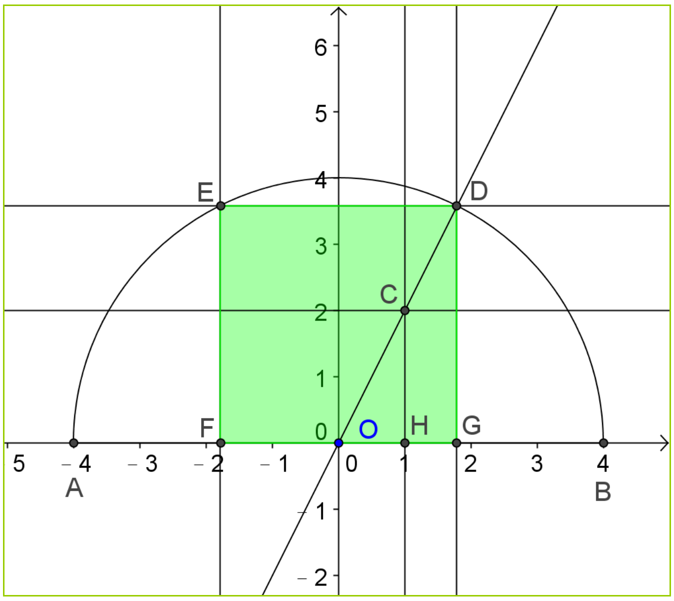


圖 3

步驟3：我們須先了解

(1) 半圓內接正方形底邊中點一定是圓心。

(2) 內接正方形邊長$\overline{DG}$是線段$\overline{OG}$的兩倍(如圖3)。

(3) 所有正方形均相似。

(4) ΔOHC與ΔOGD相似。

順序：

(1) 先做短股為1,長股為2,斜邊為$\sqrt{5}$的直角ΔOHC。

(2) 延長$\overline{OC}$與圓$x^2+y^2=r^2$交於D。

(3) 由D作鉛直線交直徑於G。

(4) 由D作水平線交圓於E。

(5) 由E作鉛直線交直徑於F。

則四邊形$DEFG$即為$x^2+y^2=r^2$上半圓的內接正方形

解說：由$\Delta OHC \sim \Delta OGD$，長股與斜邊的比相等

$$\overline{CH} : \overline{CO} = \overline{DG} : \overline{DO} \Rightarrow 2:\sqrt{5}=\overline{DG}:r \Rightarrow \overline{DG}=\frac{2\sqrt{5}\ r}{5}$$

隨堂練習5：$x^2+y^2=25$上半圓的內接正方形邊長是多少？

活動四：如下圖 4，假設學校想在長 40m,寬 30m 的長方形場地上，蓋一座風雨球場(雨天打排球、羽球、籃球不會淋雨)，球場的四面是空的，上面有鋁合金的圓弧形遮雨棚，由風雨

球場的正面看，在 XY 平面上 O 是原點也是 $\overline{EF}$ 的中點，

OAB 是一個半徑 30m，圓心角 60 度的扇形，

$\overline{OB}=\overline{EF}=30$m，四根柱子都與地面垂直，則

(1) 在 XY 平面上，扇形 OAB 所在的圓方程式為何？

(2) 風雨球場的樑柱 $\overline{BF}$ 有多高？

(3) 在線段 $\overline{EF}$ 上，距離 O 點 10m 的地方，垂直往上直到遮雨棚的高度 $\overline{KM}$ 為何？

(4) 遮雨棚的面積是多少？(想像把遮雨棚攤平成矩形)

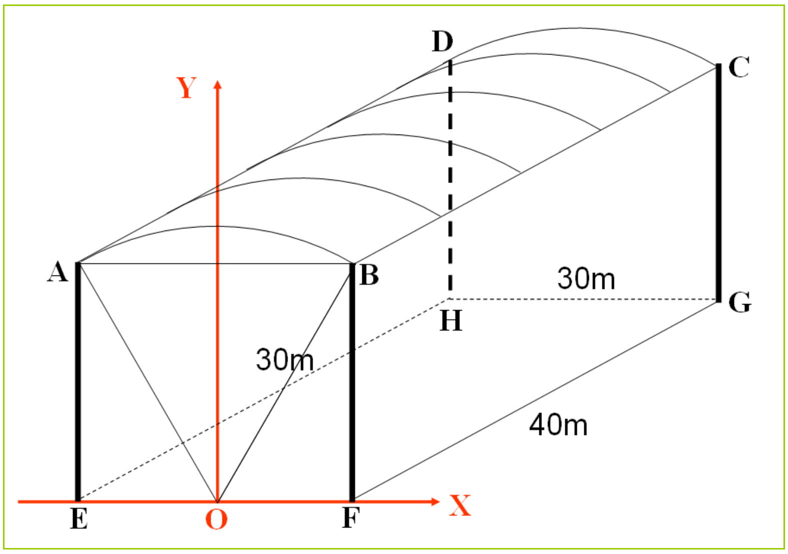


圖 4

活動五：巧克力甜筒的表面積是多少

例題 1：弧長公式與扇形面積

半徑為 20，圓心角 45 度的弧長 AB 是多少？扇形面積 OAB 是多少？

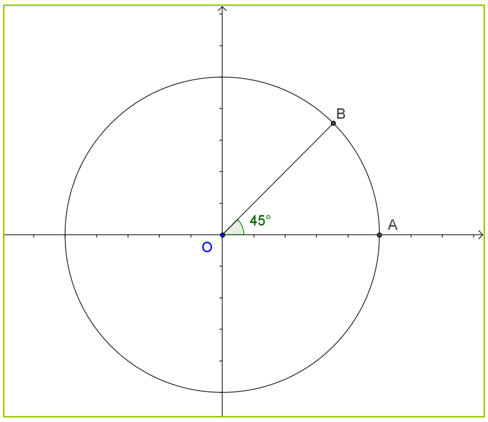
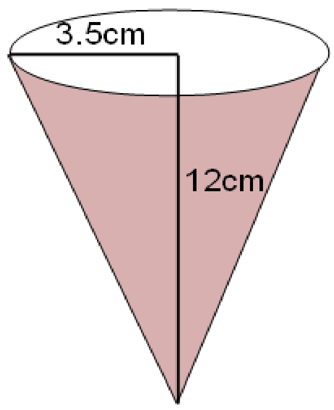


圖 5

圓周對應的圓心角是 360 度，弧長 AB 所對的圓心角是 45 度,按照比率,弧長 AB 是圓周長的 $\frac{45}{360}$,則弧長 AB= ______

圓周對應的圓心角是 360 度，扇形 OAB 所對的圓心角是 45 度，按照比率，扇形 OAB 面積是圓面積的 $\frac{45}{360}$，所以扇形 OAB 面積=________

例題 2：有一個圓錐形有蓋的巧克力甜筒容器(圖 6)，上圓半徑 3.5cm，高 12cm (圓錐高度)，如果將圓錐沿著斜高(直角△的斜邊)剪開，圓錐表面將變成扇形(圖 7)，扇形的弧長等於上圓的周長，扇形半徑為斜高，則製造這個甜筒容器，圓錐表面積與蓋子共需要多少平方公分的紙板。



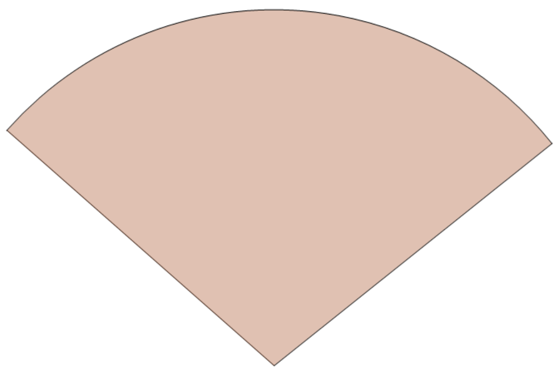


圖 6　　圖 7

(1) 如圖 6，上圓半徑為 3.5cm，高 12cm。我們以短股 3.5cm, 長股 12cm 的直角三角形，所作出來的斜邊，稱為斜高，則斜高=_________ 。

(2) 我們將甜筒蓋子拿掉吃完巧克力後，沿著斜高剪開攤平成圖 7 的扇形，則扇形所在圓的半徑=_______。

(3) 扇形的弧長=_________ 。

(4) 扇形所在圓的整個圓周長度=________ 。

(5) 扇形所在圓的整個圓面積=________ 。

(6) 扇形面積=_________ 。

(7) 整個甜筒連蓋子的表面積=__________ 。

隨堂練習 6：如下圖 8、9，仙蒂公主的圓錐帽，下圓半徑為 5cm，高 12cm，則它的表面積是 _____________。

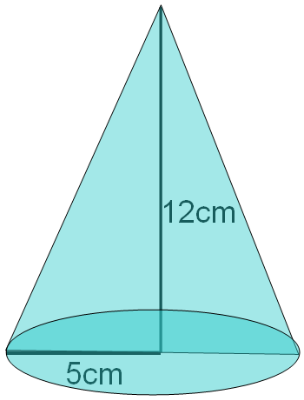


圖 8

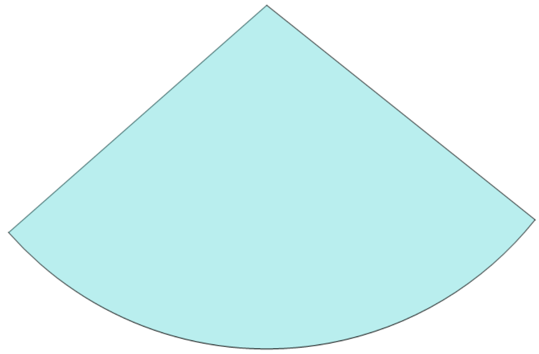


圖 9

活動六：

我們知道每個最簡真分數是唯一的(註一)，則單位圓 $x^2+y^2=1$ 上在第一象限內的 x,y 坐標都是最簡真分數的點(註二)有多少？

什麼是本原畢氏三元數組：

當 m,n 是正整數，$m>n$，$(m,n)=1$，m,n 是一奇一偶，則 $a=m^2-n^2$ 為奇數，$b=2mn$ 為偶數，$c=m^2+n^2$ 是奇數，且滿足 $c^2=a^2+b^2$ 的條件，則稱 a,b,c 為一組本原畢氏三元數組。

於是，我們由最小的兩個互質的正整數開始，列出 40 組本原畢氏三元數組，藉以看出單位圓在第一象限 x,y 坐標都是最簡分數的點有無限多個，因為正整數 m 有無限多。當 m 選定時，與 m 互質，且奇偶相反的正整數 n 也很多。

本原畢氏三元數組						
正整數 m,n 一奇一偶，$m>n$，$(m,n)=1$					單位圓上最簡真分數點	
m	n	$a=m^2-n^2$	$b=2mn$	$c=m^2+n^2$	$x=a/c$	$y=b/c$
2	1	3	4	5	3/5	4/5
3	2	5	12	13	5/13	12/13
4	1	15	8	17	15/17	8/17
4	3	7	24	25	7/25	24/25
5	2	21	20	29	21/29	20/29
5	4	9	40	41	9/41	40/41
6	1	35	12	37	35/37	12/37
6	5	11	60	61	11/61	60/61
7	2	45	28	53	45/53	28/53
7	4	33	56	65	33/65	56/65
7	6	13	84	85	13/85	84/85
8	1	63	16	65	63/65	16/65
8	3	55	48	73	55/73	48/73
8	5	39	80	89	39/89	80/89
8	7	15	112	113	15/113	112/113
9	2	77	36	85	77/85	36/85
9	4	65	72	97	65/97	72/97
9	8	17	144	145	17/145	144/145
10	1	99	20	101	99/101	20/101
10	3	91	60	109	91/109	60/109
10	7	51	140	149	51/149	140/149
10	9	19	180	181	19/181	180/181
11	2	117	44	125	117/125	44/125
11	4	105	88	137	105/137	88/137
11	6	85	132	157	85/157	132/157
11	8	57	176	185	57/185	176/185
11	10	21	220	221	21/221	220/221
12	1	143	24	145	143/145	24/145
12	5	119	120	169	119/169	120/169
12	7	95	168	193	95/193	168/193
12	11	23	264	265	23/265	264/265
13	2	165	52	173	165/173	52/173
13	4	153	104	185	153/185	104/185
13	6	133	156	205	133/205	156/205
13	8	105	208	233	105/233	208/233

13	10	69	260	269	69/269	260/269
13	12	25	312	313	25/313	312/313
14	1	195	28	197	195/197	28/197
14	3	187	84	205	187/205	84/205
14	5	171	140	221	171/221	140/221

共 40 組本原畢氏三元數組。

隨堂練習 7：仿照上面的作法，請填滿下列空格

單位圓在第一象限內，用本原畢氏三元數組建構一組最簡分數點						
m	n	$a=m^2-n^2$	b=2mn	$c=m^2+n^2$	x=a/c	y=b/c
7	2					
9	4					
10	7					

隨堂練習 8：

a ,b ,c 是正整數，且是一組畢氏三元數組，即 $a^2+b^2=c^2$ ，a ,b ,c 兩兩互質。三數中已知有一個是 29，請一一列出以此畢氏三元數組建構的單位圓上第一象限的最簡分數點。

因為 a ,b ,c 中，a ,b 一定是一奇一偶，c 一定是奇數，由作出本原畢氏三元數組的方法：當 m,n 是正整數，$m>n$ ，$(m,n)=1$，m,n 是一奇一偶，則 $a=m^2-n^2$ 一定為奇數，$b=2mn$ 為偶數，$c=m^2+n^2$ 一定是奇數。

(1) 若 c=29⇒m=5 且 n=2，本原畢氏三元數組是(21,20,29)，單位圓上第一象限的最簡分數點有__________及 __________兩組。

(2) 若 $a=29 \Rightarrow 29=m^2-n^2 \Rightarrow (m-n)=1,(m+n)=29 \Rightarrow m=15,n=14$。本原畢氏三元數組是(29,420,421)，單位圓上第一象限的最簡分數點有____________ 及 __________ 兩組。

活動七：

取 m=4,n=3，得到一組本原畢氏三元數組 7、24、25，在單位圓 $x^2+y^2=1$ 上的四個象限，這一組本原畢氏三元數組，可以建構多少個最簡真分數點？

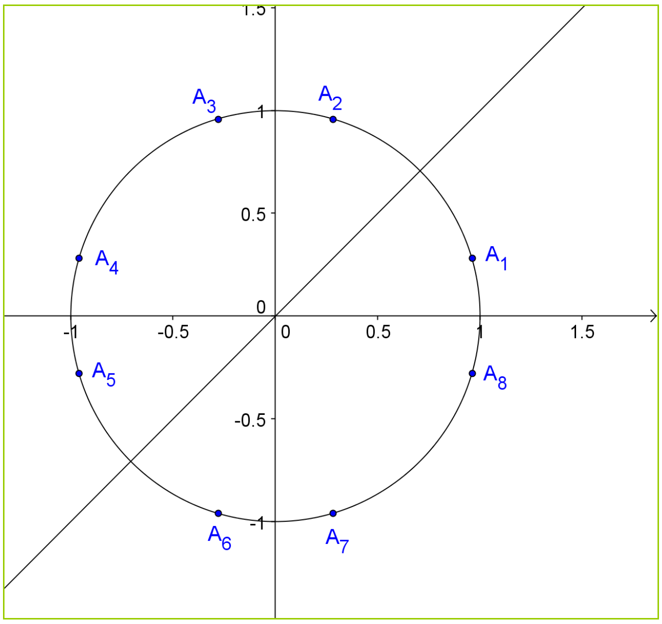


圖 10

如上圖 10，令 $A_1=\left(\dfrac{24}{25},\dfrac{7}{25}\right)$，

(1)則 A_1 根據直線 $x-y=0$ 對稱的點 $A_2=$__________

(2)則 A_2 根據 Y 軸對稱的點 $A_3=$__________

(3)則 A_1 根據 Y 軸對稱的點 $A_4=$__________

(4)則 A_4 根據 X 軸對稱的點 $A_5=$__________

(5)則 A_3 根據 X 軸對稱的點 $A_6=$__________

(6)則 A_6 根據 Y 軸對稱的點 $A_7=$__________

(7)則 A_1 根據 X 軸對稱的點 $A_8=$__________

一組本原畢氏三元數組，可以建構 8 個最簡真分數點，在單位圓 $x^2+y^2=1$ 上，所有的最簡真分數點，都是由每一組本原畢氏三元數組，建構的 8 個最簡真分數點，以及(1,0)、(0,1)、(-1,0)、(0,-1)等四個點所構成。

教學活動參考解答：

活動一：隨堂練習 1：(1)6，　(2)12，　(3)10。

隨堂練習 2：$\overline{PQ}$ 的長度=13。

活動二：

隨堂練習 3：$x^2+y^2=25$，隨堂練習 4：$\left(\frac{-12}{13},\frac{5}{13}\right)$ 及 $\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$。

活動三：

隨堂練習 5：內接正方形邊長為 $2\sqrt{5}$。

活動四：

(1) 扇形 *OAB* 所在的圓方程式為 $x^2+y^2=900$。

(2) 樑柱 $\overline{BF}=15\sqrt{3}$ m。　(3) $\overline{KM}=20\sqrt{2}$ m。

(4) 遮雨棚的面積是 $2\pi\times30\times\frac{60度}{360度}\times40 = 400\pi \ \ m^2$。

活動五：

例題 1：弧長 *AB*= 5π，扇形 *OAB* 面積= 50π

例題 2：(1) 斜高= 12.5cm，(2) 扇形所在圓的半徑= 12.5cm，

(3)扇形的弧長= 7πcm，(4)扇形所在圓的整個圓周長度=25πcm

(5)扇形所在圓的整個圓面積= $\frac{625\pi}{4}$ 平方公分，

(6) 扇形面積= $\frac{175\pi}{4}$ 平方公分，

(7) 整個甜筒連蓋子的表面積= 56π 平方公分。

隨堂練習 6：仙蒂公主圓錐帽的表面積是 65π 平方公分

活動六：

隨堂練習 7：

單位圓在第一象限內，用本原畢氏三元數組建構的最簡分數點						
m	n	$a=m^2-n^2$	b=2mn	$c=m^2+n^2$	x=a/c	y=b/c
7	2	45	28	53	45/53	28/53
9	4	65	72	97	65/97	72/97
10	7	51	140	149	51/149	140/149

隨堂練習 8：

(1)有 $\left(\frac{20}{29},\frac{21}{29}\right)$、$\left(\frac{21}{29},\frac{20}{29}\right)$ 兩組，(2)有 $\left(\frac{29}{421},\frac{420}{421}\right)$、$\left(\frac{420}{421},\frac{29}{421}\right)$ 兩組。

活動七：如圖 11

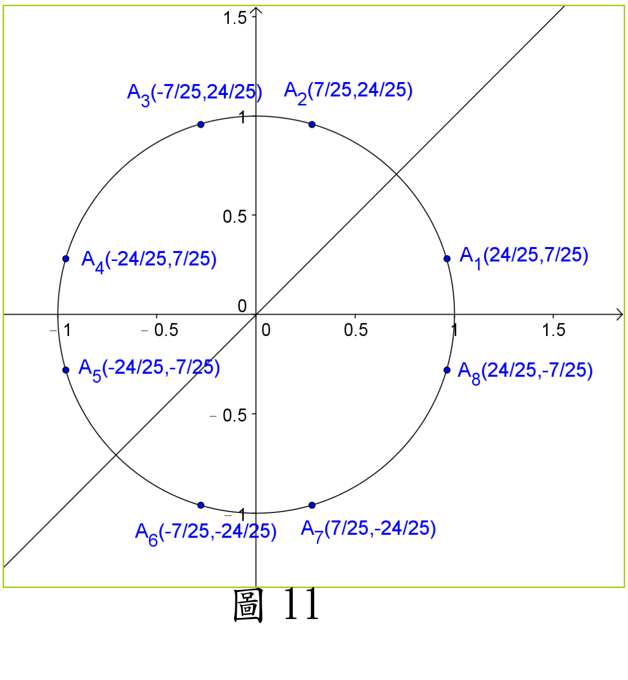


圖 11

令 $A_1=\left(\frac{24}{25},\frac{7}{25}\right)$，

(1) 則 A_1 根據直線 $x-y=0$ 對稱的點 $A_2=\left(\frac{7}{25},\frac{24}{25}\right)$

(2) 則 A_2 根據 Y 軸對稱的點 $A_3=\left(\frac{-7}{25},\frac{24}{25}\right)$

(3) 則 A_1 根據 Y 軸對稱的點 $A_4=\left(\frac{-24}{25},\frac{7}{25}\right)$

(4) 則 A_4 根據 X 軸對稱的點 $A_5=\left(\frac{-24}{25},\frac{-7}{25}\right)$

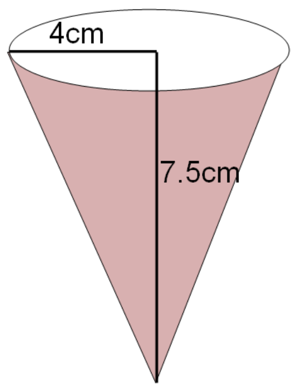
(5) 則 A_3 根據 X 軸對稱的點 $A_6=\left(\frac{-7}{25},\frac{-24}{25}\right)$

(6) 則 A_6 根據 Y 軸對稱的點 $A_7=\left(\frac{7}{25},\frac{-24}{25}\right)$

(7) 則 A_1 根據 X 軸對稱的點 $A_8=\left(\frac{24}{25},\frac{-7}{25}\right)$

七、指定作業：

1. 有一個圓錐形有蓋的巧克力甜筒容器(圖 12)，上圓半徑 4cm，高 7.5cm (圓錐高度)，如果將圓錐沿著斜高(直角△的斜邊)剪開，圓錐表面將變成扇形(圖 13)，扇形弧長等於上圓周長，扇形半徑為斜高，則製造這個甜筒容器，圓錐表面積與蓋子共需要多少平方公分的紙板(厚度不計)。



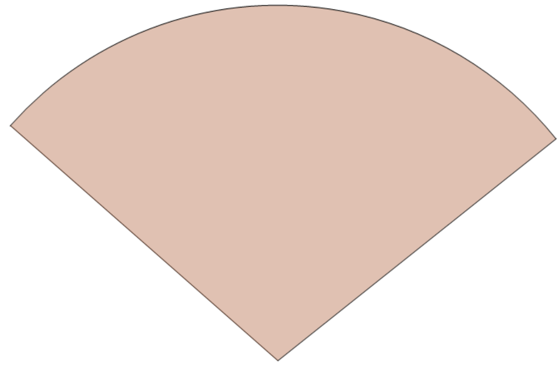


圖 12　　　　圖 13

2. a ,b ,c 是正整數，且是一組畢氏三元數組，即 $a^2+b^2=c^2$，a ,b ,c 兩兩互質。三數中已知有一個是 41，請一一列出以此畢氏三元數組建構的單位圓上第一象限的最簡分數點。

3. 若本原畢氏三元數組(a,b,c)所建構的單位圓上第一象限的最簡分數點，有一組是 $\left(\frac{12}{37},\frac{35}{37}\right)$，則 m=______ ， n=______

指定作業參考答案：

1. 50π 平方公分。

2. $\left(\frac{41}{841},\frac{840}{841}\right)$、$\left(\frac{840}{841},\frac{41}{841}\right)$、$\left(\frac{9}{41},\frac{40}{41}\right)$、$\left(\frac{40}{41},\frac{9}{41}\right)$

3. m=__6__ ， n=__1__

八、教學注意事項：

1. 教學時間分配建議如下：活動一約需 10 分鐘，活動二約需 10 分鐘，活動三約需 10 分鐘，活動四約需 20 分鐘，活動五約需

10 分鐘，活動六約需 30 分鐘。

2.由於一般畢氏三元數組不一定是兩兩互質，因此對於本原畢氏三元數組的定義，要給學生充分的練習、舉例與瞭解。

3. 計算扇形面積用弧長與圓周長的比率。計算弧長公式，用圓心角與 360 度的比率來說明，會顯得自然易懂。

4. 當正整數 m,n，$m>n$，$(m,n)=1$，m,n 是一奇一偶，則 $a=m^2-n^2$ 為奇數，$b=2mn$ 為偶數，$c=m^2+n^2$ 為奇數，且 a,b,c 形成一組本原畢氏三元數組。

為什麼需要 $(m,n)=1$，且 m,n 是一奇一偶，是一個比較難讓學生理解的單元，除了要讓學生自己能舉例，求得本原畢氏三元數組之外，還要能體會 $(m,n)=1$ 的必要性。

5. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

6. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. (註一) 最簡真分數的表示法具有存在性與唯一性。

存在性：設 x_1 的最簡真分數表示為 $x_1=\dfrac{q}{p}, p>q>0, p,q$ 都是正

整數,$(p,q)=1$

唯一性：令$x_1=\dfrac{a}{c}$，$c>a>0$，c,a都是正整數，$(c,a)=1$。得

到$\dfrac{q}{p}=\dfrac{a}{c}\Leftrightarrow cq=ap.......(1)$

正向來看，$cq=ap.......(1)$，$c|ap$，由$(c,a)=1\ \Rightarrow c|p$。

反向來看，$cq=ap.......(1)$，$p|c\,q$，由$(p,q)=1$，由$(2)\Rightarrow p|c$。

由此推得$p=c$，同理可推得$q=a$。

2. (註二) 在第一象限的單位圓上，x,y 坐標都是最簡真分數的點，其點坐標表示法，也具有存在性與唯一性。

存在性：

取m,n都是正整數，$(m,n)=1$，$m>n$，m,n是一奇一偶，

則令$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$

則a,b,c都是正整數，$a^2+b^2=c^2$，$(a,b,c)=1$，a,b,c形成一組本原畢氏三元數組。

由$a^2+b^2=c^2.........(3)$，且$(a,b,c)=1$，可得到a,b,c兩兩互質。

(否則若有質數p能整除a,且p能整除b，亦即$p|a$，

$p|b\Rightarrow p|(\mathrm{a}^2+b^2)\Rightarrow p|(c^2)\Rightarrow p|c$，與$(a,b,c)=1$矛盾)

若將$a^2+b^2=c^2.........(3)$兩邊同除c^2，得到$\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$

即得到$P\left(\dfrac{a}{c},\dfrac{b}{c}\right)$是一組$x,y$坐標均為最簡真分數的點，且$P$在單位圓$x^2+y^2=1$上。

唯一性：

當最簡真分數$x_1=\dfrac{q}{p}$，$p>q>0$，p,q都是正整數，$(p,q)=1$

最簡真分數$x_2=\dfrac{t}{s}$，$s>t>0$，s,t都是正整數，$(s,t)=1$

若$x_1{}^2+x_2{}^2=1\Leftrightarrow\dfrac{q^2}{p^2}+\dfrac{t^2}{s^2}=1$

$$\Leftrightarrow (qs)^2+(pt)^2=(ps)^2\text{........}(4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(q\mathrm{s})^2+(p\mathrm{t})^2}{(p\mathrm{s})^2}=1$$

取$A=\dfrac{qs}{ps}$，$B=\dfrac{pt}{ps}$ $\Rightarrow A^2+B^2=1\Rightarrow$點$(A,B)$在單位圓上

且$A=\dfrac{qs}{ps}$、$B=\dfrac{pt}{ps}$有相同的分母ps

令$l=(qs,pt,ps)$是三個正整數qs,pt,ps的最大公因數

由(4)式，兩邊同除 l^2

$$\Rightarrow (qs)^2+(pt)^2=(ps)^2\Rightarrow\left(\frac{qs}{l}\right)^2+\left(\frac{pt}{l}\right)^2=\left(\frac{ps}{l}\right)^2$$

令$a=\dfrac{qs}{l}$，$b=\dfrac{pt}{l}$，$c=\dfrac{ps}{l}$.........(5)

則有$a^2+b^2=c^2$之關係，且其最大公因數$(a,b,c)=1$

亦即a,b,c形成一組本原畢氏三元數組。

由$a^2+b^2=c^2$，兩邊同除$c^2\Rightarrow\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$

其中$(a,c)=1$，$(b,c)=1$，且知道$P\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)$是一組坐標均為最簡真分數的點，且$P$在單位圓$x^2+y^2=1$上。

由 $a=\frac{qs}{l}$ ，$b=\frac{pt}{l}$ ，$c=\frac{ps}{l}$ ....(5)

$$\frac{a}{c}=\frac{\frac{qs}{l}}{\frac{ps}{l}}=\frac{q}{p}=x_1\ ,\ \frac{b}{c}=\frac{\frac{pt}{l}}{\frac{ps}{l}}=\frac{t}{s}=x_2$$

即最簡真分數$x_1=\frac{q}{p}=\frac{a}{c}$，由(一)最簡真分數的表法具有存在性與唯一性$\Rightarrow$ $p=c$、$q=a$ 。

同理最簡真分數$x_2=\frac{t}{s}=\frac{b}{c}\Rightarrow$ $s=c$、$t=b$ 。

故，單位圓上，在第一象限x、y坐標都是最簡真分數的點，其點坐標表示法，也具有存在性與唯一性。

3. 半圓上的最大內接矩形的找法。

課前想一想：

(1) 如下圖 1，$PQST$是$x^2+y^2=r^2$上半圓的內接矩形，它是根據線段$\overline{CO}$對稱的圖形，它的面積是$2xy$。

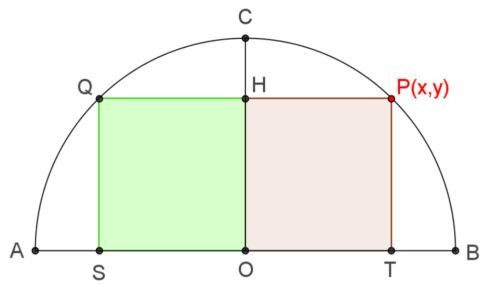


圖 1

(2) 考慮乘法公式 $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\geq 0 \Rightarrow 2xy\leq x^2+y^2$

所以半圓內接矩形的面積 $2xy$ 永遠小於或等於 x^2+y^2，

但是 $x^2+y^2=r^2$ 是固定的數，而且它有可能相等

$2xy = x^2+y^2$，即當 $x = y$ 成立時。

(3) 當 $x = y$ 時，半圓內接矩形的面積 $2xy = x^2+y^2 = r^2$，

此時面積有最大值。亦即當 $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$ 時，半圓內接矩形的面積有最大值為 r^2。

課堂實作：

(1) $x=y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$，有可能不是分數，不容易直接找到 P 點，那麼我們有哪些方法可以找到 P 點。

(2) 如下圖 2，利用相似形是個好方法。如果能做一個以原點為中心，矩形 $PQST$ 的相似矩形 $FGDE$，且令矩形 $FGDE$ 的邊長是 1：2 的整數，使得 O-F-P，O-G-Q 三點共線即可。

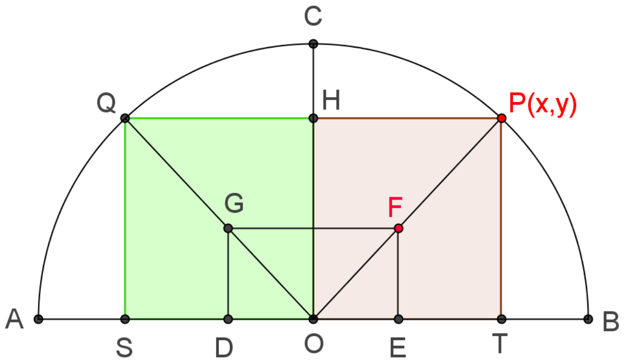


圖 2

(3) 取$\overline{OE}=\overline{EF}=1$，作等腰直角三角形$\Delta OEF$，將斜邊延長交圓於$P$點，作$\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$，$\overline{PT} \perp \overline{AB}$，$\overline{QS} \perp \overline{AB}$，則$PQST$就是內接於半圓的最大矩形。

4. 參考文獻：

(1) 李政豐、陳昭地 (2013) 。內切圓和直角三角形。陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊。新北市：國家教育研究院。

(2) 李政憲、陳昭地(2013) 畢氏三元數組。陳昭地主編：國民中學教材原型 C 冊。新北市：國家教育研究院。

(3) Silverman J. H. (2006). A Friendly Imtrodution to Number Theory (3rd Ed.) Pearson Education International.
Http://www.guailih.com.tw

主題 5－4：內切圓和直角三角形

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者：**李政豐

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　陳昭地

(一) 熟悉二個整數及三個整數互質的意義與簡易例子。

(二) 熟悉將整數作標準分解式。

(三) 熟悉邊長 a、b、c 的直角三角形有畢氏定理的關係。

(四) 知道三角形三內角平分線的交點決定出其內切圓圓心。

(五) 知道內切圓的圓心與三邊等距離（半徑）。

(六) 知道內切圓的圓心與三邊上的切點連線垂直性質。

(七) 知道直角三角形斜邊上的高，分此直角三角形形成大小不一的三個兩兩相似的直角三角形。

(八) 熟悉畢氏三元數組與本原畢氏三數組的意涵並能舉簡例。

三、教學目標：

(一) 知道三角形內切圓半徑與周長的乘積等於其面積的二倍。

(二) 知道整數邊長的直角三角形，其內切圓半徑必為整數。

(三) 知道直角 ΔABC 三邊長生成本原畢氏三元數組時，當其邊長 $a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2 (m>n \text{且} m,n \text{互質,奇偶相異})$，

其內切圓半徑$r=\dfrac{ab}{a+b+c}=n(m-n)=\dfrac{a+b-c}{2}$ 。

(四) 任給正整數 r，知道 $2r+1$，$2r^2+2r$，$2r^2+2r+1$ 為三邊的直角三角形，其內切圓半徑就是 r。

(五) 由正整數 r 之標準分解式 $2^x \cdot p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{x_l}$（$p_i$ 為相異的奇質因數，$l \geq 0$）知道有 2^l 組的本原畢氏三元數組為邊長的直角三角形且它們的內切圓半徑均為 r。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

(一) 本主題為圓與直線關係的一個單元，結合畢氏三元數組為邊長的直角三角形，重點在整數與幾何的連結。

(二) 習慣上在ΔABC中，將$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$長寫成a,b,c;且當它是$\angle C=90°$的直角三角形，c 為斜邊，$p=a+b+c$為其周長。

(三) 教學時宜準備 Powerpoint 檔、教學學習單，能大幅提昇教學效果。

六、教學活動：

活動一：直角ΔABC內切圓半徑 r 跟其邊長的關係。

步驟 1：先回答下列問題：

(1) 邊長 3、4、5 的直角三角形，其內切圓半徑為_____。

(2) 邊長 5、12、13 的直角三角形，其內切圓半徑為_____。

(3) 邊長 15、8、17 的直角三角形，其內切圓半徑為_____。

步驟 2：

(1)邊長為 a、b、c 畢氏三元數組，其內切圓半徑 r 又是多少？

①先示意畫出直角 ΔABC，$\angle C = 90°$。

②內切圓圓心 O；連接 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$及$\overline{OC}$。

③可知 $\Delta ABC = \Delta CBO + \Delta ACO + \Delta BAO$

$$\therefore \ \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

$$\therefore \ r(a+b+c) = ab$$

$$\therefore \ r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{2\Delta ABC\text{的面積}}{\Delta ABC\text{周長}} = \frac{2\Delta ABC}{p}$$

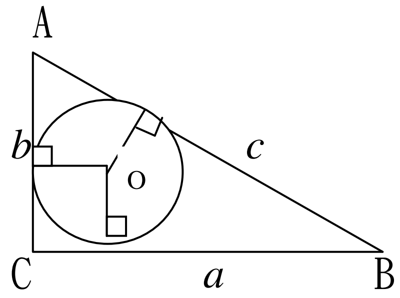


圖 1

(2) 檢查步驟 1 中，(1)、(2)、(3)三個問題的答案是否正確？

不正確者加以訂正。

步驟 3：(小結)

(1) 整數邊長為畢氏三元數組的三角形，其內切圓半徑一定是分數，但一定為整數嗎？(提示：再檢查三組畢氏三元數組 7、24、25；21、20、29；9、40、41，增加答案之正確性。)

(2) 一般邊長 a、b、c 的直角三角形，甚至一般的三角形，其內切圓半徑公式 $r = \dfrac{2\Delta ABC}{p}$ 都是正確的。

活動二： 整數邊長的直角ΔABC，其內切圓半徑$r=\dfrac{ab}{a+b+c}$一定是整數。

步驟 4： 當（a,b,c）＝（3,4,5）時，$r=\dfrac{2\cdot 6}{3+4+5}=1$

當（a,b,c）＝（6,8,10）時，則其最大公因數

（a,b,c）＝2，$r=\dfrac{6\cdot 8}{6+8+10}=\dfrac{2^2\cdot 3\cdot 4}{2(3+4+5)}=2$

當（a,b,c）＝（3 k,4 k,5k），k 為正整數則

$$r=\frac{k^2(3\cdot 4)}{3k+4k+5k}=\frac{k^2\cdot 3\cdot 4}{k(3+4+5)}=k$$

……

換言之，當本原畢氏三元數 a,b,c 使得其內切圓半徑 r 為整數值時，則其正整數倍數k的畢氏三元數組（ka,kb,kc）之內切圓半徑為 kr，亦為整數值。

隨堂練習 1： 仿照上面步驟中令（a,b,c）＝（5,12,13），檢查看看畢氏三元數組（10,24,26），（5k,12k,13k）k 為正整數，其內切圓半徑是否為整數？

步驟 5： 由第 1 章之主題 4，本原畢氏三元數（a,b,c）恆可表成：

$a=(m^2-n^2)$，$b=2mn$，$c=(m^2n^2)$

其中 m、n 是互質的正整數，且 $m>n$，m、n 之奇偶性相反。

隨堂練習 2： 請依下表，寫出本表畢氏三元數組（a,b,c）：

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	____	____	____
5	4	____	____	____
6	1	____	____	____
6	5	____	____	____

步驟 6：

當 $m=7$，$n=2$ 時，本原畢氏三元數組為（45,28,53），其內切圓半徑 10。

當 $m=7$，$n=4$ 時，本原畢氏三元數組為（33,56,65），其內切圓半徑 12。

當 $m=7$，$n=6$ 時，本原畢氏三元數組為（13,84,85），其內切圓半徑 6。

隨堂練習 3：

(1) 當 $m=8$，$n=7$ 時，其對應的本原畢氏三元數組為何？

______________此時其內切圓半徑為_____。

(2) 當 $m=9$，$n=8$ 時，（1）中的答案又如何？

步驟 7：（小結）由步驟 4 及隨堂練習本原畢氏三元數組（a,b,c），由其形成的直角三角形之內切圓為整數 r＝$n(m- n)$，其理由如下：

(1) $r(a+b+c)=ab$

以 $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，代入得

(2) $2r(m^2+mn)=2mn(m^2-n^2)$

$2r\,m(m+n)=2mn(m-n)(m+n)$

$r=n(m-n)$

換句話說，我們得到內切圓半徑 $r=n(m-n)$ 之公式。

步驟 8：當（a,b,c）為畢氏三元數組為邊長所成的直角三角形，其內切圓半徑公式的另一形式 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$，其理由如下：

$$(a+b+c)(a+b-c)=(a+b)^2-c^2$$
$$=a^2+b^2+2ab-c^2=2ab$$
$$\therefore\ a+b-c=\frac{2ab}{a+b+c}$$
故 $r=\dfrac{ab}{a+b+c}=\dfrac{a+b-c}{2}$

上面的公式對一般以 a、b 為兩股，c 為斜長的直角三角形亦成立。

隨堂練習 4：

(1) 求邊長為$\dfrac{3}{5}$、$\dfrac{4}{5}$、1 的直角三角形之內切圓半徑長。

(2) 求邊長為 1、2、$\sqrt{5}$ 的直角三角形之內切圓半徑長。

活動三：直角ΔABC，$\angle C=90°$，斜邊上的高$h_c=\overline{CD}$，則$\overline{CD}$分直角ΔABC為三個大小不同互相相似直角形$\Delta ABC\sim\Delta BCD\sim\Delta CAD$，如圖 2。

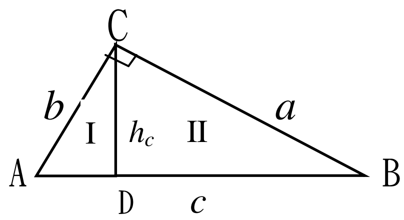


圖 2

令r_I、r_{II}、r_{III}分別為ΔCAD、ΔBCD、ΔABC內切圓半徑，本活動旨在探究r_I、r_{II}、r_{III}及h_c之間的關係。

步驟 9： 先分別對$a=4$，$b=3$，$c=5$及$a=12$，$b=5$，$c=13$之特例來計算r_I、r_{II}、r_{III}：

(1) 當$a=4$，$b=3$，$c=5$時

由$\Delta CAD \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} \Rightarrow \overline{CA}^2=\overline{AB}\cdot\overline{AD} \Rightarrow \overline{AD}=\frac{\overline{CA}^2}{\overline{AB}}=\frac{9}{5}$$

同理，由$\Delta CBD \sim \Delta ABC$得$\overline{BD}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{BD}=\dfrac{16}{5}$

而由$\Delta ADC \sim \Delta CDB$得 $h_c^2=\overline{AD}\cdot\overline{BD}=\dfrac{9}{5}\cdot\dfrac{16}{5} \Rightarrow h_c=\dfrac{12}{5}$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{故得} r_I=\dfrac{\overline{AD}+h_c-\overline{AC}}{2}=\dfrac{\frac{9}{5}+\frac{12}{5}-3}{2}=\dfrac{3}{5}, \\
r_{II}=\dfrac{\overline{BD}+h_c-\overline{BC}}{2}=\dfrac{\frac{16}{5}+\frac{12}{5}-4}{2}=\dfrac{4}{5}, \\
r_{III}=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{4+3-5}{2}=1 \\
h_c=\dfrac{12}{5}
\end{array}\right\} \quad (*)$$

(2) 當 $a=12$, $b=5$, $c=13$ 時

同理，計算得 $\overline{AD}=\frac{25}{13}$ ，$\overline{BD}=\frac{144}{13}$ ，$h_c=\frac{60}{13}$

$$\left.\begin{array}{l} r_I=\frac{10}{13}, \\ r_{II}=\frac{24}{13}, \\ r_{III}=2 \ , \\ h_c=\frac{60}{13} \end{array}\right\} (**)$$

由（*）及（**）可以發現

$$(***)\left\{\begin{array}{l} h_c=r_I+r_{II}+r_{III} \\ r_I=\frac{10}{13}=\frac{5}{13}r_{III}=\frac{b}{c}r_{III} \\ r_{II}=\frac{24}{13}=\frac{13}{12}r_{III}=\frac{a}{c}r_{III} \\ r_I^{\ 2}+r_{II}^{\ 2}=r_{III}^{\ 2} \end{array}\right.$$

隨堂練習 5：

針對 $a=24$ ，$b=17$ ，$c=25$ 的直角三角形，檢驗（***）之等式是否成立？

步驟 10：針對一般的直角 ΔABC, $\angle C=90°$ ，看圖 2。

$$r_I=\frac{\overline{AD}+h_c-b}{2}=\frac{\overline{AD}\cdot c+h_c\cdot c-bc}{2c}=\frac{b^2+ab-bc}{2c}=\frac{b}{c}\cdot(\frac{b+a-c}{2})=\frac{b}{c}r_{III}$$

同理，

$$r_{II}=\frac{a}{c}r_{III}$$

換言之，相似三角形對應邊的比等於其對應內切圓半徑之比。

$$
\begin{aligned}
r_I + r_{II} + r_{III} &= (\frac{b}{c} + \frac{a}{c} + 1) r_{III} \\
&= \frac{a+b+c}{c} r_{III} \\
&= \frac{a+b+c}{c} \times \frac{2\Delta ABC}{p}
\end{aligned}
$$

於是 $= \dfrac{2\Delta ABC}{c} = h_c$

而 $r_I{}^2 + r_{II}{}^2 = [(\frac{b}{c})^2 + (\frac{a}{c})^2] r_{III}{}^2 = \dfrac{a^2+b^2}{c^2} r_{III}{}^2$

故得 $r_I{}^2 + r_{II}{}^2 = r_{III}{}^2$

於是 $\pi \mathrm{r}_{\mathrm{I}}{}^2 + \pi \mathrm{r}_{\mathrm{II}}{}^2 = \pi \mathrm{r}_{\mathrm{III}}{}^2$

即兩個小直角三角形內切圓的面積和等於原直角三角形內切圓的面積，而斜邊上的高等於大小三個直角三角形內切圓之半徑和。

隨堂練習 6：

(1) 圖 2 中已知 $r_I = 3$，$r_{II} = 4$，$r_{III} = 5$，求此直角三角形斜邊上的高。（注：此時直角三角形三邊長為 15，20，25。）

(2) 圖 2 中可能不可能有大小三內切圓半徑分別是 2、3 及 4？

活動四： 從本原畢氏三元數組（a,b,c）的生成數對（m、n）

$$
\begin{aligned}
a &= m^2 - n^2 \\
b &= 2mn \\
c &= m^2 + n^2
\end{aligned}
$$

其中 m、n 互質，$m > n$；m、n 一奇一偶

令 $m = n + 1$ 得到一系列的特殊本原畢氏三元數組；

$$
\begin{aligned}
a &= m^2 - n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 \\
b &= 2mn = 2n(n+1) = 2n^2 + 2n \\
c &= m^2 + n^2 = (n+1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1
\end{aligned}
$$

以 a、b、c 為邊長的直角三角形的內切圓半徑為 n。

因此，對於任一正整數 r，至少有一組

$a=2r+1, b=2r^2+2r, e=2r^2+2r+1$ 為邊長，本原畢氏三元數組的直角三角形，其內切圓半徑恰為 r 外，到底還有沒有其它的本原畢氏三元數組為邊長的直角三角形之內切圓半徑仍為 r？本活動就是要來探索有多少組本原畢氏三元數組為邊長的直角三角形，有同樣長的內切圓半徑 r。

步驟 11： 先針對 r＝1，r＝2，r＝3，r＝4，r＝5，r＝2×3，r＝2×3×5 等特例尋求答案的規律。

(1) 當 r＝1 時，由公式 r＝n（m－n），其中 m＞n，最大公因數（m，n）＝1 且 m、n 有不同的奇偶性，此時僅有 n＝1， m＝n＋1＝2，一組解（3,4,5）。

(2) 當 r＝2 時，由 r＝n（m－n）及 m、n 的條件也僅得 n＝2，m＝2＋1＝3 一組解（5,12,13）

(3) 當 r＝3 時，由 m、n 之條件，得到下列二組解：

① n＝1，m＝3＋1＝4 →（15,8,17）

② n＝3，m＝3＋1＝4 →（7,24,25）

(4) 當 r＝4＝2^2 時，由 m、n 之條件僅能取 n＝4，m＝4+1＝5 →（9,40,41）一組解

(5) 當 r＝5 時，由 m、n 之條件，得到下列二組解：

① $n=1$，$m=5+1=6\rightarrow$（35,24,37）

② $n=5$，$m=1+5=6\rightarrow$（11,60,61）

(6) 當 r＝6＝2×3 時，由 m、n 之條件，得到下列二組解：

① $n=2$，$m=3+2=5\rightarrow$（21,20,29）

② $n=6$，$m=1+6=7\rightarrow$（13,84,85）

(7) 當 r＝2×3×5 時，由 m、n 之條件，得到下列四組解：

① $n=2$，$m=15+2=17\rightarrow$（285,68,293）

② $n=6$，$m=5+6=11\rightarrow$（85,132,157）

③ $n=10$，$m=3+10=13\rightarrow$（69,260,269）

④ $n=30$，$m=1+30=31\rightarrow$（61,1860,1861）

你看出以上解的組數之規律性？

隨堂練習 7： 針對 r＝2×3^2，求出本原畢氏數組為邊長而其內切半徑長恰為 18。（提示：有二組解）

步驟 12： 由以上的步驟 11 各例及隨堂練習 7，我們可以使用下列程序，來求正整數 r 為本原畢氏三元數組（a,b,c）的直角三角形內切圓半徑長的組數：

(1) 先將 r 的標準分解式寫出來：$r=2^x\cdot p_1^{x_1}\cdot\ldots\cdot p_l^{x_l}$

其中 $x\geq0$ 之整數，$p_1<p_2<\ldots<p_l$ 為由小到大的奇質因數 $x_1,x_2,\ldots,x_l\geq1$ 的正整數。

$l\geq0$, $l=0$ 時 $r=2^x$

例如，$15=2^0\times3\times5$，$1000=2^3\times5^3$ 等等

隨堂練習 8：請分別寫出 35，70，100 的標準分解式。

(2) 其次求互質的正整數（m，n）$m>n$

且 m，n 之奇偶性相反（恰好一奇一偶）

其組數與 n 的可能取法數相同。

(3) 當 n 取到 2 或 p_i 時，就必須取到 2^x 或 $p_i^{x_i}$ 之全部（$1\leq i\leq l$），

而且 n 必須到 2^x 之全部。p_i 可以取，也可以不取恰好有

兩種情形。

(4) 當 $r=2^x$ 時，n 就只能取 2^x 而 $m=2^x+1$ 一組解。

(5) 當 $r=2^x\cdot p_1^{x_1}$ 時，n 就只能取到 2^x 或 $2^x p_1^{x_1}$ 兩種。

(6) 當 $r=2^x\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}$ 時，n 可以取到 2^x，$2^x\cdot p_1^{x_1}$，$2^x\cdot p_2^{x_2}$

及 $2^x\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}$ 四組解。

(7) 一般來說 $r=2^x\cdot p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{x_l}$，則 n 可以取到 2^x，$2^x\cdot$

$p_1^{x_1}$，$2^x\cdot p_2^{x_2}$，…，$2^x\cdot p_l^{x_i}$；$2^x p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}$，…，

$2^x p_1^{x_1} p_l^{x_l}$；…，$2^x p_1^{x_1} p_2^{x_2}\ldots p_{l-1}^{x_{l-1}}$，$2^x p_1^{x_1} p_2^{x_2}\ldots\cdot p_l^{x_l}$，

$2^x\cdot p_1^{x_1} p_2^{x_2}\ldots p_{l-1}^{x_{l-1}} p_l^{x_e}$ 共有 2^l 組解，相應的（a,b,c）就有

2^l 組本原畢氏三元數組解，因此共有 2^l 個本原畢氏三元數

組為邊長的直角三角形，它們的內切圓半徑都是原給定的

正整數 r。

隨堂練習 9：試說明恰一組本原畢氏三元數組為邊長的直角三角形，其內切圓半徑都是 64。

活動五：（結論）

(一) ΔABC 內切圓的半徑長 r 為 $\dfrac{2\Delta ABC}{p}$，p 為其周長。

(二) ΔABC中，$\angle C = 90°$，其內切圓半徑常 r＝$\dfrac{a+b-c}{2}$。

(三) 邊長為整數的直角三角形，其內切圓半徑為 r＝$\dfrac{a+b-c}{2}$，故 r 為整數。

(四) 由（m,n），$m＞n$，m,n 互質生成的本原畢氏三元數組為邊長的直角三角形，其內切圓半徑 r＝$n\,(m－n)$。

(五) 給定任意正整數 r，至少有一本原畢氏三元數組為邊長的直角三角形具有內切圓半徑 r。

(六) 具有 l 個相異的奇質因數的正整數 r，恰有 2^l 個本原畢氏三元數組為邊長且內切圓半徑恰為 r 的直角三角形。

(七) 任意直角三角形 ΔABC，$\angle C = 90°$，被斜邊上的高分割成三個大小不一的直角三角形，如圖 2，則：

(1) 三個直角三角形的內切半徑和等於原 ΔABC 斜邊上的高。

(2) 三個內切半徑可以作成一個以三半徑為邊長的直角三角形。

教學活動參考解答：

步驟 1：(1) 1，(2) 2，(3) 3。

隨堂練習 1：（a,b,c）＝（5,12,13）→ r＝2

＝（10,24,26）→ r＝4

＝（$5k,12k,13k$）→ r＝$2k$

隨堂練習 2： 21、20、29；9、40、41；35、12、37；11、60、61。

隨堂練習 3：(1) 15、112、113；7。(2) 37、144、145。

隨堂練習 4：(1) $\frac{1}{5}$，(2) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$。

隨堂練習 5：均成立（過程略）。

隨堂練習 6：(1) 12；(2) 不可能（理由 $4^2\neq2^2+3^2$）

隨堂練習 7：取 n＝2 及 18，則 m＝11 及 m＝19。

隨堂練習 8：35＝5×7，70＝2×5×7，100＝$2^2\times5^2$

隨堂練習 9：因為 64＝2^6，僅有 $n=2^6=64$ ，m＝65 一組解，此時（a,b,c）＝（129,8320,8321）

七、指定作業：

1. 設直角三角形三邊長分別 50、120 及 130，試求其內切半徑長。
2. 試找出所有以本原畢氏三元數組（a,b,c）為邊長的直角三角形，使其內切圓半徑恰為 10。
3. 試找出所有以本原畢氏三元數組（a,b,c）為邊長的直角三角形，而其內切圓半徑都是 35。

4. 試找出所有以本原畢氏三元數組（a,b,c）為邊長的直角三角形，而其內切圓半徑都是 70。

5. 試找出一個直角三角形，使其斜邊上的高分此直角三角形為三個大小不同的直角三角形，而此三個直角三角形的內切圓半徑分別 $\frac{10}{13}$ 、$\frac{24}{13}$ 及 2，並求此直角三角形斜邊上的高。

6. 試求面積及周長都是同一數值 24 的 ΔXYZ 之內切圓半徑長。

指定作業參考解答：

1. $r=\dfrac{50+120-130}{2}=20$；

2. $10=2\times5$，n 有兩種取法 2 及 10，相應的 m 分別 7 及 11，即（m,n）=（7,2）、（11,10）故得（a,b,c）=（45,28,53）,（21,220,221）兩組解。

3. $35=5\times7$，n 有四種取法 1、5、7、35，相應的 m 分別 36、12、12、36，即（m,n）=（36,1）、（12,5）、（12,7）及（36,35）。故得（a,b,c）=（1296,72,1297）,（119,120,169）,（95,168,193）及（71,2520,2521）。

4. $70=2\times5\times7$，n 有四種取法 2、10、14、70，相應的 m 分別為 37、17、19 及 71。故得（a,b,c）=（1365,148,1373）、（189,340,389）、（165,532,557）及（141,9940,9941）。

5. 邊長為 5、12 及 13 的直角三角形其斜邊上的高為 $\frac{10}{13}+\frac{24}{13}+2=\frac{60}{13}$。

6. 半徑長為$\dfrac{2\times 24}{24}=2$。

八、教學注意事項：

1. 指導說明讀題時間約 4～5 分鐘，活動一分配時間約 20 分鐘，活動二分配時間約 20 分鐘（含指定作業），活動三分配時間約 20 分鐘，活動四分配時間約 20 分鐘，活動五結論及作業時間約 5 分鐘。
2. 步驟 1 先要求回答基礎題，主要檢核學生之基本程度，若沒答對就需要加強步驟 2 的教學來導出三角形內切圓半徑的公式：面積的 2 倍除以周長。
3. 活動二旨於說明整數邊長的直角三角形之內切圓半徑必定為整數，單就這方面使用 $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ 公式，即可輕易得出，但我們先強調 $r=n(m-n)$ 之公式，主要是要用因數分解的技巧，將 r 先寫成標準分解式，逆向求出具本原畢氏三元數組（a,b,c）為邊長之組數的直角三角形，（這裡要 $m>n$，m、n 互質且一奇一偶），它們的內切圓半徑都是 r。
4. 任意正整數 r，至少在有一個（$2r+1,2r^2+2r,2r^2+2r+1$）本原畢氏三元數組為邊長且內切圓半徑為 r 的直角三角形，而恰有內切圓半徑 r 之直角三角形時充要條件為 $r=2^x$，即 r 沒有任何奇質因數。

5. 當 r＝$2^x \cdot p_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{x_l}$，$l\ \geq 0$（$l$ ＝ 0 時 r＝2^x）在 r 有 l 個相異奇質因數，不管 $x_1 \geq 1$，...，$x_l \geq 1$ 多大都不影響本原畢氏三元數組為邊長，內切圓半徑都是 r 的直角三角形之組數（＝2^l）。注意分解 r＝$n(m-n)$，滿足 $m>n$，$(m,n)=1$，m、n 一奇一偶的方法數相當先取定 n 的方法數。而 n 必須含 2^x 的全部，且對 $p_i^{x_i}$ 的取法或者不取 p_i，要取時則取全部 $p_i^{x_i}$，故由 n 的取法共有 $1\times2\times2\times\ldots\times2=2^l$ 種。
6. 逆向推出內切圓半徑為正整數 r 知本原畢氏三元數組為邊長的直角三角形之組數，本主題的設計是具有一定的技術，先盯住特例揣摩，謹慎細心些，就不難體會出來。
7. 活動五的結論很重要，要檢測學生是否熟悉，是否理解，作為必要補救措施。
8. 一般的 ΔABC，其內切圓半徑為 $\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$，其中 s 為半周長 $\dfrac{p}{2}=\dfrac{a+b+c}{2}$，對程度較好的學生不妨提出這一般化的三角形內切圓半徑公式。
9. 各主題活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
10. 宜加強口頭問答各評量，增進教學效果。

九、教學參考資料：

1. 李政憲、陳昭地（2013）。畢氏三元數組。陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 1-4)。新北市：國家教育研究院。

2. 傅淑婷、陳昭地（2013）。直角三角形母子相似定理與海龍公式。陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-7)。新北市：國家教育研究院。

3. Posamentier,A.S. & Stepelman,J(1986). Unit 66： The inscribed circle and triangle In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics（2nd ed）(pp.324-326) Columbus, OH：Merril.

4. Posamentier,A.S. & Stepelman,J（1986）. Unit 83：Pythagorean Triples In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics,（2nd ed）(pp.355-356). Columbus,OH：Merril.

5. J. H. Silverman (2006).Chapter 2：Pythagorean Triples。 A Friendly Introdution to Number Theory (3rd ED)(pp.11-16), Pearson Education International. http://www.guailih.com.tw

6. 周長ΔABC的面積為$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（海龍公式）故

$$r=\frac{2\Delta ABC}{p}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

其中 $s=\frac{p}{2}=\Delta ABC$ 之半周長 $\frac{a+b+c}{2}$ 。

以 $a=3$ ，$b=4$ ，$c=5$ 為例 $s=6$ ，$s-a=3$ ，$s-b=2$ ，$s-c=1$

故 r= $\sqrt{\frac{3\cdot 2\cdot 1}{6}}=1$ 與用公式 $r=\frac{a+b-c}{2}=1$

或 $r=n(m-n)$ $m=2$ ，$n=1$ 代入 $r=1$

通通得到相同的答案。

主題 5—5 銳角三角形的九點圓

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者**：李政豐

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　陳昭地

(一) 知道不共線三點，決定一圓。

(二) 知道平面上四點共圓的條件。

(三) 知道ΔABC有重心 G，外心 O。

(四) 知道銳角三角形的三高交於垂心 H。

(五) 知道三角形兩邊中點連線的性質。

(六) 知道平行截線分線段成比例的性質。

(七) 知道直角三角形的斜邊中點與三頂點等距離。

(八) 知道平面上兩線平行之充要條件。

(九) 知道直角坐標平面作法及過兩定點之直線方程式求法。

(十) 知道畢氏定理及兩點距離公式。

三、教學目標 ：

(一) 瞭解不等邊銳角三角形ΔABC三邊上的中點A', B', C'所決定的圓通過ΔABC三高的垂足F,E,D(四點共圓到六點共圓)。

(二) 瞭解當ΔABC的垂心為H，$\overline{HC}$的中點為M，則四點B', C', F, M共圓。

(三) 知道$\Delta A'B'C'$的外接圓就是九點圓，它通過ΔABC三高的

垂足，及垂心到三頂點連線的中點。

(四) 知道不等邊銳角三角形九點圓的意涵。

(五) 知道不等邊銳角三角形九點圓的圓心位置。

(六) 能由九點圓的幾何圖形發現外心、重心及垂心三點在一直線上。

(七) 九點圓的直徑等於ΔABC外接圓的半徑，並知道尤拉線的意涵。

(八) 能由坐標幾何解說外心O、重心G及垂心H三點共線(尤拉線),並解說$\overline{C'M}$的中點N就是九點圓的圓心,N在$\overline{OH}$的中點。

四、教學時間：90分鐘(二節課)

五、教學說明：

(一) 由複習ΔABC的外接圓開始，接下來發現並解說原三角形ΔABC三邊中點，所成的三角形$\Delta A'B'C'$，與ΔABC三高的任一垂足形成四點共圓，於是再發展到六點共圓。

(二) 由發現並解說A',B',C',M之四點共圓，發展到七點共圓，再發展到九點共圓。

(三) ΔABC的外心O,重心G,及垂心H，可由九點圓後續的更炫之幾何圖形窺出三心共線，引出尤拉線之名稱。

(四) 繼而將ΔABC坐標化,並引出直線斜率及過一定點，且已

知斜率的直線方程式，並探求兩互相垂直二直線斜率的關係，再介紹由平行截線性質，導出的內分點坐標公式，先知道重心 G 的坐標，再繼續尋求垂心 H,外心 O 的坐標，用直線 $\overleftrightarrow{OH}$ 與直線 $\overleftrightarrow{OG}$ 斜率相等的結果，說明 O,G,H 三點共線(尤拉線)。再續探求 $\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$，且九點圓圓心 N 就在 $\overline{OH}$ 的中點。

(五) 使用 Power Point 與 Geogebra 之動態幾何學習單，對本單元的主題教學，有關鍵性的絕佳效果。

六、教學活動：

活動一：(溫故知新)從三角形的三心到第四心。

步驟 1：已知 ΔABC 為任意三角形時，先前已知道它有三個重要的心：

(1) 重心 G：它是 ΔABC 三條中線的交點，且 $\overline{GC}=2\overline{GF}$，$\overline{GB}=2\overline{GE}$，$\overline{GA}=2\overline{GD}$。如圖 1(1)所示。

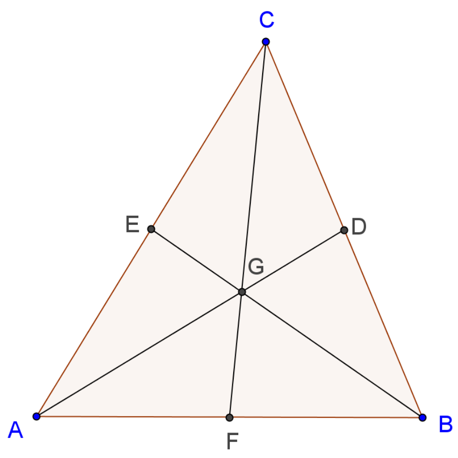


圖 1(1)

(2) 外心 O：它是ΔABC三邊上三條中垂線的交點，它跟三頂點等距離，即$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，外接圓 O 就是以 O 為圓心，以$\overline{OA}$為半徑的圓，而$\Delta ABC$就稱為外接圓 O 的內接三角形，如圖 1(2)所示。

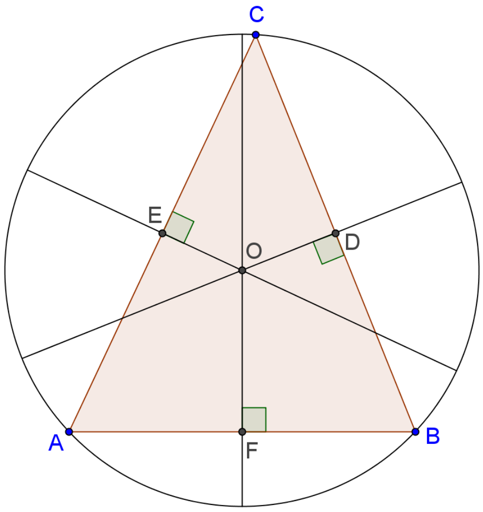


圖 1(2)

(3) 內心I：它是ΔABC三條內角平分線的交點，它到三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$的距離都相等，以I為圓心，I到$\overline{AB}$邊距離為半徑，得到ΔABC的內切圓I，而ΔABC則稱為內切圓I的外切三角形，如圖 1(3)所示。

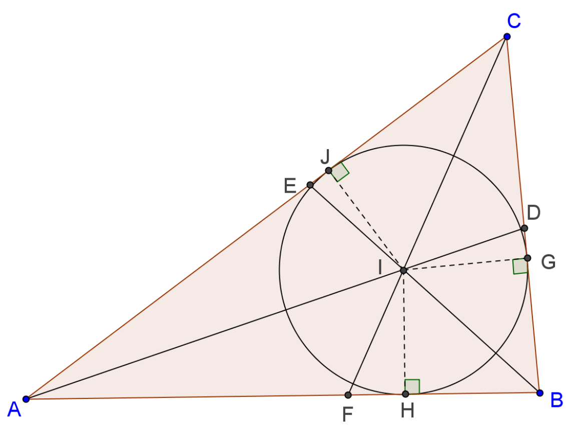


圖 1(3)

步驟 2： 當 ΔABC 為等腰銳角三角形甚或不等邊的銳角三角形，它有第四個心~垂心 H，垂心 H 是 ΔABC 三邊上的三高的交點。圖 2(1)所示。

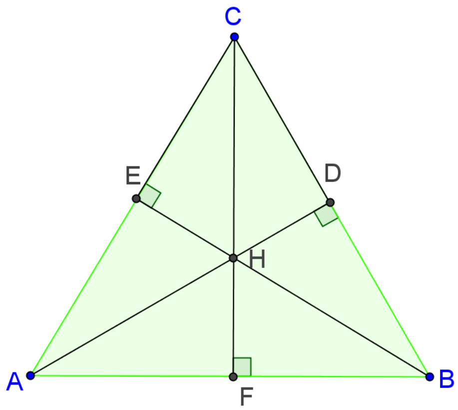


圖 2(1)

若 ΔABC 為直角三角形，則它也有垂心 H，而且垂心 H，恰好就是在直角頂，如圖 2(2)。

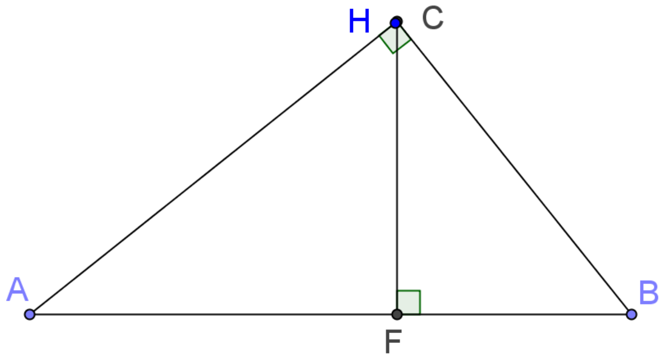


圖 2(2)

但若 ΔABC 為鈍角三角形，顯然它的三高不會有交點，如圖 2(3)，但是它們的延長線，則仍然會交於一點，此交點 H 亦稱為鈍角三角形的垂心。此時垂心在三角形的外部。有關鈍角三角形，三高延長線的交點垂心，雖然有如銳角三角形一樣，也可用超技巧的變心工作來解說，但以圖形變得超複雜，我們就僅在此提出這樣的事實，不再用純幾何圖形去解說給大家看了。

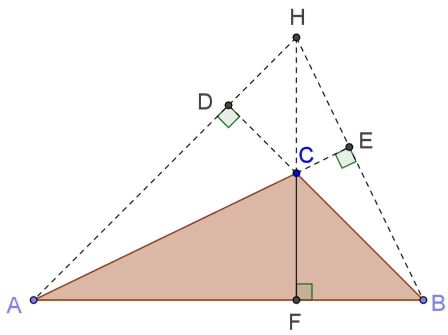


圖 2(3)

隨堂練習 1： 如圖 2(1) 或 2(3)，試說明 A,B,D 與 E 四點在同一圓上(簡稱 A,B,D,E 四點共圓)。

活動二： 四點共圓到六點共圓。

步驟3： 在圖2(1)或2(3)，不僅四邊形$ABDE$或$ABED$有外接圓；同樣的$AFHE$,$BFHD$也都是有外接圓的四邊形，它們都有一組對角均為直角；一般而言，一個四邊形ABCD為圓內接四邊形，相當於它有一組互為補角(一組對角之和為180°)的四邊形。亦即數學上說成ABCD為圓內接四邊形之充要條件為$\angle A+\angle C=180^\circ$，或$\angle B+\angle D=180^\circ$，用數學符號可簡寫成：四邊形ABCD有外接圓$\Leftrightarrow$ $\angle A+\angle C=180^\circ$ 或$\angle B+\angle D=180^\circ$。

步驟 4： 不等邊三角形 ABC，三邊的中點跟任意高的垂足產生四點共圓，如圖 3，A',B',C',F 四點共圓，理由如下：

(1) $\overline{A'B'}\,//\,\overline{AB}$ (中點連線性質)

(2) 因為$\overline{A'B'}\,//\,\overline{AB}$，$\overline{C'F}$在$\overline{AB}$上，$\overline{A'B'}\,//\,\overline{C'F}$。

(3) A'為直角三角形 CBF 斜邊中點，與三頂點等距離，$\overline{A'F}=\overline{A'B}$。

(4) $\overline{B'C'} // \overline{BC}$ ，$\overline{B'C'} = (1/2)\ \overline{BC} = \overline{A'B}$ 。

(5) 四邊形 A′B′C′F 中，$\overline{A'B'} // \overline{C'F}$ ，且 $\overline{A'F} = \overline{B'C'}$ ，四邊形 A′B′C′F 為等腰梯形，$\angle A'B'C' + \angle A'FC' = 180^\circ$

(6) $\angle A'B'C' + \angle A'FC' = 180^\circ$，故等腰梯形 $A'B'C'F$ 為圓內接四邊形。

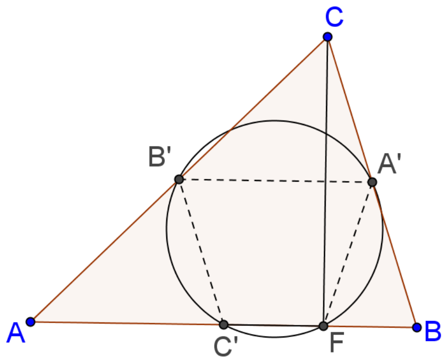


圖3

步驟5： 由以上步驟4之理由知F在 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓上，故 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓通過高 $\overline{CF}$ 的垂足；同理 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓亦通過 $\overline{BC}$ 邊上高的垂足 D 及 $\overline{AC}$ 邊上高的垂足 E。故知 A', B', C', D, E 與 F 都在 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓上，即 A', B', C', D, E, F 六點共圓。

步驟6： 設 H 為不等邊 ΔABC 的垂心(即三高的交點)，M 為 $\overline{HC}$ 的中點，如圖4，不含虛線的圖形。連 $\overline{B'C'}$ ，$\overline{B'M}$ ，並設 $\overline{B'C'}$ 交 $\overline{AD}$ 於P。期待 B', C', F 及 M 四點共圓。

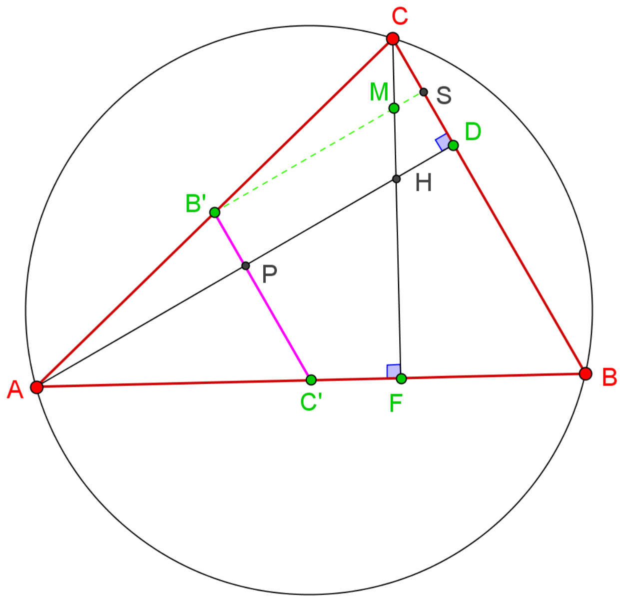


圖4

理由如下：

(1) 因為 B',C' 分別為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{AB}$ 的中點，所以 $\overline{B'C'}//\overline{BC}$ 。

(2) 延長 $\overline{B'M}$ 交 $\overline{BC}$ 於 S，則由 $\overline{B'M}//\overline{AD}$, $\overline{B'S}//\overline{AD}$, $\overleftrightarrow{B'M}\perp\overline{BC}$ 。

$\overline{B'M}\perp\overline{B'C'}$ ，$\angle C'B'M=90^{\circ}$ 。

(3) 再由 $\overline{B'C'}//\overline{BC}$ ，且 $\overline{B'S}$ 為 $\overline{B'C'}$ 與 $\overline{BC}$ 的截線，

$\angle C'B'S=\angle B'SC=90^{\circ}$ ，即得 $\angle C'B'S=90^{\circ}$ 。

(4) 在四邊形 $B'C'FM$ 中，$\angle C'B'\mathrm{M}+\angle \mathrm{C'FM}=90^{\circ}+90^{\circ}=180^{\circ}$ ，故

B',C',F 及 M 四點共圓，而此圓也是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓。

步驟7： 同理，如下圖5，設 $\overline{HA}$ 的中點為 K,則 A',B',K 及 D 四點共圓，而此圓也是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓；再同理，設 $\overline{HB}$ 的中點為 L,則 B',C',L 及 E 四點共圓，而此圓也是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓。綜合得知 A',B',C',M,K,L 六點共圓，此圓即為 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓。

活動三： 由六點圓到七點圓到九點圓。

綜合步驟3~7得 A',B',C',D,E,F 與 A',B',C',M,K,L，兩組六點共圓，且此圓都是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓，即得 A',B',C',D,E,F,M 七點共圓，以至於再加上兩個點 A',B',C',D,E,F,M,K,L 九點共圓，當然此圓亦是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓。於是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓除過三頂點 A',B',C' 之外，亦通過 ΔABC 三高的垂足 D,E,F，再通過 ΔABC 垂心到頂點的中點 M,K,L，這九點都在三角形 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓上，此外接圓即被稱為 ΔABC 的九點圓。

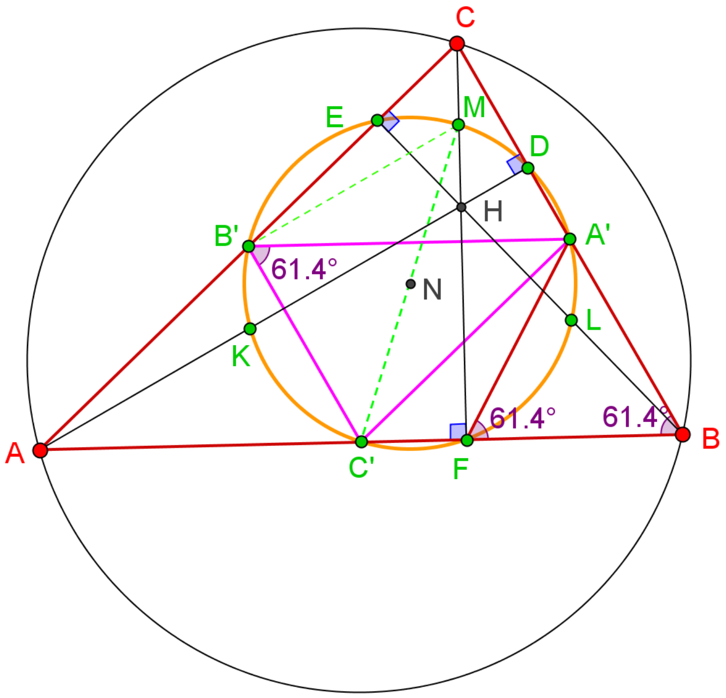


圖5

隨堂練習 2： 在圖 5 中，若 N 是 $\overline{C'M}$ 的中點，請說明 N 就是 ΔABC 九點圓的圓心，而且 $\overline{C'M}$ 就是九點圓的直徑。

活動四： ΔABC 的外心 O,重心 G ,及垂心 H,三點在同一條直線上(稱為<u>尤拉線</u>)

步驟 9：

如果把圖 5 中，再點上外心 O,重心 G ,及畫上ΔABC的外接圓，與作出一些相關連線，就可以得到比圖 5 更複雜但有些規則的超炫圖形如圖 6 所示。

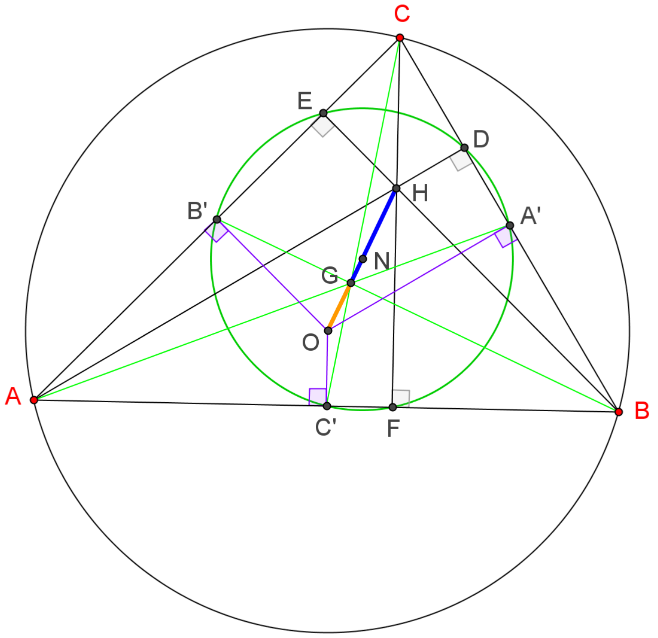


圖6

步驟10：盯住圖6中ΔABC的外心O,重心G,及垂心H,三點好像在同一條直線上，而且$\overline{GO}=\frac{1}{2}\overline{GH}$，且九點圓的圓心N好像是$\overline{OH}$的中點。若能耐心些，再花上仔細檢查的時間，仍然可以藉圖6解說清楚，外心O,重心G ,及垂心H,三點所在的直線就被稱為<u>尤拉線</u>。

隨堂練習 3：

(1) 在圖 6(1)中，請說明$OC'MC$為平行四邊形，並說明$\overline{C'M}=\overline{OC}$，即得九點圓的直徑等於$\Delta ABC$的外接圓半徑。

(可由ΔABC相似於$\Delta A'B'C'$來思考)。

(2) 如圖 6(1)，請說明 N 為$\overline{OH}$的中點(可由ΔMHN,$\Delta C'ON$全等來思考)。

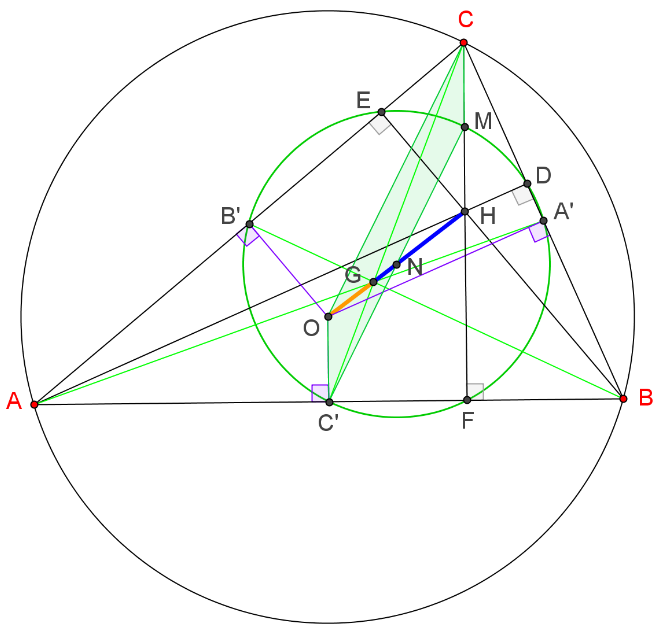


圖 6(1)

活動五：用另一角度~坐標幾何，來探究尤拉線。

步驟 11：(坐標化)不妨設$\angle C$是ΔABC的最大內角，將$\overline{AB}$擺放在水平位置充作 x 軸，$\overline{AB}$邊上通過 C 點的高$\overline{CF}$充作 y 軸，且垂足 F 充作原點，如此建立了ΔABC的所在直角坐標平面。如圖 7 所示。

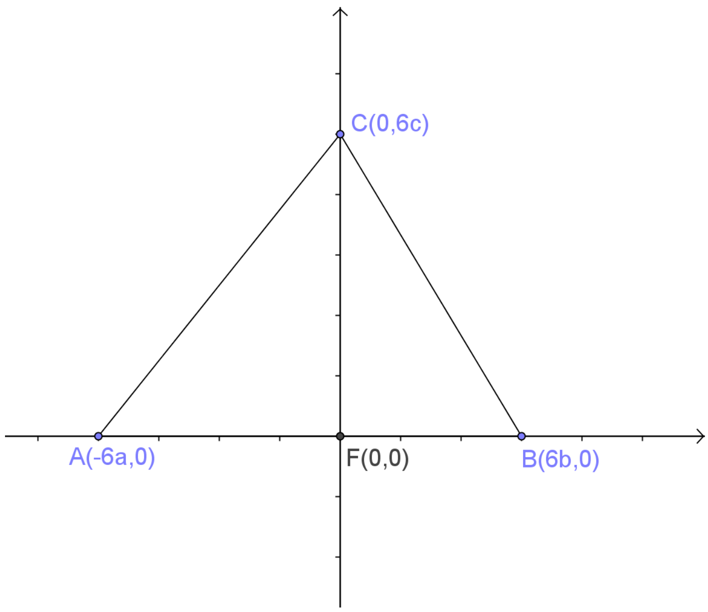


圖 7

注意:為了方便計算，設 A(-6a,0)、B(6b,0)、C(0,6c)，且 $a,b,c>0$ 。

步驟 12： 先看坐標幾何的直線方程式的問題(二元一次方程式的直線圖形與斜率)。

(1) (特例)在坐標平面上，二元一次方程式

$L_1: 2x+3y-14=0$ 的圖形是經過(4,2),(1,4)兩點的直線。

L_2 ：3x-2y+5＝0 的圖形是經過(3,7),(1,4)兩點的直線。

根據一條非平行於 y 軸的直線 L；其上任意兩點 (x_1,y_1) 、(x_2,y_2)，$(x_1\neq x_2)$，其斜率定義成 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，這個數值 m，不論由直線上任取兩點來計算的結果都相同。

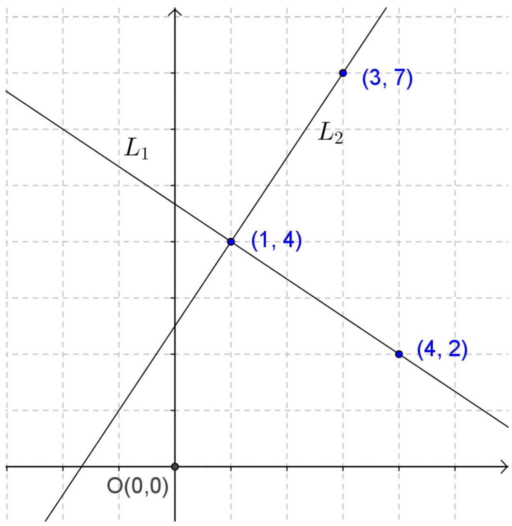


圖 8(1)

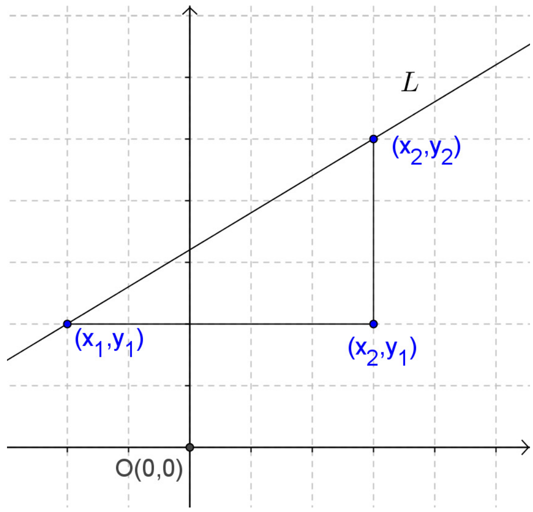


圖 8(2)

所以直線L_1的斜率就是$\dfrac{2-4}{4-1}=-\dfrac{2}{3}$，而直線$L_2$的斜率是$\dfrac{7-4}{3-1}=\dfrac{3}{2}$

這兩條直線L_1,L_2的斜率關係很巧妙，它們的乘積等於-1，即兩直線斜率互為負倒數。而這微妙的關係不禁讓我們看看它們都是通過(1,4)點的直線，看圖 8(1)好像它們互相垂直於點(1,4)。

(2) 我們再來檢查看看L_1,L_2兩直線方程式是不是可用斜率及通過點(1,4)來求得。

先看L_1：設(x,y)為L_1上任意異於(1,4)的點，則有$\dfrac{y-4}{x-1}=-\dfrac{2}{3}$即

$y-4=-\dfrac{2}{3}(x-1)$，也就是$2x+3y-14=0$。

同理L_2，可同法求得$y-4=\dfrac{3}{2}(x-1)$，即$3x-2y+5=0$。

另外再看；過(1,4)點且垂直於L_1的直線L之方程式，也可用

下面的角度來求得：設(x,y)為L上的任意點P，把(1,4)點記作Q，L_1上另一點(4,2)點記作R，如圖 8(3)，

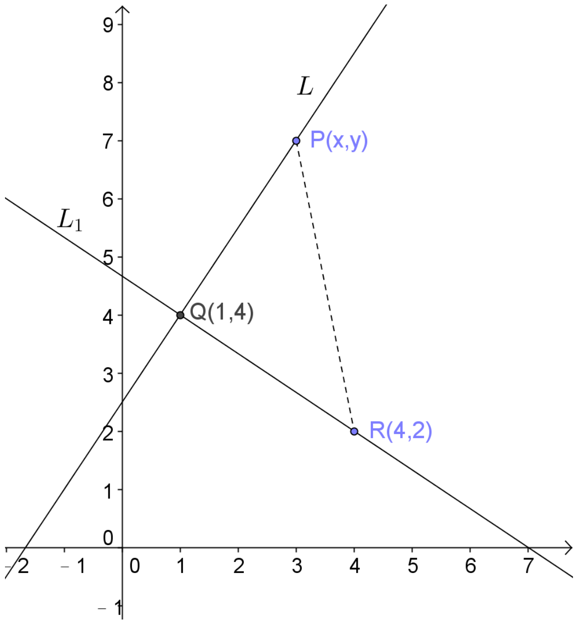


圖 8(3)

則ΔPQR為斜邊$\overline{PR}$的直角三角形，故得$\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2=\overline{PR}^2$(畢氏定理)，再由兩點距離公式的平方得

$[(x-1)^2+(y-4)^2]+[(4-1)^2+(2-4)^2]=(x-4)^2+(y-2)^2$，展開

$[(x^2-2x+1)+(y^2-8y+16)]+(9+4)=(x^2-8x+16)+(y^2-4y+4)$

化簡得: $3x\text{-}2y+5=0$，即知直線L就是直線L_2了。

(3) 一般說來，通過(a,b)點斜率m的直線方程式L可寫成

$y-b=m(x-a)$，而通過(a,b)點且與L互相垂直的直線L'，其

方程式可以寫成$y-b=-\dfrac{1}{m}(x-a)$，$(m\neq 0)$。

(4)特別的情況下，通過$(a,0),(0,b)$且$(ab\neq 0)$的直線方程式

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，亦即 $y=-\frac{b}{a}x+b$，斜率是 $-\frac{b}{a}$ 的直線方程式。

(5) y 軸本身，或平行於 y 軸的直線方程式可表成 $x=a$,(a 為常數)。x 軸本身，或平行於 x 軸的直線方程式可表成 $y=b$，(b 為常數)。

隨堂練習 4：

(1) 求過(1,2)而斜率為 3 的直線方程式。

(2) 求過(1,2)而斜率為 $-\frac{1}{3}$ 的直線方程式。

(3) 分別求過(a,b)而平行於 y 軸或 x 軸的直線方程式。

步驟 13：(坐標平面上兩點之間的分點公式)

(1) 先看數線上代表 a,b 的點分別為 P,Q，不妨設 $a<b$，

如圖 9(1)所示。$\overline{PQ}$ 線段上有一點 $X(x)$滿足 $\frac{\overline{PX}}{\overline{XQ}}=\frac{m}{n}$，

(m,n 為正整數)，如圖 9(1)，則 $\frac{x-a}{b-x}=\frac{m}{n}$，得 $x=\frac{na+mb}{m+n}$。

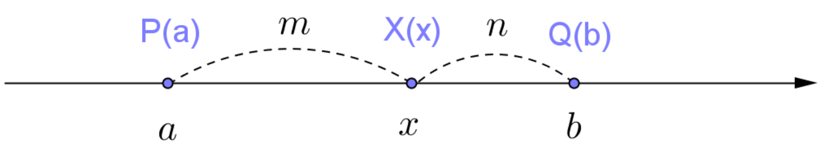


圖 9(1)

(2) 再看坐標平面上二已知點 $P(a,b)$, $Q(c,d)$，不妨設

$a<c,b<d$，且 $X(x,y)$ 為線段 $\overline{PQ}$ 內的一點，且知道 $\frac{\overline{PX}}{\overline{XQ}}=\frac{m}{n}$，

過 P 作水平線與過 Q 作鉛直線兩線的交點為 $A(c,b)$，再過

X 作鉛直線交 $\overline{PA}$ 於 $B(x,b)$，如圖 9(2)。

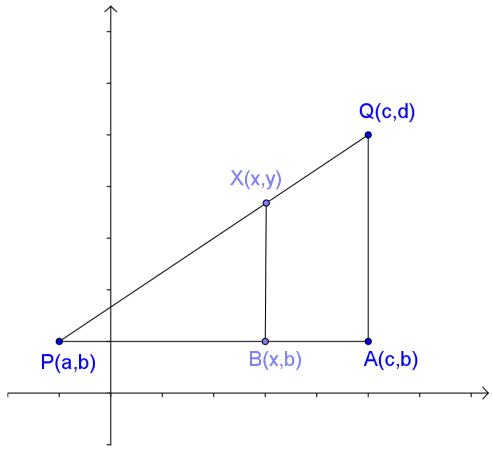


圖 9(2)

並過 X 作水平線交 $\overline{QA}$ 於 $B'(c,y)$，如圖 9(3)。

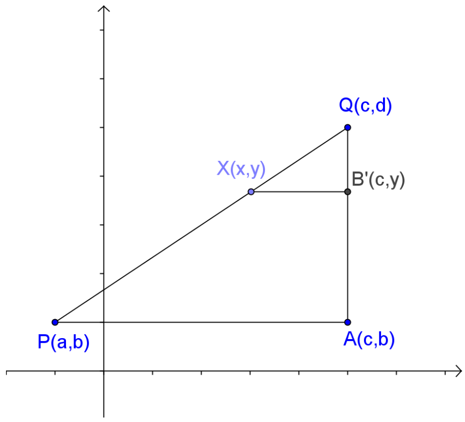


圖 9(3)

則由平行截線性質知：

$\frac{\overline{PB}}{\overline{BA}}=\frac{m}{n}$ 且 $\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'Q}}=\frac{m}{n}$，故得 $\frac{x-a}{c-x}=\frac{m}{n}$，$\frac{y-b}{d-y}=\frac{m}{n}$，於是得到

$x=\frac{na+mc}{m+n}$，$y=\frac{nb+md}{m+n}$，這就是坐標平面上 $\overline{PQ}$ 的內分點 X 之坐標求法公式。

隨堂練習 5：

(1) 已知點 $P(a,b),Q(c,d)$，試求 $\overline{PQ}$ 中點的坐標。

(2) 試說明當$P(a,b),Q(c,d),R(s,t)$三點不共線，則三頂點所成之三角形ΔPQR之重心 G 坐標為$G(\frac{a+c+s}{3},\frac{b+d+t}{3})$。

步驟 14：再回頭看步驟 11 之圖 7，我們要求三角形ΔABC之重心G，外心O,及垂心H的坐標，如圖 10 所示。

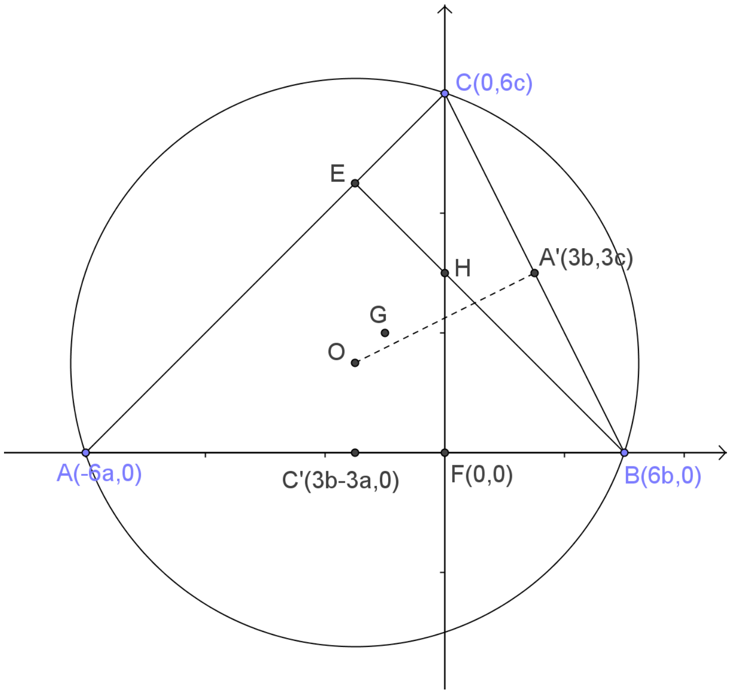


圖 10

圖中$\overline{BC}$的中點$A'(3b,3c)$，$\overline{AB}$中點$C'(3b\text{-}3a,0)$

(1) 重心 G 的坐標為$\left(\frac{6b+0+(-6a)}{3},\frac{0+6c+0}{3}\right)$即$G(2b\text{-}2a\ ,\ 2c)$

(2) 垂心H的坐標求法如下：其x坐標為 0；y 坐標求法如下：

$\overleftrightarrow{AC}$的斜率為$\frac{c}{a}$，$\overline{AC}$邊上的高$\overline{BE}$其斜率為$\frac{-a}{c}$，故$\overline{BE}$方程

式為$y=\frac{-a}{c}(x-6b)$，以x=0 代入得$y=\frac{6ab}{c}$。即$H(0,\frac{6ab}{c})$

(3) 外心 O 的坐標求法如下：$\overline{OC'}$//y 軸且過$C'(3b\text{-}3a,0)$，$\overleftrightarrow{OC'}$

的方程式為 $x=3b-3a$。

另 $\overleftrightarrow{BC}$ 的斜率為 $\dfrac{-c}{b}$，故中垂線 $\overleftrightarrow{A'O}$ 的斜率為 $\dfrac{b}{c}$，而其方程式為 $y-3c=\dfrac{b}{c}(x-3b)$，以 x=$3b$-$3a$ 代入得 $y=3c-\dfrac{3ab}{c}$，即得外心 $O(3b-3a\,,\,3c-\dfrac{3ab}{c})$

隨堂練習 6：試利用 $\overline{CF}$ 與 $\overline{BE}$ 的交點 $\mathrm{H}(0,\dfrac{6ab}{c})$，說明 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$

(即表示三高或其延長線交於一點 H)

步驟 15：進一步說明 O, G, H 三心共線，且 $\overline{OG}$：$\overline{GH}$ =1：2。

先假設 $a\neq 0$：$O(3b-3a\,,\,3c-\dfrac{3ab}{c})$，$G(2b-2a\,,\,2c)$，$\mathrm{H}(0,\dfrac{6ab}{c})$

(1) $\overleftrightarrow{OG}$ 的斜率為 $\dfrac{c-\dfrac{3ab}{c}}{(3b-3a)-(2b-2a)}=\dfrac{c^2-3ab}{(b-a)c}$，

(2) $\overleftrightarrow{OH}$ 的斜率為 $\dfrac{3c-\dfrac{9ab}{c}}{(3b-3a)}=\dfrac{c^2-3ab}{(b-a)c}$

(3) $\overleftrightarrow{OG}$ 與 $\overleftrightarrow{OH}$ 有共同交點 O，而其斜率相同，$\overleftrightarrow{OG}=\overleftrightarrow{OH}$，即 O, G, H 三心在同一條直線上。故知三心共線(尤拉線)。

當 $a=b$，即 ΔABC 為底邊 $\overline{AB}$ 的等腰三角形，則

$O(0\,,\,3c-\dfrac{3ab}{c})$，$G(0\,,\,2c)$，$\mathrm{H}(0,\dfrac{6ab}{c})$ 三心都在 y 軸上，

當然 O, G, H 共線。

(4) 試解說 $\overline{OG}$：$\overline{GH}$ =1：2。

為此令 $X(x,y)$ 為 $\overline{OH}$ 上的點且 $\overline{OX}$ ： $\overline{XH}=1$：2，則由

分點公式 $\begin{cases} x = \dfrac{2\cdot(3b-3a)+1\cdot 0}{3} = 2(b-a) \\ y = \dfrac{2\cdot\dfrac{3(c^2-ab)}{c}+\dfrac{6ab}{c}}{3} = 2c \end{cases}$

，與 $G(2b\text{-}2a,2c)$ 完全相同，故 $\overline{OG}$ ： $\overline{GH}=1$：2。

隨堂練習 7： 如圖 10-1，設 M 為 $\overline{CH}$ 中點，N 為 $\overline{MC'}$ 中點，試說明 N 為 $\overline{OH}$ 的中點。(此即為九點圓的圓心，在尤拉線上，且平分 $\overline{OH}$)

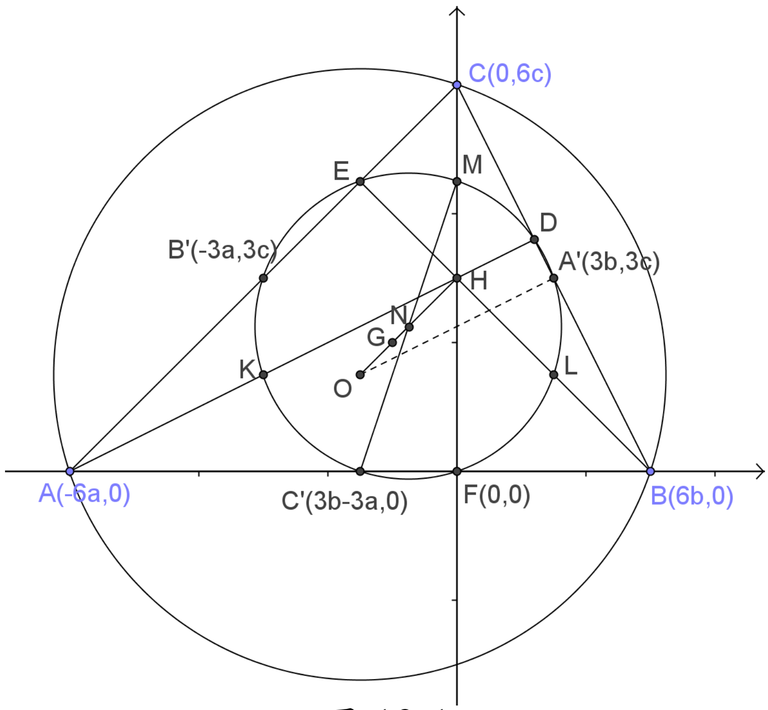


圖 10-1

活動六：(總結論)

(一) ΔABC 三邊中點與任一個高的垂足，形成四點共圓。

(二) ΔABC 三邊中點與三條高的垂足 D,E,F，形成六點共圓。

(三) ΔABC 三邊中點與三條高的垂足及任一個頂點到垂心的中點，形成七點共圓。

(四) ΔABC 三邊中點 A',B',C'，與三條高的垂足 D,E,F，及三個頂點到垂心的中點 M,K,L，形成九點共圓。

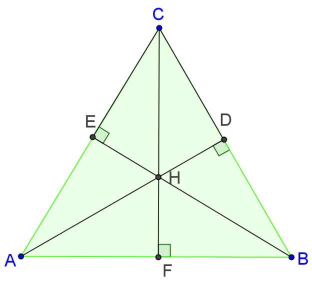
(五) ΔABC 的九點圓,就是 ΔABC 三邊中點 A',B',C' 的外接圓。

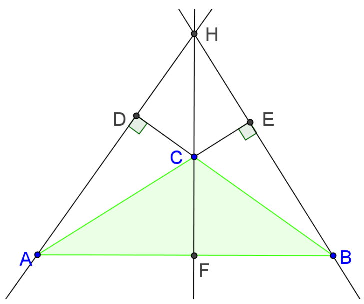
(六) ΔABC 的外心 O,重心 G ,垂心 H ,三心共線，此線 $\overleftrightarrow{OGH}$ 即為尤拉線，$\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$，且九點圓的圓心恰為 $\overline{OH}$ 的中點。

教學活動參考解答：

活動一：

隨堂練習 1：這四個點都跟 $\overline{AB}$ 的中點等距離，所以這四點都在以 $\overline{AB}$ 的中點 M 為圓心，以半徑 $r=\frac{\overline{AB}}{2}$ 為半徑的圓上，故這四點共圓。由 $\angle D=\angle E=90^\circ$，$D,E$ 都在 $\overline{AB}$ 為直徑的圓上。

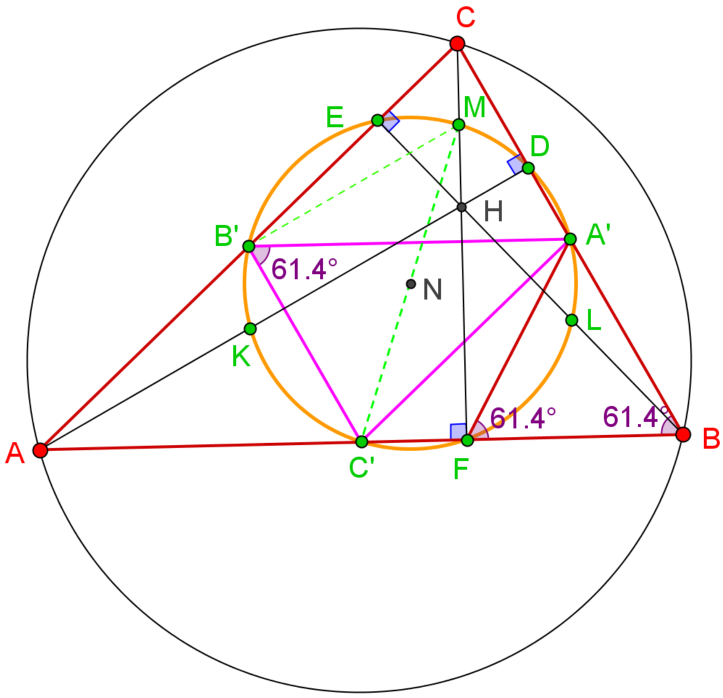




活動三：

隨堂練習 2：因為 N 為直角三角形 $\Delta MFC'$ 斜邊 $\overline{C'M}$ 的中點 $\overline{NM}=\overline{NC'}=\overline{NF}$，即以 N 為圓心，$\overline{C'M}$ 為直徑的圓，就是 $\Delta MFC'$ 的外接圓，但由九點圓的因素，所以

$\Delta MFC'$ 的外接圓就是 $\Delta A'B'C'$ 的外接圓，於是 N 為九點圓的圓心，$\overline{C'M}$ 長即為九點圓的直徑長。



活動四：
隨堂練習 3：

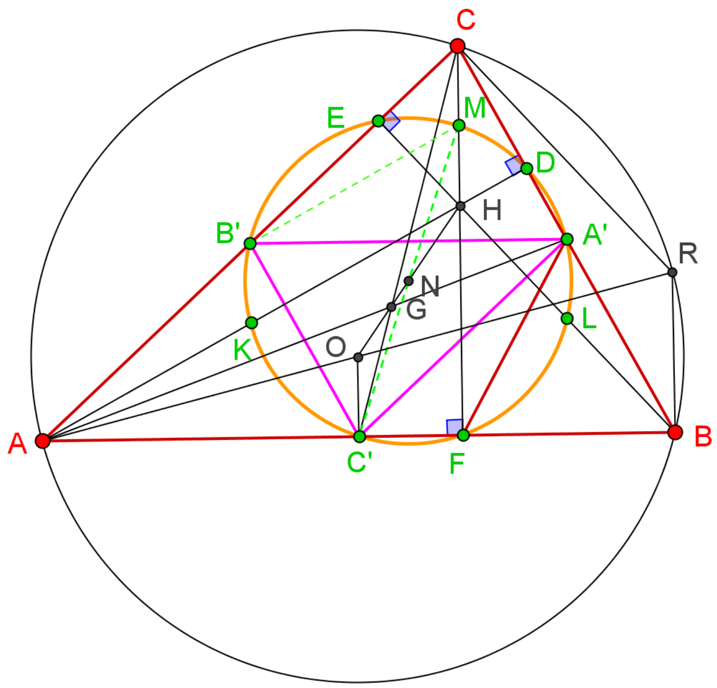


圖 6

(1) 如圖(6)，$\overline{OC'}$平行且等於$\frac{1}{2}\overline{BR}$，$\angle ABR=90^\circ$，$\angle ACR=90^\circ$，

故$\overline{BE}$平行$\overline{CR}\Rightarrow\overline{CR}$平行$\overline{HB}$.........(1)。

$\overline{OC'}\perp\overline{AB}$，$\overline{CH}\perp\overline{AB}\Rightarrow\overline{OC'}//\overline{CH}$

$\overline{OC'}//\overline{BR}$，$\overline{OC'}//\overline{CH}\Rightarrow\overline{CH}//\overline{BR}$.........(2)

由(1)(2) $\Rightarrow CHBR$ 為平行四邊形，$\overline{CH}=\overline{BR}=2\overline{OC'}$。

$\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{CH}=\overline{OC'}$，由一組對邊平行且相等，知$OC'MC$為平行四邊形，故$\overline{C'M}=\overline{OC}$。

(2) $\overline{OC'}$平行且等於$\overline{MH}\Rightarrow OC'HM$ 為平行四邊形

$\Rightarrow$對角線互相平分$\Rightarrow\overline{MN}=\overline{NC'}$，$\overline{ON}=\overline{NH}$。

活動五：

隨堂練習 4：(1)$3x$-y-1=0，　(2)x+3y-7=0，　(3)x=a;y=b。

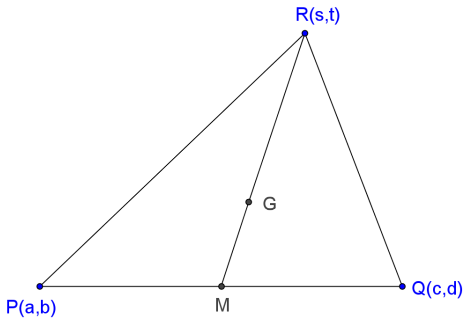
隨堂練習 5：(1) $\overline{PQ}$的中點坐標為$M\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)$

(2) $\overline{PQ}$的中點坐標為$M\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)$，第三點$R(s,t)$，

由$\overline{RG}:\overline{GM}=2:1$，$G$點的$x$坐標：

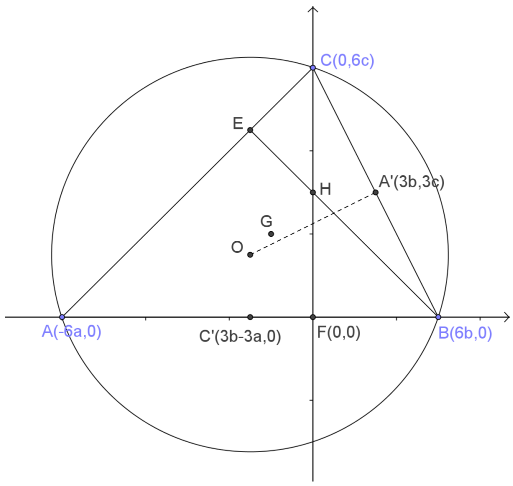
$x=\dfrac{2\cdot\frac{a+c}{2}+1\cdot s}{3}=\dfrac{a+c+s}{3}$，$G$點的$y$坐標：

$y=\dfrac{2\cdot\frac{b+d}{2}+1\cdot t}{3}=\dfrac{b+d+t}{3}$，即$G\left(\dfrac{a+c+s}{3}，\dfrac{b+d+t}{3}\right)$。



隨堂練習 6：$H(0,\frac{6ab}{c})$，$\overleftrightarrow{AH}$ 的斜率為 $\frac{\left(\frac{6ab}{c}\right)}{6a}=\frac{b}{c}$，$\overleftrightarrow{BC}$ 的斜率為 $-\frac{c}{b}$，

其斜率相乘為-1，故 $\overleftrightarrow{AH}\perp\overleftrightarrow{BC}$。(此即表示三高或其延長線交於一點)

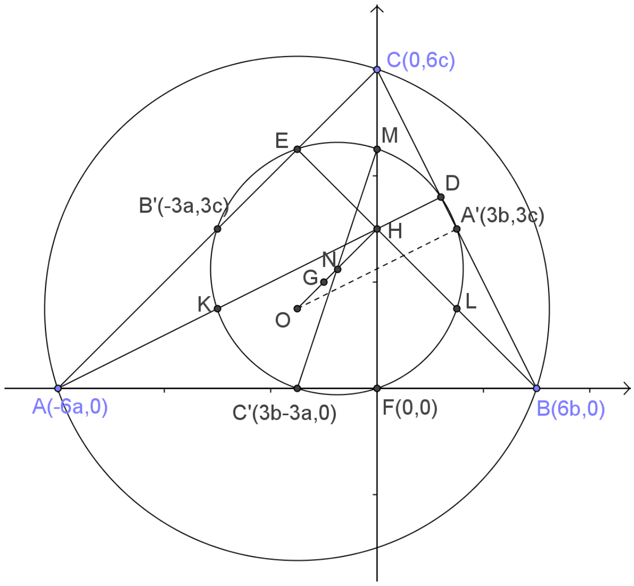


隨堂練習 7：$C(0,6c)$，$H(0,\frac{6ab}{c})$，得到 $\overline{CH}$ 中點 $M(0,\frac{3(c^2+ab)}{c})$，

而 N 為 $\overline{MC'}$ 的中點，故 $N(\frac{3(b-a)}{2},\frac{3(c^2+ab)}{2c})$，又知道

$O(3b-3a\,,\,3c-\frac{3ab}{c})$，$H(0,\frac{6ab}{c})$，則 $\overline{OH}$ 的中點坐標為

$(\frac{3(b-a)}{2},\frac{3(c^2+ab)}{2c})$，亦即 N 就是 $\overline{OH}$ 的中點。



七、指定作業：

1. 請口頭描述何謂不等邊銳角三角形的九點圓？

2. (1)請說明正三角形的九點圓退化成六點圓。

   (2)請說明等腰直角三角形的九點圓退化成矩形四頂點共圓。

   (3)請說明等腰非直角三角形的九點圓退化成八點圓。

3. 請用尺規作出給定 ΔABC 的九點圓。

4. 請指出 ΔABC 的九點圓之圓心位置。

5. 請用尺規作出給定不等邊銳角三角形的尤拉線。

6. 指出給定不等邊三角形的外心、重心、垂心及其九點圓之圓心的關係。

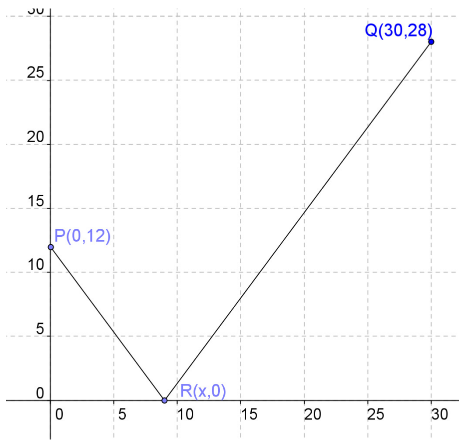
7. 求直角坐標平面上給定 $A(1,0),B(2,4),C(6,2)$的三角形之重心 G 的坐標。

8. 求坐標平面上過 $P(1,2),Q(5,6)$之直線方程式及其斜率。

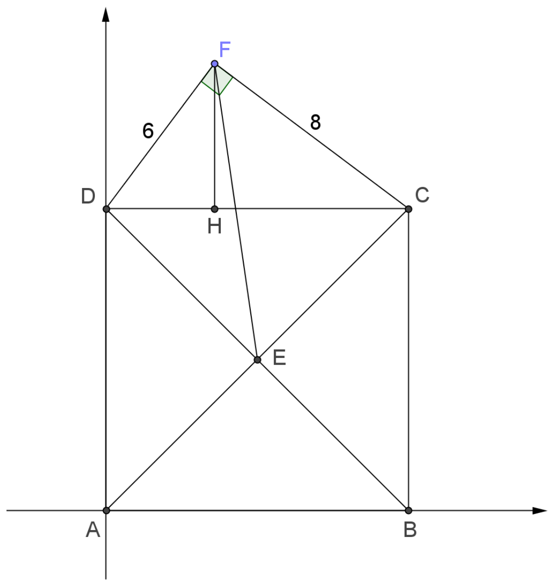
9. 設 X 在 $P(1,2),Q(5,6)$的連接線段內，且$\overline{PX}$ ：$\overline{XQ}$ ＝2:3，試求 X 的坐標。

10. 設 Y 在 $P(1.2),Q(5,6)$的延長線上，且知$\overline{PY}$ ：$\overline{YQ}$ ＝5:1，試求 Y 的坐標。

11. 如圖，在坐標平面上，一隻螞蟻正在 $P(0,12)$的位置找尋食物，後來先朝向南偏東的方向，爬行到 X 軸的 $R(x,0)$位置，之後聞到 $Q(30,28)$處有食物，於是再朝向 Q 的方向爬行到 Q，請問此螞蟻至少要爬行多少距離，才能吃到在 $Q(30,28)$處的食物呢？



12. 如圖,坐標平面上 $ABCD$ 為正方形，A 為原點，ΔDFC 為斜邊$\overline{DC}$ ，短股$\overline{DF}$=6，長股$\overline{CF}$=8，的直角三角形，並設正方形對角線$\overline{AC}$,$\overline{BD}$交於 E,試求此正方形的邊長及$\overline{EF}$線段之長。



指定作業參考答案：

1. ~3. (略)

4. 九點圓的圓心，在一邊的中點與「垂心到此邊對角頂的中點」連線的中點。(或圓心在垂心與外心連線段的中點)

5. (略)

6. 外心、重心、垂心及九點圓的圓心四點在尤拉線上，且外心到重心之距離為重心到垂心距離之半，九點圓的圓心恰在外心與垂心連線段的中點。

7. $A(1,0),B(2,4),C(6,2)$的三角形之重心 $G(x,y)$的坐標：

$$x=\frac{1+2+6}{3}=3\text{ ， }y=\frac{0+4+2}{3}=2$$

8. 斜率為 1，而其方程式為 x-y+1=0

9. 令 $X(x,y)$：$x=\dfrac{3\times1+2\times5}{5}=\dfrac{13}{5}$ ，$y=\dfrac{3\times2+2\times6}{5}=\dfrac{22}{5}$

10. 令 $Y(x,y)$：由條件知 $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{QY}}=\dfrac{4}{1}$，故 $5=\dfrac{1\times1+4x}{5}$，$6=\dfrac{1\times2+4y}{5}$ 得 $x=6,y=7$ 即 $Y(6,7)$。

11. (1) 如圖，先作一草圖，做 P 對 x 軸的對稱點 $P'(0,-12)$，連 $\overline{P'Q}$，交 x 軸於 $R(x,0)$。

(2) 設 $T(x',0)$ 為 x 軸在 $R(x,0)$ 右方的任一點(當然 $x'<30$)，連 $\overline{P'T}$、$\overline{PT}$ 及 $\overline{TQ}$，則 $\overline{P'T}=\overline{PT}$，且 $\overline{P'T}+\overline{TQ}>\overline{P'Q}$。

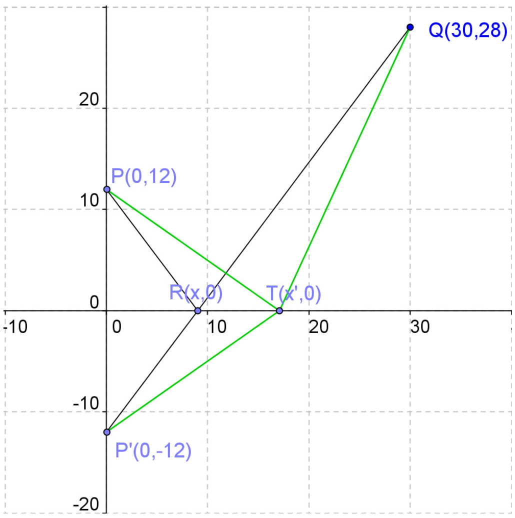
(3) $\overline{P'Q}$ 的斜率為 $\dfrac{28-(-12)}{30-0}=\dfrac{4}{3}$，$\overleftrightarrow{P'Q}$ 的直線方程式為

$y+12=\dfrac{4}{3}(x-0)$，再令 $y=0$，得 $x=9$，即 $R(9,0)$。

(4) 至少爬行的距離為

$$\overline{PR}+\overline{RQ}=\overline{P'R}+\overline{RQ}=\overline{P'Q}=\sqrt{(30-0)^2+(28+12)^2}=50$$

(5) 故在先爬行至 $R(9,0)$時可得最小爬行距離為 50(單位)。



12. (1) 正方形的邊長 $\overline{DC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

(2) 由 $ABCD$ 為邊長 10 的正方形，故 E 點坐標為(5,5)。

過 F 作 $\overline{DC}$ 的垂線交 $\overline{DC}$ 於 H。則由母子相似性質，

$\overline{DF}^2=\overline{DH}\times\overline{DC}$ 得 $\overline{DH}=\dfrac{36}{10}=3.6\Rightarrow\overline{CH}=10-3.6=6.4$

另由 $\overline{FH}^2=\overline{DH}\times\overline{CH}=3.6\times6.4=23.04\Rightarrow\overline{FH}=4.8$

故 F 點的坐標為(3.6,14.8)

於是 $\overline{EF}=\sqrt{(5-3.6)^2+(5-14.8)^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$

八、教學注意事項：

1. 教學時間分配建議如下：引起動機及活動一需 15 分鐘；活動二 20 分鐘，活動三(含指定第一堂課後作業)約需 10 分鐘，活動四約需 10 分鐘，活動五約需 30 分鐘，活動六(含指定第二堂課後作業)約需 5 分鐘。
2. 不等邊的銳角(即不含正三角形與等腰三角形)，其九點圓的存在性圖形比較直觀，不致產生過於錯綜複雜或重疊產生少於九點的四點圓或六點圓或八點圓的情形。
3. 事實上，一般的鈍角三角形也有重心一詞及垂心在形外，在銳角三角形的重心說明後，也立即加以澄清，雖然也可用變心法來處裡，惟其圖形可能會太錯綜複雜，不容易被接受，後來用坐標化後的三角形，其實只要是任何三角形，把最長邊置放在 x 軸上，圖 10 都可適用，加上隨堂練習 6 後就可用

坐標幾何法，說明三角形的三高或其延長線確實會交於一點 H(垂心)。

4. 用動態幾何來呈現四點共圓到六點共圓以至於七點共圓到九點圓，是好的教學絕佳輔助工具；甚至於圖 6 的呈現，用動態幾何教學是有絕對的需求。

5. 我們初步接觸到可以使用坐標幾何(解析幾何)來解綜合幾何。它們的角色其實是很清楚，綜合幾何重於「發現」現象，而解說起來卻頗具難度，轉而求助坐標幾何的工具，就正如有人常說$1+1\neq 2$，1+1 可以是 2,3,4,…100,…產生備增的效果，它們之間是有互補的功能。

6. 如何解說兩直線互相垂直的充要條件，為其斜率的乘積等於 -1？如圖兩直線L_1, L_2均不為水平線或鉛直線，設兩線交於$P(s,t)$，取$A(a,b),B(c,d)$分別為L_1及L_2上異於$P(s,t)$的點。則L_1的斜率$m_1=\dfrac{b-t}{a-s}$，L_2的斜率$m_2=\dfrac{d-t}{c-s}$

$$m_1\times m_2=-1 \Leftrightarrow \frac{b-t}{a-s}\times\frac{d-t}{c-s}=-1$$

$$\Leftrightarrow (b-t)(d-t)=-(a-s)(c-s)$$

$$\Leftrightarrow s^2+t^2=cs+as+bt+dt-ac-bd \text{........(1)}$$

而$L_1\perp L_2$於$P(s,t)$

$\Leftrightarrow \Delta APB$ 為 $\angle APB=90^\circ$ 的直角三角形

$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2 + (b-d)^2 = [(a-s)^2 + (b-t)^2] + [(c-s)^2 + (d-t)^2]$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd = \\ & \qquad a^2 + b^2 + s^2 + t^2 + c^2 + d^2 + s^2 + t^2 - 2as - 2bt - 2cs - 2dt \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2(s^2 + t^2) = 2(cs + as + bt + dt - ac - bd)$$

$$\Leftrightarrow s^2 + t^2 = cs + as + bt + dt - ac - bd \text{..........}(2)$$

比較(1)(2)得知其充要條件都一樣，故得知

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \times m_2 = -1$ 。

7. 在各活動教學進行時，教師應巡堂走動，加強了解學生學習情形。

8. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答，答對時給予言語行動上的鼓勵，答錯時另指定其他同學作答，再答錯教師應再加強解說。

9. 上完本主題之後，可分組來進行學後心得報告，可大幅提升學生的學習印象與效果。

九、教學參考資料：

1. 李虎雄、陳昭地等(2002)。高級中學幾何學及教師手冊。台中市：康熙網路圖書出版。

2. 傅淑婷、曹博盛、陳昭地(2013)，處處多數是等腰三角形。陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-3)。新北市：國家教育研究院。

3. 傅淑婷、曹博盛、陳昭地(2013)，三角形的三心。陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-5)。新北市：國家教育研究院。

4. 傅淑婷、曹博盛、陳昭地(2013)，平行線與平行截線定理。陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 3-4)。新北市：國家教育研究院。

5. 蘇進發(2013)，平行四邊形。陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 4-1)。新北市：國家教育研究院。

6. 李政豐(2013)，圓周角與圓內接四邊形。陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(主題 5-1)。新北市：國家教育研究院。

7. 傅淑婷、陳昭地(2012)，比與比率(斜率篇)。陳昭地主編：國民中學數學教材原型 B 冊(主題 3-1)。新北市：國家教育研究院。

8. Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 57: Trisecting a circle. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 309-310). Columbus, OH：Merrill.

9. Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 61:.The Nine-Point circle. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 316-317). Columbus, OH：Merrill.

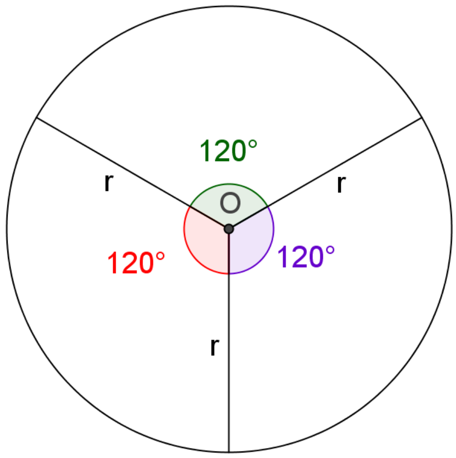
10. Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 62:.The Euler

Line. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 344-345). Columbus, OH：Merrill.

11. 教師可依學生的需要，提供下列問題選擇課後學生自學或補充教學補充之用：

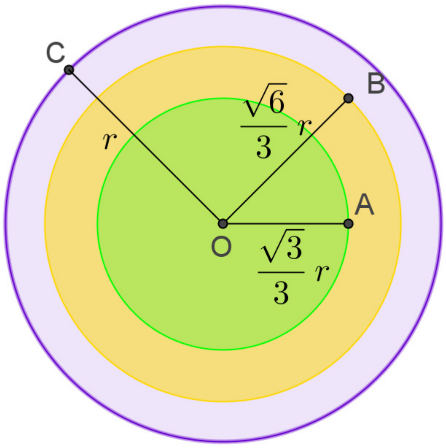
(1) 給定一圓之圓心 O 與半徑 r，將此圓分成三等分面積的區域。

法(一)：如圖(1)畫出圓心角 120 度的扇形，可將圓等分成三個圓心角 120 度的扇形。



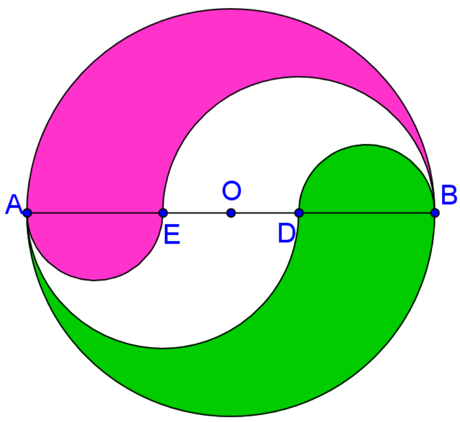
(1)

法(二)：三等分區域為小同心圓(半徑 $\frac{\sqrt{3}}{3}$r)，及兩圓(半徑 $\frac{\sqrt{6}}{3}$r 及 r 的同心圓)，則小圓與另外兩圓環分別三等分圓面積，如圖(2)所示。



(2)

法(三)：如圖(3)，直徑 $\overline{AB}$ 的三等分點 E,D，分別以 $\overline{AE}$ 、$\overline{BE}$ 為直徑作下半圓與上半圓；再分別以 $\overline{AD}$ 、$\overline{DB}$ 為直徑作下半圓與上半圓，則圓被等分成三部份顏色不同的區域。



(3)

(2) 如何僅限用圓規，找出給定線段的中點。

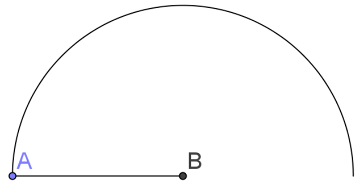
解法：

給定線段 $\overline{AB}$

求作：依規定限用圓規，作出給定線段 $\overline{AB}$ 的中點。

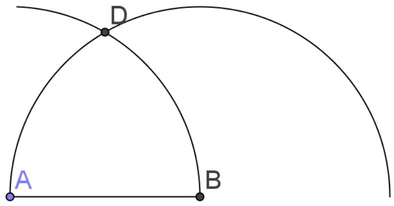
作法：依下列圖序來進行(義大利數學家 *Mascheroni* 的作法)

①以 B 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫半圓弧。



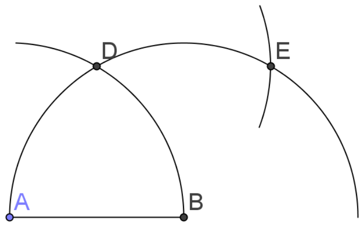
(1)

②以 A 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫弧，交大半圓弧於 D。



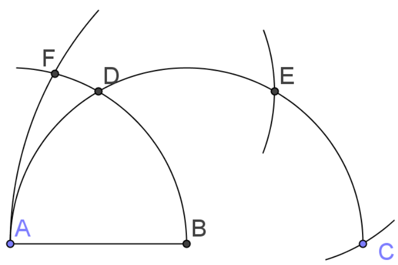
(2)

③以 D 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫弧，交大半圓弧於 E。



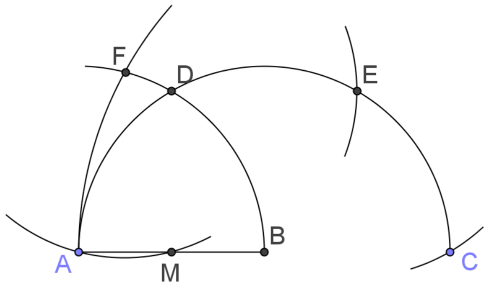
(3)

④以 E 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫弧，交大半圓弧於 C。並以 C 為圓心，$\overline{AC}$ 為半徑畫弧 AF，交 BDF 弧於 F。



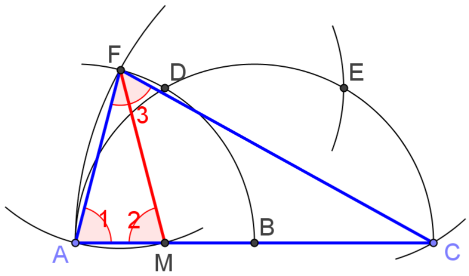
(4)

⑤以 F 為圓心，$\overline{FA}$ 長為半徑畫弧交 $\overline{AB}$ 於 A,M，則 M 為所求。



(5)

解說(看簡圖 6)



(6)

注：$\overline{CF}=\overline{CA}$，$\angle 1=\angle 3$，$\overline{FA}=\overline{FM}$，$\angle 1=\angle 2$，$\Delta AFC\sim\Delta AMF$ (AA 相似)，$\overline{AF}=\overline{AB}$，$\overline{AC}=2\overline{AB}$，故 $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AF}=\frac{1}{2}\overline{AB}$。

12. 看本文圖 6 可知 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

(*James Joseph Sylvester*(*1814~1897*)首先發現)

解說：

(1) 延長 $\overrightarrow{OC'}$，取 $\overrightarrow{OC'}$ 上一點 S，使得 $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{SC'}$

(2) $\overleftrightarrow{OC'S}$ 為 $\overline{AB}$ 之中垂線，$\overline{OS}$ 與 $\overline{AB}$ 互相垂直平分，故 $AOBS$ 為菱形。

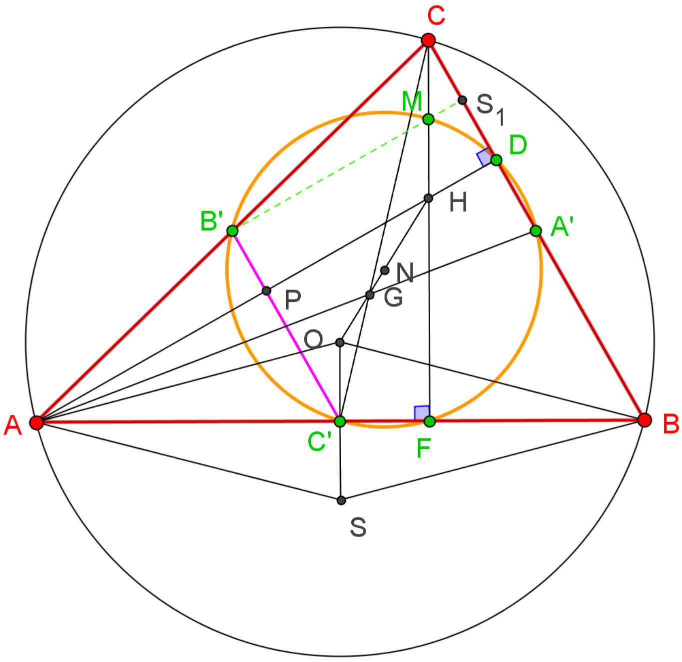


圖 6

(3) $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，所以 $\overrightarrow{OC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$。

(4) 因為 $\Delta OGC'\sim\Delta HGC$，$\overline{CH}=2\overline{OC'}$ 又 $\overline{CH}\,//\,\overline{OC'}$，

所以 $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$。

(5) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}$，所以 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。

國民中學數學教材原型 C 冊 / 陳昭地　主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院，2013.12

1.數學教育
2.中小學教育
3.教材與教法

國民中學數學教材原型 C 冊
主 編 者：陳昭地
作　　者：丁斌悅　李政憲　李政豐　陳彥廷　傅淑婷　蘇進發
（依姓氏筆畫順序排列）
發 行 人：柯華葳
出 版 者：國家教育研究院
編 審 者：數學領域教材原型研發編輯委員會
主任委員：陳昭地
副主任委員：謝　堅
委　　員：丁斌悅　吳欣悅　李政憲　李政豐　周筱亭　房昔梅
張東輝　曹博盛　陳彥廷　傅淑婷　黃幸美　詹婉華
魏慶雲　蘇進發
（依姓氏筆畫順序排列）
編輯小組：丁斌悅　李政憲　李政豐　陳昭地　陳彥廷　曹博盛
傅淑婷　蘇進發
（依姓氏筆畫順序排列）
編輯助理：張淑娟、蔡敏冲
出版年月：102 年 12 月
版　　次：初版
電子全文可至國家教育研究院網站 *http: //www.naer.edu.tw* 免費取用

非賣品

本書經雙向匿名審查通過