國民中學數學教材原型C冊(上)

陳昭地教授 主編

國家教育研究院 出版

國民中學數學領域教材原型C冊

國家教育研究院 編印

序

數學不僅是科學的基礎，數學教育更是關乎國家公民素養和人才素質的重要因素之一。國家教育研究院推動課程與教學研究及研發適性適量適時之教材工作，進行中小學各學習領域（學科）教材研發、編輯與試用，並建置教科書資源資料庫。本數學領域教材原型研發手冊即是針對中學生與小學生所設計之教學輔助教材，期能落實課程綱要能力指標與教材細目之課程與教學之實踐，提供教師或教科書編輯者可依循或指引之教科書編輯素材，活化數學教材的內涵，並引領未來十二年國民基本教育數學教學之方向。

此計畫研發初期，本人時任國家教育研究院院長，當時曾召開會議徵詢國內數學專家學者之意見，幾經遴選承蒙陳昭地教授願意在國立臺灣師範大學教職退休後，因為對數學教育的使命感，而接下此研發編輯之重任。陳教授學經歷豐富，不但在教學及專業領域上的研究，受到學術界的肯定及重視，表現傑出，對啟蒙青年學子有滿滿的熱情，對數學教育貢獻不遺餘力，在他的號召之下，旋即組織優秀的學者專家教授與教學卓越的中小學教師等成立編輯委員會，前後歷經三年，完成本系列的教材原型作品。

本書研發編撰適合國中、小數學能力之題材，這些題材與教師未來的數學教學密切相關，並可藉此增長學生數學的學習能力，內容相當豐富，盼讀者以輕鬆愉快的心情欣賞閱讀數學的相關方法與應用，經由與日常生活相關的例題，透過循序漸進的演練，以培養學生自我學習的興趣與信心，期待能為數學教師提供便捷的教學資源。

教育部國民及學前教育署 署長

吳清山 謹識

2013 年 12 月

國民中學數學教材原型 C 冊（上）

目 次

編輯大意

一、本研究成品為國家教育研究院數學領域教材原型研發編輯計畫第三年(民102年)國民中學部分的成果。

二、本研究成品共計25個單元主題，配合符合先備知識之國中八年級上、下學期以上學生，提供52節教學節數之教材。其中前二章代數9個單元主題分裝成上冊，而後三章幾何16個單元主題裝訂成下冊俾便使用。

三、各單元主題為符合先備知識的學生能力而編撰。旨於銜接既往教材，數學應備知識，探尋數學規律，培養解題能力及活化正確數學學習的態度，特別期待提高數學學習的興趣等為主要的目標。

四、各單元主題教學活動及指定作業部分可直接下載使用；配合各教學對象，加上教師自行設計的學習單或採用Powerpoint教學，參考教學注意事項或教學參考資料定能實施有效率的教學。

五、各單元主題均屬獨立編輯，限於額外教學時間壓力下，教師可選擇適合教學對象的單元充作補充教材或充作學生自學之用。

六、本教材單元雖經研發團隊審慎研發編輯而成，惟疏漏之處仍在所難免，使用者針對個案可直接或間接以最適當的方式調整。

七、本冊各章雖已選擇部分題材，經正式或非正式的試教，作為修訂本教材的依據，惟仍難免有不週之處，敬請賜教。

主題1－1：乘法公式

一、授課對象：國中八年級上學期學生　　　　**撰寫者：**李政憲

二、先備知識：

(一) 能理解並利用分配律 $a(b+c)=ab+ac$ 作數字的計算應用。

(二) 能作基本三位數及含小數與分數的乘法運算。

(三) 能理解基本幾何圖形（正方形、長方形及等腰直角三角形）的圖形性質。

三、教學目標：

(一) 藉由摺紙活動，能理解乘法公式的由來與應用。

(二) 藉由摺紙活動，觀察圖形線對稱的結果。

(三) 藉由摺紙活動，能理解正方形、長方形與等腰直角三角形的組成要素。

(四) 藉由相關題型的練習與課後評量，進一步提昇乘法公式的理解、演練與應用。

四、教學時間：115 分鐘(二節半)

五、教學說明：

透過摺紙活動的進行，促進學生學習乘法公式，並透過實作的觀察，理解圖形的對稱結構與長方形的構成要素。

六、教學活動：

子題：摺紙學習分配律公式

活動一：以摺紙進行乘法分配律公式的說明

步驟 1：教師於課前發放長方形空白影印紙，學生每人數張；另黑板並佈置全開或半開書面紙以作示範教學。

步驟 2：教師進到教室，在黑板上寫下「長 104 公尺，寬 62 公尺的長方形，面積為多少？」請同學們不以直式乘法計算其值，並說明其原理。

步驟 3：待多數學生計算完畢後，詢問學生如何計算，利用到學過的什麼數學概念？

步驟 4：討論完畢後，教師發放影印紙並詢問：「若以你手上的紙張代表剛剛你計算的長方形面積（長為 104、寬為 62），請先摺出 104＝100＋4（或 62＝60＋2，如下頁圖一）所代表的意義，並思考在過程中算式所代表的意義為何？」請同學們繪圖並發表，過程中每一個步驟代表的意義，如何透過摺紙，以手邊的長方形紙張表示？

步驟 5：教師進一步詢問：「請問若有一位同學，計算 104×62 所得到的算式為(100＋4)×(60＋2)＝100×60＋4×2，你覺得他的想法是對的嗎？如果是錯的要如何修正？」

步驟 6：配合紙張示範或教學簡報，教師歸納並說明乘法分配律公式：$(a+b)\times(c+d)=(a+b)\times c+(a+b)\times d=ac+bc+ad+bd$

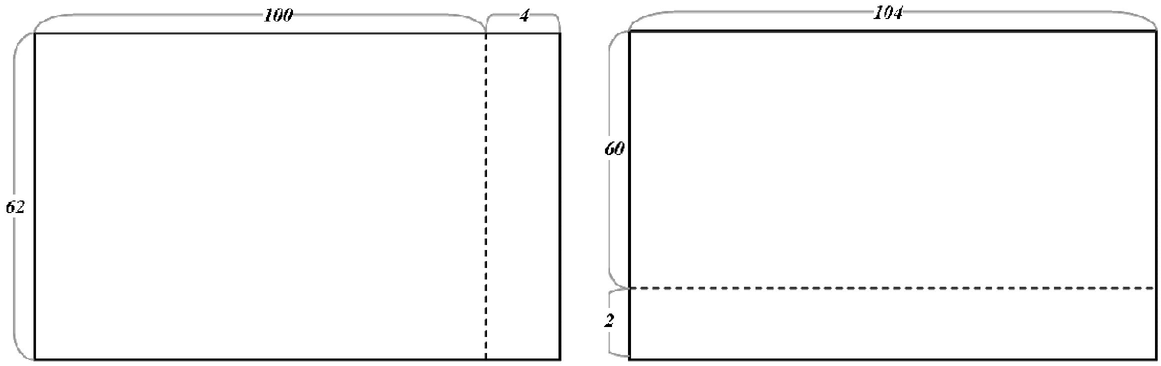


圖 1：《乘法分配律》摺紙示意圖

例 1： 由活動一的進行，想一想底下問題：

(1) 若要以上述公式的推導過程計算 200.4×75.2 的結果，你覺得要如何計算？與圖形的關聯性為何？

(2) 你覺得若要以乘法分配律公式來計算 799.8×1004，a、b、c、d 是否都要為正數呢？

隨堂練習 1：

(1) 利用活動一的結果，計算 100.5×76.3 的值。

(2) 若要計算 1997×2013 的值，你會如何使用活動一的乘法分配律公式？

子題：摺紙學習和的平方公式

活動二： 利用乘法分配律公式推導和的平方公式

由活動一及隨堂練習的進行，我們可以瞭解乘法分配律公式與長方形面積的關係。接著我們要討論若將部分長方形改為正方形時，公式的調整與應用。

步驟 7：教師提問：「請問若將剛剛分配律公式中的 c 與 d 分別換成 a 與 b，你覺得公式的結果與所呈現的圖形，會有什麼改變嗎？」

步驟 8：教師提問：「你如何在長方形紙張中，摺出一個最大的正方形？你要如何確定它是一個正方形呢？」

步驟 9：教師提問：「剪下你剛剛摺出的最大正方形，摺出你在步驟 7 中所得到的結果，你覺得這個公式主要可以解決的問題是哪些類型的題目？請利用你摺出來的紙張舉例說明。」

教師利用簡報或色紙教具歸納說明分配律公式與和的平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 彼此的關係，並討論和的平方公式的使用時機。

例 2：(1) 利用和的平方公式，計算並說明下列算式的值：

①$503^2$　　②$(600\frac{1}{4})^2$

(2) 你覺得若將上題中的 503 拆為其他不同的數字作計算，所得到的結果是否會相同？為什麼 $600\frac{1}{4}$ 要拆為 $600+\frac{1}{4}$ 呢？

(3) 若要利用和的平方公式：$(a+b)^2= a^2+2ab+b^2$ 計算 998^2，你覺得 a 與 b 的值分別要取多少？請分別以直式與乘法公式作計算，比較其結果是否相同。

隨堂練習 2：想一想底下問題：

(1) 你覺得 1998^2+2013^2 與 $(1998+2013)^2$ 哪一個數字計算出的

值較大？請說明你的推導過程。

(2) 請問 a^2+b^2 與 $(a+b)^2$ 計算出來的值兩者相差多少？

結論：

(一) 乘法分配律公式：

$(a+b)(c+d)=(a+b)\times c+(a+b)\times d=ac+bc+ad+bd$

可利用長方形摺紙或切割的方式進行說明。

(二) 和的平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，可藉由乘法分配律公式與正方形摺紙進行推導。

(三) 可利用乘法分配律公式與和的平方公式，節省計算某些算式的時間。

活動三： 分別利用和的平方公式與乘法分配律公式，推導差的平方公式及其應用，進一步利用摺紙討論其幾何表徵。

步驟 10： 教師提問：「在隨堂練習 2(3)中，998^2 可寫成 $[1000+(-2)]^2$ 以方便計算，若將和的平方公式 $(a+b)^2$ 中的 b 換成 $-b$，你覺得公式會如何改變？」

步驟 11： 教師推導差的平方公式 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 後，繼續提問：「若以分配律公式 $(a+b)\times(c+d)=ac+bc+ad+bd$ 推導差的平方公式，結果是否相同？」

步驟 12： 學生觀察步驟 10、步驟 11 的結果後，教師提問：「你覺得

差的平方公式主要可以解決計算哪些類型的題目？請舉例說明。」

步驟 13：教師歸納差的平方公式的使用時機，進一步討論其幾何表徵：「請在長方形紙張剪下一個最大的正方形，設其邊長為 a。」

步驟 14：教師提問：「若要以這個正方形驗證差的平方公式：$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$，你覺得接下來要做的動作為何？」

步驟 15：教師以大型教具或數位簡報介紹差的平方公式的幾何證明方式，歸納其結果相同。

例 3：(1) 利用差的平方公式，計算並說明下列算式的值：

①$1999^2$　　②$(399.7)^2$

(2) 求大於$(49\frac{3}{4})^2$的最小正整數為何？

(3) 利用公式，討論下列算式的整數部份：

①$199.5\times200.5$　　②$\left(50\frac{13}{17}\right)\times\left(50\frac{4}{17}\right)$

隨堂練習 3：想一想底下問題：

(1) 請問$(399.2)^2-2\times399.2\times99.2+(99.2)^2$的值為多少？請說明你的推導過程。

(2) 請問上面的推導過程，你將差的平方公式作了怎樣的應用？

活動四：利用乘法分配律公式，推導平方差公式及其應用，進一步利用摺紙討論其幾何意涵。

步驟 16：教師提問：「在例 3 中的第(3)①小題中，199.5×200.5 的算式經過化簡後，我們可以得到只有兩個數平方相減的結果，你覺得是因為什麼原因？」

步驟 17：教師以分配律公式推導平方差的公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$後，繼續提問：「你覺得這個公式與前面的兩個公式（和的平方公式、差的平方公式）有什麼差異？」

步驟 18：學生觀察步驟 16、步驟 17 的結果後，教師提問：「你覺得平方差公式可以解決計算哪些類型的題目？請舉例說明。」

步驟 19：教師歸納平方差公式的使用時機，進一步討論其幾何表徵：「請在長方形紙張剪下一個最大的正方形，設其邊長為 a。」

步驟 20：教師提問：「請問 a^2 代表什麼意義？你覺得平方差公式的右方 a^2-b^2，若以圖形要如何表示？若要以這個圖形來驗證平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，你覺得接下來要做的動作為何？」

步驟 21：教師以大型教具或數位簡報介紹平方差公式的幾何說明方式，歸納其結果相同。

例 4：(1)利用平方差公式，計算並說明下列算式的值：

①$1987\times2013$　　　　　　②$(44\frac{4}{7})^2-(4\frac{3}{7})^2$

(2)求小於$(49.3)^2-(550.7)^2$的最大整數值。

(3)計算下列各數的值，並說明你利用了哪些乘法公式：

①$2013\times1997$　　　　　　②$(66.6)^2-(44.4)^2$

結論：

(一) 差的平方公式：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，可藉由乘法分配律公式與正方形摺紙切割的方式進行推導。

(二) 平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$，可藉由乘法分配律公式與正方形摺紙切割的方式進行推導。

(三) 可利用差的平方公式與平方差公式，節省計算某些算式的時間。

(四) 透過四個乘法公式的綜合應用，可以再節省計算部分算式的時間。

活動五：（總結論）

(一) 乘法分配律公式：$(a+b)(c+d)=(a+b)\times c+(a+b)\times d$

$=ac+bc+ad+bd$。

(二) 和的平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(三) 差的平方公式：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(四) 平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(五) 透過四個乘法公式的綜合應用，可以節省部份算式計算的時間。

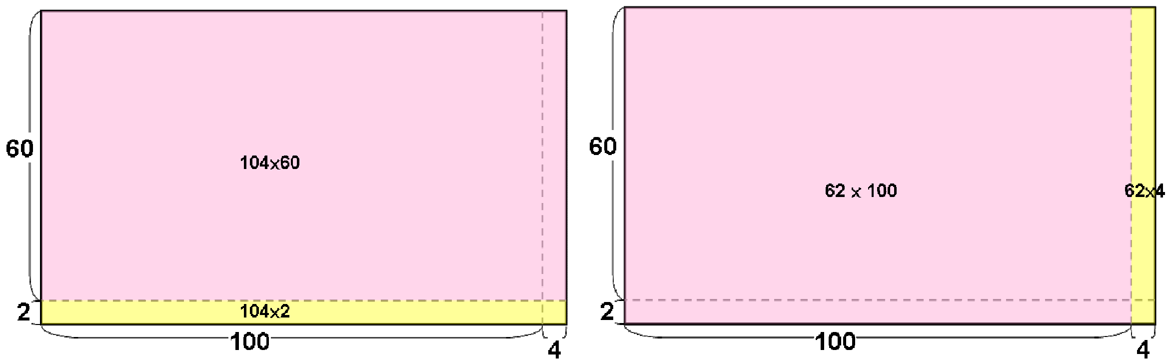
教學活動參考解答：

活動一：

步驟 2：104×62＝(100＋4)×62＝104×(60+2)＝6448（m^2）

步驟 3：利用學習過的《分配律》概念

步驟 4：參考圖形如下：



《分配律》計算示意圖

步驟 5:應修正為(100＋4)×(60＋2)＝100×60＋100×2＋4×60＋4×2 的結果。

步驟 6：詳見附件一。

例 1：(1) 可計算 200.4×75.2＝(200＋0.4)×(75＋0.2)＝200×75＋200×0.2＋75×0.4＋0.4×0.2＝15070.08 的值；即為摺出的四塊長方形面積和。

(2) 可拆為(799＋0.8)×(1000＋4)

或(800－0.2)×(1000＋4)，b未必為正數。

隨堂練習1：(1) 100.5×76.3＝100×76＋100×0.3＋76×0.5＋0.5×0.3

＝7668.15。

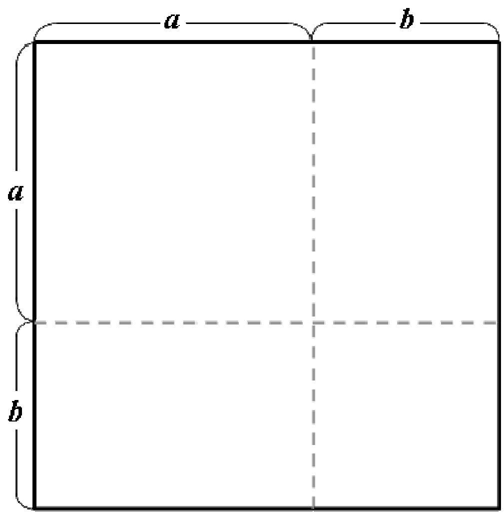
(2) 可透過 1997×2013=[2000+(-3)]×2013

=4026000+(-6039)=4019961 或 1997×2013

=[2000+(-3)]×(2000+13)= 4019961。

活動二：

步驟7:會變成一個正方形被切割成兩個正方形與兩個長方形，如圖



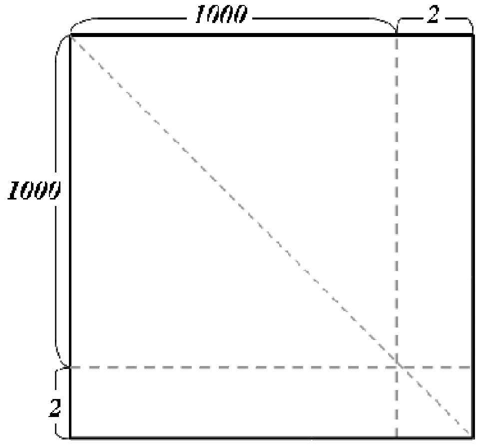
《和的平方公式》圖形示意圖

步驟8：將短邊摺至長邊上與之對齊(即摺出其中一個直角的角平分線)，因正方形可以切割成兩個等腰直角三角形，詳如附件二。

步驟9：計算較不易直接以心算得到的兩數和平方，如：

$1002^2=(1000+2)^2$、$200.3^2=(200+0.3)^2$，參考圖形如下，驗

證步驟詳見附件三：



《和的平方公式》範例示意圖

例 2：(1) ① $503^2=(500+3)^2=500^2+2\times500\times3+3^2=253009$

② $(600\frac{1}{4})^2=(600+\frac{1}{4})^2=600^2+2\times600\times\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2=360300\frac{1}{16}$

(2) 結果均相同；較方便計算。

(3) a 取 1000，b 取－2；故 $998^2=[1000+(-2)]^2$

$=1000^2+2\times1000\times(-2)+(-2)^2=996004$，與直式計算結果相同（過程略）。

隨堂練習 2：(1) $(1998+2013)^2$，因為$(1998+2013)^2$

$=1998^2+2\times1998\times2013+2013^2$。(2) 兩者相差 $2ab$。

活動三：

步驟 10：$[a+(-b)]^2=a^2+2\times a\times(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2$

步驟 11：$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$，結果相同。

步驟 12：計算較不易直接以心算得到的兩數差平方，

如：$999^2=(1000-1)^2$、$99.8^2=(100-0.2)^2$

步驟 13、14：詳見附件四。

例 3：

(1) ①$1999^2=(2000-1)^2=2000^2-2\times2000\times1+1^2=3996001$

②$(399.7)^2=(400-0.3)^2=400^2-2\times400\times0.3+0.3^2=159760.09$

(2) $(49\frac{3}{4})^2=(50-\frac{1}{4})^2=50^2-2\times50\times\frac{1}{4}+(\frac{1}{4})^2=2475\frac{1}{16}$，正整數為 2476。

(3) ①$199.5\times200.5=[200+(-0.5)]\times(200+0.5)$

$=200^2+200\times0.5+200\times(-0.5)+0.5\times(-0.5)=200^2-0.5^2$，

整數部分為 3999。

②$\left(50\frac{13}{17}\right)\times\left(50\frac{4}{17}\right)=\left(50+\frac{13}{17}\right)\times\left(50+\frac{4}{17}\right)$

$=2500+50\times(\frac{4}{17}+\frac{13}{17})+\frac{4}{17}\times\frac{13}{17}=2550\frac{52}{289}$，整數部分為 2550。

隨堂練習 3：

(1) $(399.2)^2-2\times399.2\times99.2+(99.2)^2=(399.2-99.2)^2=300^2=90000$

(2) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

活動四：

步驟 16：200×0.5 與 $200\times(-0.5)$可以互相抵消。

步驟 17：和的平方公式為兩個$(a+b)$相乘，差的平方公式為兩個$(a-b)$相乘，平方差公式為$(a+b)$與$(a-b)$各一個相乘。

步驟 18：與特定數字等距離的兩數相乘，

如：$1999\times2001=(2000-1)\times(2000+1)$

步驟 20：a^2 代表正方形面積，a^2-b^2 代表減去一塊較小塊正方形所剩的面積，驗證步驟詳見附件五。

步驟 21：詳見附件五。

例 4：

(1) ①$1987\times2013=(2000-13)\times(2000+13)=2000^2-13^2$

$=4000000-169=3999831$

②$(44\frac{4}{7})^2-(4\frac{3}{7})^2=(44\frac{4}{7}+4\frac{3}{7})\times(44\frac{4}{7}-4\frac{3}{7})=49\times40\frac{1}{7}=1967$

(2) $(49.3)^2-(550.7)^2=(49.3+550.7)(49.3-550.7)$

$=600\times(-501.4)=-300840$，故最大整數值為-300841

(3) ①$2013\times1997=(2000+3+10)\times(2000-3)=2000^2-3^2+19970$

$=4019961$，利用平方差與乘法分配律公式。

②$(66.6)^2-(44.4)^2=(66.6+44.4)\times(66.6-44.4)$

$=111\times22.2=0.2\times111^2=2464.2$，利用平方差、分配律與完全平方和公式，其中 111^2 亦可直接使用直式乘法進行計算。

七、指定作業：

1. 請利用公式計算下列算式的值：

(1) $40\frac{2}{7}\times91\frac{3}{8}$　(2) 40.2^2　(3) 200.3×199.7

(4) $200.3^2-199.7^2$　(5) 998×103　(6) 498^2

(7) $\left(1200\frac{1}{8}\right)^2$

2. 請利用乘法公式比較$(a+b)^2$與a^2+b^2的大小關係。

3. 已知$\left(199\frac{3}{7}\right)\times\left(200\frac{4}{7}\right)=a+b$，其中$a$為正整數且$0<b<1$，試求出$a$的值。

指定作業參考解答：

1. (1) $40\frac{2}{7}\times91\frac{3}{8}=(40+\frac{2}{7})\times(91+\frac{3}{8})=3640+26+15+\frac{3}{28}=3681\frac{3}{28}$

(2) $40.2^2=(40+0.2)^2=1616.04$

(3) $200.3\times199.7=(200+0.3)\times(200-0.3)=39999.91$

(4) $200.3^2-199.7^2=(200.3+199.7)\times(200.3-199.7)=400\times0.6=240$

(5) $998\times103=(1000-2)\times103=102794$

(6) $498^2=(500-2)^2=248004$

(7) $\left(1200\frac{1}{8}\right)^2=\left(1200+\frac{1}{8}\right)^2=1440300\frac{1}{64}$

2. $\because(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，故$(a+b)^2$比$a^2+b^2$多出$2ab$。

①當$ab>0$（即ab同號）時，$(a+b)^2>a^2+b^2$

②當$ab=0$（即$a=0$或$b=0$）時，$(a+b)^2=a^2+b^2$

③當$ab<0$（即ab異號）時，$(a+b)^2<a^2+b^2$

3. $\left(199\frac{3}{7}\right)\times\left(200\frac{4}{7}\right)=\left(200-\frac{4}{7}\right)\times\left(200+\frac{4}{7}\right)=200^2-(\frac{4}{7})^2=40000-\frac{16}{49}=39999+\frac{33}{49}$

，故取$a=39999$。

八、教學活動注意事項：

1.教學活動時間建議如下：各活動進行（含隨堂練習）約 25 分鐘，建議第一節課進行至活動二，其餘部分進行一節半至二節課(指定作業與部分練習可視教學進度提供有興趣學生自行研究)。

2.活動一的進行，教師可依實際情形，設計一個情境並提問，恰可使用乘法公式。

3. 直式乘法在此為先備知識，乘法公式的使用時機之一設定為節省乘法的計算時間，教師可配合活動一的步驟 2 進行時一併說明。

4. 活動一的步驟 3 與步驟 4，若學生無法依照預期回答的結果，教師可透過部分提示如分配律的乘開記號，或將算式與圖形觀察並請學生發表（建議可直接剪下後以長方形拼圖呈現）；另外若有學生能同時將兩種摺法呈現於同一張紙上，教師可就此直接引入乘法分配律公式，以利節省整體教學時間。

5. 例 1 的第(2)小題，是為了討論乘法分配律的公式中的一般項由正數變為負數值，教師可讓學生比較何種方式較為便捷；若學生無法理解，宜多舉一至兩個整數乘法，且 a、b、c、d 均為正數的例子作練習。

6. 活動二的步驟 8 目的在以幾何圖形觀察乘法分配律公式與和

的平方公式的關聯性，學生應具備兩個等腰直角三角形可拼成正方形的先備知識。

7. 教師於活動二步驟 9 講解時，應適時統整代數運算與幾何證明的關聯性，並以學生舉例題目進行說明。
8. 例 2 的第 2、3 小題，主要目的在讓學生理解利用乘法公式拆解數字時的不唯一性，並比較不同拆解方式的優劣。
9. 隨堂練習 2 的目的主要讓學生思考 a^2+b^2 與 $(a+b)^2$ 兩者的差異性，並於指定作業有後續討論。
10. 教師應確認多數學生乘法分配律與和的平方公式（即活動一、二結論）確實理解後，再進行後續活動較為適宜。
11. 活動二、三、四與活動一的差別在活動一是利用長方形紙張，長寬不相等切割出來的四塊長方形中，彼此間的關係；而活動二到四則是活動一的特例，教師在教學時應加以強調。
12. 活動三、四利用活動一、二的結果，目的在先以學生熟悉的代數形式作推導，理解後再輔以幾何證明作比較。此外若教學時間不足，教師可擇一至兩種摺紙方式作推導，其餘摺紙方式留作回家作業或延伸練習，給予較有興趣的同學研究或發表。
13. 隨堂練習 3 的設計，主要在乘法公式雙向應用的理解，也為後續因式分解作鋪路。
14. 例 4 引入了結果為負數的算式，學生若無法理解，教師可多

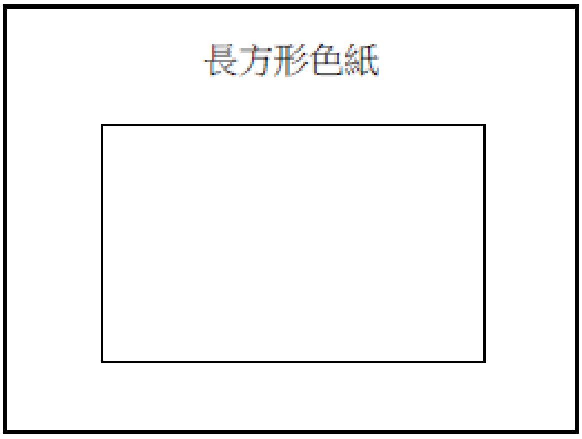
舉類似題作練習。

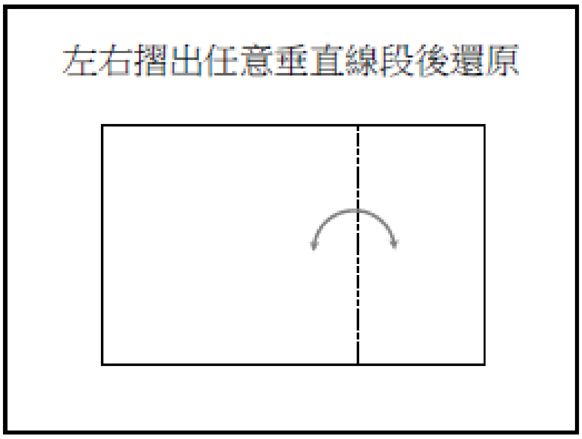
15. 指定作業第 1 題的(3)、(4)小題是學生常不清楚其差異性的練習，教師可於學生練習完畢後作比較。
16. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
17. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

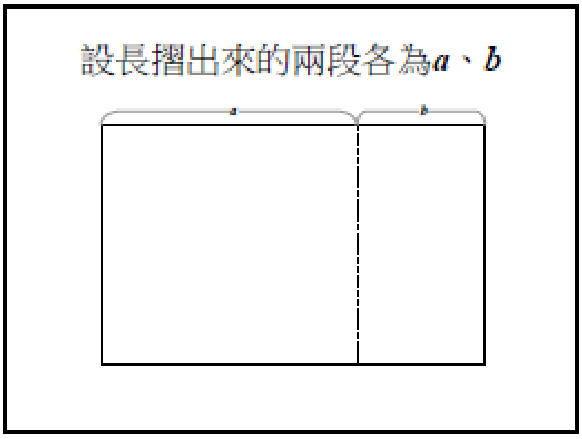
九、教學參考資料：

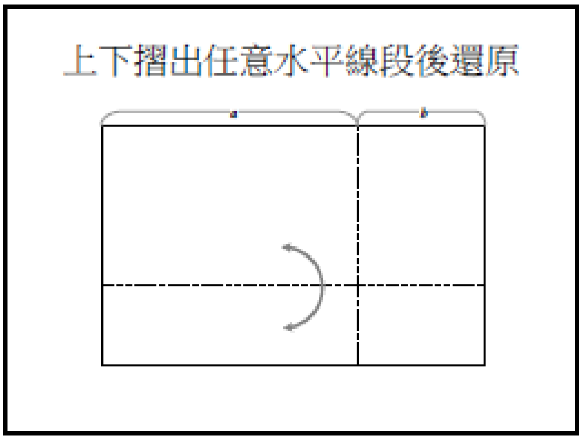
1. 教育部(2008)。國民中小學九年一貫數學領域課程綱要。臺北市：教育部。
2. 國中各版本第三冊數學課本。
3. 有關本文相關摺紙與數學相關數位檔案，請至新北市林口國中數學科網站（林中生命藝數殿堂）查詢（http://163.20.9.8/dyna/menu/index.php?account=math）。

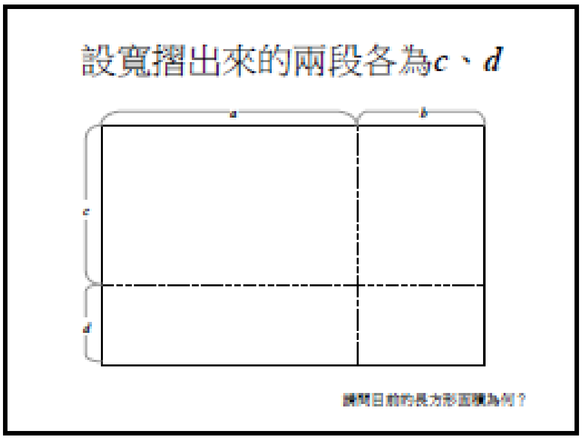
《附件一》**《乘法分配律》摺紙簡報**

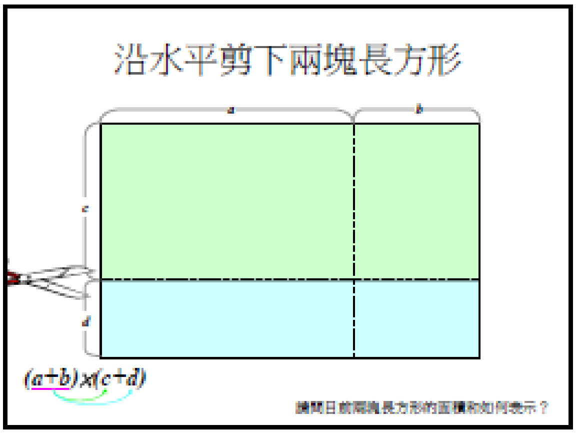




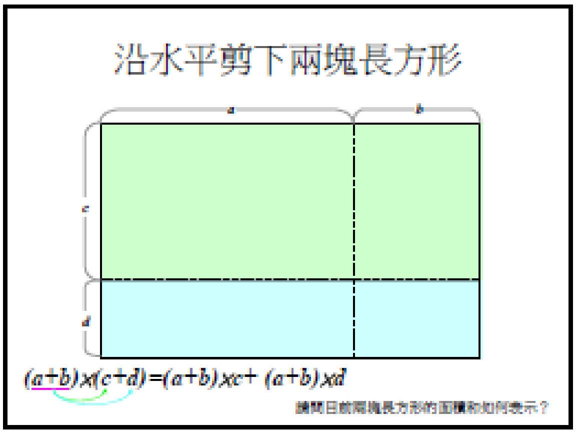




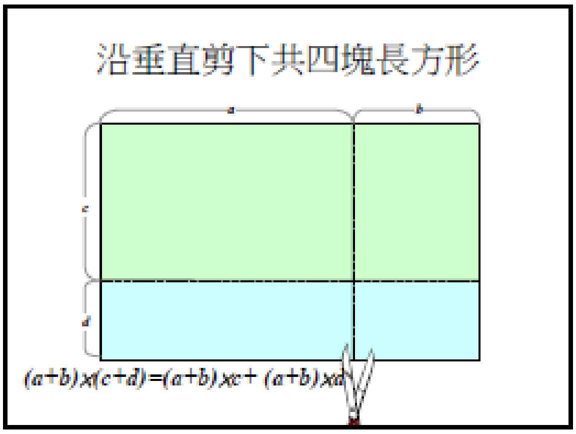




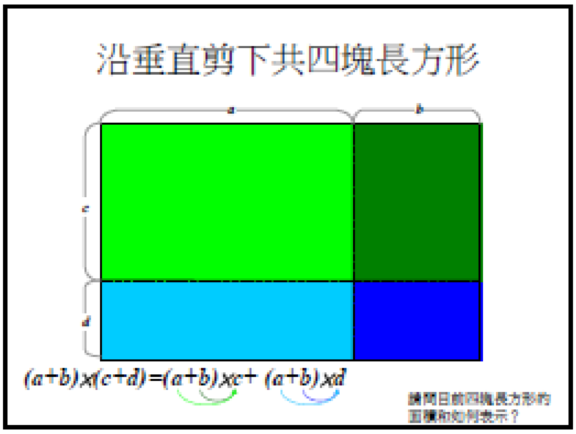
沿水平剪下兩塊長方形
a
b
c
d
(a+b)x(c+d)



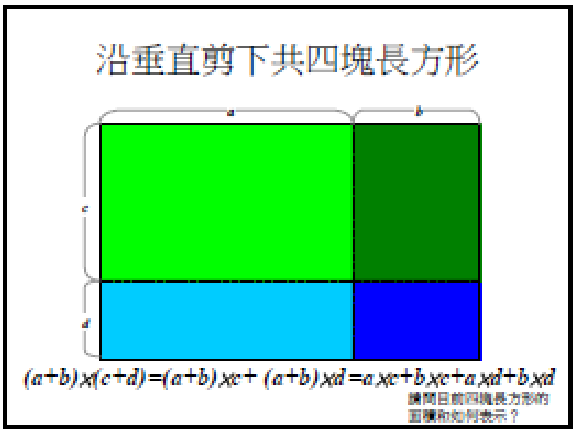
沿水平剪下兩塊長方形
a
b
c
d
(a+b)x(c+d)=(a+b)xc+ (a+b)xd



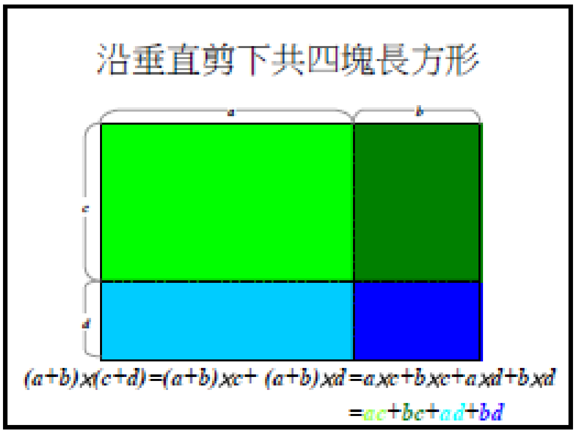
沿垂直剪下共四塊長方形
a
b
c
d
(a+b)x(c+d)=(a+b)xc+ (a+b)xd



沿垂直剪下共四塊長方形
a
b
c
d
(a+b)x(c+d)=(a+b)xc+ (a+b)xd

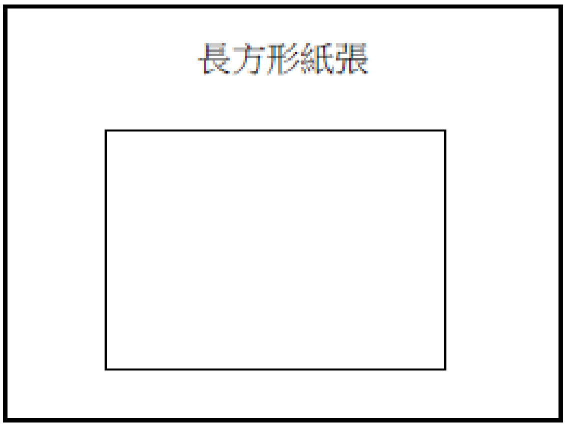


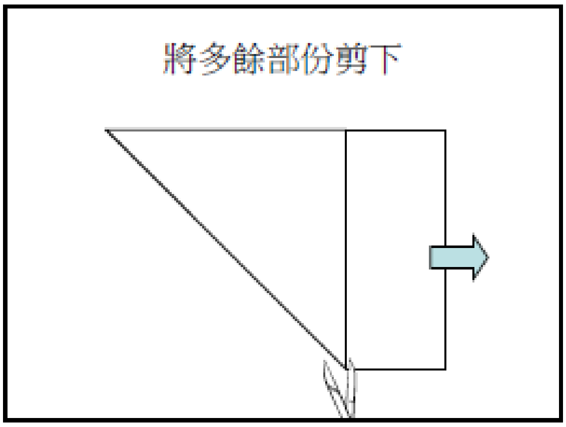
沿垂直剪下共四塊長方形
a
b
c
d
(a+b)x(c+d)=(a+b)xc+ (a+b)xd=axc+bxc+axd+bxd

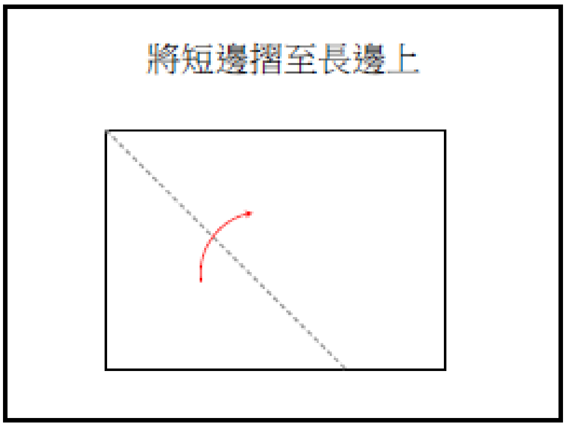


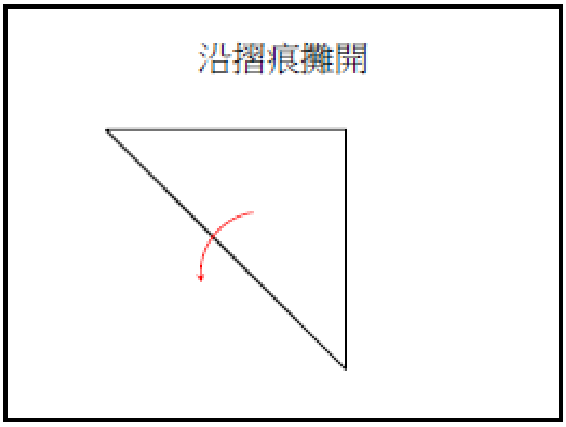
沿垂直剪下共四塊長方形
a
b
c
d
(a+b)x(c+d)=(a+b)xc+ (a+b)xd=axc+bxc+axd+bxd
=ac+bc+ad+bd

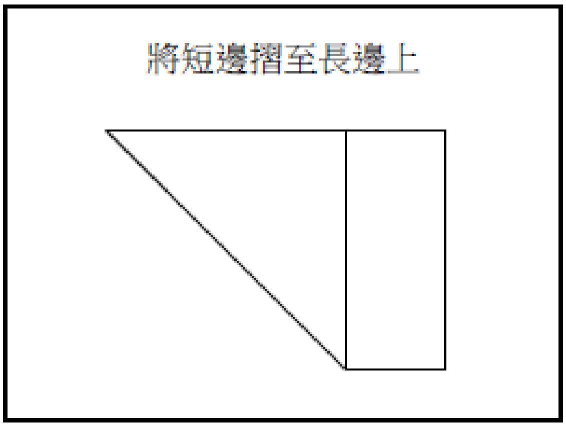
《附件二》**《長方形摺出正方形》簡報**

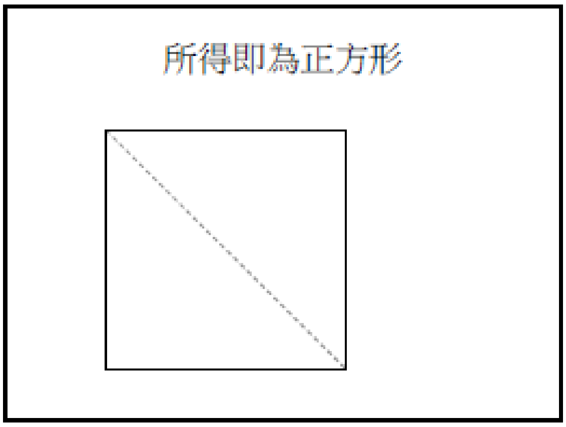




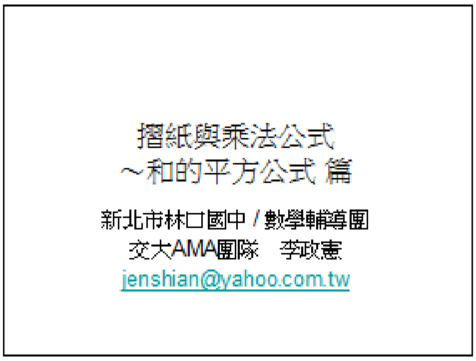


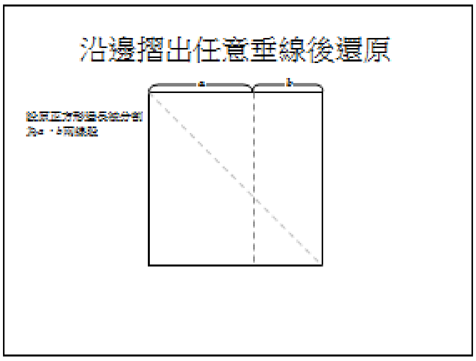


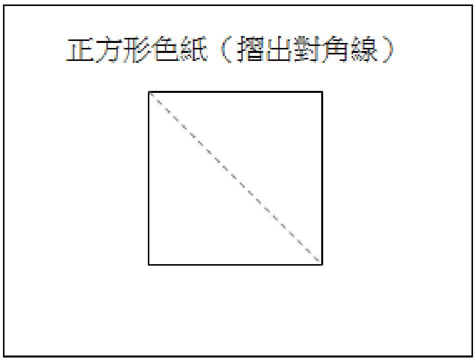


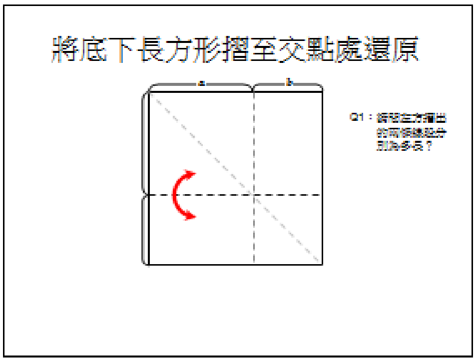


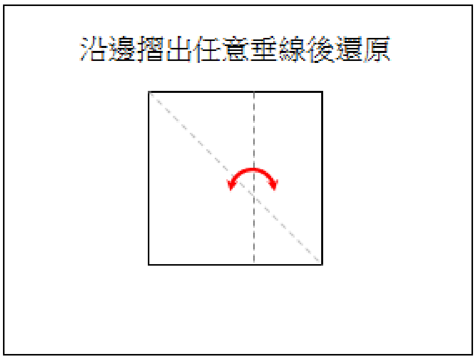
《附件三》《和的平方公式與乘法分配律》摺紙簡報

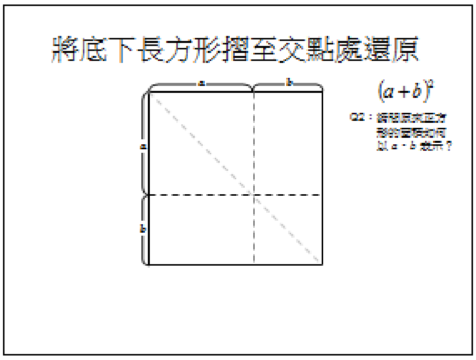


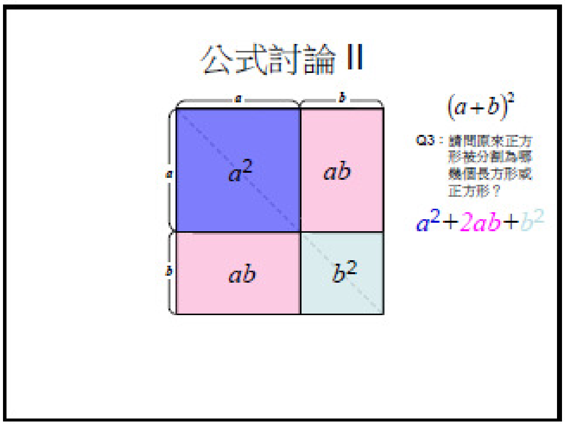


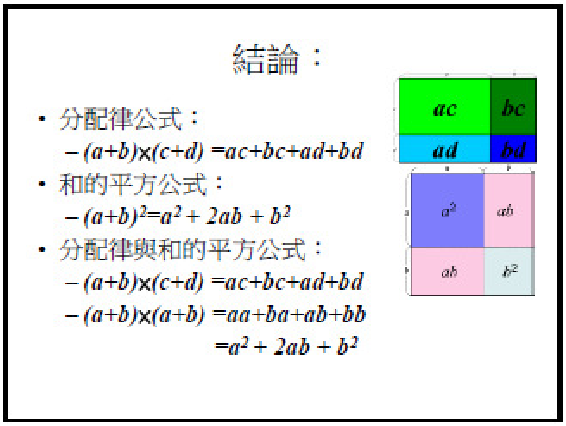


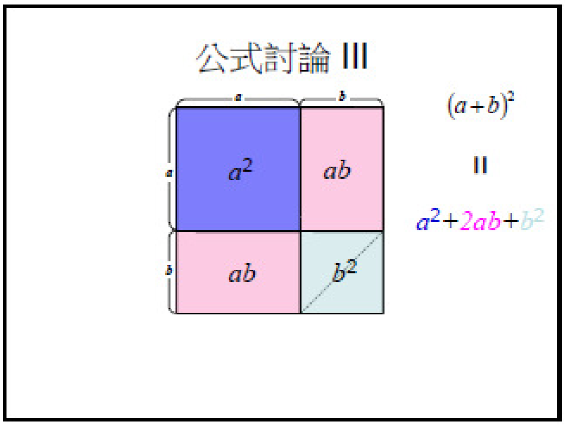


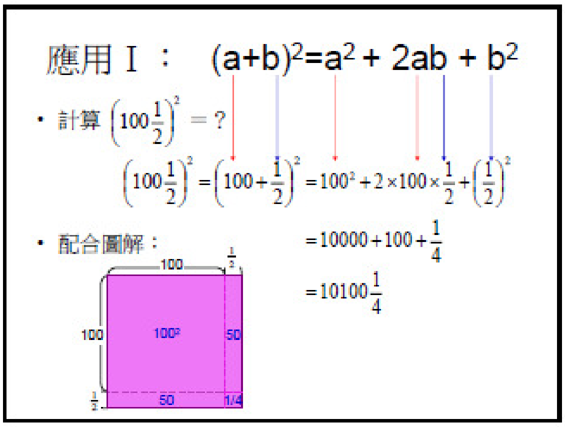




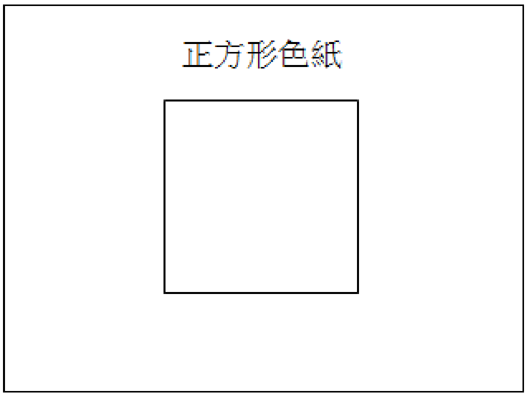

公式討論 II
a
b
a
b
a^2
ab
ab
b^2
$(a+b)^2$
Q3：請問原來正方形被分割為哪幾個長方形或正方形？
$a^2+2ab+b^2$

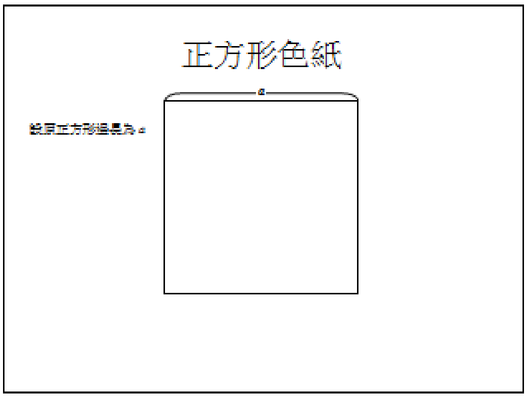

結論：
• 分配律公式：
– (a+b)x(c+d) =ac+bc+ad+bd
• 和的平方公式：
– $(a+b)^2=a^2 + 2ab + b^2$
• 分配律與和的平方公式：
– (a+b)x(c+d) =ac+bc+ad+bd
– (a+b)x(a+b) =aa+ba+ab+bb
$=a^2 + 2ab + b^2$
ac
bc
ad
bd
a^2
ab
ab
b^2

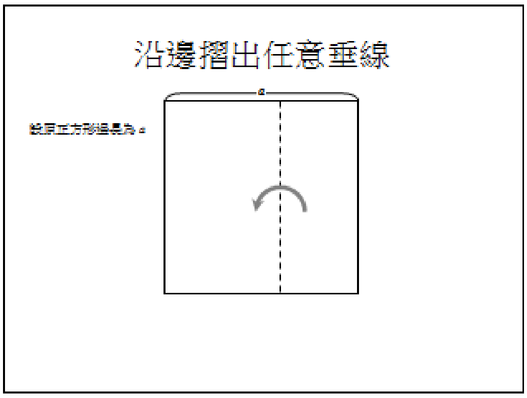

公式討論 III
a
b
a
b
a^2
ab
ab
b^2
$(a+b)^2$
II
$a^2+2ab+b^2$

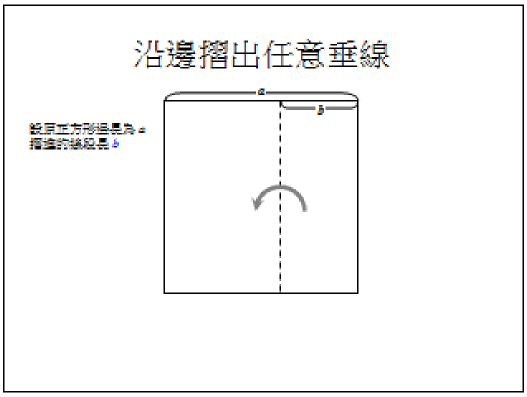

應用 I ： $(a+b)^2=a^2 + 2ab + b^2$
• 計算 $\left(100\frac{1}{2}\right)^2=?$
$\left(100\frac{1}{2}\right)^2=\left(100+\frac{1}{2}\right)^2=100^2+2\times100\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$
• 配合圖解：
$=10000+100+\frac{1}{4}$
$=10100\frac{1}{4}$
100
$\frac{1}{2}$
100
100^2
50
50
1/4
$\frac{1}{2}$

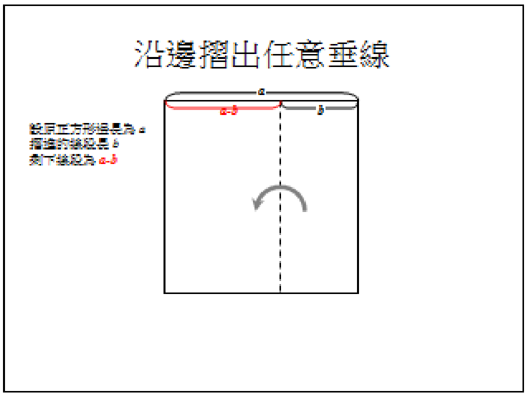
《附件四》《差的平方公式》摺紙簡報



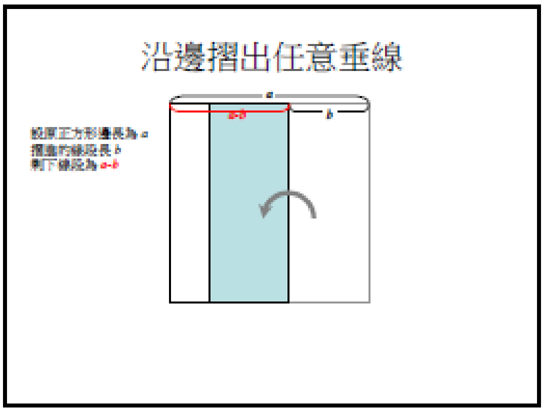


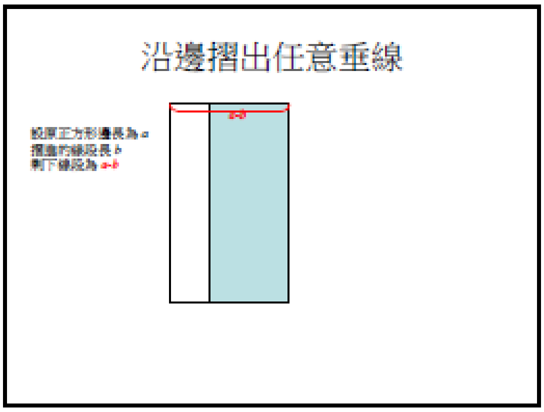


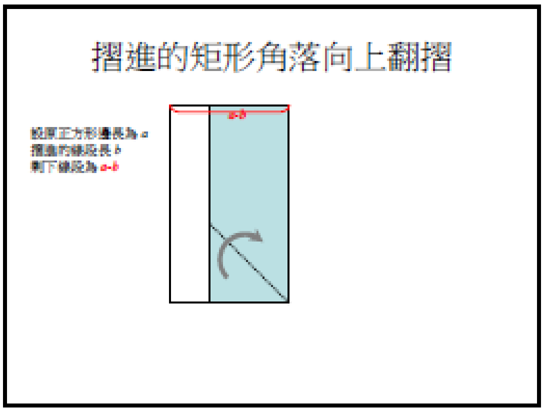


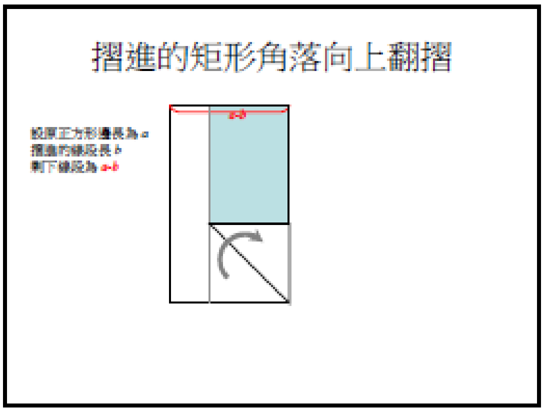


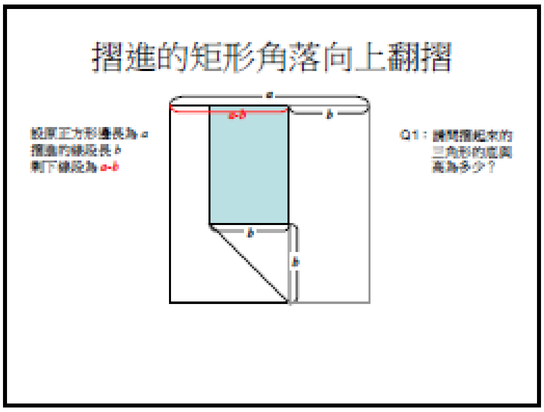
1

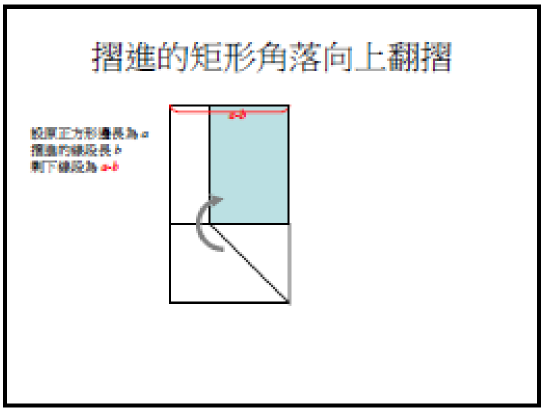

沿邊摺出任意垂線
設原正方形邊長為 a
摺進的線段長 b
剩下線段為 a-b
a
a-b
b

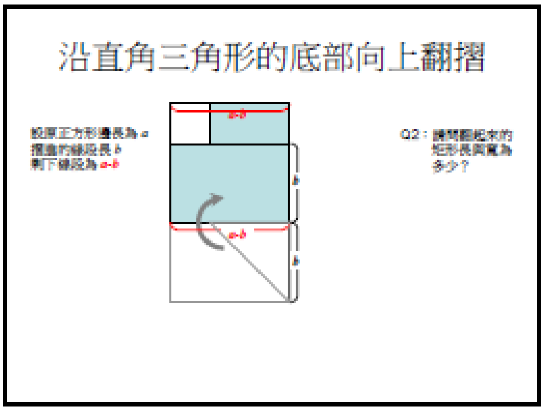

沿邊摺出任意垂線
設原正方形邊長為 a
摺進的線段長 b
剩下線段為 a-b
a-b

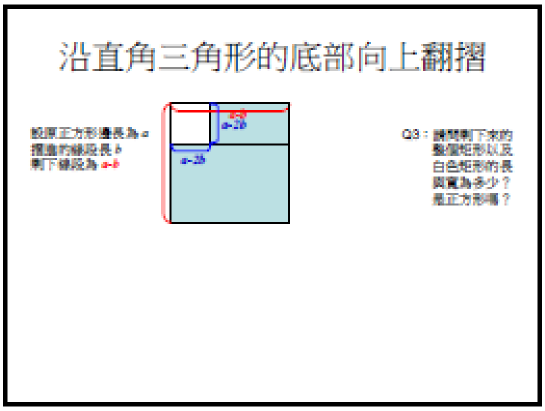

摺進的矩形角落向上翻摺
設原正方形邊長為 a
摺進的線段長 b
剩下線段為 a-b
a-b

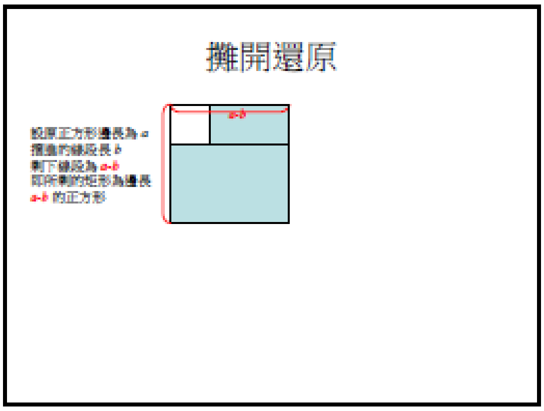

摺進的矩形角落向上翻摺
設原正方形邊長為 a
摺進的線段長 b
剩下線段為 a-b
a-b

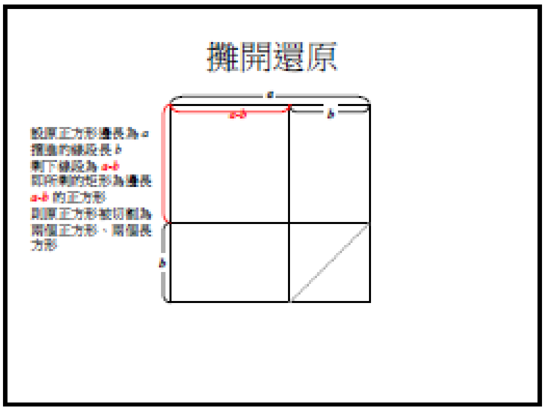

摺進的矩形角落向上翻摺
設原正方形邊長為 a
摺進的線段長 b
剩下線段為 a-b
a
a-b
b
b
b
Q1：請問摺起來的三角形的底與高為多少？

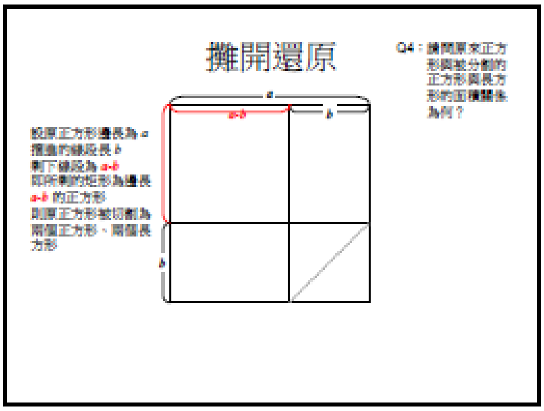

摺進的矩形角落向上翻摺
設原正方形邊長為 a
摺進的線段長 b
剩下線段為 a-b
a-b

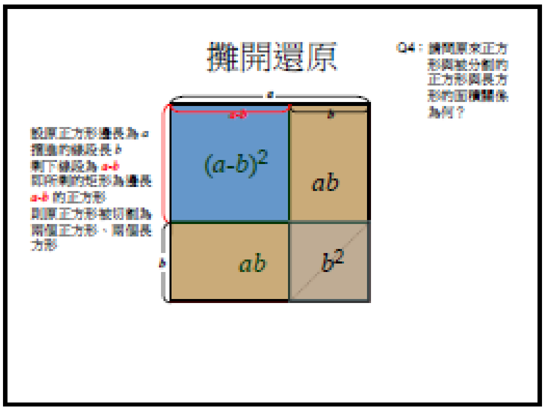

沿直角三角形的底部向上翻摺
設原正方形邊長為 a
摺疊的線段長 b
剩下線段為 a-b
a-b
b
a-b
b
Q2：請問圍起來的矩形長與寬為多少？

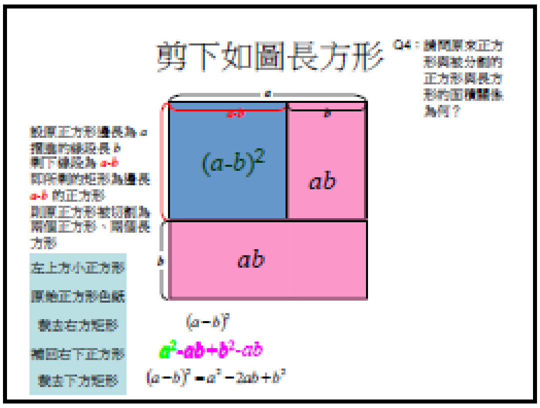

沿直角三角形的底部向上翻摺
設原正方形邊長為 a
摺疊的線段長 b
剩下線段為 a-b
a-b
a-2b
a-2b
Q3：請問剩下來的整個矩形以及白色矩形的長與寬為多少？是正方形嗎？


攤開還原
設原正方形邊長為 a
摺疊的線段長 b
剩下線段為 a-b
即所剩的矩形為邊長 a-b 的正方形
a-b

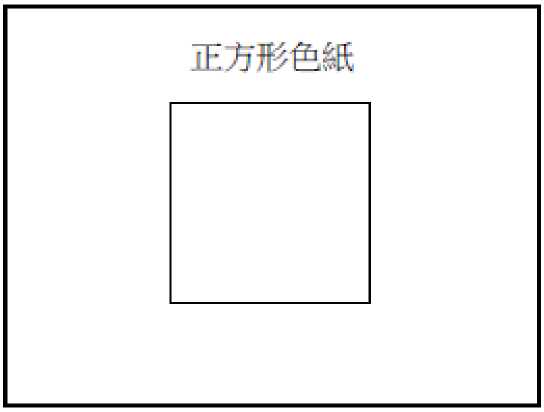

攤開還原
設原正方形邊長為 a
摺疊的線段長 b
剩下線段為 a-b
即所剩的矩形為邊長 a-b 的正方形
則原正方形被切割為兩個正方形、兩個長方形
a
a-b
b
b

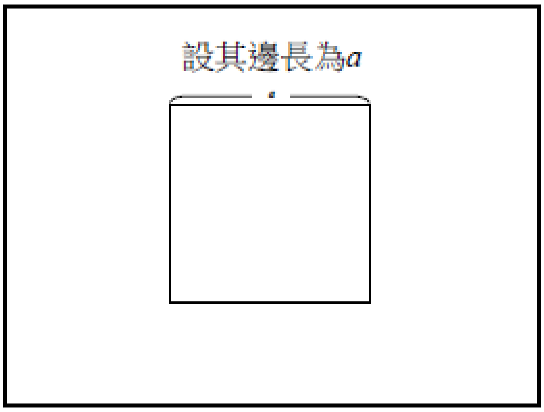

攤開還原
Q4：攤開原來正方形與被分割的正方形與長方形的面積關係為何？
設原正方形邊長為 a
摺疊的線段長 b
剩下線段為 a-b
即所剩的矩形為邊長 a-b 的正方形
則原正方形被切割為兩個正方形、兩個長方形
a
a-b
b
b

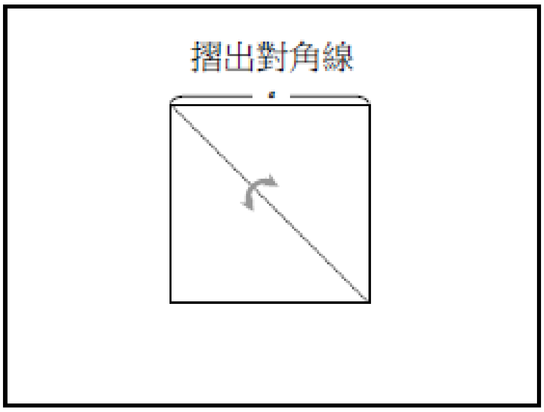

攤開還原
Q4：攤開原來正方形與被分割的正方形與長方形的面積關係為何？
設原正方形邊長為 a
摺疊的線段長 b
剩下線段為 a-b
即所剩的矩形為邊長 a-b 的正方形
則原正方形被切割為兩個正方形、兩個長方形
a
a-b
b
b
(a-b)²
ab
ab
b²

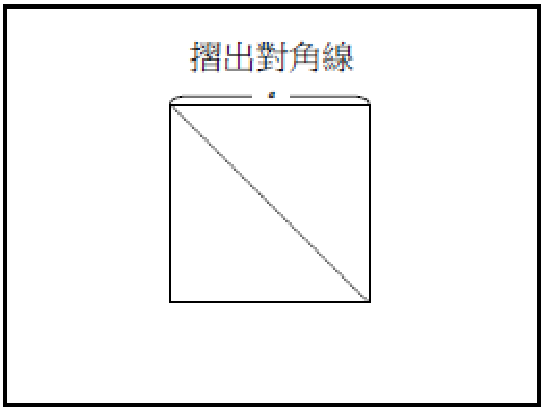

剪下如圖長方形
Q4：請問原來正方形與被分割的正方形與長方形的面積關係為何？
設原正方形邊長為 a
摺疊的線段長 b
剩下線段為 a-b
即所剩的矩形為邊長
a-b 的正方形
則原正方形被切割為
兩個正方形、兩個長
方形
左上方小正方形
原始正方形色紙
減去右方矩形
補回右下正方形
減去下方矩形
a
a-b
b
b
$(a-b)^2$
ab
ab
$(a-b)^2$
a^2-ab+b^2-ab
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

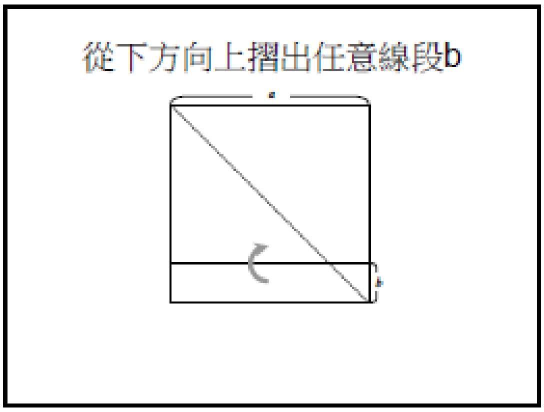
《附件五》《平方差公式》摺紙簡報

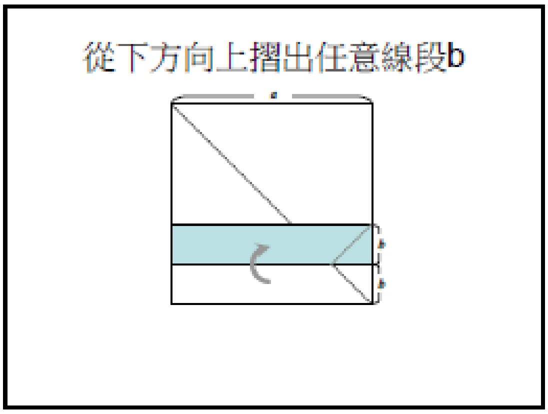


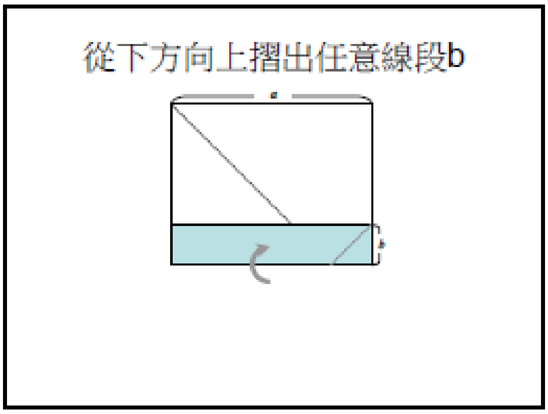


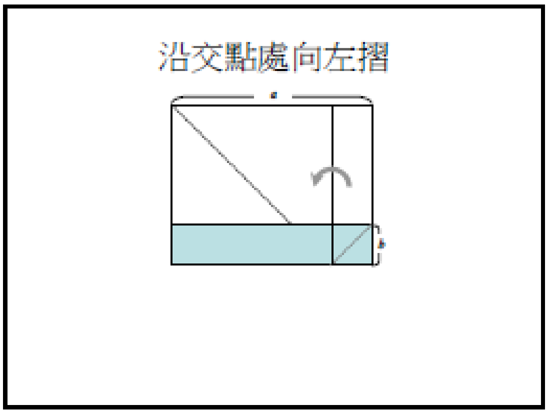


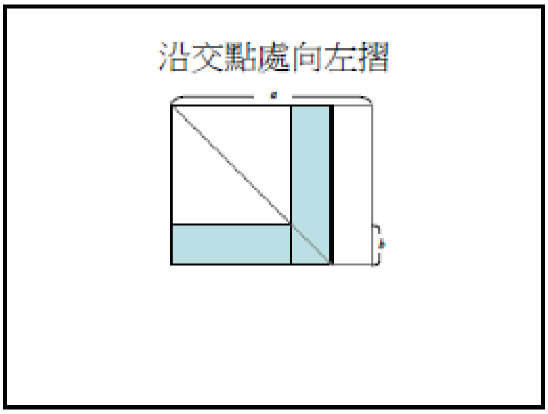


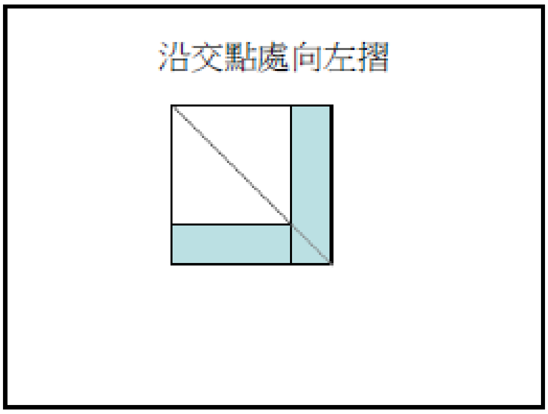


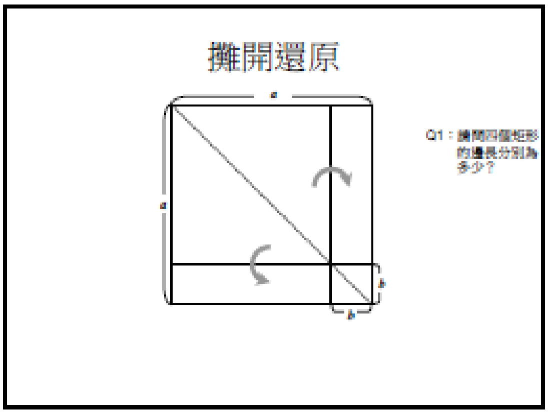

從下方向上摺出任意線段b

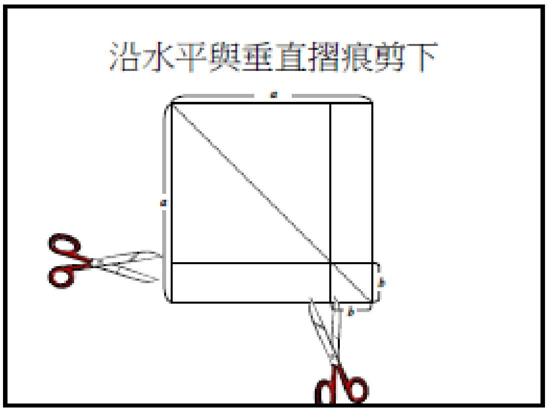

從下方向上摺出任意線段b

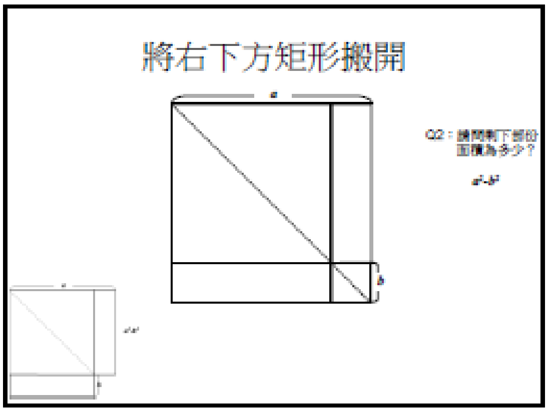

沿交點處向左摺

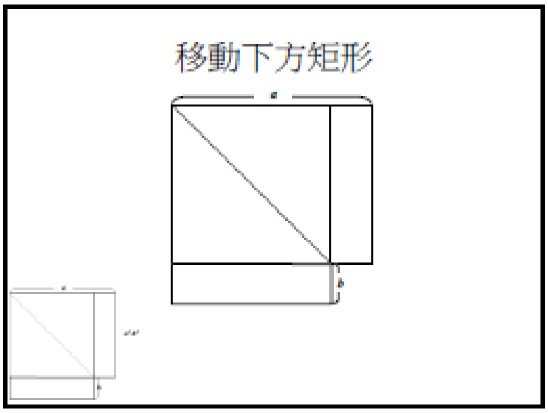

沿交點處向左摺

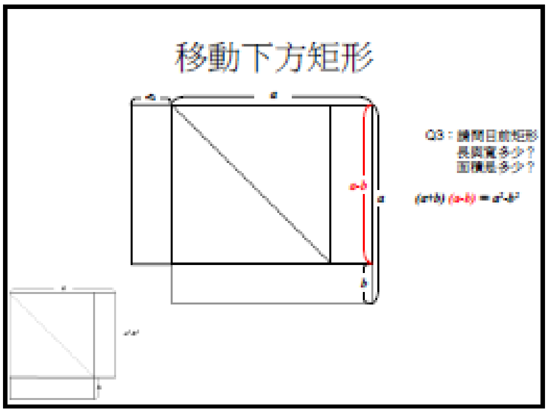

沿交點處向左摺


攤開還原


沿水平與垂直摺痕剪下
a
a
b
b


將右下方矩形搬開
a
b
Q2：請問剩下部份
面積為多少？
a^2-b^2


移動下方矩形
a
b


移動下方矩形
a
a-b
a
b
Q3：請問目前矩形
長與寬多少？
面積是多少？
$(a+b)\ (a-b) = a^2-b^2$

主題1－2：乘法公式與速算法

一、授課對象：國中八年級上學期學生　　　　**撰寫者：**李政憲

二、先備知識：

(一) 乘法公式（含分配律、和的平方、差的平方與平方差公式）的理解與基本應用。

(二) 能作基本三位數及含小數與分數的直式乘法運算。

三、教學目標：

(一) 藉由乘法公式，理解各種速算法的數學原理。

(二) 運用所得的原理，進一步作相關速算法的練習與延伸。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

透過各種速算法的介紹，使學生理解其數學原理與乘法公式的相關性，進一步透過原理的理解，判別相關速算法的使用時機並進行練習，最後可延伸至其他相關情形作進階應用。

六、教學活動：

子題：印度數學「格柵法」、「棋盤法」與納皮爾算籌

活動一：利用乘法分配律公式以理解印度數學「格柵法」及直式乘法原理

底下我們要討論的是印度數學「格柵法」與我們熟悉的直式乘法數學原理。

步驟 1： 教師示範印度「格柵法」或播放底下影片：

http://www.youtube.com/watch?v=54y7KEgnz3s

請同學仿照其方法計算 23×12，並討論其數學原理。

步驟 2： 教師請同學以直式乘法計算 23×12 的結果，並比較「格柵法」的過程與結果，教師接著提問：「你覺得兩種的計算方式有何相同處？」

步驟 3： 教師說明歸納原式 23×12=20×10+20×2+3×10+3×2，請同學以圖形表示其結果（繪圖或摺紙均可）。

教師歸納說明印度「格柵法」與直式乘法彼此間的關係，並討論兩者與乘法分配律的關聯性。

例 1：(1) 請觀察影片中（或由教師示範）123×321 的過程，與直式乘法比較後，說明每一個位置所代表的數代表的意義為何？

(2) 請問你的 123×321，所有的交點數共分為幾區？你是如何得到這個數字的？

隨堂練習 1：

(1) 利用上述推導過程，討論$(a+b+c)$ $(d+e+f)$的結果為何？

(2) 請問你的 123×321 中，a、b、c 分別代表哪些數字？利用這個方法計算乘法的結果有何優點與缺點？

活動二：因應當個別數字較大時，「格柵法」不易計算點數，介紹印度數學的「棋盤法」與納皮爾算籌。

步驟 4：教師詢問：「以上介紹的格柵法與各位同學熟悉的直式乘法請問各有什麼限制？或是在哪些步驟容易犯錯？」請同學以 49×78 的例子作說明。

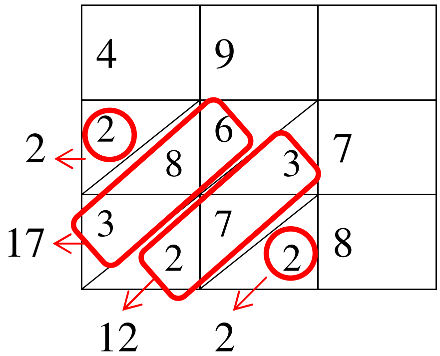
步驟 5：教師以 49×78 的例子介紹印度數學的棋盤式乘法如下：

4	9	
		7
		8

先以乘法填入所有數字相乘的結果如下表；

4	9	
2 / 8	6 / 3	7
3 / 2	7 / 2	8

步驟 6：接著左下至右上斜向計算各數字的和如下表：



步驟 7：將上表由下排左至右，左排下至上，每次左移一位計算其結果：

$$\begin{array}{lcccc} & 2 & & & \\ & 1 & 7 & & \\ & & 1 & 2 & \\ +) & & & & 2 \\ \hline & 3 & 8 & 2 & 2 \end{array}$$

步驟 8：教師詢問：「請同學思考上述方式是否改善了格柵法及直式乘法的缺點？棋盤法有沒有什麼不方便的地方？」請同學討論並發表意見。

步驟 9：教師說明以上的格柵法與棋盤法為納皮爾算籌（Napier Bone）的前身，並播放網路影片：

http://www.youtube.com/watch?v=6sAjEafIJTM

討論納皮爾算籌的使用方式與限制。

步驟 10：教師以網路影片：

http://www.youtube.com/watch?v=4h3hq_aPjQY

說明如何利用納皮爾算籌計算兩位數以上的乘法。

例 2：根據影片完成紙製納皮爾算籌並進行乘法應用。

隨堂練習 2：你覺得納皮爾算籌的使用時機為何？要使用納皮爾算籌作乘法的運算需要先具備什麼能力呢？

結論：

(一) 我們可利用乘法分配律公式的過程及原理：

$(a+b)(c+d)=(a+b)\times c+(a+b)\times d=ac+bc+ad+bd$，

說明大部分與乘法有關的速算法的原理。

(二) 無論「格柵法」或「納皮爾算籌」均有限制性，需瞭解其使用時機及其特性或限制條件方不會誤用。

(三) 適當使用以上速算法，可節省某些計算及記憶的時間，或是作為計算時搭配使用的工具。

活動三：印度數學第一公式

利用乘法公式進行個位數 5 的平方及個位數和為 10 的乘積速算，進一步推導出印度數學第一公式並作簡單應用。

步驟 11：教師說明：「接下來我們要將我們學過的幾個乘法公式作更多的應用，請同學先複習本章節學過的乘法公式。」

步驟 12：待學生說明四個乘法公式後，教師繼續提問：「若以和的平方公式計算 45^2，請問你會如何計算？」

步驟 13：教師說明 45^2 的速算法後，接著提問：「請你利用這種方式檢驗 55^2、65^2 與 95^2，看看是否與你以乘法公式或直式運算所得的結果相同。」

步驟 14：待學生檢驗完畢後，教師接著說明：「若以 $10a+5$ 代表以上

個位數為 5 的兩位數的數值（a 為其十位數），請試著以乘法公式展開$(10a+5)^2$。」

步驟 15：教師說明$(10a+5)^2=100a^2+100a+25$ 並詢問學生：「觀察結論與你剛剛計算的結果，請問有何相同處？」

步驟 16：教師提問：「你剛剛所計算十位數字×（十位數字+1）的步驟，請問以原算式要如何表示？」推導出 $100a^2+100a+25=100a(a+1)+25$，其中 25 為其結果的十位與個位數，而 $a(a+1)$即為十位數字×（十位數字+1）的結果，且乘上 100 後代表其百位數以上，恰與十位及個位作區隔，並再以實例輔助說明（如 75×75）。

例 3：依上述活動三步驟，想一想下列問題：

(1) 請問活動三的速算法是否僅能用於兩位數的乘法呢？三位數以上，個位數為 5 的平方數（如 125^2）是否也可使用這個方法計算？

(2) 請問百位數以上的組成 $100a^2+100a=100a(a+1)$中，等號前的 $100a$ 是如何得到的？想想看一定要計算個位數為 5 的平方才能使用這種速算法嗎？試舉出兩個例子作應用。

隨堂練習 3：

(1) 試著利用以上公式，計算並說明下列算式的值：

①$235^2$=______　　　②204×206=______

(2) 請問 255025 是哪一個整數的平方？

(3) 請利用公式與分配律，計算並說明下列算式的值。

①75×77　　　　　②137×132

結論：

(一) 上述「十位數以上部分相同，個位數和為 10」的快速乘法稱為印度數學的第一公式。

(二) 我們可利用印度數學的第一公式與分配律的應用，作兩個接近的數的乘法運算。

活動四：介紹印度數學快速公式，並討論與乘法分配律的關係。

步驟 17：教師說明以印度數學快速公式計算 87×79 的方式：

以 100 為基準數，先在乘數與被乘數右方寫下其補數（不足 100 部分）

87 / −13

<u>79 / −21</u>

步驟 18：請同學計算交叉相加的結果：87+(−21)或 79+(−13)，均得到 66，得其千位及百位數。

步驟 19：接著計算 21×13=273，

故其結果為 66×100(基準數) +273=6873

步驟 20：教師請學生以乘法分配律公式展開(100−21)×(100−13)

的結果，並說明為何交叉相加可得到相同的數字。

步驟 21：教師指定練習：「請以快速公式計算 92×78 的結果，並以直式乘法或乘法公式進行驗算。」

步驟 22：教師指定練習：「請以快速公式計算 87×112 的結果，並與乘法分配律的過程作比較。」

例 4：依上述活動四步驟，想一想下列問題：

(1) 利用快速公式，計算下列算式的值：

①67×88 ②103×115 ③94×122

(2) 請以$(100+a)\times(100+b)$展開結果說明快速公式的原理。

隨堂練習 4：回答底下問題：

(1) 請問上述快速公式是否都要以 100 作為基準數？若要計算 48×44 的結果，你的基準數要用多少？請算出其結果，並以乘法分配律公式作驗算與比較。

(2) 承上題，若要計算 512×498 的結果，你的基準數要用多少？請算出其結果，並以乘法分配律公式作驗算與比較。

活動五：介紹印度數學交叉乘法原理，實作練習並與直式乘法作比較。

教師接著說明：「上述快速公式多用來計算較接近的兩數乘法，若遇到不相近的兩數相乘，我們可利用底下介紹的交叉乘法進行運算。」

步驟 23：教師以直式乘法說明印度數學交叉乘法原理：

若以 $10a+b$ 代表被乘數，$10x+y$ 代表乘數，可以下列的直式乘法表示其結果：

$$
\begin{array}{r}
a\ \ b \\
\times)\ \ x\ \ y \\
\hline
ay\ by \\
ax\ bx\ \ \ \ \ \ \ \\
\hline
ax\,/\,ay+bx\,/\,by
\end{array}
$$

步驟 24：請同學以橫式計算$(10a+b)\times(10x+y)$的結果，說明與上列直式乘法結果的關聯性。

步驟 25：以 68×48 實際練習如下：

$$
\begin{array}{r}
6\ \ 8 \\
\times)\ \ 4\ \ 8 \\
\hline
24\,/\,48+32\,/\,64
\end{array}
$$

$$= 24\,/\,80\,/\,64 = 2400+800+64 = 3264$$

步驟 26：教師請學生以交叉乘法進行 73×58 的運算，並且與直式乘法的結果作比較。

例 5：依上述活動五步驟，想一想下列問題：

(1) 上述交叉計算的方法是否只能用於兩位數乘以兩位數？

若以 $100a+10b+c$ 代表被乘數，$10x+y$ 代表乘數，請仿照上面的計算，以直式乘法表示其結果。

(2) 承上題，若要計算 543×86，你要如何利用交叉計算的方式得到其結果？請算出其結果，並以乘法分配律公式作驗算與比較。

隨堂練習 5：

(1) 利用交叉計算方式，計算下列算式的值：

①$89\times68$　　　②$256\times74$　　　③$534\times295$

(2) 請以$(100a+10b+c)\times(100x+10y+z)$的結果說明上題中 534×295 利用交叉計算的原理。

結論：

(一) 我們可以利用快速公式用來計算較接近的兩數乘法，並依其接近的整十或整百數作為其基準數。

(二) 遇到差距較大的兩數相乘，可使用交叉相乘方式作計算。

(三) 快速公式、交叉相乘計算或是直式乘法，均可利用乘法分配律公式原理作說明。

活動六：(總結論)

(一) 乘法分配律公式：

$(a+b)(c+d)=(a+b)\times c+(a+b)\times d=ac+bc+ad+bd$，

可用來說明大部分與乘法有關的速算法的原理。

(二)「十位數以上部分相同，個位數和為 10」稱為印度數學的第一公式，我們可利用此公式與分配律的應用，作兩個接近的數的乘法運算。

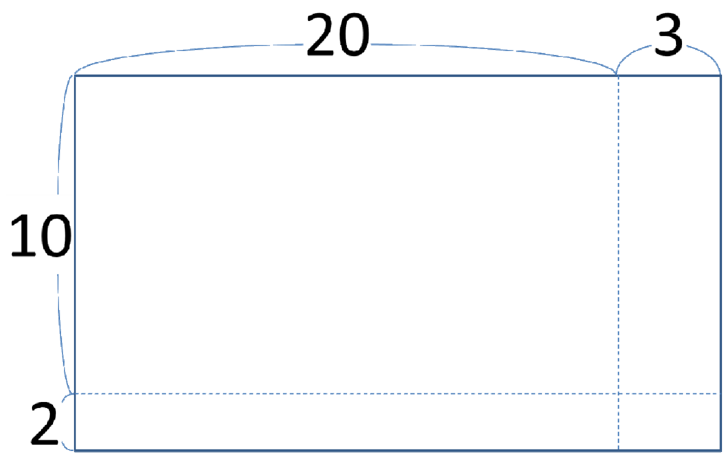
(三) 快速公式、交叉相乘計算或是直式乘法，均可利用乘法分配律公式原理作說明，可用來計算兩位數的乘法。

教學活動參考解答：

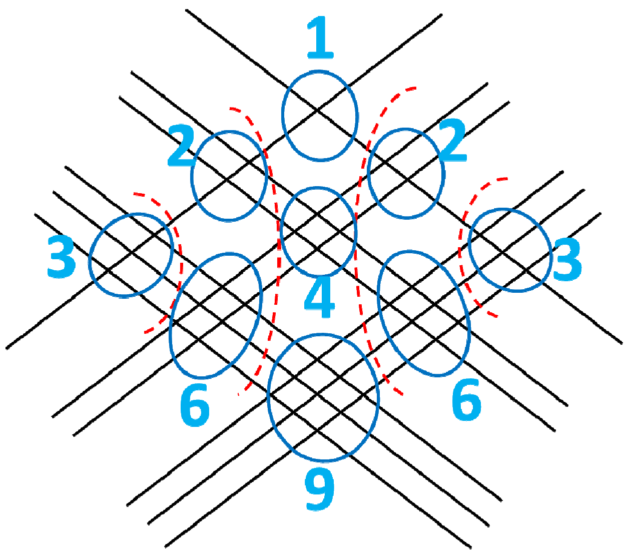
活動一：

步驟 2：均為計算 4 個數字的結果相乘，再合併為其結果。

步驟 3：如底下示意圖：



例 1：(1) 如圖，其結果為 $3\times10000+(2+6)\times1000+(1+4+9)\times100+(2+6)\times10+3\times1=39483$



(2) 共分為九區，因其為三位數乘以三位數，3x3=9。

隨堂練習 1：

(1) $(a+b+c)(d+e+f)= ad+ ae+ af+ bd+ be+ bf+ cd+ ce+ cf$

(2) $a=100$，$b=20$，$c=3$，$d=300$，$e=20$，$f=1$

優點：位置對齊，不需背誦九九乘法。

缺點：當數字較大時，交點數不易計算，過程較繁瑣。

活動二：

步驟 4：格柵法的限制在數字較大時不易計數交點數，直式乘法則在對齊與位值判斷時容易犯錯，如以 49×78 為例，格柵法要計算 9×8=72 個交點數時不如直接以九九乘法背誦即可；另外直式乘法的 8×4 與 7×9 均代表其十位數，容易在對齊或於心算進位時犯錯。

步驟 8：棋盤法不需計算交點數，但仍需記憶九九乘法表，且對齊方式為將斜向對齊轉為直式對齊，雖然避免了心算進位時犯錯的可能性，不過步驟較為繁瑣，學生可能要經過練習才有辦法略為轉直式對齊的步驟，不見得比較簡單。

步驟 9：納皮爾算籌則是將九九乘法表列印於算籌上，將所需的乘數與被乘數分別置於左方及上方，不需記憶九九乘法表，確定位值後直接加總與進位可得其結果，限制在學生仍需理解位值的判斷與加法的進位計算。

例 2：可直接列印附件一進行實作練習。

隨堂練習 2：學生九九乘法尚未記熟時，需具備位值的判斷與加法進位的能力；也可用來討論直式乘法的原理。

活動三：印度數學第一公式

步驟 12：$45^2=(40+5)^2=40^2+2\times40\times5+5^2=1600+400+25=2025$

步驟 13：個位數相乘 5×5=25 為其十位數及個位數，十位數×（十位數+1）=4×(4+1)=20 為其千位數及百位數，故其結果為 2025；依此類推：$55^2=5\times(5+1)\times100+5^2=3025$，$65^2=6\times(6+1)\times100+5^2=4225$，$95^2=9\times(9+1)\times100+5^2=9025$

例 3：(1) 否，如 $125^2=12\times13\times100+25=15625$

(2) $100a$ 是由$(10a+5)^2$展開式中的 $50a+50a$ 所得，而 $(10a+b)(10a+c)=100a^2+10ac+10ab+bc=100a^2+10a(c+b)+bc$，若十位數相同，個位數相加為 10（即 $c+b=10$）的兩整數即可應用此方法計算得到：$100a^2+10a(c+b)+bc=100a^2+10a\times0+bc=100a(a+1)+bc$，如 38×32=1216，143×147=21021 均為其應用。

隨堂練習 3：

(1)①$235^2=23\times24\times100+25=55225$ ②$204\times206=20\times21\times100+24=42024$

(2) ∵2550=50×51，故 $255025=505^2$

(3) ①$75\times77=75\times(75+2)=75^2+75\times2=5625+150=5775$

②$137\times132=(138-1)\times132=138\times132-132=18216-132=18084$

活動四：

步驟 20：$(100-21)\times(100-13)=100\times100+100\times(-21)+100\times(-13)+21\times13=100\times(100-21-13)+21\times13=100\times66+21\times13$，故交叉相加均可得到 66。

步驟 21：92×78：

$$
\begin{array}{l}
92\ /\ -8 \\
\underline{78\ /\ -22} \\
92-22=78-8=70 \\
8\times22=176
\end{array}
$$

$70\times100+176=7176$，與直式乘法或乘法公式驗算結果相同。

步驟 22：87×112：

$$
\begin{array}{l}
\ \ 87\ /\ -13 \\
\underline{112\ /\ +12} \\
87+12=112-13=99 \\
(-13)\times12=-156 \\
99\times100+(-156)=9744
\end{array}
$$

乘法分配律過程：$(87\times112)=(100-13)\times(100+12)$

$=100\times100+100\times12+100\times(-13)+(-13)\times12$

$=10000+1200-1300-156=9744$

乘法分配律過程較繁瑣，使用快速公式主要的目的是將乘法分配律第二步驟中的 100 提出以簡化計算。

例 4：(1) ①$67\times88=(67-12)\times100+33\times12=5896$

②$103\times115=(103+15)\times100+3\times15=11845$

③$94\times122=(94+22)\times100+(-6)\times22=11468$

(2) $(100+a)\times(100+b)=100\times100+100\times a+100\times b+a\times b$

$=100\times(100+a+b)+\ a\times b$

隨堂練習 4：

(1) 可用 50 作為基準數，$48\times44=(50-2)\times(50-6)$

$=50\times50+50\times(-2)+50\times(-6)+2\times6=50\times(50-2-6)+2\times6=2112$，

與乘法分配律結果相同。

(2) 可用 500 作為基準數，$512\times498=500\times(512-2)+12\times(-2)$

$=254976$

活動五：

步驟 26：$73\times58=$

$$\begin{array}{r} 7\ \ 3 \\ \underline{\times)\ \ 5\ \ 8} \\ 35\ /\ 56+15\ /\ 24 \end{array}$$

$=35/71/24=3500+710+24=4234$，與直式乘法結果相同。

例 5：(1)可用於兩位以上數字相乘：$(100a+10b+c)\times(10x+y)$

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ \underline{\times)\quad x\ y} \\ ay\ by\ cy \\ \underline{ax\ bx\ cx\quad\ } \\ ax\,/\,ay+bx\,/\,by+cx\,/\,cy \end{array}$$

(2)$543\times86=5\times8\ /\ 5\times6+4\times8\ /\ 4\times6+3\times8\ /\ 3\times6$

$=40\times1000+62\times100+48\times10+18=46698$

隨堂練習 5：

(1) ①$89\times68=48/54+64/72=4800+1180+72=6052$

②$256\times74=14/8+35/20+42/24=14000+4300+620+24\ =18944$

③$534\times295=10/45+6/25+8+27/15+36/20$

$=10\times10000+51\times1000+60\times100+51\times10+20=157530$

(2) $(100a+10b+c)\times(100x+10y+z)$

$=100a\times100x+100a\times10y+10b\times100x+100a\times z+100x\times c+10b$

$\times10y+10b\times z+c\times10y+cz=ax10000+(ay+bx)1000+(az+xc+by)$

$\times100+(bz+cy)\times10+cz=ax/\ ay+bx/\ az+xc+by/\ bz+cy/\ cz$

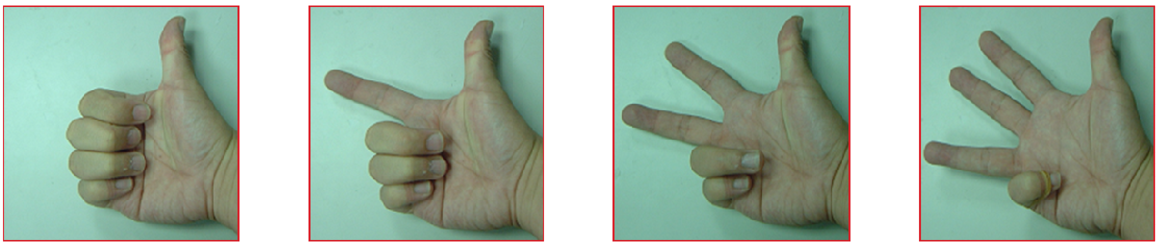
七、指定作業：

1. 試以下列方式，分別計算 23×215 的值，並以直式乘法驗算：

(1) 格柵法　　(2) 棋盤法　　(3) 交叉計算

2. 底下是有關「屈指算九九」速算法的步驟與數學原理討論：

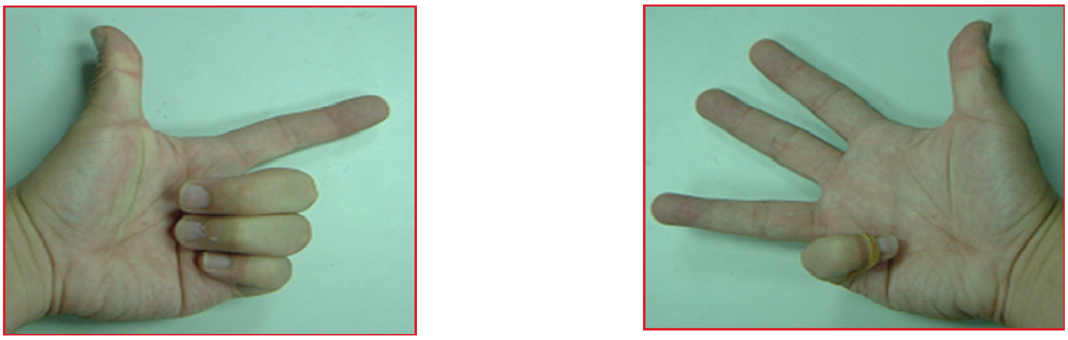
步驟 1：「若我們已知 1×1 到 5×5 的五五乘法，我們可以利用其結果及底下的方式計算 6×6 到 9×9 的數值。」請參考下圖：



6　　7　　8　　9

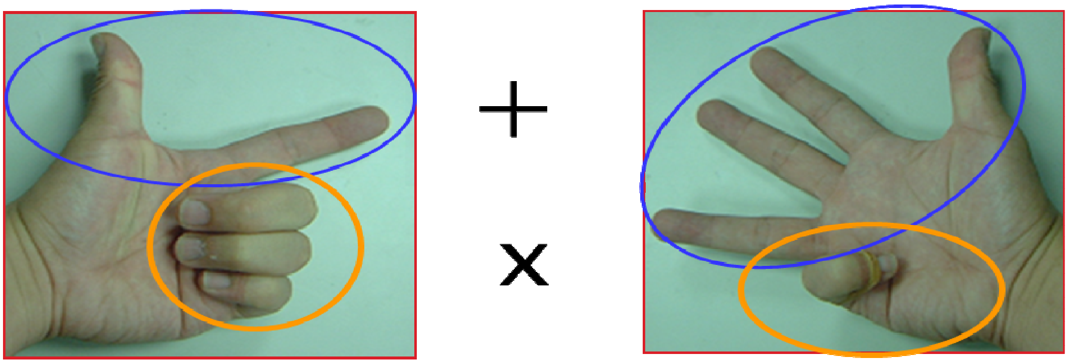
圖(1)　「屈指算九九」手指表徵

1.如圖(1)，分別以上述手指狀態代表 6~9；



圖(2)　「屈指算九九」示例 1

2.如圖(2)，左右手各以上述狀態代表 7x9；



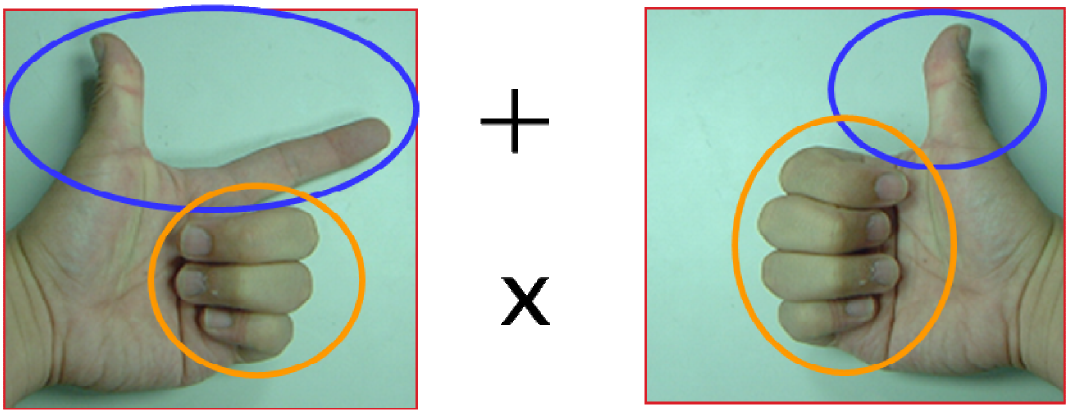
圖(3)　「屈指算九九」示例 1 演算說明

2.如圖(3)，伸直手指數分別相加（2+4）代表十位數 60，

彎曲手指數分別相乘（3x1）代表個位數 3，

再將兩數相加即得其結果為 63；

3.如下圖(4)，代表 $7\times6=(2+1)\times10+3\times4=42$



圖(5)　「屈指算九九」示例 2 演算說明

步驟 2：請將兩手伸出的手指數分別代表 x 與 y，兩手數字可分別拆解成________與________進行運算，詢問相乘後所得到的結果為何？

步驟 3：請問這些結果的計算過程，利用什麼學過的數學概念？

步驟 4：教師進一步詢問：「若要以步驟 1 的運算表示其結果，凹下去的手指如何以 x 與 y 表示？計算『伸出的手指數相加×10+凹下的手指數相乘』如何以 x 與 y 表示？與步驟 3 的結果比較是否相同？」完成底下表格，驗證你的計算是否正確。

x \ y	6=5+1	7=5+2	8=5+3	9=5+4
6=5+1	**x=1, y=1 10 (x + y)=20 (5 - x)(5 - y)=16**	**x=__, y=__ 10 (x + y)=____ (5 - x)(5 - y)=___**	**x=__, y=__ 10 (x + y)=____ (5 - x)(5 - y)=___**	**x=__, y=__ 10 (x + y)=____ (5 - x)(5 - y)=___**
7=5+2	**x=__, y=__ 10 (x + y)=____ (5 - x)(5 - y)=___**	**x=__, y=__ 10 (x + y)=____ (5 - x)(5 - y)=___**	**x=__, y=__ 10 (x + y)=____ (5 - x)(5 - y)=___**	**x=__, y=__ 10 (x + y)=____ (5 - x)(5 - y)=___**
8=5+3	**x=__, y=__ 10 (x + y)=____ (5 - x)(5 - y)=___**	**x=__, y=__ 10 (x + y)=____ (5 - x)(5 - y)=___**	**x=__, y=__ 10 (x + y)=____ (5 - x)(5 - y)=___**	**x=__, y=__ 10 (x + y)=____ (5 - x)(5 - y)=___**
9=5+4				

步驟 5：歸納結論：「因為 **10 (x + y)+ (5 - x)(5 - y)**乘開後的結果為__________________，並可記為：__________________」，故我們可以「屈指算九九」計算 6×6~9×9 的所有結果。

步驟 6：根據上述的推導結果，想想「屈指算九九」的使用時機為何？

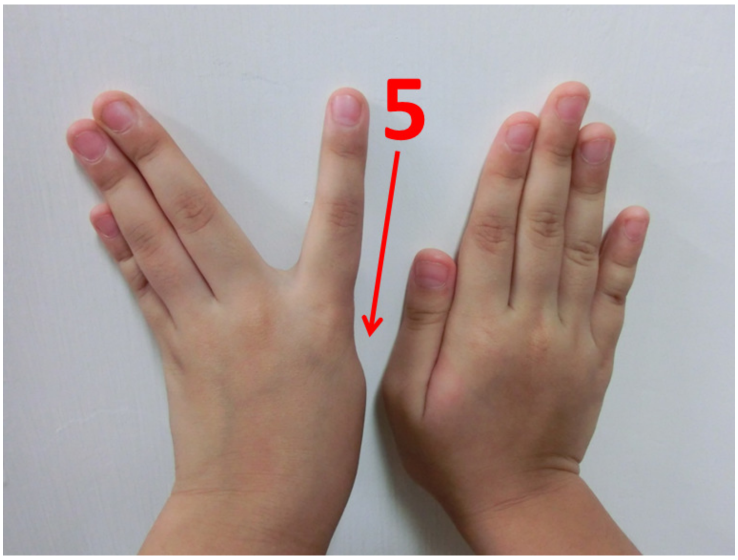
3. 下列是「二位數與 9 相乘的指算法」的計算方式，請先完成「35×9」的計算，並接著回答下列問題：

步驟 1：先選取一個兩位數（十位數必須小於個位數）作為被乘數，如此題中的 35；

步驟 2：再伸出十指併攏，由左而右分開被乘數的十位數字的手指數，此題因十位數的數字為 3，故分開左手前 3 指產生空隙（如下圖(5)）；

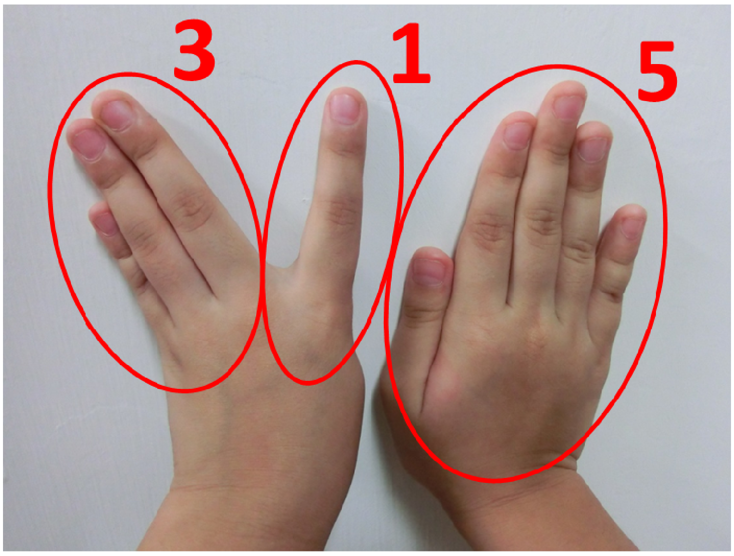
圖（5）　被乘數十位數字示意圖

步驟 3：扳下被乘數個位數的手指，此題扳下第 5 指，呈現下圖(6)的結果；



圖(6)　被乘數個位數字示意圖

步驟 4：由左而右數出分開計算的 3 個數字，分別代表其百位、十位與個位數，此題分別為 3、1 與 5，故其結果為 315（如下圖(7)）。



圖(7)　「二位數與 9 相乘指算法」乘積結果示意圖

(1) 試以上述步驟完成 47×9 的結果，並以心算或直式乘法驗算其結果。

(2) 若以 a 代表被乘數的十位數，b 代表被乘數的個位數，則

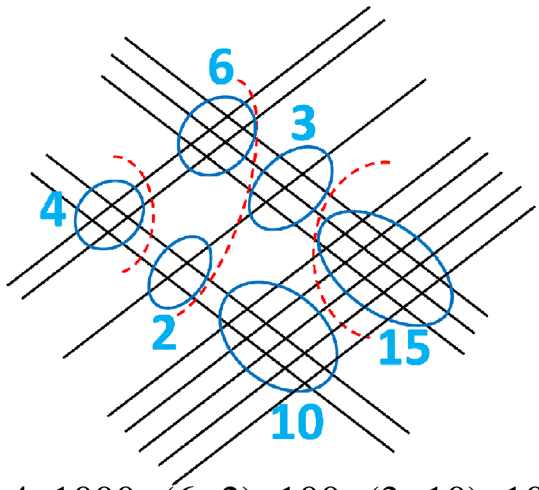
被乘數要如何以 a、b 表示？試將 9 寫成 10-1，計算被乘數×9 的結果並以 a、b 表示。

(3) 請問為什麼要限制被乘數的十位數必須小於個位數？請以上述結果說明其限制。

(4) 請說明為何以此種速算法計算所有的「二位數與 9 相乘的指算法」的結果均正確。

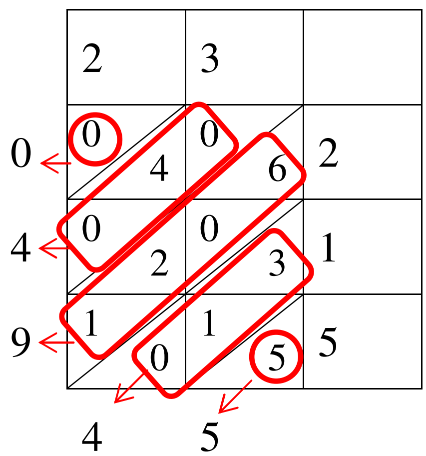
指定作業參考解答：

1. (1) 格柵法：



故其結果為 $4\times1000+(6+2)\times100+(3+10)\times10+15\times1=4945$

(2) 棋盤法：



故其結果為 $4\times1000+9\times100+4\times10+5=4945$

(3)交叉計算：

23×215=4/6+2/10+3/15=4×1000+8×100+13×10+15=4945

與直式乘法結果均相同。

2. 步驟 2：$(5+x)$、$(5+y)$；$25+5x+5y+xy$

步驟 3：使用到乘法分配律的概念；

步驟 4：兩手凹下的手指分別為$(5-x)$、$(5-y)$；

$10(x+y)+(5-x)(5-y)=25+5x+5y+xy$，與步驟 2 的結果相同。

x \ y	6=5+1	7=5+2	8=5+3	9=5+4
6=5+1	x=1, y=1 10 $(x+y)$=20 $(5-x)(5-y)$=16	x=2, y=1 10 $(x+y)$=30 $(5-x)(5-y)$=12	x=3, y=1 10 $(x+y)$=40 $(5-x)(5-y)$=8	x=4, y=1 10 $(x+y)$=50 $(5-x)(5-y)$=4
7=5+2	x=1, y=2 10 $(x+y)$=30 $(5-x)(5-y)$=12	x=2, y=2 10 $(x+y)$=40 $(5-x)(5-y)$=9	x=3, y=2 10 $(x+y)$=50 $(5-x)(5-y)$=6	x=4, y=2 10 $(x+y)$=60 $(5-x)(5-y)$=3
8=5+3	x=1, y=3 10 $(x+y)$=40 $(5-x)(5-y)$=8	x=2, y=3 10 $(x+y)$=50 $(5-x)(5-y)$=6	x=3, y=3 10 $(x+y)$=60 $(5-x)(5-y)$=4	x=4, y=3 10 $(x+y)$=70 $(5-x)(5-y)$=2
9=5+4	x=1, y=4 10 $(x+y)$=50 $(5-x)(5-y)$=4	x=2, y=4 10 $(x+y)$=60 $(5-x)(5-y)$=3	x=3, y=4 10 $(x+y)$=70 $(5-x)(5-y)$=2	x=4, y=4 10 $(x+y)$=80 $(5-x)(5-y)$=1

步驟 5：$5x+5y+xy+25$，$(5+x)\times(5+y)$

步驟 6：計算 6~9 互乘的結果

3. (1) 47×9=423（步驟略）

(2) $10a+b$；$(10a+b)\times(10-1)=100a+10b-10a-b$

(3) $100a+10(b-a)-b$；要確定 $b-a$ 為正數，故被乘數的十位數必須小於個位數；

(4) $100a+10(b-a)-b=100a+10(b-a-1)+(10-b)$，其中 a 為

其結果的百位數，$b-a-1$ 為其十位數，$10-b$ 為其個位數。

八、教學活動注意事項：

1. 教學活動時間建議如下：各活動進行（含隨堂練習）約 20 分鐘（不含課後作業提示），各活動於課堂中可獨立與課程進度搭配進行；若要進行完整課程，建議第一節課進行至活動二，其餘活動則視學生反應進行一節至一節半（指定作業與部分練習可視教學進度提供有興趣學生自行研究）。本單元的教學目的在從速算法特例（活動三）逐漸導至一般例（活動五），並讓學生了解部份速算法的限制（活動一、二），針對較大而複雜的計算，建議學生可以相關方式計算完畢後，以計算器進行驗算。而為避免耽擱教學進度，建議教師可擇部份活動實施，或於非正規課程（如輔導課或社團課）中實施。
2. 活動一、二的介紹，主要討論直式乘法的原理，並比較不同計算方式的差異與優劣性，再與所學的乘法公式作比較討論。
3. 例 3 以及隨堂練習 3 的運算，主要的目的在討論乘法公式的應用與分配律公式的結合，教師可於教學時再加以強調。
4. 教師於例 3 進行完畢後，可視時間補充兩位整數平方的應用或指定題目作為回家作業，例如：$77^2=(77+3)\times(77-3)+3^2$

=80×74+9=5929 的原理說明。

5. 關於活動四、五分別的限制與使用時機，教師可多舉例子說明或請學生示範以確認學生是否真的理解。

6. 教師於活動進行時，可適時介紹因式與倍式的概念，並視教學進度與學生程度適當補充「因式分解」名詞，以及乘積展開與因式分解互逆的概念，以利後續章節的教學(可透過例4與指定作業第2題加以說明比較)。

7. 關於指定作業2、3題中有關「九的指算法」相關知識，教師可再參考網路影片及底下表格進行補充說明：http://www.youtube.com/watch?v=RyD6Xc1-nys。

乘法表	9×1=9	9×2=18	9×3=27	……	9×8=72	9×9=81
凹進去指頭（由左至右）	第1指	第2指	第3指		第8指	第9指
左方指數	0	1	2		7	8
右方指數	9	8	7		2	1

8. 教師於各活動進行完畢後，建議再強調原本所學的直式乘法與乘法公式仍需熟練應用，速算法的介紹只是要瞭解其數學原理並知道其限制才不會誤用。

9. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

10. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上

的獎勵,答錯時另請其他同學作答,再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 普拉地·庫馬原著(2010)。印度吠陀數學速解法(羅倩宜譯)。新北市：世茂出版社。

2. 普拉地·庫馬原著(2012)。印度吠陀數學秒算法(羅倩宜譯)。新北市：世茂出版社。

3. 陳明璋(2011),「屈指算九九」互動教學簡報。未出版

4. 張世宗(2013)。「玩物尚智・魔法科學」簡報。未出版

相關影片： http://www.youtube.com/watch?v=5b8MVZGN2CA

附件一：《納皮爾算籌》請依不同色條垂直剪下共 11 條

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*Napier Bone*
/0	/1	/2	/3	/4	/5	/6	/7	/8	/9	1
/0	/2	/4	/6	/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8	2
/0	/3	/6	/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7	3
/0	/4	/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6	4
/0	/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5	5
/0	/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4	6
/0	/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3	7
/0	/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2	8
/0	/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1	9

修改自：http://www.guokr.com/blog/33564/

主題1－3：畢氏定理

一、授課對象：國中八年級上學期學生　　　　**撰寫者：**李政憲

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　　陳昭地

(一) 乘法公式(含和的平方與差的平方公式)的理解與應用。

(二) 正方形、直角三角形與梯形的認識與面積計算。

(三) 知道三角形的內角和為 180 度。

三、教學目標：

(一) 藉由摺紙與面積的組合，瞭解畢氏定理的解說方式；並能比較不同解說方式的差異性。

(二) 能理解畢氏定理的意義與內容。

(三) 能應用畢氏定理，求出直角三角形的邊長。

(四) 能利用畢氏定理計算坐標平面上兩點距離的平方。

四、教學時間：115 分鐘(二節半)

五、教學說明：

透過不同方式的介紹，使學生理解畢氏定理的由來；進一步能透過定理的理解，計算所給三角形的邊長。

六、教學活動：

子題：畢氏定理解說（一）

活動一：利用摺紙方式理解畢氏定理的由來，並能計算直角三角形的邊長。

教師發放 15cm 色紙，要求學生將色紙白色面朝上，跟隨教師完成底下步驟（可參考附件一簡報，並設色紙背面顏色為綠色）並依序回答問題。教師說明：「這節課我們要利用摺紙方式，理解畢氏定理的解說方式，進一步可利用畢氏定理來計算三角形的邊長。」

步驟 1： 如圖 1，將色紙向左摺出任意線段形成長方形（設左邊的長度為 a，右邊摺入的長度為 b）

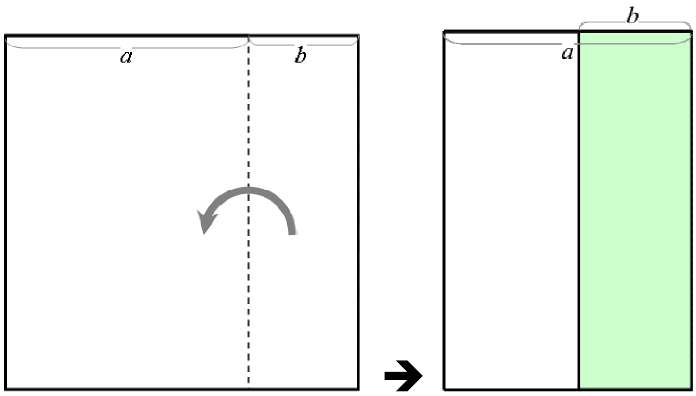


圖 1

提問 1：「請問目前剩餘白色長方形的長與寬分別為多少？」

步驟 2： 如圖 2，將摺進來底下的角向上翻摺

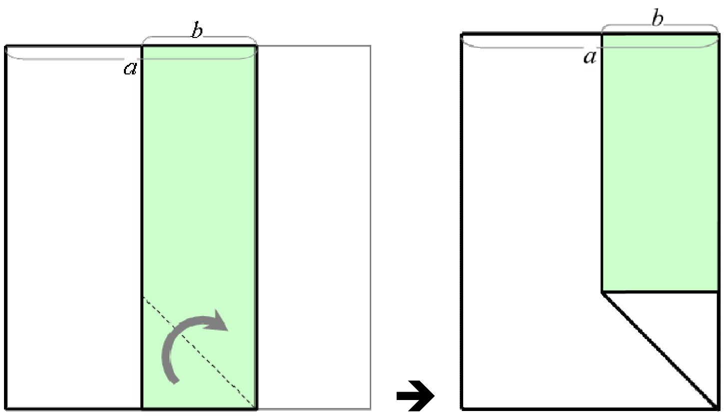


圖 2

提問 2：「請問往上摺後，綠色長方形的面積為多少？」

步驟 3：如圖 3，將摺進來的部分向右翻摺還原

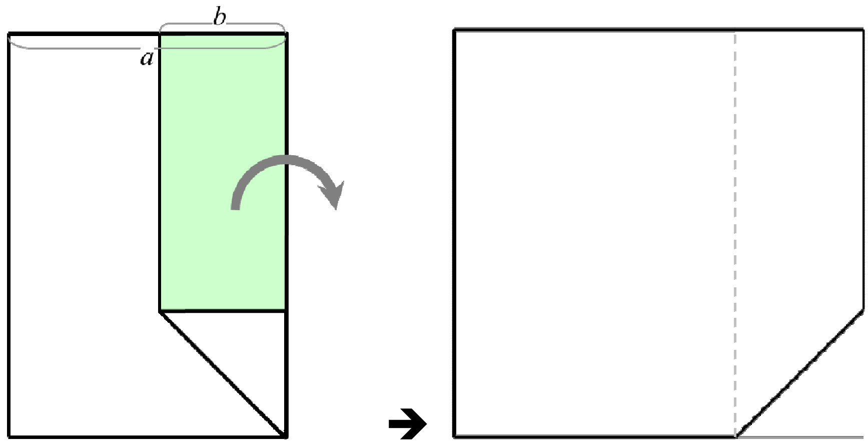


圖 3

步驟 4：如圖 4，摺出圖示摺痕，將直角三角形向內摺。

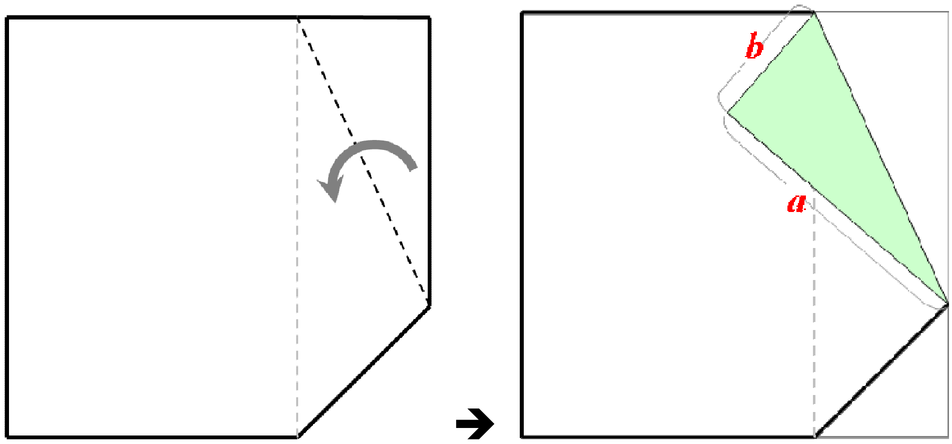


圖 4

提問 3：「請問摺進來的三角形面積為多少？」

步驟 5：如圖 5，摺出圖示摺痕，將直角三角形向內摺，將直角三角形的長股對齊第一次摺出的直角三角形的短股。

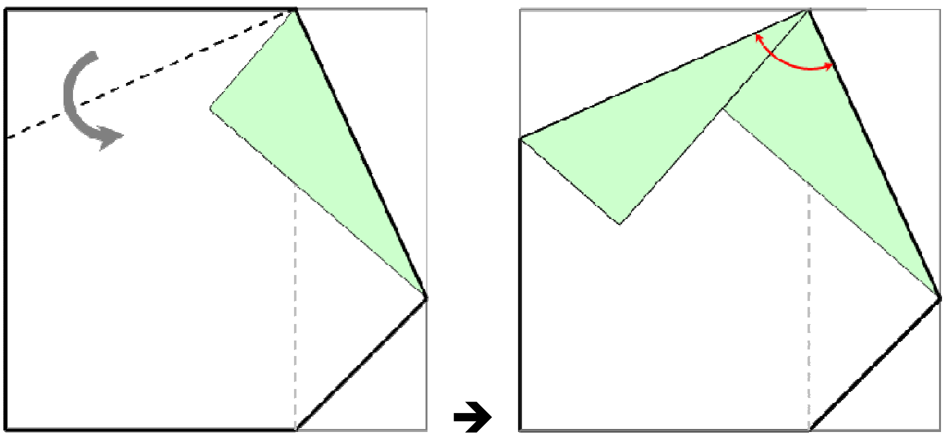


圖 5

提問 4：「請問兩個直角三角形所形成右上方箭號的角度是幾度？」

提問 5：「請問兩個綠色三角形的三個角度是否完全相同？三邊長度呢？」

步驟 6：如圖 6，摺出圖示摺痕，將直角三角形向內摺，長股對齊第二次摺出的直角三角形的短股。

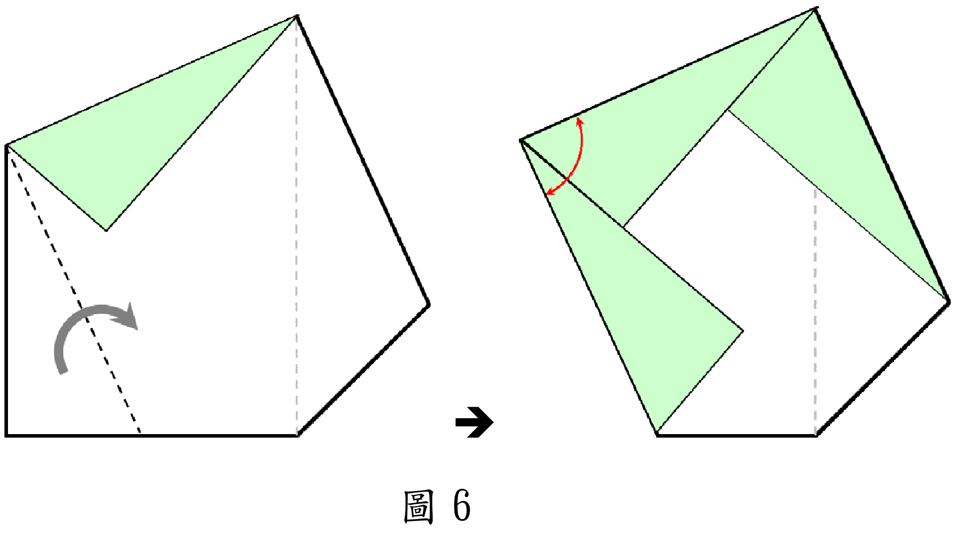


圖 6

提問 6：「請問三個綠色三角形三邊長度是否完全相同？三個角度呢？」

步驟 7：如圖 7，將色紙右下角翻開還原。

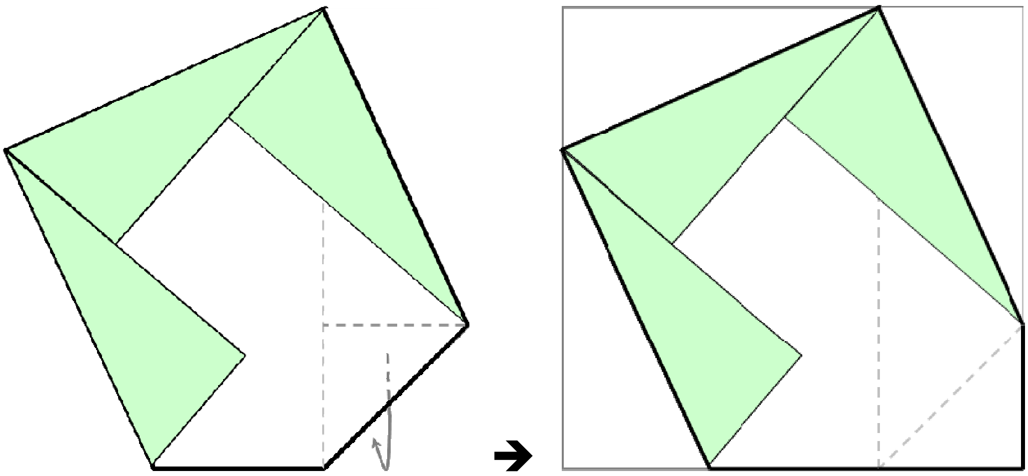


圖 7

步驟 8：如圖 8，將直角三角形向內摺，摺出圖示摺痕，長股對齊第三次摺出的直角三角形短股。

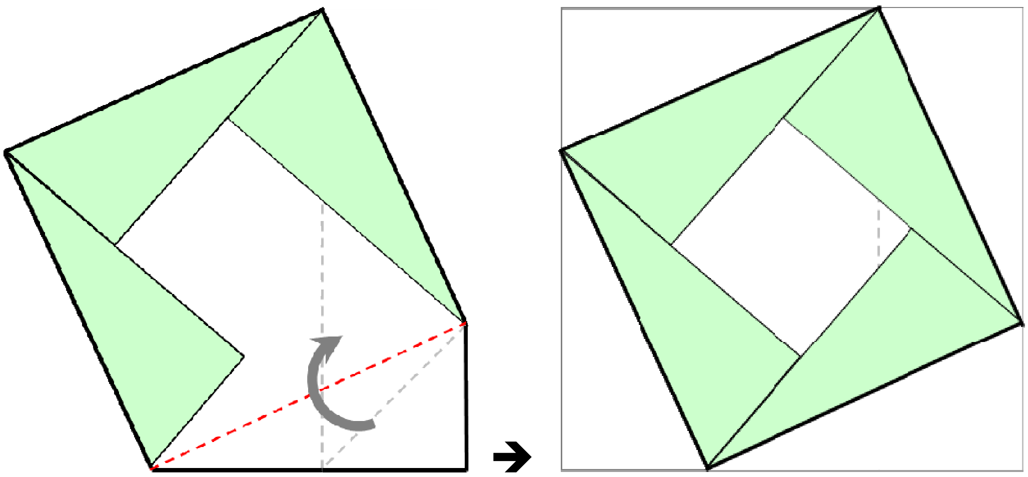


圖 8

提問 7：「請問圖 8 右圖由四個直角三角形斜邊所形成的四邊形是哪種四邊形？為什麼呢？」

提問 8：「請問圖 8 右圖中間白色四邊形是哪種四邊形？為什麼呢？」

提問 9：「請問白色四邊形的邊長與面積分別為多少呢？」

提問 10：「設此時整個正方形的邊長為 c，請列出此時整個正方形、四個小三角形以及中間白色正方形的面積關係？」

步驟 9： 將問題 10 的結果化簡，故我們可以得到直角三角形兩短邊 a、b 及最長邊 c 的關係式為：____________________（如圖 9），此關係式我們稱為「畢氏定理」，是由古希臘數學家畢達哥拉斯所發現的，相傳當時畢達哥拉斯在發現這個定理十分高興，宰殺了百頭牛來慶祝，故又稱為「百牛定理」；而根據周髀算經，中國古代商朝遺老商高也發現了「勾三股四弦五」的關係，其中勾、股分別代表了直角三角形的短股與長股（如圖 9 中的 a 與 b），而弦所指的是直角三角形的斜邊（如圖 9 中的 c），代表的是若直角三角形的兩股分別 3 與 4，則其斜邊必為 5 的結果；故此定理又稱為「商高定理」、「勾股弦定理」或「勾股定理」，因為凡有勾股必有弦，故弦字大多會省略。

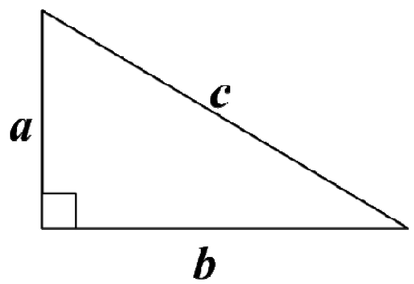
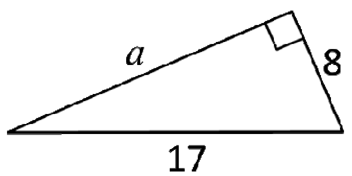
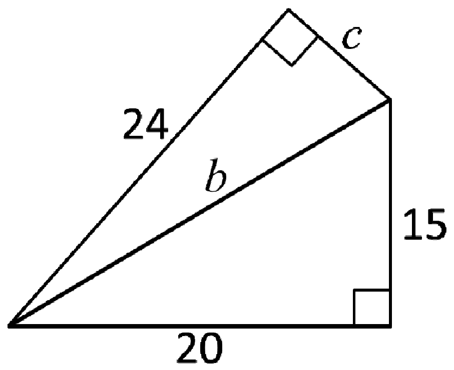


圖 9

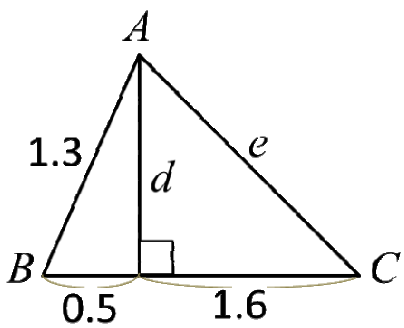
例 1：試利用畢氏定理計算下列三角形所表示的各邊長長度：



(1)

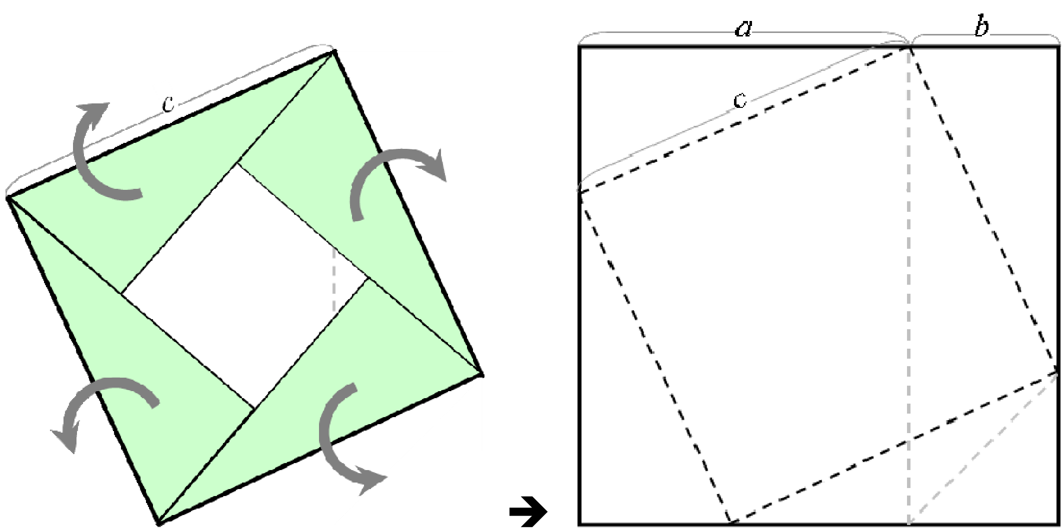


(2)



(3)

隨堂練習 1：如下圖，將活動一完成的正方形中的四個直角三角形外翻，可得右方正方形。試回答下列問題：



(1) 請列出右圖中兩股 a、b 及斜邊 c 的關係，並加以化簡；

(2) 若已知左圖中的白色正方形邊長為$\frac{15}{7}$，右圖整個正方形的邊長為 15，試求：①兩股長 a、b 的值？②左方整個正方形的面積=？

(3) 如圖 9，依活動一說明，可得知直角三角形必符合畢氏定理「$a^2+b^2=c^2$」的結果，即直角三角形的「兩股平方和＝斜邊長的平方」，事實上凡符合「兩股平方和＝斜邊長平方」的三角形，必為直角三角形；亦即「直角三角形⇔符合畢氏定理」。試利用此結果，判別例 1（3）的三角形 ABC 是否為直角三角形，並說明其原因。

結論：

(一) 凡是直角三角形，必符合「兩股平方和＝斜邊長的平方」，我們稱此結果為「畢氏定理」(如圖 9 之說明)，反之亦然。

(二) 我們可透過畢氏定理，計算直角三角形的各邊長度。

(三) 如活動一暨例 1 中的直角三角形各邊長，形如（3,4,5）、（8,15,17）、（7,24,25）、（15,20,25）三邊長均為自然數的直角三角形所形成的數對，我們稱為「畢氏三元數組」，一般的排列方式為由小到大，即（短股,長股,斜邊），常用的畢氏三元數組尚有（5,12,13）與（9,40,41）等。

活動二：介紹畢氏定理的不同解說方式，進一步可透過動態幾何軟體（GSP）的操弄，理解畢氏定理的其他幾何意義。

步驟 10：如圖 9，三角形 ABC 與三角形 CDE 為一模一樣的兩個直角三角形，兩股邊長為 a、b，斜邊長度為 c，且 C 在直線 BD 上。

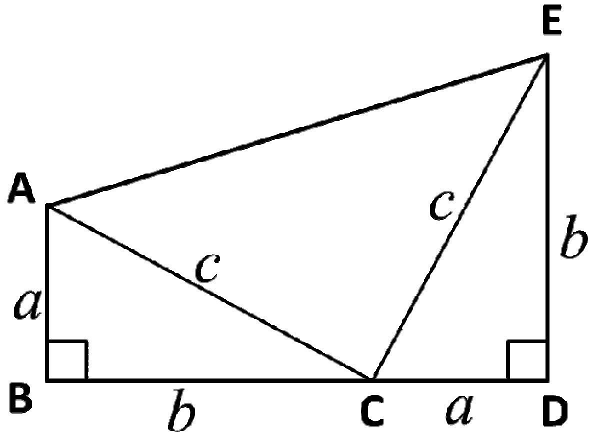


圖 9

提問 11：「請說明三角形 ACE 為等腰直角三角形的原因。」

提問 12：「請問四邊形 ABDE 是什麼四邊形？面積是多少？」

提問 13：「將四邊形 ABDE 分成三個三角形，請列出三個三角形的面積和。」

步驟 11：利用提問 12、13 的結果加以化簡，我們可以得到直角三角形兩股 a、b 及斜邊 c 的關係式為：_____________；這個證明方式是美國第二十屆總統 James Abram Garfield(1831～1881)於 1876 年在擔任眾議員時，有次獨自喝咖啡對著壁爐板發呆，靈感一來所發現的，而且還發表在《新英格蘭教育》雜誌上，可見連總統也對

畢氏定理有著極大的興趣，無怪乎它被 17 世紀的德國科學家開普洛（Johannes Kepler，1571~1630）稱為幾何學的兩個寶藏之一了。想想看，圖 9 與隨堂練習 1 的右圖有何關係？

例 2：觀察圖 10，試回答下列問題：

圖 10

(1) 你覺得中間的三角形是哪一種三角形？為什麼呢？

(2) 請問這張郵票在解釋哪一個數學定理？為什麼呢？

(3) 如圖 11，已知三角形 ABC 為直角三角形，且甲、乙、丙均為正方形，且丙的面積<甲的面積。若已知三個正方形，有兩個的面積分別為 5 與 12，試求第三個正方形的面積是多少？

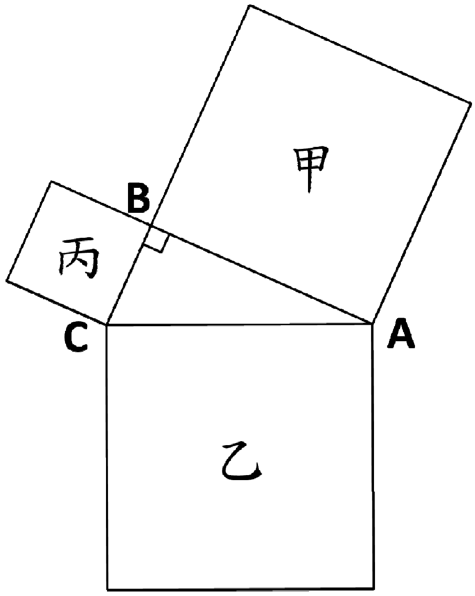
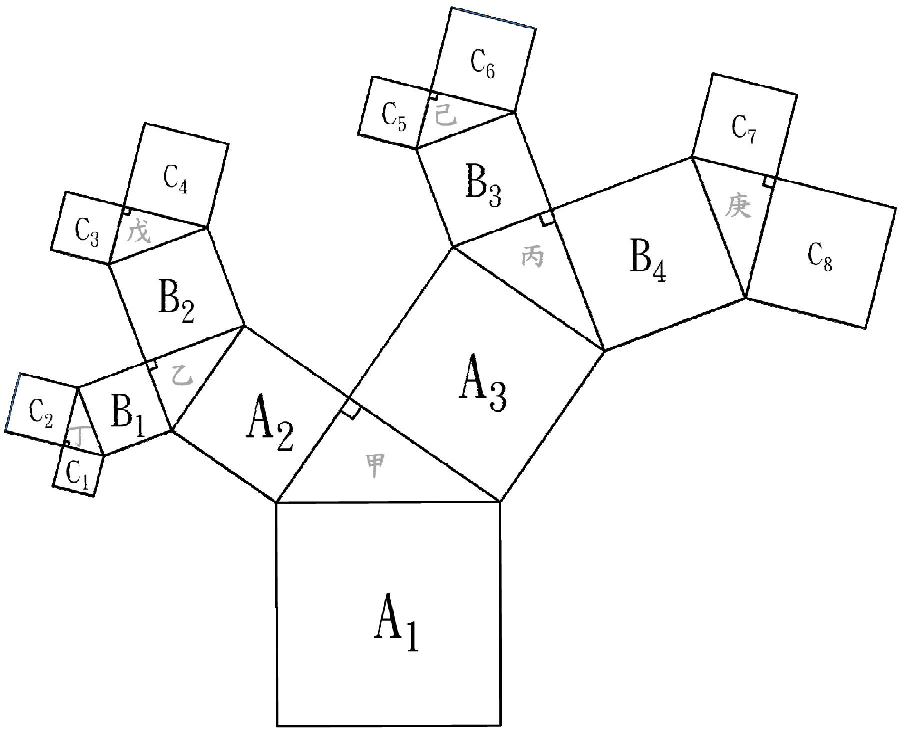


圖 11

隨堂練習 2：如下圖，其中甲～庚的三角形均為等比例縮小的直角三角形，且其餘矩形均為正方形，且此圖形稱為「畢氏樹」，共計 A、B、C 三層。試回答下列問題：



(1) 請問圖中共有幾個直角三角形？幾個正方形？

(2) 若 A_2、A_3 的邊長分別為 3、4，請問 A_1 的面積為多少？

(3) 承上題，求面積和：$B_1+B_2+B_3+B_4$ 與 $C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots+C_8$ 分別是多少？

(4) 若改繪製五層的畢氏樹，請問共有幾個直角三角形？共有幾個正方形？

(5) 試操作附件三中的動態幾何數位檔案，確認結果是否正確。

結論：

(一) 關於「畢氏定理」，除了活動一、二的說明方式外，尚有許多不同的方式，且部分方式的概念有其關聯性，有興趣的讀者不妨自行上網查閱相關資料。

(二) 畢氏定理除了可以計算直角三角形的各邊長度外，尚可利用直角三角形「兩股平方和＝斜邊長的平方」的結果，分別於直角三角形的三邊上繪製正方形，且兩股上的正方形面積和=斜邊上的正方形面積。

(三) 利用第(二)點結論我們可繪製「畢氏樹」，並以動態幾何驗證其結果的正確性。

(四) 如例 2 中的第(3)小題，當我們無法確定所給數據分別為兩股或斜邊時，需考量到不同的方式作計算；且面積為 5 或 12 的正方形，邊長為一個不循環的無窮小數，我們稱為「無理數」；有關無理數的討論，我們將在第 2 單元有更詳細說明。

活動三：畢氏定理應用（一）

例 3：如圖 12，底下我們要討論的是著名的「希波克拉底斯（Hippocrates）月牙形面積問題」，主要在討論以直角三角形三邊為直徑各作一個半圓，斜線部份所產生的月牙形（或稱半月形）面積的計算方式。試依序回答下列問題：

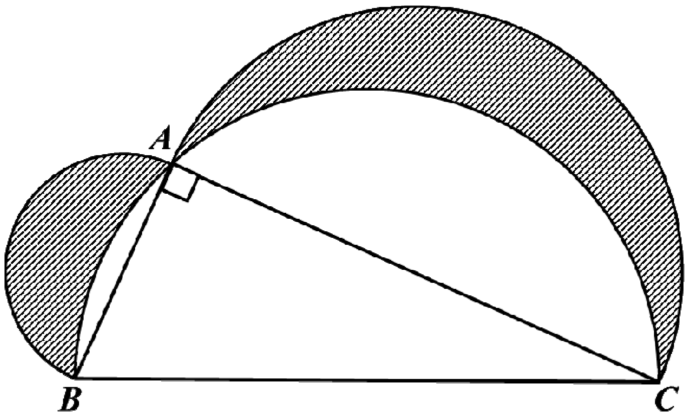


圖 12

(1) 已知兩股長$\overline{AB}$與$\overline{AC}$分別為 10 與 24，請計算以$\overline{BC}$為直徑的白色半圓面積為多少？

(2) 試計算圖 13 的三個半圓面積，是否仍符合畢氏定理？（即兩小半圓的面積和=大半圓的面積）

(3) 如圖示三角形 ABC 的直角 A 點必在白色半圓上，試利用上述(1)、(2)的結果，推算兩個月牙形的面積和。

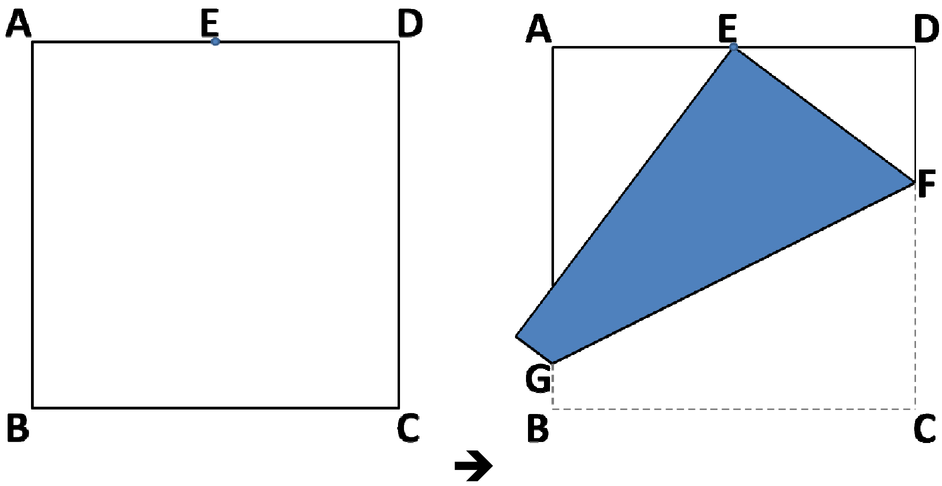
隨堂練習 3：如下頁左圖，ABCD 為邊長 15cm 的正方形色紙，且 E 點為上方$\overline{AD}$的中點。若將右下角 C 點摺至 E 點如下頁右圖，且$\overline{FG}$為其摺痕。請依序回答下列問題，

以計算所產生各邊的長度：

(1) 設$\overline{DF}$的長度為x，則$\overline{EF}$的長度=________，試以畢氏定理列出△DEF三邊長的關係式：________________；

(2) 解出(1)中的x值=_______，故可得知△DEF三邊長的比例為______________（請化為最簡整數比）；

(3) 若改將右下方C點分別摺至上方$\overline{AD}$距A點的$\frac{1}{3}$與$\frac{2}{3}$處，則所得到的△DEF三邊長的比例分別為______________與______________（請化為最簡整數比）。



活動四：畢氏定理應用（二）

利用畢氏定理，計算坐標平面上「兩點距離的平方」。

例4：利用畢氏定理，我們可以計算有關坐標平面上兩點距離的關係，如圖13，在坐標平面上，A、B兩點坐標分別為(2,3)及(6,6)，請依下列步驟計算A、B兩點距離：

(1) 分別自 A、B 兩點作 x、y 軸的平行線交於 C 點，

故△ABC 必為________三角形，因此我們計算 $\overline{AC}$ 兩點的

距離=_________=4（請寫出算式），故 $\overline{BC}$ 兩點的距離

=_________=3；

(2) 根據畢氏定理，我們可得知△ABC 三邊長的關係為：

____________________，經計算可得 $\overline{AB}^2$=________，故 A、B 兩

點的距離為_________。

(3) 試以 A 點向上作 y 軸的平行線，B 點向左作 x 軸的平行線，

請問計算出 A、B 兩點的距離是否相同？

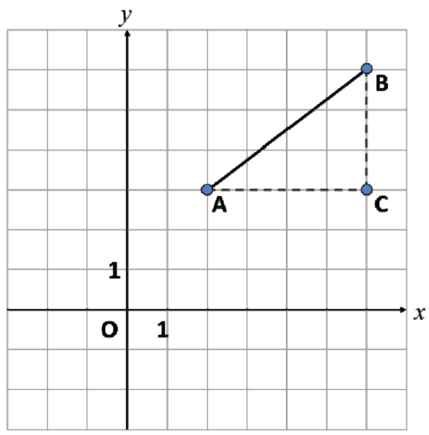


圖 13

隨堂練習 4：在坐標平面上，已知 A、B、C 三點的坐標分別為(0,0)、(2,3)與(-3,2)，請依序回答下列問題：

(1) 分別計算 $\overline{AB}^2$、$\overline{BC}^2$ 與 $\overline{AC}^2$ 的值。

(2) 請問△ABC 是____________三角形，請列出三邊的關係式以說明你的理由。

例 5：李老師在數學課介紹完畢氏定理後，融融對於作業有一題計算長方體上 A 點到 B 點的最短距離（如圖 14）的題目不會計算，於是下課前往請教老師。結果老師到合作社買了兩個三明治跟融融解釋，請依老師的解釋完成下列問題：

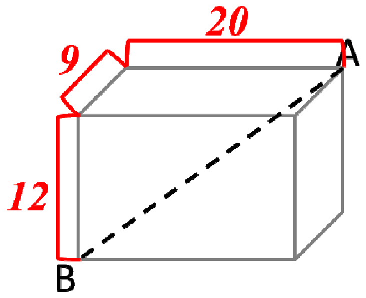


圖 14

圖 15

「首先我們把兩個三明治拼在一起（如圖 15），妳發現此時整個形狀是哪一種立體圖形？是不是與你要計算線段的圖形相同呢？」

「假設這個形狀的長、寬、高分別為 a、b、c，要計算 A 點到 B 點最短距離的長度為 d（如圖 16），接著我們拿出一個三明治，從這個三明治上方觀察（如圖 17），妳發現這個俯視圖是________三角形，恰可使用我們學過的畢氏定理；兩股 a、b 與斜邊 e 的關係式為_______________。」

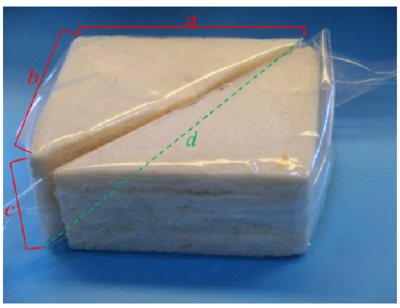


圖 16

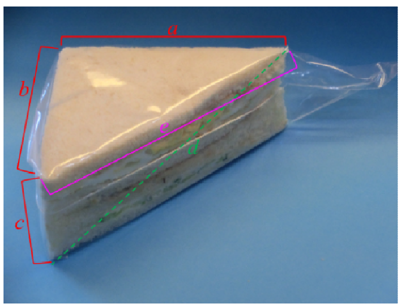


圖 17

「最後我們再看這個三明治的側面（如圖 18），妳發現是一個________形，妳要算的兩點距離 d 是它的__________，故 d 與兩股 e、c 的關係式為__________，整理上面兩個關係式，我們就可以得出 a、b、c、d 的關係：____________________，也就是妳只需要測量長方體的長、寬、高，就可以算出它內部對角線的長度囉！」

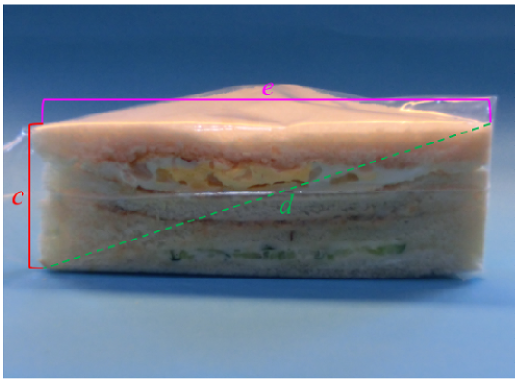


圖 18

隨堂練習 5： 請利用例 5 的關係式，計算融融原本要計算 A 點到 B 點的最短距離。

結論：

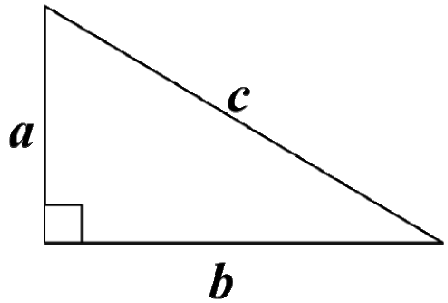
(一) 我們可利用畢氏定理進行計算邊長或面積的應用，例如例 3 及例 4 的希波克拉底斯月牙形面積問題、摺紙計算邊長問題與坐標平面上計算兩點距離平方的問題。

(二) 已知坐標平面上兩點 A(a,b)、B(c,d)，可透過畢氏定理以計算 A、B 的距離平方：$\overline{AB}^2=(a-c)^2+(b-d)^2$，且如果 $\overline{AB}^2$ 計算出來的值為一完全平方數，則可直接算出 $\overline{AB}$ 的值（如例 4 的結果）。

(三) 已知長方體的長、寬、高分別為 a、b、c，且內部對角線的長度（即最遠的兩頂點距離）為 d，則 $d^2=a^2+b^2+c^2$。

活動五：（總結論）

(一) 凡是直角三角形，必符合「$a^2+b^2=c^2$」，其中 a、b 為其兩股長，c 為其斜邊長，稱為「畢氏定理」。



(二) 我們可透過畢氏定理與常見的畢氏三元數組如（3,4,5）、（8,15,17）、（7,24,25）、（5,12,13）與（9,40,41）等，以計算直角三角形的各邊長度。

(三) 若於直角三角形的三邊分別向外繪製正方形，則兩股的正方形面積和=斜邊的正方形面積。

(四) 我們可利用畢氏定理計算多邊形的邊長或面積。

(五) 已知坐標平面兩點 A(a,b)、B(c,d)，可透過畢氏定理以計算 A、B 的距離平方：$\overline{AB}^2=(a-c)^2+(b-d)^2$。

(六) (長方體內部對角線長度)^2=長^2+寬^2+高^2。

教學活動參考解答：

活動一：

提問 1：長為 $a+b$，寬為 $a-b$

提問 2：面積為 ab，

提問 3：面積為$\frac{1}{2}ab$

提問 4：90 度（可透過附件一簡報動畫對照說明）

提問 5：角度與長度均相等，

提問 6：角度與長度均相等，

提問 7：正方形，因為四邊等長且四個角均為直角，

提問 8：正方形，因為四邊等長（$a-b$）且四個角均為直角，

提問 9：邊長為 $a-b$，面積為$(a-b)^2$，

提問 10：$c^2=(a-b)^2+4\times\frac{ab}{2}$。

步驟 9：$a^2+b^2=c^2$（或 $c^2=a^2+b^2$）

例 1：(1) $8^2+a^2=17^2$，$a^2=225$，$a=15$ 或-15（邊長必為正數，故

-15 不合），故取 $a=15$

(2) $15^2+20^2=b^2$，$b=\pm25$（負不合），故 $b=25$；

$c^2+24^2=25^2$，$c=\pm7$（負不合），故 $c=7$。

(3) $d=\pm1.2$（負不合），$e=\pm2.0$（負不合）

隨堂練習 1：(1) $(a+b)^2=c^2+2ab$，化簡得：$a^2+b^2=c^2$

(2) ① $a+b=15$，$a-b=\frac{15}{7}$，解得 $a=\frac{60}{7}$，$b=\frac{45}{7}$

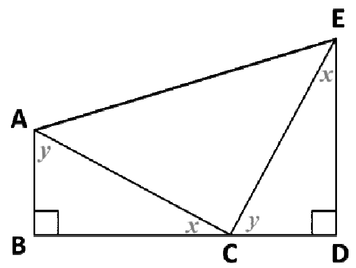
② $c^2=a^2+b^2=(\frac{60}{7})^2+(\frac{45}{7})^2=\frac{5625}{49}$

亦可透過 $c^2=(a-b)^2+2ab$ 計算

(3) 否，因為 $1.3^2+2.0^2\neq 2.1^2$

活動二：

提問 11：如下圖，因為 2x+2y=360°−180°（∵兩個三角形的內角和均為 180°）➔$x+y=90°$，即∠ACE 為 90 度，又 $\overline{AC}=\overline{CE}$，故三角形 ACE 為等腰直角三角形。



提問 12：直角梯形，面積為 $\frac{(a+b)^2}{2}$

提問 13：$\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}$

步驟 11：$\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}$，故 $a^2+b^2=c^2$

圖 9 恰為隨堂練習 1 右圖面積的一半

例 2：(1) 直角三角形，因為三邊長分別為 3、4、5， $3^2+4^2=5^2$

符合畢氏定理

(2) 畢氏定理，因為兩股上的正方形面積和恰為斜邊上的正方形面積。

(3) 若丙=5，乙=12，則甲=7；若丙=5，甲=12，則乙=17。故第三個正方形的面積為 7 或 17。

隨堂練習 2：(1) 直角三角形：7 個，正方形：15 個。

(2) $5^2=25$ 。

(3) $B_1+B_2+B_3+B_4=25$，$C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots+C_8=25$

(4) 直角三角形：1+2+4+8+16=31 個，正方形：1+2+4+8+16+32=63 個。

(5) 略。

活動三：

例 3：(1) $\overline{BC}=26$，以 $\overline{BC}$ 為直徑白色半圓面積=$\dfrac{13^2\times\pi}{2}$=$\dfrac{169\pi}{2}$

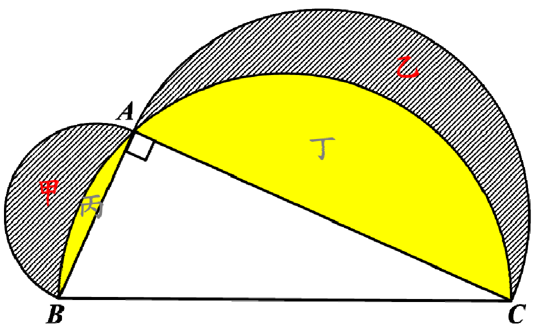
(2) 是（$\dfrac{25\pi}{2}+72\pi=\dfrac{169\pi}{2}$）。

(3) 如下圖，因半圓 AB+半圓 AC=半圓 BC

故甲＋丙＋乙＋丁＝丙＋△ABC＋丁

➔甲＋乙＝△ABC

故兩個月牙形的面積和＝$\dfrac{10\times 24}{2}$=120



隨堂練習 3：(1) $15-x$，$(15-x)^2=x^2+(\frac{15}{2})^2$

(2)$\frac{45}{8}$，3:4:5　　(3) 3:4:5，5:12:13

活動四：

例 4：(1) 直角，6-2，6-3

(2) $3^2+4^2=\overline{AB}^2$，$\overline{AB}=5$　(3) 距離相同

隨堂練習 4：(1) $\overline{AB}^2=13$，$\overline{BC}^2=26$，$\overline{AC}^2=13$

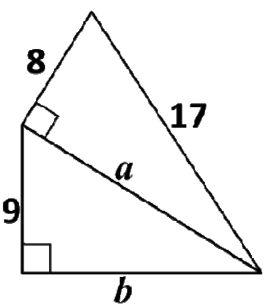
(2) 直角，因為$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$。

例 5：長方體，是；直角，$e^2=a^2+b^2$；長方，對角線，$d^2=c^2+e^2$；$d^2=a^2+b^2+c^2$

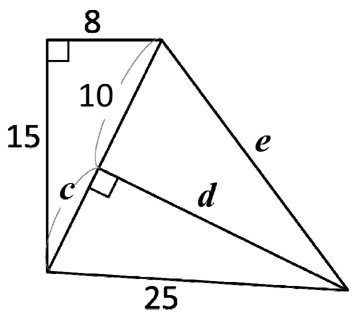
隨堂練習 5：$\overline{AB}^2=9^2+12^2+20^2=625$，故 A 點到 B 點的最短距離=25。

七、指定作業：

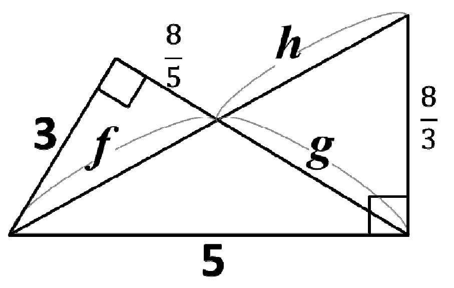
1. 如圖所示，請計算下列三角形各邊所表示的長度：



(1)

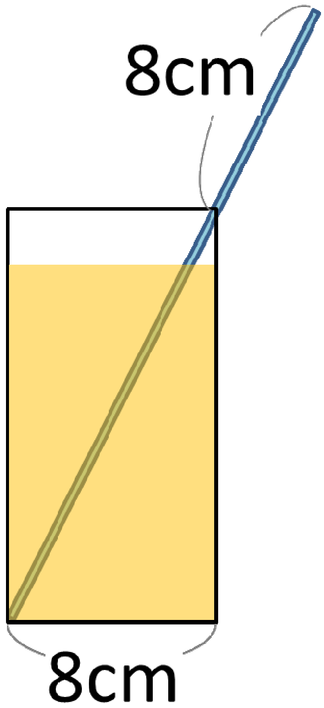


(2)

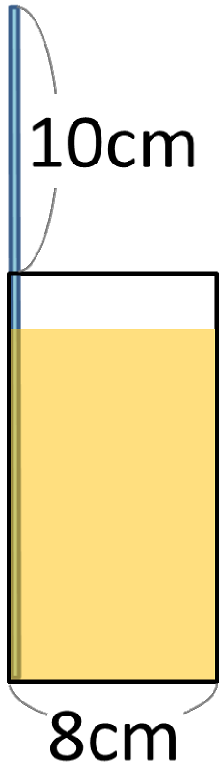


(3)

2. 小臻到飲料店點了杯 700c.c. 的柳橙汁內用，在店員送來後她覺得裏面的容量似乎不足，於是決定利用數學進行計算：



圖①



圖②

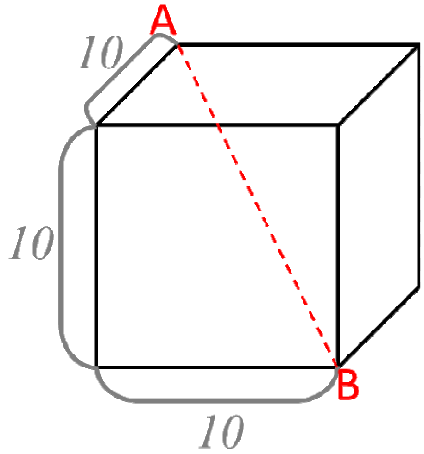
(1) 將吸管斜插入杯子內抵住杯緣，從側面看如圖①，測得吸管露出杯外的長度與圓形杯口的直徑皆為 8 公分；

(2) 接著將吸管直立，發現此時吸管露出杯外的長度恰為 10 公分（如圖②）；

(3) 觀察杯子內的柳橙汁，大約占杯子容積的九分滿（即 90%）。若 $1\text{c.c.}=1\text{cm}^3$，且杯子的容積=底圓面積×高，試利用上面的敘述，分別計算吸管長度、杯子的容積與實際的柳橙汁的 c.c.數。（圓周率 π 以 3.14 作計算）

3. 如下圖，已知正方體的內部邊長為 10，試求其內部對角線 A

到 B 點距離的平方（即$\overline{AB}^2$）。



指定作業參考解答：

1. (1) a=25, b=12，(2) c=7, d=24, e=26，(3) $f=\dfrac{17}{5}$，$g=\dfrac{12}{5}$，$h=\dfrac{34}{15}$。

2. 設吸管直立時與杯子貼齊部分長度為 x，

   則 $(x+2)^2=x^2+8^2$，故 $x=15$，吸管長度=15+10=25（公分）

   故杯子容量=4×4×π×15≒753.6(cm^3)

   實際柳橙汁=753.6×0.9=678.24(c.c.)

3. $\overline{AB}^2=10^2+10^2+10^2=300$

八、教學活動注意事項：

1. 教學活動時間建議如下：各活動進行（含隨堂練習）約 25~30 分鐘（含課後作業提示），各活動於課堂中可獨立與課程進度搭配進行；若要進行完整課程，建議第一節課進行至活動二，

其餘活動則視學生反應進行一節課（指定作業與部分練習可視教學進度提供有興趣學生自行研究)。

2. 關於活動一的進行，建議教師於黑板上放置大張正方形書面紙或以教學簡報（附件一）搭配教學；另外提問 4 可透過簡單的二元一次方程式化簡得其結果，且此處因利用了三角形的內角和為 180 度的概念，若學生的先備知識不足，教師宜先複習再進行提問；至於三角形完全相同的概念，則可利用兩相等角夾相等邊的說明，並搭配教學簡報輔助說明，效果則會更佳。步驟 5 以後的長短股、斜邊等名詞意義教師可簡要說明，至於進行提問 7 前，若時間允許，教師可加問「請問第四次直角三角形短股是否會對齊第一次直角的長股？四個三角形是否會完全相等？」等問題。
3. 關於商高在內文中的介紹，由於商高是傳說人物，但史家無法證明他的存在，故一般以畢氏定理（說明其一般性的第一人）或勾股定理（說明其結果）稱之，教師可於教學時再作補充。
4. 例 1 的計算中，結果為正負值的概念教師應加以說明（但不必特別強調與要求)，以利後續平方根的學習。
5. 隨堂練習 1 的第 2 題計算與思考較複雜，教師可加以提示；另外第 3 題為畢氏定理的逆應用，教師直接告知其結果即

可，後續章節將有其說明的討論。

6. 活動二的步驟 11 教師可由圖形與算式加以提示圖 9 與圖 10 的關係。
7. 例 2 除畢氏定理的逆應用外，尚要提醒學生已知兩邊求第三邊不同情形需作討論。
8. 隨堂練習 2 的(1)、(4)小題教師可適度引導學生發現其規律，另外面積和維持固定的結果可透過動態幾何（GSP）檔案進行確認。
9. 關於活動二結論（四）提到「不循環的無限小數」，教師可以國小學過的圓周率 π 舉例說明並解釋。
10. 教師可鼓勵學生列式並利用等量公式將例 3 的結果導出，並適度說明只要兩股與斜邊上的形狀相似，便可符合畢氏定理，並以動態幾何計算其結果以輔助說明。
11. 隨堂練習 3 關於摺紙計算邊長問題，當所摺位置與色紙邊長的比值為一分數時，則所產生的三角形的邊長比必為畢氏三元數，而其邊長比的關係，可至主題 1－4 作進一步討論與比較。
12. 活動四因學生缺乏無理數概念，僅需以兩股長平方和=斜邊長的平方，再計算坐標上兩點距離平方（若為完全平方數則可進一步計算其長度)或藉其結果進行直角三角形的判別即可。
13. 教師在引導學生計算例 5 時，可盡量引導學生自行推出公式：

「長方體對角線 ^{2}=長 ^{2}+寬 ^{2}+高 ^{2}」的結果，並於無理數介紹後再熟練其長度的計算並適度補充蜜蜂與螞蟻問題（此題設計為蜜蜂問題）。

14. 指定作業第 2 題，教師可於檢討完畢後，與學生討論「是否有其他方式進行估算？」以引導出亦可直接計算液面高度以求實際柳橙汁的 c.c.數。
15. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
16. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. (以)馬奧爾原著(2010)。勾股定理：悠悠 4000 年的故事(馮速譯)。大陸北京：人民郵電出版社。
2. Elisha S. Loomis(1968).The Pythagorean Proposition. The National Council of Teachers of Mathematics.

3. 有關本文相關摺紙與數學相關數位檔案，請至新北市林口國中數學科網站（林中生命藝數殿堂）查詢：
   http://163.20.9.8/dyna/menu/index.php?account=math
4. 關於本文相關畢氏定理的解說及其應用，有興趣研究的讀者可至底下網站再作查詢：

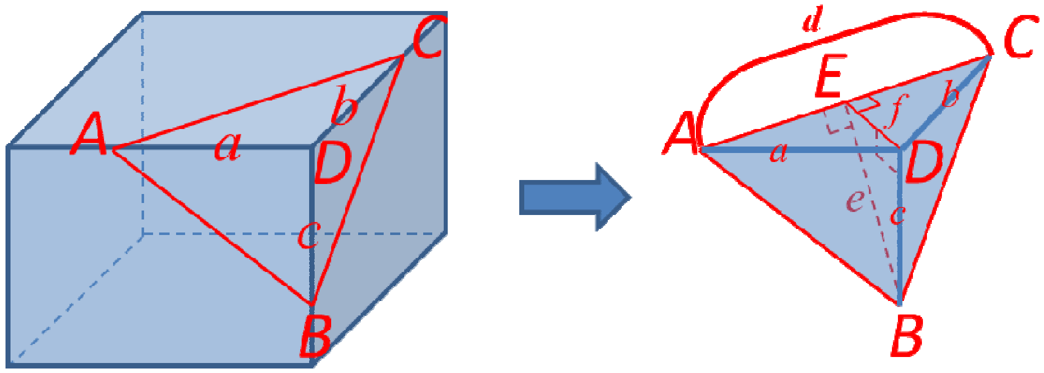
http://tw.myblog.yahoo.com/jw!nsINCsSeFR5G4LWXgf02wg--/article?mid=9296

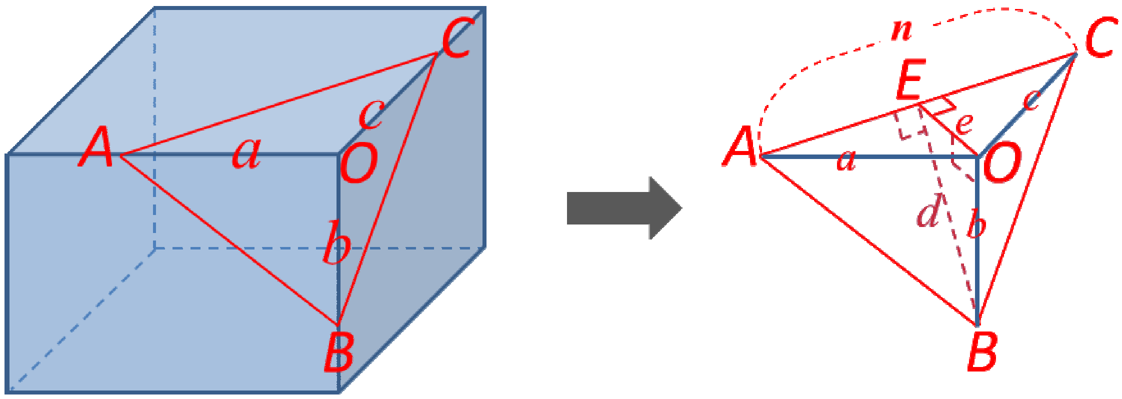
http://www.hbjy88.com/Article/ShowArticle.asp?ArticleID=20661

http://agutie.homestead.com/files/pythagoras/lunes_hippocrates_area_01.htm

http://www.fivedream.com/page1.aspx?no=221249&step=1&newsno=28251

5. 若教學時間允許，教師可視學生程度再補充底下公式（本資料由台北市石牌國中蘇進發老師提供）：





如上圖，在長方體上切割一塊三角錐，且在三邊上所切割出的線段長分別為 a、b、c，且所切割出的面為△ABC。

則 $\Delta ABC^2 = (\frac{nd}{2})^2 = \frac{n^2d^2}{4} = \frac{n2(b^2+e^2)}{4}$ （∵△BOE 為直角△）

$$=\frac{n^2b^2+n^2e^2}{4}=\frac{(a^2+c^2)b^2+n^2e^2}{4}$$ （∵△ACO 為直角△）

$$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+n^2e^2}{4}=\Delta ACO^2+\Delta ABO^2+\Delta BCO^2$$

主題1－4：畢氏三元數組

一、授課對象：國中八年級上學期學生　　　　**撰寫者：**李政憲

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　陳昭地

(一) 知道自然數可分為奇數與偶數。

(二) 知道兩自然數最大公因數是1為互質，並知道三自然數之最大公因數是1為互質。

(三) 知道自然數組（a，b，c）滿足$a^2+b^2=c^2$者，為畢氏三元數組，並知道（3，4，5），(5，12，13)，（7，24，25），(6，8，10)，(10，24，26)，（14，48，50）都是畢氏三元數組。

(四) 知道二自然數整除的概念，並知道質因數分解的方法。

(五) 知道和的平方公式及平方差公式。

(六) 知道完全平方數。

三、教學目標：

(一) 能瞭解本原畢氏三元數組（a，b，c）的意涵，並由其中一種生成公式列舉出內文不曾出現的六組本原畢三元數組。

(二) 能瞭解本原畢氏三元數組（a，b，c）之生成公式 $a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$ 中自然數m、n的條件。

(三) 能發現並說明本原畢氏三元數組（a，b，c）中，a，b，

c三數之中恰有一數字是3的倍數，另有一數字是5的倍數，再有一數是4的倍數；且abc必為60的倍數。

(四) 瞭解（3，4，5）為唯一一組連續自然數的本原畢氏三元數組。

(五) 能瞭解奇數的平方被4除，餘數一定是1。

(六) 能瞭解三角形數與其規律。

四、教學時間：90分鐘(二節課)

五、教學說明：

(一) 對已學過畢氏定理（商高定理、勾股定理）的學生，先複習畢氏三元數組（a，b，c）之定義：a，b，c都是自然數且$a^2+b^2=c^2$後，提問下列三組自然數，填出或說出橫線中的數字。

(1)（3，4，____）

(2)（5，____，13）

(3)（7，____，____）

(二) 學生應能填出第一組的正確數字，大多數也能完成第二組而可能會填第三組者為少數；如果都會填出正確的數字再提出填出另一組(4)（11，____，____）這時學生可能會一籌莫展，落入困境，藉此引出學習本單元主題的學習動機。

(三) 畢氏三元數組出現得比畢氏定理還早；畢氏定理至今至少有 300 多種的說明方式，有難有易是學習數學的主角，而畢氏三元數組甚或本原畢氏三元數組更是整數中的琦寶。

(四) 本單元數學重點在於由本質畢氏三原數組（a，b，c）的定義中尋找出一組生成的公式：$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$（其中 m、n 互質，$m>n\geq 1$ 且 m、n 一奇一偶，即奇偶性相反）。

(五) 能由列出一系列的本原畢氏三元數組中，引導發現：恰有一數是 3 的倍數，另一數為 5 的倍數，再一數為 4 的倍數，於是其乘積必為 60 的倍數。

(六) 務必審慎提出本單元主題的總結論，評估學生的瞭解程度，指定相關作業讓學生或者在課堂演練，或者利用課後時間完成繳交並作檢討的工作，以增強完成本單元主題的學習目標。

六、教學活動：

活動一：溫故知新（回憶畢氏三元數組，引進本原畢氏三元數組）

步驟 1：請問下列各組三元數組（a，b，c）有無 $c^2=a^2+b^2$ 的關係？

（2，3，4），（3，4，5），（5，12，13），（6，8，10），

（9，12，15），（10，24，26），（13，14，15）

最大公因數是 1，a、c是互質；同理b、c的最大公因數是 1，b、c也是互質。

步驟 8：再檢查步驟 6 的三組本原畢氏三元數組（a，b，c）前二個較小的自然數a、b之間的奇偶數分布狀況，你有什麼發現？

__________________；你同意這個奇偶規律對一般的本原畢氏三元數組（a，b，c）都成立嗎？____________

（在橫線上打∨表示同意，打 × 表示不同意。）

步驟 9：步驟 8 的答案是肯定的，也就是a、b二數必然一奇一偶，理由如下：

(1) 如果都是偶數，則a^2+b^2也是偶數，c^2是偶數，c必然是偶數，此時最大公因數（a，b，c）≥2>1 違反最大公因數（a，b，c）＝1 的規定。因此a、b不可能同時是偶數。

(2) 再由一個奇數的平方除以 4 的餘數一定是 1，理由：所有的奇數均可假設為$2k+1$，且$(2k+1)^2=4k(k+1)+1$，即此數除以 4 的餘數為 1，同樣另一個奇數平方除以 4 的餘數也是 1，所以二個奇數的平方和除以 4，餘數一定是 2 而不是 4 的倍數，由此知：若a是奇數，b也是奇數，則$a^2+b^2=c^2$必然是偶數，所以c必為偶數，而c^2必為 4 的倍數，與二

奇數的平方和一定不是 4 的倍數互相違背，故a、b不可能同時是奇數。

(3) 由a、b必為一奇一偶，不妨設a為奇數，b為偶數，則$c^2=a^2+b^2$必為奇數，所以c也必為奇數。

隨堂練習 2：請由奇偶性判別下列各組三元數都不是本原畢氏三元數組。

(1)（6，7，8）　　(2)（5，7，9）

(3)（12，16，18）　　(4)（9，8，10）

活動三：設（a，b，c）為本原畢氏三元數組，並設為a奇數，b為偶數，則c為奇數，那麼a、b、c之間又有何關係？

步驟 10：首先可把$a^2+b^2=c^2$改寫成$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$

由二奇數之和或差都是偶數，於是可以設$c+a=2p$，$c-a=2q$（p和q都是自然數）

解聯立方程式

$$\begin{cases} c+a=2p \\ c-a=2q \end{cases}$$

即得$c=p+q$，$a=p-q$

步驟 11：由a、c是互質，可以確定p、q也是互質，否則令$g>1$是p、q的公因數，則g也是a、c的公因數，就違背a、c互質的條件了！

又因為b為偶數，可設$b=2r$（r為自然數），

此時$b^2=(c+a)(c-a)$，故得$4r^2=(2p)(2q)$，

即$pq=r^2$為完全平方數。

由上述因數分解的基本概念，p、q都沒有大於 1 的公因數，所以p、q二個自然數本身都是完全平方數。

我們可以令$p=m^2$，$q=n^2$，m、n為自然數

由$p>q$ 故$m>n$，另由$a=p-q$，$c=p+q$

$\therefore a=m^2-n^2$，$c=m^2+n^2$

且因$b=2r$，$b^2=4r^2=4pq=4m^2n^2=(2mn)^2$

$\therefore b=2mn$

於是得到$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$（$m>n\geq 1$）我們稱之為本原畢氏三元數組的生成公式。

步驟 12：由a是奇數及$a=m^2-n^2$，可知m、n不能同時是偶數，也不可能都是奇數，故m、n必是一奇一偶，即$b=2mn$必為 4 的倍數，因此任意三個質數絕無可能形成畢氏三元數組，但畢氏三元數可能有二個質數或一個質數，例如（3, 4, 5）和(7, 24, 25)。另由p、q互質，所以m^2、n^2互質，於是m、n必互質。

綜合步驟 10～12 可以得到本原畢氏三元數組（a，b，c）有如下的生成公式：

$a = m^2 - n^2$，$b = 2mn$，$c = m^2 + n^2$

其中$m > n \geq 1$，m、n互質且m、n為一奇一偶。

活動四：由上面生成本原畢氏三元數組（a，b，c）的一個公式，我們列出一些較小的本原畢氏三元數組，並試圖發現它們之間的一些重要規律。

步驟 13：先列出較小的本原畢氏三元數組表：

m	n	$a = m^2 - n^2$	$b = 2mn$	$c = m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	27
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
8	1	63	16	65
8	3	55	48	73
8	5	39	80	89
8	7	15	112	113
9	2	77	36	85
9	4	65	72	97
9	8	17	144	145
10	1	99	20	101
10	3	91	60	109
10	7	51	140	149
10	9	19	180	181

步驟 14：盯住上表，很快的發覺到只有 3、4、5 這組連續自然數出現，更一般地說（m，n）＝（2，1），（4，3），（5，4），（6，5），（7，6），（8，7），（9，8），（10，9）出現了$m=n+1$的規律性，此時$c=b+1$；其生成的本原畢氏三元數組：

$a=m^2-n^2=(n+1)^2-n^2=2n+1$

$b=2mn=2(n+1)n=2n^2+2n$

$c=m^2+n^2=(n+1)^2+n^2=2n^2+2n+1$

$\therefore c=b+1$恆成立

特別當a，b，c為三個連續自然數時，由$c=b+1$，$b=a+1$可得$(2n+1)+1=2n^2+2n \Rightarrow 2(n+1)=2n(n+1)$

$\therefore n=1$；且若$m>n+1$時，此時$c>b+1$，即（a，b，c）＝（3，4，5）為畢氏三元數唯一的連續正整數解。

步驟 15：再進一步盯住每一組表中所列三元數，a、b兩者之中恰有一個是 3 的倍數，其理由如下：

(1) 若m或n是 3 的倍數，則$b=2mn$自然也是 3 的倍數。

(2) 若m或n都不是 3 的倍數，那麼m、n用 3 來除，餘數都不是 0，而是 1 或 2；不管通通都是 1 或是 2，或者其中一個餘 1，另一個餘 2，$a=m^2-n^2$通通都是 3 的倍數。

例如二者都餘 1，可設$m=3k+1$，$n=3l+1$（$k>l\geq 0$，k為

自然數，l 為 0 或自然數）。

則 $\underline{a=(3k+1)^2-(3l+1)^2=(9k^2+6k+1)-(9l^2+6l+1)}$

$=9(k^2-l^2)+6(k-l)=3[3(k^2-l^2)+2(k-l)]$ 是 3 的倍數

再者一個餘 1，另一個餘 2，可設 $m=3k+1$，$n=3l+2$

（$k>l\geq 0$），

$a=(3k+1)^2-(3l+2)^2=(9k^2+6k+1)-(9l^2+12l+4)$

$=3[3(k^2-l)+2(k-2l)-1]$ 也是 3 的倍數。同理可利用

$c=m^2+n^2$ 說明 c 不為 3 的倍數。

再由 a、b、c 兩兩互質，故 a 或 b 兩者中恰有一個數為 3 的倍數，而 c 永遠不是 3 的倍數。

步驟 16： 更進一步盯住個位數出現 0 或 5 的本原畢氏三元數組（a，b，c），從上表亦可發現三者之中，恰有一個是 5 的倍數，a、b、c 都有機會是 5 的倍數，而 b 一定是 4 的倍數，其理由如下：

(1) 若 m 或 n 是 5 的倍數，則 $b=2mn$ 也是 5 的倍數。

(2) 若 m 或 n 都不是 5 的倍數，故用 5 除其餘數都不是 0，可能是 1、2、3、4。利用：$1^2-1^2=0$，$2^2-2^2=0$，$3^2-3^2=0$，$4^2-4^2=0$

可知當餘數相等時，$a=m^2-n^2$ 是 5 的倍數，此時

$m=5k+i$，$n=5l+i$（i＝1、2、3、4）（$k>l\geq 0$）

可知當餘數相同時，

$a=(5k+i)^2-(5l+i)^2$

$=25(k^2-l^2)+10i(k-l)=5[5(k^2-l^2)+2i(k-l)]$是 5 的倍數。

(3) 再由$1^2+2^2=5$，$1^2+3^2=10$，$4^2+3^2=25$，$3^2-2^2=5$，$4^2-1^2=15$

於是可知道餘數一個是 1，另一個是 2；或一個是 1，另一個是 3；或一個是 3，另一個是 4 時，$c=m^2+n^2$是 5 的倍數。例如一個餘 3 另一個餘 4，可設$m=5k+3$，

$n=5l+4$（$k>l\geq 0$），此時$c=m^2+n^2=(5k+3)^2+(5l+4)^2$

$=25(k^2+l^2)+10(3k+4l)+25=5[(k^2+l^2)+2(3k+4l)+5]$是 5 的倍數。而又如一個餘 1，另一個餘 4，可設$m=5k+1$，

$n=5l+4$（$k>l\geq 0$），則$a=m^2-n^2=5[(k^2-l^2)+2(k-4l)-3]$

是 5 的倍數。同理可說明當m、n除以 5 的餘數不整除且不相同時，a或c必有一個數為 5 的倍數。

(4) 由m、n為一奇一偶，所以$b=2mn$一定是 4 的倍數。

隨堂練習 3：本原畢氏三元數組（a，b，c），說明其乘積abc一定是 60 的倍數。

活動五：（總結論）

(一) 若（a，b，c）是畢氏三元數組，則其自然數倍k（ka，kb，kc）也是畢氏三元數組。

(二) 若（a，b，c）是畢氏三元數組，g是a、b、c的最大公因數，則（$\frac{a}{g}$，$\frac{b}{g}$，$\frac{c}{g}$）是本原畢氏三元數組。

(三) 若（a，b，c）是本原畢氏三元數組，a為奇數，b為偶數，$c^2=a^2+b^2$時，有二個自然數m、n，$m>n$，m、n互質且m、n為一奇一偶，使得$a=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$。

(四)（3，4，5）為唯一連續自然數的本原畢氏三元數組。

(五) 若s為奇數，則s^2被 4 除，餘數一定是 1。

教學活動參考解答：

教學說明：（1）5，（2）12，（3）24、25，（4）60、61。

步驟 1：有的（3，4，5）、（5，12，13）、（6，8，10）、（9，12，15）、（10，24，26）、（7，24，25）共六組。

沒有的（2，3，4）、（13，14，15）共二組。

步驟 3：它們都是（3，4，5）各數乘上倍數所得。

步驟 4：1。

隨堂練習 1：（15，8，17）、（21，20，29）二組。

步驟 6：1。

步驟 8：一奇一偶。

隨堂練習 2：略（不可能三個元數都是奇數，也不可能有二個以上

的偶數。）

隨堂練習 3：若a為奇數，b為偶數，c為奇數，則a、b恰有一個是 3 的倍數，b為 4 的倍數，a、b、c之間至少有一個是 5 的倍數，而最大公因數（3，4，5）＝1，故abc是 3．4．5＝60 的倍數。

七、指定作業：

1. 請在步驟 13 的表中，取m＝11，再列五組本原畢氏三元數組。
2. 在本文及上題所列出的本原畢氏三元數組（a，b，c）中（a為奇數，b為偶數，$c=a^2+b^2$）計算$2c-2a$之值，它們的結果是特例呢？還是一般情形都對呢？
3. 在本原畢氏三元數組（a，b，c）是否有$c=a+2$的情形，它有什麼特徵？
4. 試找出一組c比 1000 稍大而$c=a+2$的本原畢氏三元數組（a，b，c）。
5. 若第k個三角形數定義成T_k：$T_k=1+2+3+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$，且前四個三角形數為 1、3、6、10；在本原畢氏三元數組（3，4，5），（5，12，13），（7，24，25）及(9，40，41）中，b恰為某一個三角形數的四倍。

   (1)請找出一組本原畢氏三元數組（a，b，c）使得$b=4\mathrm{T}_5$；接著再找出$b=4\mathrm{T}_6$。

(2)你想每一個三角形數T_k，是否恆可找出一組本原畢氏三元數組（a，b，c），使得$b=4\mathrm{T}_k$？為什麼？

6. 在本原畢氏三元數組(a，b，c)，a為奇數，b為偶數，$c^2=a^2+b^2$的列表中，沒能看到$a^2=b+2$的情形，請你猜測這個情形是一般性的嗎？為什麼呢？

指定作業參考解答：

1.

m	n	$a=m^2-n^2$	$b=2mn$	$c=m^2+n^2$
11	2	117	44	125
11	4	105	88	137
11	6	85	132	157
11	8	57	176	185
11	10	21	220	221

2. 逐一驗算$2c-2a$都是平方數；它們的結果在一般情形都會成立。

$\because 2c-2a=2(m^2+n^2)-2(m^2-n^2)=4n^2=(2n)^2$

3. $c=a+2 \Leftrightarrow m^2+n^2=m^2-n^2+2 \Leftrightarrow 2n^2=2 \Leftrightarrow n=1$，此時$m>1$且$m$為偶數，得$a=m^2-1$，$c=m^2+1$，$c=a+2$；如(3, 4, 5)、(15, 8, 17)即分別為m=2 與 4 的結果。

4. 因滿足本原畢氏三元數組（a，b，c），$c=a+2$的條件，相當於其生成元素m、n中，$n=1$的情形，又$c=m^2+1>1000$，即$m^2>999$，$\therefore m\geq 33$，m是偶數，$\therefore$取$m=34$時會使得（1155，68，1157）中$c=1157>1000$且為最小。

5. (1) $T_5=15$，$4T_5=60$，令$b=2mn=60$，$\therefore mn=30$，$\therefore m=6$，$n=5$或

$m=10$，$n=3$或$m=15$，$n=2$或$m=30$，$n=1$都可得到本原畢氏三元數組（a，b，c）中的$b=4\mathrm{T}_5$。

又$T_6=21$，$4T_6=84$，令$b=2mn=84$，$\therefore mn=42$，$\therefore m=7$，$n=6$；$m=14$，$n=3$；$m=21$，$n=2$；$m=42$，$n=1$都可得到本原畢氏三元數組（a，b，c）中的$b=4\mathrm{T}_6$。

(2) 設$b=4T_k$，則$2mn=2k(k+1)$，得$mn=(k+1)k$都至少有$m=k+1$，$n=k$之一組解。

6. 本原畢氏三元數組（a，b，c），a為奇數，b為偶數，$c^2=a^2+b^2$中，a^2恆不等於$b+2$，其理由如下：

$a^2=(m^2-n^2)^2$為奇數的平方數，故a^2除以 4 的餘數是 1，而$b+2=2mn+2$，$2mn$為 4 的倍數，故$b+2$除以 4 的餘數是 2，故$a^2=b+2$不可能成立，所以a^2恆不等於$b+2$。

八、教學注意事項：

1. 教學時間建議分配如下：引起動機與活動一（含步驟 1～5 及隨堂練習 1）約 20 分鐘；活動二（含步驟 6～9 及隨堂練習 2）約 25 分鐘；活動三（含步驟 10～12）約 15 分鐘；活動四（含步驟 13～16 及隨堂練習 3）約 25 分鐘；活動五綜合結論（含指定作業）約 5 分鐘。

2. **本原**一詞來自英文「Primitive」。

3. 步驟 7(2)若教學時間或學生程度不足，建議可作為延伸學習或回家練習。

4. 一旦步驟 12 列出本原畢氏三元數組後，老師可詢問學生，到底共有多少組本原畢氏三元數組的問題，答案當然有無限多組;並可透過 excel 軟體作本文中本原畢氏三元數組的驗算與更多本原畢氏三元數組的推導。

5. 關於步驟 14「若$m>n+1$時，此時$c>b+1$」的說明如下：$m>n+1 \Rightarrow m\text{-}n>1$，$c\text{-}b=m^2+n^2-2mn=(m-n)^2>1$，教師可視教學進度與學生程度適時補充。

6. 任一奇數的平方被 4 除，餘數一定是 1，故二奇數的平方和必然不是完全平方數；但二奇數的平方差可能是一個完全平方數，且這個完全平方數一定是偶數;二奇數的平方差雖然不一定是完全平方數，但一定是 4 的倍數。

7. 強調綜合結論各項都很重要，特別是本原畢氏三元數（a，b，c）的一個生成公式及其應有之條件也要特別加強留意，未來在數論上使用機會的頻率是很高的。

8. 連續三個自然數為畢氏三元數組，除可由步驟 13 得知外，也可以從解下列的二元一次方程式來求得：$a^2+(a+1)^2=(a+2)^2$得$a^2-2a-3=0$，$(a-3)(a+1)=0$，$\therefore a=3$，$b=a+1=4$，$c=a+2=5$。

9. 本原畢氏三元數組（a，b，c），a為奇數，b為偶數，$c^2=a^2+b^2$，

其生成的另一組公式如下：$a=st$，$b=\frac{s^2-t^2}{2}$，$c=\frac{s^2+t^2}{2}$其中$s>t\geq 1$是任意奇數且s、t的最大公因數是1（見注或參閱參考資料4)。

10. 各主題活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
11. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。
12. 本單元主題對於學生發現規律能力的訓練是很好的題材，教師要能善用這樣的題材。上完本單元主題之後，可分組寫出畢氏三元數組的學習心得報告，作為平時考核的一項成績。

注：

(1) 由本文所生成的本原畢氏三元數組（a，b，c）之公式，$a^2=m^2-n^2$，$b=2mn$，$c=m^2+n^2$，$m>n\geq 1$，$(m, n)=1$且m、n為一奇一偶。

令$m+n=s$，$m-n=t$，則$s+t=2m$，$s-t=2n$

即$m=\frac{s+t}{2}$，$n=\frac{s-t}{2}$，可得a、b、c的另一生成公式：

$$a=(m+n)(m-n)=st$$

$$b=2mn=2\times\frac{s+t}{2}\times\frac{s-t}{2}=\frac{s^2-t^2}{2}$$

$$c=(\frac{s+t}{2})^2+(\frac{s-t}{2})^2=\frac{s^2+t^2}{2}$$

其中$s>t\geq 1$，s、t都是奇數，$(s\ ,t)=1$，上述公式僅須再解釋為什麼$(s\ ,t)=1$：

當$(m\ ,n)=1$，m、n為一奇一偶時，則二奇數$m+n$與$m-n$亦互質，否則可假設$(m+n\ ,m-n)=l$，$l>1$且l為奇數。

故$m+n=lp$，$m-n=lq$，此時p、q為奇數，p、$q\geq 1$，且$p>q$；

$\therefore m=\dfrac{lp+lq}{2}=l\times\dfrac{p+q}{2}$，$n=\dfrac{lp-lq}{2}=l\times\dfrac{p-q}{2}$，

$\because \dfrac{p+q}{2}$、$\dfrac{p-q}{2}$都是自然數，

故$(m\ ,n)\geq l>1$與$(m\ ,n)=1$之條件不合。

(2) 由(1)之另一生成公式，可以列出s、t較小時的本原畢氏三元數組（a，b，c），如下表：

s	t	$a=st$	$b=\dfrac{s^2-t^2}{2}$	$c=\dfrac{s^2+t^2}{2}$
3	1	3	4	5
5	1	5	12	13
7	1	7	24	25
9	1	9	40	41
5	3	15	8	17
7	3	21	20	29
7	5	35	12	37
9	5	45	28	53

九、教學參考資料：

1. 李政憲(2013)。畢氏定理，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊(pp.57-86)。新北市：國家教育研究院。

2. Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 83：Pythagorean Triple. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 355-356). Columbus,OH：Merrill.

3. 陳昭地(2013)。三角形數與平方數，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 A 冊(pp.307-320)。新北市：國家教育研究院。

4. Silverman, J. H. (2006). A Friendly Introduction to Number Theory (3rd ed.) (pp. 13-19). Pearson Education International, 新北市：高立圖書有限公司代行. http://www.gau-lih.com.tw

主題 2－1：平方根的概念

一、授課對象：國中八年級上學期學生　　　　**撰寫者：**丁斌悅

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　陳彥廷

(一) 能作基本的整數、分數與小數的四則運算。

(二) 能理解並應用乘法公式。

(三) 能作畢氏定理的簡單應用，包括直角三角形邊長的計算。

(四) 知道 $a\times\sqrt{b}=a\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$ ；$\dfrac{1}{a}\times\sqrt{b}=\dfrac{1}{a}\cdot\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{b}}{a}$ 。

三、教學目標：

(一) 能利用適當的面積呈現，理解的確有面積為 2、5 等非完全平方數的正方形；並進一步探討其邊長為何。

(二) 能利用十分逼近法並加以改良。以改良式的逼近法求出如 $\sqrt{2}$ 、$\sqrt{5}$ 等平方根的近似值。

(三) 能瞭解並說明若 $a>0$ 、$b>0$ ，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 、$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ，但 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$ 、$\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$ 。

(四) 能作簡易的根式化簡與分母有理化。

(五) 能利用平方根的概念解形如：$x^2-a=0\,,(a>0)$ 、$(px+q)^2=r\,,(r>0)$ 等一元二次方程式。

(六) 能利用畢氏定理得出坐標平面上的任意兩點 $A(a\,,b)$ 、$B(c\,,d)$ ，此兩點距離為 $\overline{AB}=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ 。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

在國中的課程中，「平方根」是一個很重要的概念；國中階段透過符號「$\sqrt{\ }$」的引進，使得數系從「有理數」(Rational Number)，擴展至「無理數」(Irrational Number)。「平方根」的四則運算，以及在運算過程中所需的化簡與有理化，都是高中課程的預備知識，也是將來「複數」運算模式的基礎。

若$b^2 = a\,(a>0)$，則稱 b 是 a 的平方根（也稱為二次方根）。例如：$3^2 = 9$；$(-3)^2 = 9$，所以，我們稱 3 和(－3)都是 9 的平方根（其中，3 是 9 的正平方根；(－3)是 9 的負平方根）。換言之，我們可說：若$a>0$，則 a 的平方根為$\sqrt{a}$和$-\sqrt{a}$；也就是說：若$a>0$，則 a 的平方根為$\pm\sqrt{a}$ 。

六、教學活動：

活動一：認識$\sqrt{2}$（2 的正平方根）

步驟 1：老師首先準備足夠數量的方格紙（方格紙內為 8×8 個邊長 1 的單位正方形），如附件。

(1) 同學們，請問是否有面積為 1 的正方形？若有，請畫出來。

(2) 同學們，再請問是否有面積為 4 的正方形？若有，請畫出來。

(3) 同學們，在上一小題(2)中，面積為 4 的正方形，請問邊長是多少呢？有多少種邊長可以使得正方形面積為 4 呢？

(4) 同學們，接著請問是否有面積為 2 的正方形？若有，請畫出來；若沒有，請試著說說看為什麼沒有。

(5) 同學們，請問這個面積為 2 的正方形，邊長是多少呢？有多少種邊長可以使得正方形面積為 2 呢？

(6) 同學們，由於在目前我們認識的數的世界中，無法表達這樣的數（以此數為邊長，可以使得正方形面積為 2）。因此，為了表示面積為 2 之正方形的邊長，我們便把 2 的上面加上「$\sqrt{\ }$」（讀作：根號），即：「$\sqrt{2}$」（讀作：根號 2），來表示其邊長。

(7) 事實上，因為：$3^2=9$；$(-3)^2=9$，所以，我們稱 3 和 (－3)都是 9 的平方根（其中，3 是 9 的正平方根；(－3)是 9 的負平方根）。同理，因為：$(\sqrt{2})^2=2$；$(-\sqrt{2})^2=2$，所以，我們稱$\sqrt{2}$和$(-\sqrt{2})$都是 2 的平方根（其中，$\sqrt{2}$是 2 的正平方根；$(-\sqrt{2})$是 2 的負平方根）。

隨堂練習 1： 同學們，請問是否有面積為 5 的正方形？若有，請畫出來；若沒有，請試著說說看為什麼沒有。

隨堂練習 2： 同學們，請問這個面積為 5 的正方形，邊長是多少呢？有多少種邊長可以使得正方形面積為 5 呢？

活動二：利用逼近法求平方根的近似值

步驟 2：我們已經知道面積為 2 的正方形，邊長為$\sqrt{2}$；並且只有邊長為$\sqrt{2}$可以使得正方形面積為 2。那麼$\sqrt{2}$到底是多少呢？事實上，我們可以以「十分逼近法」來求得$\sqrt{2}$的近似值（四捨五入至小數點後第一位），方法如下：

(1) $\because 1^2=1$，$(\sqrt{2})^2=2$，$2^2=4$

$\therefore \sqrt{2}$必定介於 1 與 2 之間，即$1<\sqrt{2}<2$

(2) $\because 1.1^2=1.21$，$1.2^2=1.44$，$1.3^2=1.69$，$1.4^2=1.96$，

$1.5^2=2.25$，$1.6^2=2.56$，$1.7^2=2.89$，$1.8^2=3.24$，

$1.9^2=3.61$，$2.0^2=4$；而$(\sqrt{2})^2=2$

$\therefore \sqrt{2}$必定介於 1.4 與 1.5 之間，即$1.4<\sqrt{2}<1.5$

(3) 重複上述動作，

$\because 1.41^2=1.9881$，$1.42^2=2.0164$，$1.43^2=2.0449$，

$1.44^2=2.0736$，$1.45^2=2.1025$，$1.46^2=2.1316$，

$1.47^2=2.1609$，$1.48^2=2.1904$，$1.49^2=2.2201$，

$1.5^2=2.25$；而$(\sqrt{2})^2=2$

$\therefore \sqrt{2}$必定介於 1.41 與 1.42 之間，即$1.41<\sqrt{2}<1.42$

(4) 繼續重複上述動作，直到我們求出小數點後所需要的位數為止，因為題目要求須四捨五入至小數點後第一位，所以當我們求出 $1.41<\sqrt{2}<1.42$ 後，即可四捨五入得

$\sqrt{2} \doteqdot 1.4$。

步驟 3：在步驟 2 中之「十分逼近法」，其實是可以稍作改良的。

以下我們以求得$\sqrt{3}$的近似值（四捨五入至小數點後第一位）為例，說明如下：

(1) $\because 1^2 = 1$，$(\sqrt{3})^2 = 3$，$2^2 = 4$

$\therefore \sqrt{3}$必定介於 1 與 2 之間，即$1 < \sqrt{3} < 2$

(2) 在 1 與 2 之間取 1.5

$\because 1.5^2 = 2.25 < 3$，$2^2 = 4 > 3$

$\therefore \sqrt{3}$必定介於 1.5 與 2 之間，即$1.5 < \sqrt{3} < 2$

(3) 接著，在 1.5 與 2 之間取 1.7

$\because 1.7^2 = 2.89 < 3$，$2^2 = 4 > 3$

$\therefore \sqrt{3}$必定介於 1.7 與 2 之間，即$1.7 < \sqrt{3} < 2$

(4) 再接著，在 1.7 與 2 之間取 1.8

$\because 1.7^2 = 2.89 < 3$，$1.8^2 = 3.24 > 3$

$\therefore \sqrt{3}$必定介於 1.7 與 1.8 之間，即$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$

(5) 重複上述動作(2)~(4)，在 1.7 與 1.8 之間取 1.75

$\because 1.7^2 = 2.89 < 3$，$1.75^2 = 3.0625 > 3$

$\therefore \sqrt{3}$必定介於 1.7 與 1.75 之間，即$1.7 < \sqrt{3} < 1.75$

(6) 繼續重複上述動作(2)~(4)，直到我們求出小數點後所需要的位數為止，因為題目要求須四捨五入至小數點後第一

位，所以當我們求出 $1.7<\sqrt{3}<1.75$ 後，即可四捨五入得 $\sqrt{3}\doteqdot 1.7$。

隨堂練習 3：同學們，請你仿照步驟 3 中之改良式的逼近法，求得 $\sqrt{5}$ 的近似值（四捨五入至小數點後第一位）。

活動三：平方根的四則運算

步驟 4：由**活動一**我們已經知道 2 的正平方根**只有一個**，即：$\sqrt{2}$；同理，a 的正平方根**只有一個**，即：$\sqrt{a}\,,(a>0)$。利用這個概念我們可以得到 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{3\times 2}$，理由如下：

$$\because (\sqrt{3}\times\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}\times\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\times\sqrt{2})=(\sqrt{3}\times\sqrt{3})\times(\sqrt{2}\times\sqrt{2})$$

$$=(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{2})^2=3\times 2=6$$

另外，$(\sqrt{3\times 2})^2=3\times 2=6$

$\therefore (\sqrt{3}\times\sqrt{2})$ 與 $(\sqrt{3\times 2})$ 都是 6 的正平方根，

而 6 的正平方根只有一個，因此 $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{3\times 2}$。

步驟 5：仿照步驟 4，我們可以進一步推得

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}\,,(a>0,b>0)$，說明如下：

$$\because (\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b})=(\sqrt{a}\times\sqrt{a})\times(\sqrt{b}\times\sqrt{b})$$

$$=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2=a\times b=ab\,,(a>0,b>0)$$

另外，$(\sqrt{a\times b})^2=a\times b=ab\,,(a>0,b>0)$

$\therefore (\sqrt{a}\times\sqrt{b})$ 與 $(\sqrt{a\times b})$ 都是 ab 的正平方根，

而 ab 的正平方根只有一個，因此 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$。

步驟 6：另外，仿照步驟 4，我們可以得到$\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\sqrt{3\div2}$（即$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$），理由如下：

$$\because (\sqrt{3}\div\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}\div\sqrt{2})\times(\sqrt{3}\div\sqrt{2})=(\sqrt{3}\times\sqrt{3})\div(\sqrt{2}\times\sqrt{2})$$

$$=(\sqrt{3})^2\div(\sqrt{2})^2=3\div2=1.5$$

另外，$(\sqrt{3\div2})^2=3\div2=1.5$

$\therefore(\sqrt{3}\div\sqrt{2})$與$(\sqrt{3\div2})$都是 1.5 的正平方根，

而 1.5 的正平方根只有一個，因此$\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\sqrt{3\div2}$。

隨堂練習 4：同學們，請你仿照步驟 4~6，說明：

$$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{a\div b}\text{, 即}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\text{, }(a>0,b>0)\text{。}$$

步驟 7：由步驟 5 與隨堂練習 4 我們可知：

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}\text{, }(a>0,b>0)$；

$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{a\div b}\text{, 即}\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\text{, }(a>0,b>0)$。

利用此一結果，我們可以得到：

$\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$；

$\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$；

$\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=\sqrt{4}\times\sqrt{5}=2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$；

…

另外，我們也可以利用乘法公式來化簡下列式子：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

隨堂練習 5：同學們，請你利用乘法公式與下列式子：

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}\,,(a>0,b>0)$；

$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{a\div b}$，即$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\,,(a>0,b>0)$，

化簡：(1)$\sqrt{32}$；(2)$\sqrt{48}$；(3)$\sqrt{50}$；(4)$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$；(5)$\frac{2}{\sqrt{15}-3}$。

步驟 8：雖然$\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{3\times 2}$、$\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\sqrt{3\div 2}$，但是$\sqrt{3}+\sqrt{2}$

卻並不等於$\sqrt{3+2}$，說明如下：

$\because\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7$、$\sqrt{2}\fallingdotseq 1.4$、$\therefore\sqrt{3}+\sqrt{2}\fallingdotseq 1.7+1.4=3.1$，

而$\sqrt{3+2}=\sqrt{5}\fallingdotseq 2.2$，因此$\sqrt{3}+\sqrt{2}\neq\sqrt{3+2}$。

隨堂練習 6：同學們，請你仿照步驟 8 ，說明$\sqrt{3}-\sqrt{2}\neq\sqrt{3-2}$。

活動四：利用平方根解一元二次方程式

步驟 9：平方根可以解形如$x^2-a=0\,,(a>0)$之一元二次方程式，

說明如下：

首先將 a 移項，得

$$x^2=a\,,(a>0)$$

因此，x 是 a 的平方根，得$x=\pm\sqrt{a}\,,(a>0)$

步驟 10： 平方根也可以解形如 $(px+q)^2=r\,,(r>0)$ 之一元二次方程式，說明如下：

$$(px+q)^2=r\,,(r>0)$$

因此可得 $px+q=\pm\sqrt{r}\,,(r>0)$

$$px=-q\pm\sqrt{r}\,,(r>0)$$

$$\therefore x=\frac{-q\pm\sqrt{r}}{p}\,,(r>0)$$

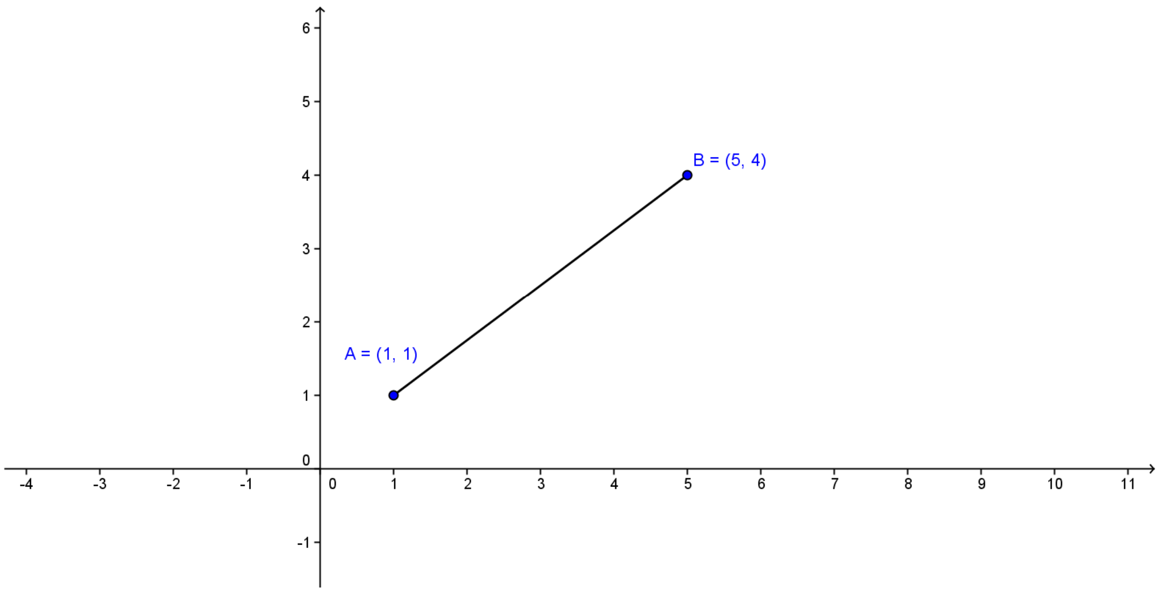
隨堂練習 7： (1) 解一元二次方程式 $x^2-7=0$。

(2) 解一元二次方程式 $(x-3)^2=7$。

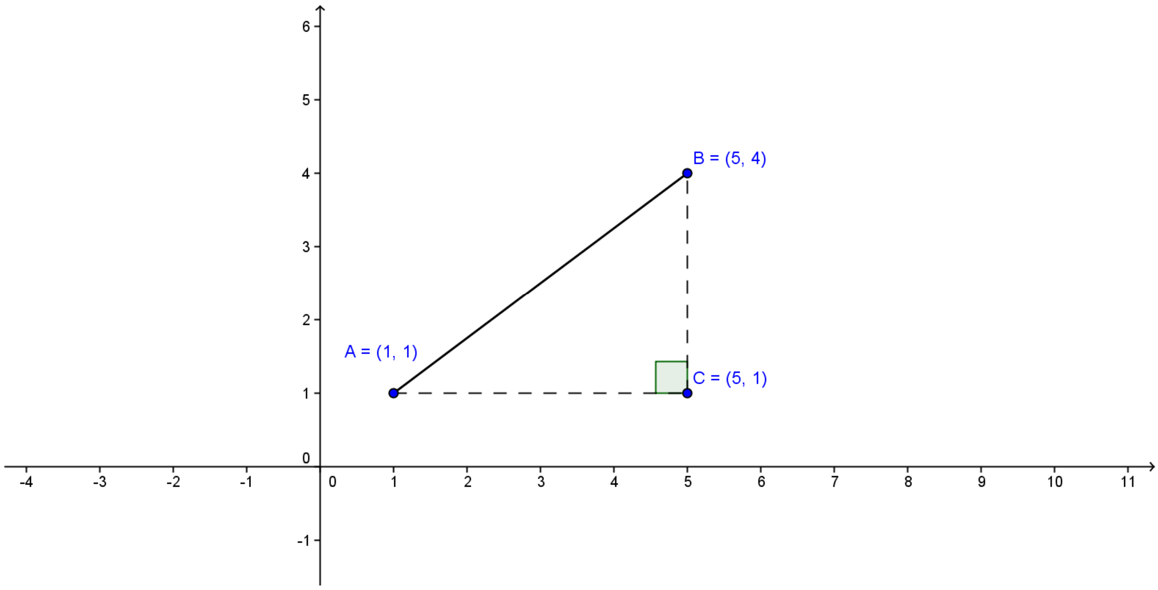
(3) 解一元二次方程式 $(2x-3)^2=7$。

活動五： 利用畢氏定理得出坐標平面上的兩點距離公式

步驟 11： 我們可以利用畢氏定理，求出坐標平面上給定兩點的距離！如下圖，$A(1\,,1)$、$B(5\,,4)$：



我們作$\overline{AC}$ // x軸，$\overline{BC}$ // y軸：

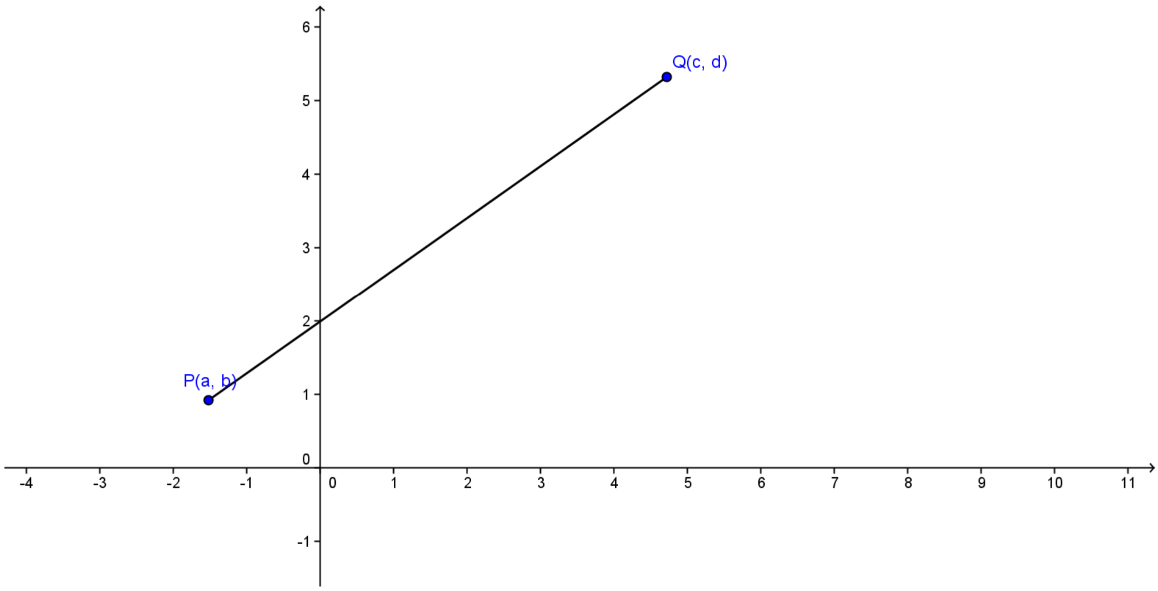


則C點坐標為$(5,1)$，$\Rightarrow \overline{AC}=(5-1)=4$，$\overline{BC}=(4-1)=3$，

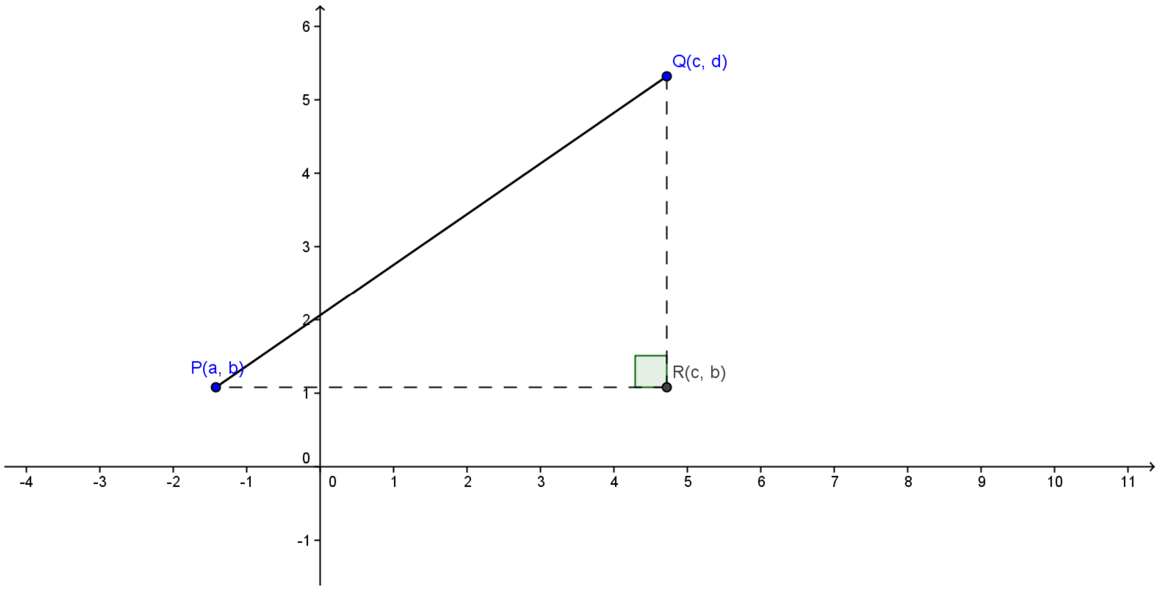
因此可得$\overline{AB}^2=(5-1)^2+(4-1)^2=4^2+3^2=25$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{25}=5$

步驟 12：我們可以仿照**步驟 11**，利用畢氏定理，求出坐標平面上任意兩點的距離！如下圖，$P(a,b)$、$Q(c,d)$：



我們作 $\overline{PR} // x$軸，$\overline{QR} // y$軸：



則 R 點坐標為 (c, b)，$\Rightarrow \overline{PR} = (c-a)$，$\overline{QR} = (d-b)$，

因此可得 $\overline{PQ}^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$

$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$

我們稱上式為坐標平面上任意兩點的距離公式！

隨堂練習 8：

(1) 在坐標平面上，$A(2,3)$、$B(14,8)$，求 $\overline{AB}$ ＝？

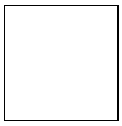
(2) 在坐標平面上，$C(-2,-1)$、$D(3,5)$，求 $\overline{CD}$ ＝？

(3) 在坐標平面上，$E(-5,4)$、$F(3,-2)$，求 $\overline{EF}$ ＝？

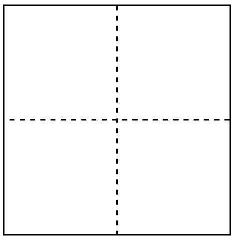
(4) 在坐標平面上，一隻螞蟻正在 $P(0,6)$ 點四處找食物，後來有人把一塊糖置放在 $Q(15,14)$ 點，這隻螞蟻隨即往 Q 點位置爬行，請問：螞蟻嘗到糖至少爬行多少距離？

活動參考解答：

活動一：步驟 1：(1) 有，

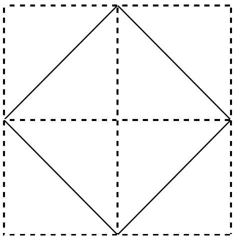


(2) 有，



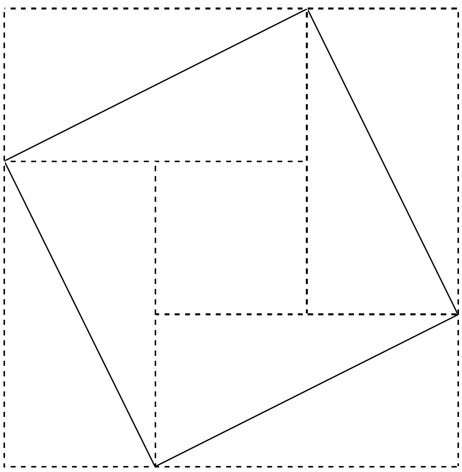
(3)邊長為 2；只有邊長為 2 可以使得正方形面積為 4。

(4)有，



(5) 面積為 2 的正方形，邊長目前無法表示；只有一種邊長可以使得正方形面積為 2。

隨堂練習 1：有，



隨堂練習 2：面積為 5 的正方形，邊長為$\sqrt{5}$；只有邊長為$\sqrt{5}$可以使得正方形面積為 5。

活動二：

隨堂練習 3：(1) $\because 1^2=1$，$2^2=4$，$(\sqrt{5})^2=5$，$3^2=9$

$\therefore \sqrt{5}$必定介於 2 與 3 之間，即$2<\sqrt{5}<3$

(2) 在 2 與 3 之間取 2.5

$\because 2.5^2=6.25>5$

$\therefore \sqrt{5}$必定介於 2 與 2.5 之間，即$2<\sqrt{5}<2.5$

(3) 在 2 與 2.5 之間取 2.2

$\because 2.2^2=4.84<5$

$\therefore \sqrt{5}$必定介於 2.2 與 2.5 之間，即$2.2<\sqrt{5}<2.5$

(4) 在 2.2 與 2.5 之間取 2.3

$\because 2.3^2=5.29>5$

$\therefore \sqrt{5}$必定介於 2.2 與 2.3 之間，即$2.2<\sqrt{5}<2.3$

(5) 在 2.2 與 2.3 之間取 2.25

$\because 2.25^2=5.0625>5$

$\therefore \sqrt{5}$必定介於 2.2 與 2.25 之間，即$2.2<\sqrt{5}<2.25$

(6)至此，我們得到$\sqrt{5}\doteqdot 2.2$（四捨五入至小數點後第一位）

活動三：

隨堂練習 4：$\because (\sqrt{a}\div\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\div(\sqrt{b})^2=a\div b=\dfrac{a}{b},(a>0,b>0)$

另外，$(\sqrt{a\div b})^2=a\div b=\dfrac{a}{b},(a>0,b>0)$

$\therefore (\sqrt{a}\div\sqrt{b})$與$(\sqrt{a\div b})$都是$\dfrac{a}{b}$的正平方根，

而$\dfrac{a}{b}$的正平方根只有一個，

因此$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\sqrt{a\div b},(a>0,b>0)$。

隨堂練習 5：(1) $\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{48}=\sqrt{16\times 3}=\sqrt{16}\times\sqrt{3}=4\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$；

(3) $\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$；

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$；

(5) $\dfrac{2}{\sqrt{15}-3}=\dfrac{2}{\sqrt{15}-3}\times\dfrac{\sqrt{15}+3}{\sqrt{15}+3}=\dfrac{2(\sqrt{15}+3)}{15-9}=\dfrac{\sqrt{15}+3}{3}$。

隨堂練習 6：$\because \sqrt{3}\doteqdot 1.7$、$\sqrt{2}\doteqdot 1.4$

$\therefore \sqrt{3}-\sqrt{2}\doteqdot 1.7-1.4=1.3$，而$\sqrt{3-2}=\sqrt{1}=1$，

因此$\sqrt{3}-\sqrt{2}\neq\sqrt{3-2}$。

活動四：

隨堂練習 7：(1) $x^2-7=0$，$\Rightarrow x^2=7$，$\Rightarrow x=\pm\sqrt{7}$。

(2) $(x-3)^2=7$，$\Rightarrow (x-3)=\pm\sqrt{7}$，$\Rightarrow x=3\pm\sqrt{7}$。

(3) $(2x-3)^2=7\Rightarrow(2x-3)=\pm\sqrt{7}\Rightarrow 2x=3\pm\sqrt{7}\Rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{2}$

活動五：

隨堂練習 8：(1) $\overline{AB}=\sqrt{(14-2)^2+(8-3)^2}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13$。

(2) $\overline{CD}=\sqrt{[3-(-2)]^2+[5-(-1)]^2}=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}$。

(3) $\overline{EF}=\sqrt{[3-(-5)]^2+(-2-4)^2}=\sqrt{(8)^2+(-6)^2}=\sqrt{100}=10$。

(4) P 點到 Q 點的最短距離為線段$\overline{PQ}$之長，因此螞蟻至少要爬行線段$\overline{PQ}$之長才能嚐到糖，也就是至少爬行$\overline{PQ}=\sqrt{(15-0)^2+(14-6)^2}=\sqrt{225+64}=\sqrt{289}=17$ (單位)。

七、指定作業：

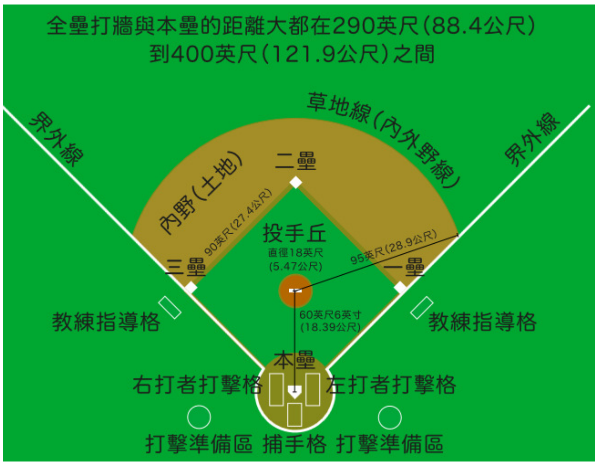
1. 試化簡下列根式：

(1) $\sqrt{63}$；(2) $\sqrt{180}$；(3) $\sqrt{360}$；(4) $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$；(5) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$。

2. 國人熱愛棒球運動，而棒球場係依據下列規定設立的：內野是本壘、一壘、二壘、三壘圍繞的邊長 90 呎之正方形，而外野是在一壘線及三壘線所延長界線(FOUL LINES)間除內野區以外的地區。試問（已知$\sqrt{2}\doteqdot 1.4$）：

(1) 本壘到二壘之距離為多少呎？(四捨五入到整數位)

(2) 三壘到一壘之距離又為多少呎？(四捨五入到整數位)



3. 在坐標平面上，一隻螞蟻正在 $P(0,6)$ 附近覓食，後來有人放在 $Q(15,14)$ 及 $R(4.5,0)$ 各放一顆糖，此螞蟻先聞到 R 點處的糖，爬行到 R 處嘗到糖之後，再聞到 $Q(15,14)$ 處的糖果，試問此隻螞蟻至少要爬行多少距離始能完成嘗到這兩顆糖呢？（可用電算器輔助計算）

指定作業參考解答：

1. (1) $\sqrt{63}=\sqrt{9\times7}=\sqrt{9}\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$；

(2) $\sqrt{180}=\sqrt{36\times5}=\sqrt{36}\times\sqrt{5}=6\sqrt{5}$；

(3) $\sqrt{360}=\sqrt{36\times10}=\sqrt{36}\times\sqrt{10}=6\sqrt{10}$；

(4) $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}\times\dfrac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{4(3+\sqrt{5})}{9-5}=3+\sqrt{5}$；

(5) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\dfrac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{7-5}=\sqrt{7}+\sqrt{5}$。

2. $\because$ 內野是本壘、一壘、二壘、三壘圍繞的邊長 90 呎之正方形

$\therefore$ 本壘到二壘之距離＝三壘到一壘之距離

$=\sqrt{90^2+90^2}=\sqrt{90^2(1+1)}=\sqrt{90^2}\times\sqrt{2}=90\sqrt{2}$

≑90x1.4=126(呎)。

3. 至少要爬行$\overline{PR}+\overline{RQ}$之線段和的長，始能嘗到這兩顆糖，故答案為：$\sqrt{(4.5-0)^2+(0-6)^2}+\sqrt{(15-4.5)^2+(14-0)^2}$

$$=\sqrt{4.5^2+36}+\sqrt{10.5^2+196}$$

$$=\sqrt{56.25}+\sqrt{306.25}=7.5+17.5=25(\text{單位})$$

即至少爬行 25 單位長始能依序嘗到這兩顆糖。

八、教學注意事項：

1. 各活動教學參考時間：活動一約 20 分鐘；活動二～活動五各約 15 分鐘；指定作業約 10 分鐘(重點說明)。
2. 使用此教材時，請依順序進行教學，較可達最佳學習效果。
3. 本教材教學活動適當使用 powerpoint 可以增加教學效果。
4. 教師使用此教材時，不宜出現「無理數」、「唯一性」等數學專有名詞，以免學生因對這些名詞感到陌生，而對此教材產生恐懼感。
5. 教師在進行**活動一**時，宜使用本單元末所附之「**活動一附件：方格紙**」，以利活動之進行與單位正方形大小之統一。
6. 教師在進行**步驟 3** 時，應向同學說明「在 1.5 與 2 之間」不一定要先取 1.7 再取 1.8，也可以先取 1.8 再取 1.7。而在**隨堂練習 3** 中，「在 2 與 2.5 之間」也不一定要先取 2.2，先取

2.3 其實也是可以的。

7. 教師在進行完**步驟 2、步驟 3** 與**隨堂練習 3** 之後，可以引進「電子計算器」(或其他具計算功能的電子產品)，除了教導學生如何使用這些電子產品來求得 $\sqrt{a}, (a>0)$ 的近似值外，也要提醒學生：不論是十分逼近法、或是改良式的逼近法，**只要學得其逼近法的精神即可**。事實上，使用這些電子產品求得 $\sqrt{a}, (a>0)$ 的近似值既快速又正確，因此在日常生活中是不太需要真正使用到逼近法來求得 $\sqrt{a}, (a>0)$ 的近似值的。

8. 教師在進行**步驟 4** 時，若有同學詢問老師：「$\sqrt{a}$ 中的 a 必為正數嗎？若 $a<0$，$\sqrt{a}$ 是什麼？」則教師可視學生程度回答：「$\sqrt{a}$ 中的 a 在國中階段皆為正數，即：$a>0$。至於 $\sqrt{a}$ 中的 $a<0$ 部分，將會在高中階段做進一步探討」。

9. 教師在進行**步驟 5** 時，若有同學進一步詢問老師：「是否所有 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 一定會等於 $\sqrt{ab}$？」則教師可視學生程度回答：「只要 $\sqrt{\ }$ 裡面的 a 與 b 都是正數，$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ 就一定會等於 $\sqrt{ab}$！可是 $\sqrt{-3}\times\sqrt{-2}$ 就不等於 $\sqrt{(-3)(-2)}$，而是等於 $-\sqrt{(-3)(-2)}$」。但這並非我們在此所要討論的重點，現階段不宜在課室中出現這樣的內容，「我們現階段所要知道的應該是：若 $a>0$、$b>0$，則 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，並加以說明即可」。

10. 教師在進行**步驟 8** 與**隨堂練習 6** 時，可視學生程度進一步說

明：「我們已經知道$\sqrt{3}+\sqrt{2}\neq\sqrt{3+2}$、$\sqrt{3}-\sqrt{2}\neq\sqrt{3-2}$，因此可得$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$、$\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq\sqrt{a-b}$」。

11. 教師在進行**隨堂練習 8 之(3)**時，可停留一些時間讓學生自己試著發現：$\overline{EF}=\sqrt{(3-5)^2+(3-6)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$、也可以$\overline{EF}=\sqrt{(5-3)^2+(6-3)^2}=\sqrt{(2)^2+(3)^2}=\sqrt{13}$；因此坐標平面上任意兩點的距離公式$\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$，也可以是$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$。事實上，只要兩點的 x 坐標與 y 坐標各自相減即可，誰減誰並不重要。

12. 教師可以視學生的程度，補充下列內容：

    (1) 0 的平方根只有一個，即：$\sqrt{0}=0$。

    (2) 平方根「$\sqrt{\ }$」代表某一個肯定的數(不是一個區間)，只是這個數無法具體表示；而這個數雖然無法具體表示，但是仍可在數線上描出其位置來。

13. 在各活動的教學過程中，教師應多注重師生間的互動，多鼓勵學生發表不同的看法並適度建立學生的信心，若有藉機調皮搗蛋者亦應適度制止，留下適當的時間供學生思考或討論等等。

14. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

15. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 李政憲(2013)。畢氏定理，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 C 冊（pp. 57-86）。新北市：國家教育研究院。

2. 教育部（2008）。國民中小學九年一貫數學領域課程綱要。臺北市：教育部。

3. 國中各版本第三冊數學課本。

4. 維基百科。棒球場。檢自 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%A3%92%E7%90%83%E5%A0%B4 檢索日期：2013 年 10 月 12 日。

活動一附件：方格紙

主題 2－2：整係數二次三項式的因式分解

一、授課對象：國中八年級上學期學生　　　　**撰寫者**：丁斌悅

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　陳彥廷

(一) 知道 100 以內的正整數的因數分解。　　　　　　陳昭地

(二) 知道三個 100 以內的整數互質的意義。

(三) 熟悉 $(a+b)(c+d)=ac+(ad+bc)+bd$ 與 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 及 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 等乘法公式。

(四) 知道整係數二次三項式 ax^2+bx+c 即表示 a，b，c 都是整數，$a\neq 0$，且通常 c 也不為 0，但 b 或許會是 0。

三、教學目標：

(一) 熟悉 ax^2+bx+c 為整係數一元二次三項式的實例。

(二) 能由乘法公式的溫故知新，瞭解整係數二次三項式因式分解的意涵。

(三) 能由一系列的實例，產生分解整係數二次三項式之十字交乘法的方法。

(四) 能熟練十字交乘法分解整係數二次三項式為二個整係數一次式的乘積。

(五) 能認識提取公共因數或一次因式的二次式。

(六) 能初步體認用十字交乘法或提取公因式法甚至乘法公式經因式分解，可以找出二次三項式型的方程式之解。

(七) 能知道形式如x^2-x-1，x^2+x-1或x^2+2x+3，…，係數絕對值都在5以內二次三項式，並不能使用十字交乘分解法，產生二個整係數一次因式的乘積。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

(一) 活動一旨於溫故（乘法公式）知新（因式分解）的實例。

(二) 在隨堂練習1完成後，再進一步引導出十字交乘法的分解技巧。

(三) 再更進一步透過實例與隨堂練習3，使學生更能瞭解十字交乘法的操作。

(四) 如果二次三項式ax^2+bx+c中，a為負整數，則可先提出負號，再針對$-(-ax^2-bx-c)$使$-a$變成正整數來處理。這是好的書寫解題習慣，進一步對正整數的x^2項係數只要分解兩個正整數的乘積，而常數項的分解則有正、負不一的選擇，如此經由交叉相乘的配對會減少至高達一半，避免需經太多次的嘗試錯誤的過程，加快獲得正確的二個整係數一次式的分解工作。

(五) **十字交乘法**（Cross Multiplication）一詞為華人所慣用，洋人較少將之視為一個專有名詞；但無疑的它是最重要的整係數二次三項式的分解方法，它是包含了乘法

公式法，然而學生可能因已熟悉乘法公式，易於辨認乘法公式，自然應不限制他們去使用乘法公式法。

(六) 要知道因式分解的結果是一個恆等式，強烈指導學生避免在因式分解後加上「＝0」的記號，否則就跟解方程式混淆在一塊了，這種錯誤迷失應該是常見。

(七) 求解二次三項式何時會等於 0，不是本單元主題的任務，它頂多用來嘗試它在求一些可用十字交乘法分解成二個整係數一次式的乘積何時為 0，真正的解一元二次方程式的單元還會加強此法的許多運用實例（溫故），進而引出配方法的必要性。

(八) 同上(七)一樣要能瞭解十字交乘法並非萬靈丹，簡易形如 x^2-x-1，x^2+x-1 或 x^2+2x+3 都不能適用，因而有必要將來進一步學習配方法。

六、教學活動：

活動一：溫故知新

步驟 1：在乘法公式的單元，如何將已知數轉變成一次未知數的乘法公式呢？請見下列各例：

例 1：(1) $(x+1)(x+2)=x\cdot x+(1+2)x+1\cdot 2=x^2+3x+2$

(2) $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$

(3) $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$

(4) ④ $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$

就是x分別取代乘法公式中的已知數a或c而得出含未知數x的乘法公式。

例 2：(1) $(2x+1)(x+3)=(2x)\cdot x+(6+1)x+3=2x^2+7x+3$

(2) $(2x-1)(x+3)=2x^2+5x-3$

(3) $(2x-1)(x-3)=2x^2-7x+3$

(4) $(2x+1)(x-3)=2x^2-5x-3$

也都是分別用 $2x$與x取代乘法公式中已知數a或c的實例。

例 3：(1) $(2x+2)(x+5)=(2x)\cdot x+(10+2)x+10$

$$=2x^2+12x+10=2(x^2+6x+5)$$

(2) $(3x-3)(2x+1)=3(x-1)(2x+1)=3(2x^2-x-1)$

(3) $(-3x+3)(2x-1)=-3(x-1)(2x-1)=-3(2x^2-3x+1)$

(4) $(5x+4)(-2x-2)=(5x+4)\cdot[(-2)(x+1)]$

$$=-2(5x+4)(x+1)=-2(5x^2+9x+4)$$

隨堂練習 1：仿上面各例，將下列各式乘開表成二次三項式

ax^2+bx+c ：

(1) $(x-2)(x+3)=$ ________________

(2) $(5x+1)(2x+7)=$ ________________

(3) $(2x+1)(-5x+5)=$ ________________

步驟 2：將步驟 1 中各例左、右位置對調改寫成

$ax^2+bx+c=(px+q)(mx+n)$：

由例 1～例 3 知：

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ 或 $(x+2)(x+1)$；

$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$；

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$；

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$；

$2x^2+7x+3=(2x+1)(x+3)$；

$2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$；

$2x^2-7x+3=(2x-1)(x-3)$；

$2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)$；

$2x^2+12x+10=2(x^2+6x+5)=2(x+1)(x+5)$；

$6x^2-3x-3=3(2x^2-x-1)=3(x-1)(2x+1)$；

$-6x^2+9x-3=-3(2x^2-3x+1)=-3(x-1)(2x-1)$；

$-10x^2-18x-8=-2(5x^2+9x+4)=-2(5x+4)(x+1)$

一般說來，將上方各左式改寫成最右式的等式，就是二次三項式的因式分解。

隨堂練習 2：仿照步驟 1，將下列各式作因式分解：

(1) $x^2+x-6=$________________

(2) $10x^2+37x+7=$________________

(3) $-10x^2+5x+5=$________________

（7，24，25）。

有的有哪些組？____________________

沒有的又有哪些組？____________________

步驟 2：在前面的空白中，有$a^2+b^2=c^2$的關係者，稱（a，b，c）為**畢氏三元數組**，否則就不是畢氏三元數組。

步驟 3：畢氏三元數組（3，4，5），（6，8，10），（9，12，15），…，（$3k$，$4k$，$5k$），k為自然數，它們之間有何關係，請寫出來。 ____________________________

步驟 4：請檢查（3，4，5），（6，8，10），（7，24，25）這三組的畢氏三元數組中，它們的三元數組（a，b，c）中之最大公因數各是多少？_______________

最大公因數都是1的三自然數稱為互質，而畢氏三元數組（a，b，c），其三元數a，b，c互質時，就被稱為本原畢氏三元數組。所以（3，4，5），（5，12，13），（7，24，25）都是本原畢氏三元數組，而畢氏三元數組（9，12，15），（10，24，26），（21，72，75）中，它們都不是本原畢氏三元數組。

步驟 5：（正式下定義）三自然數組（a，b，c）中，若$a^2+b^2=c^2$且a，b，c的最大公因數是1，即a，b，c互質時，就稱（a，b，c）為**本原畢氏三元數組**。

隨堂練習 1：檢查看下列有哪些自然數組為本原畢氏三元數組？

(1)（1，2，3） (2)（2，3，4） (3)（15，20，25）

(4)（15，8，17） (5)（21，20，29） (6)（20，48，52）

活動二：本原畢氏三元數組（a，b，c）之基本性質

步驟 6：本原畢氏三元數組（3，4，5），（5，12，13），（7，24，25）任意一組中的二元數之間的最大公因數都是______；亦就是任意兩數都是互質，亦即這些本原畢氏三元數組的任意二數，兩兩互質。

步驟 7：若（a，b，c）為一本原畢氏三元數組，則最大公因數（a，b），（a，c）及（b，c）都是 1；其理由說明如下：

(1) 設$h=(a\ ,b)$，則$a=hs$，$b=ht$（s，t為自然數），由$a^2+b^2=c^2$得$h^2(s^2+t^2)=c^2$，故h^2可整除c^2，所以h可整除c，即$c=hr$（r為自然數）。

於是最大公因數（a，b，c）＝h又因（a，b，c）＝1可得h＝1，因此a、b的最大公因數就是 1；即a、b互質。

(2) 同理令$k=(a\ ,c)$，$k>1$，則$a=ku$，$b=kv$，u、v為自然數且$u<v$，再由$b^2=c^2-a^2=k^2(v^2-u^2)$得k^2可整除b^2，於是k可整除b，即最大公因數（a，b，c）＝$k>1$，也違反了原先最大公因數（a，b，c）＝1 的規定，故a、c的

步驟3：一般二次三項式作因式分解的原則：

(1) 如果最大公因數（a，b，c）＝l而且$l>1$，則可先提出l因數將ax^2+bx+c寫成$l(a'x^2+b'x+c')$，此時a'，b'，c'的最大公因數（a'，b'，c'）＝1，稱a'，b'，c'為互質的三整數，再對$a'x^2+b'x+c'$作因式分解。例如：

$2x^2+12x+10=2(x^2+6x+5)=2(x+1)(x+5)$

(2) 如果a是負整數，則可先提出（－1），將原式改寫成（－1）與二次項係數為正整數的二次三項式，再作因式分解。例如：$-10x^2-18x-8=(-1)(10x^2+18x+8)$

$=(-1)\cdot 2(5x^2+9x+4)=-2(5x+4)(x+1)$

另如：$-x^2+3x-2=-(x^2-3x+2)=-(x-1)(x-2)$

(3) 如果整係數二次三項式ax^2+bx+c中a為正整數且三正數a，$|b|$，$|c|$是互質，則將ax^2+bx+c寫成$(px+q)(mx+n)$，即$ax^2+bx+c=(px+q)\cdot(mx+n)$ 並令p，q，m，n都是整數且p，m為正整數將右式乘開出來並跟左式比較得

$$\begin{aligned} a &= p\times m \\ c &= q\times n \qquad (*) \\ b &= pn+gm \end{aligned}$$

於是可將a分解成二個正整數$p\times m$之積，c分解成二個整數$q\times n$之積使得$b=pn+qm$上式（*）亦可簡記成：

$$\begin{array}{ccc} p & & q \\ & \times & \\ m & & n \end{array}$$

其中直行 p，m 表 $a=p\times m$，另一直行表 $b=q\times n$ 而交叉相乘部分表示 $pn+qm=b$。例如，分解 $2x^2+7x+3$：

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \times & \\ 1 & & 3 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{2\times3+1\times1=7} \end{array}$$

故得 $2x^2+7x+3=(2x+1)(x+3)$

另如，分解 $2x^2-7x+3$：

$$\begin{array}{ccc} 2 & & (-1) \\ & \times & \\ 1 & & (-3) \\ \hline \multicolumn{3}{c}{2\times(-3)+1\times(-1)=-7} \end{array}$$

故得 $2x^2-7x+3=(2x-1)(x-3)$

再如分解 $6x^2-9x+3$：

先改寫成 $3(2x^2-3x+1)$

$$\begin{array}{ccc} 2 & & (-1) \\ & \times & \\ 1 & & (-1) \\ \hline \multicolumn{3}{c}{2\times(-1)+1\times(-1)=-3} \end{array}$$

得 $2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)$

而 $6x^2-9x+3=3(2x-1)(x-1)$

進一步分解$15x^2+2x-8$

$$\begin{array}{ccc} 5 & & 4 \\ & \times & \\ 3 & & (-2) \\ \hline \end{array}$$

$5\times(-2)+3\times4=2$

得 $15x^2+2x-8=(5x+4)(3x-2)$

以上將整係數二次三項式分解成兩個一次式乘積的方法被稱作**十字交乘法**。

隨堂練習 3：用十字交乘法分解下列各式：

(1) $x^2+x-6=$________　(2) $10x^2+37x+7=$________

(3) $15x^2-2x-8=$________　(4) $4x^2+4x-24=$________

(5) $4x^2+12x+9=$________　(6) $4x^2-12x+9=$________

步驟 4：幾種特別情形

(1) 在一次項$b=0$時，除了可用十字交乘法外，更可用平方差公式如 $4x^2-1=(2x)^2-1^2=(2x+1)(2x-1)$；

$x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$；

$16x^2-9=(4x)^2-3^2=(4x+3)(4x-3)$；

$9x^2-81=9(x^2-9)=9(x+3)(x-3)$。

隨堂練習 4:請用十字交乘法或平方差公式作下列各式的因式分解:

(1) $4x^2-16=$________　(2) $36x^2-49=$________

(3) $-4x^2+16=$____________ (4) $-36x^2+81=$____________

(2)另一種特別情形：常數項$c=0$，此時十字交乘法不再適用，僅須提出x項即可，如下各例：

$8x^2+3x=x(8x+3)$；$8x^2-3x=x(8x-3)$；$-8x^2+3x=-x(8x-3)$；

$-8x^2-3x=-x(8x+3)$；$-8x^2+16x=-8(x^2-2x)=-8x(x-2)$。

活動二：提取公因式作因式分解

步驟 5：上面缺常數項，僅須提取公因數後，即可得到它們的因式分解；因此提取公因式也常被用來作因式分解。例如：

$x^2+5x+4=x^2+(x+4x)+4=(x^2+x)+(4x+4)=x(x+1)+4(x+1)=(x+1)(x+4)$

$x^2-5x+4=x^2-(x+4x)+4=(x^2-x)-(4x-4)=x(x-1)-4(x-1)=(x-1)(x-4)$

$3(x+1)(x+2)-2(x+1)=(x+1)(3x+6-2)=(x+1)(3x+4)$

隨堂練習 5：用提出公因式法作下列各式的因式分解

(1) $5(x+1)^2-10(x+1)=$____________________

(2) $(3x+1)(x-4)+(2x-5)(3x+1)=$____________________

(3) $(-x+1)(2x+3)+(x-1)(5x-1)=$____________________

步驟 6：提取公因式法：

例如分解$(x-2y)x-(2y-x)y$：

得原式$=(x-2y)x+(x-2y)y=(x-2y)(x+y)$

另如分解$a(x-y)^2-bx(x-y)$：

得原式$=(x-y)[a(x-y)-bx]=(x-y)[(a-b)x-ay]$

再如分解$(ax+b)(4x+6)-(ax+b)(5x-3)$

提取公因式$(ax+b)$得：

$(ax+b)[(4x+6)-(5x-3)]=(ax+b)(-x+9)=-(ax+b)(x-9)$ 或 $-(x-9)(ax+b)$

上面的方法還可將a，b或y視為一般的常數呢！

隨堂練習 6：

(1) 因式分解$(x-3)(x+5)-(x-3)(-2x+6)$

(2) 因式分解$(2x+3)(3x+1)-(9x+2)(2x+3)$

活動三：泛十字交乘法（視x以外的文字為常數）

如因式分解$21x^2-xy-2y^2$：

$$\begin{array}{cc} 3 & (-1) \\ 7 & 2 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{3\times2+(-1)\times7=-1} \end{array}$$

得原式$=(3x-y)(7x+2y)$

另如因式分解$9a^2x^2-10abx+b^2$

$$\begin{array}{cc} 9 & (-1) \\ 1 & (-1) \\ \hline \multicolumn{2}{c}{-9-1=-10} \end{array}$$

得原式$=(9ax-b)(ax-b)$

隨堂練習 7：

(1) 因式分解$9x^2-10ax+a^2$

(2) 因式分解$3a^2+4ab+b^2$ （提示：視a為未知數，常數為b及b^2）

活動四：直接利用公式法

步驟 7：直接利用和的平方公式：

例如分解 $x^2+4x+4=(x+2)^2$

另分解 $25x^2+20x+4=(5x)^2+2\cdot(5x)\cdot 2+2^2=(5x+2)^2$

再如分解 $81x^2+18x+1=(9x)^2+2\cdot 9x\cdot 1+1^2=(9x+1)^2$

步驟 8：直接利用差的平方公式：

例如分解 $x^2-6x+9=(x-3)^2$

另如分解 $36x^2-36x+9=9(4x^2-4x+1)=9(2x-1)^2$

步驟 9：整理之後利用平方差公式：

例如分解 $(4x^2-x)+(x-1)=4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$

另如分解 $x^2-y^4=x^2-(y^2)^2=(x+y^2)(x-y^2)$

隨堂練習 8：利用乘法公式分解下列各式：

(1) $9x^2+30xy+25y^2=$ __________________

(2) $25x^2-30xy+9y^2=$ __________________

(3) $\frac{1}{4}x^2-1=$ __________________

活動五：應用實例

步驟 10：求出 x 之值使得 $(x-1)(x+3)=0$

說明：視 x 為某些已知數，$(x-1)(x+3)=0$

就是 $x-1=0$ 或 $x+3=0$

亦即 $x=1$ 或 $x=-3$

步驟 11：求出 x 之值使 $2x^2-7x+3=0$

說明：先用十字交乘法把 $2x^2-7x+3$ 作因式分解

$2x^2-7x+3=(2x-1)(x-3)$

故欲使 $2x^2-7x+3=0$，即使 $(2x-1)(x-3)=0$

於是得 $2x-1=0$ 或 $x-3=0$，亦即 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=3$

步驟 12：求出 x 之值使 $4x^2-1=0$

說明：由於 $4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$

故 $4x^2-1=0$ 相當於 $2x+1=0$ 或 $2x-1=0$

亦即 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-\frac{1}{2}$，可簡寫成 $x=\pm\frac{1}{2}$

步驟 13：求出 x 之值使 $9x^2+6x+1=0$

說明：由於 $9x^2+6x+1=(3x+1)^2$

故 $9x^2+6x+1=0$ 相當於 $3x+1=0$

亦即 $x=-\frac{1}{3}$（等根）

步驟 14：能否求出 x 之值使 $x^2-x-1=0$？

說明：用十字交乘法試試可否將x^2-x-1作成二個一次式的

因式分解

嘗試常數項－1 的各種因式為＋1 或－1

而x^2係數 1＝1×1

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ & \times & \\ 1 & & (-1) \\ \hline \end{array}$$

1×（-1）＋1×1＝0≠-1（一次項係數）

因此x^2-x-1到現在所學的方法，無法使用十字交乘法作二個一次式的分解，再想以上其他各種方法更不可行，故知利用上面各種作法都無法將x^2-x-1寫成二個一次式乘積，於是到目前為止還不能求出x之值使$x^2-x-1=0$。

隨堂練習 9：

(1) 求出x之值使$3x^2-7x+2=0$

(2) 求出x之值使$x^2-6x+9=0$

(3) 能否找出x之值使$x^2+2x+3=0$？

(4) 能否找出x之值使$x^2+x-1=0$？

活動六：（結論）

(一) 你們理解了整係數二次三項式因式分解的意義與方法嗎？（如果有困難回頭查查看）

(二) 你們知道如何利用十字交乘法作因式分解嗎？

(三) 你們知道提取公因式作因式分解的時機與方法嗎？

(四) 利用因式分解法，你能舉二、三個例子求得x之值滿足 $ax^2+bx+c=0$ 嗎？

(五) 你知道有些易如x^2-x-1，x^2+x-1，x^2+2x+3無法表示成二個整係數一次式的乘積嗎？

(六) 你能充分的應用和、差的平方公式或平方差公式作一些特別形式的二次三項式的分解嗎？

如果你們能一一完整正確又簡要的回答上面各問題，那麼恭喜你們已充分圓滿地達成本單元的各項目標了！不過記得還要利用課後時段完成指定作業的問題呢！

教學活動參考解答：

活動一：

隨堂練習 1： (1) x^2+x-6；(2) $10x^2+37x+7$；(3) $-5(2x^2-x-1)$ 或 $-10x^2+5x+5$。

隨堂練習 2：(1) $(x+3)(x-2)$；(2) $(5x+1)(2x+7)$；(3) $-5(2x+1)(x-1)$。

隨堂練習 3：(1) $(x+3)(x-2)$；(2) $(5x+1)(2x+7)$；(3) $(5x-4)(3x+2)$；(4) $4(x+3)(x-2)$；(5) $(2x+3)(2x+3)$ 或 $(2x+3)^2$；(6) $(2x-3)(2x-3)$ 或 $(2x-3)^2$。

隨堂練習 4：(1) $4(x+2)(x-2)$；(2) $(6x+7)(6x-7)$；(3) $-4(x+2)(x-2)$；(4) $-9(2x+3)(2x-3)$。

活動二：

隨堂練習 5：(1) $5(x+1)(x-1)$；(2) $(3x+1)(3x-9)$ 或 $3(3x+1)(x-3)$；

(3) $(x-1)(3x-4)$。

隨堂練習 6：(1) $(x-3)(3x-1)$；(2) $-(6x+1)(2x+3)$。

活動三：

隨堂練習 7(1) $(9x-a)(x-a)$；(2) $(3a+b)(a+b)$。

活動四：

隨堂練習 8：(1) $(3x+5y)^2$；(2) $(5x-3y)^2$；

(3) $\frac{1}{4}(x+2)(x-2)$ 或 $(\frac{1}{2}x+1)(\frac{1}{2}x-1)$。

活動五：

隨堂練習 9：(1) $(3x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ 或 $x=2$；

(2) $(x-3)^2 \Leftrightarrow x=3$（等根）；

(3) 否，理由是：沒有方法能使 x^2+2x-3 表成二個整係數一次式的乘積；

(4) 否，理由仿上。

七、指定作業：

1. 請用十字交乘法（或其它方法），求出下列各二次式的因式分解：

(1) x^2+5x+4　(2) x^2-4x-5　(3) $5x^2+4x-1$

(4) $5x^2-6x+1$　(5) $2x^2-7x-4$　(6) $4x^2-7x-2$

(7) $x^2+10x+25$　(8) $2x^2-20x+50$　(9) $3x^2-5x$

(10) $3x^2+5x$　(11) $2r^2+13r-7$　(12) $9m^2-1$

*(13) x^4-x^2-2　*(14) x^4+x^2-2

2.因式分解下列各式(不能再分解者,請指出來):

(1) $-x^2+6x-5$　(2) $-2x^2+7x+4$　(3) $-3x^2+10x$

(4) $-3x^2-10x$　(5) x^2+2x-1　(6) $2x^2+x-5$

3.試求下列各式中 x 之值:

(1) $6x^2-x-2=0$　(2) $x^2-11x+30=0$

(3) $x^2+3x-28=0$　(4) $2x^2+13x-7=0$

(5) $6x^2-x=0$　(6) $9x^2-1=0$

指定作業參考解答:

1. (1) $(x+1)(x+4)$;(2) $(x+1)(x-5)$;(3) $(5x-1)(x+1)$;

(4) $(5x-1)(x-1)$;(5) $(2x+1)(x-4)$; (6) $(4x+1)(x-2)$;

(7) $(x+5)^2$;(8) $2(x-5)^2$;(9) $x(3x-5)$;(10) $x(3x+5)$;

(11) $(2r-1)(r+7)$;(12) $(3m+1)(3m-1)$;(13) $(x^2-2)(x^2+1)$;

(14) $(x^2+2)(x+1)(x-1)$。

2. (1) $-(x-1)(x-5)$;(2) $-(2x+1)(x-4)$;(3) $-x(3x-10)$;

(4) $-x(3x+10)$;(5)(6)都不能用本單元的各種方法分解(或許部分學生用 $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{8}$ 或 $\sqrt{41}$ 而說開方開不出整數而說它們

都不能分解也可以。）

3. (1) $\because 6x^2 - x - 2 = (3x-2)(2x+1)$ $\therefore 6x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ 或 $-\frac{1}{2}$

(2) $x^2 - 11x + 30 = (x-5)(x-6) = 0$ 故 $x = 5$ 或 6

(3) $x^2 + 3x - 28 = (x+7)(x-4) = 0$ 故 $x = -7$ 或 4

(4) $2x^2 + 13x - 7 = (2x-1)(x+7) = 0$ 故 $x = \frac{1}{2}$ 或 -7

(5) $6x^2 - x = x(6x-1) = 0$ 故 x=0 或 $\frac{1}{6}$

(6) $9x^2 - 1 = (3x+1)(3x-1) = 0$ 故 $x = \pm\frac{1}{3}$（也可以這樣作：

$9x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9}$; 開方得 $x = \pm\frac{1}{3}$）

八、教學注意事項：

1. 教學時間安排建議如下：教學說明約 5 分鐘（含引起動機），活動一到步驟 3 及其後之隨堂練習 3 約 35 分鐘，活動一步驟 4 約 5 分鐘，指定第一節的課後作業（含提示）約 5 分鐘；活動二約 15 分鐘，活動三約 8 分鐘，活動四約 7 分鐘，活動五及隨堂練習 9 約 10 分鐘，活動六作提問結論（含指定作業）約 5 分鐘。

2. 作業第 13、14 兩題可以不必全面點作，如果點作則可能需要加以適當提示。

3. 本單元的參考答案基本上幾乎都不是唯一方式，我們鼓勵學生盡量地寫成這些樣子，以養成將來書面作答的好習慣而已。

4. 我們也可以如下的方式配合十字交乘法來作因數分解，如：

因式分解$5x^2+8x+3$：

說明：$\because 5x^2+8x+3=\dfrac{25x^2+40x+15}{5}=\dfrac{(5x+y)(5x+z)}{5}$

得 $y+z=8, yz=15$

$yz=15=5\times 3=(-5)\times(-3)=15\times 1=(-15)\times(-1)$

仿十字交乘法檢驗其和為 8 的可能

僅有 5、3 這一對，故得

$$5x^2+8x+3=\frac{(5x+5)(5x+3)}{5}=\frac{5(x+1)(5x+3)}{5}=(x+1)(5x+3)$$

另如：因式分解$6x^2+5x-6=\dfrac{(6x+y)(6x+z)}{6}$

$y+z=5, yz=6\times(-6)=-36$

選出乘積為－36 又其和為 5 的，僅有 9、－4 這一對，

故得

$$6x^2+5x-6=\frac{(6x+9)(6x-4)}{6}=\frac{3(2x+3)\cdot 2(3x-2)}{6}=(2x+3)(3x-2)$$

以上提供教學參考，並不一定要採用。

5. 本單元之隨堂練習題及作業題數相對多，但基本上係數都不大，且相似題型亦占多數，因此二節教學時數內，配合課外

作業演練達成本單元的教學目標，應能順利達陣。

6. 在各活動教學時，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

7. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 李政憲（2013）。乘法公式，陳昭地主編：國民中學數學教材原型C冊。新北市：國家教育研究院。

2. Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 77: A method for factoring trinomial of the form ax^2+bx+c. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 344-345). Columbus, OH：Merrill.

主題2—3：配方法與一元二次方程式的公式解

一、授課對象：國中八年級上學期學生　　　　**撰寫者：**陳彥廷

丁斌悅

陳昭地

二、先備知識：

(一) 已熟練對乘法公式與多項式的四則運算的應用。

(二) 已能進行（利用提公因式、利用乘法公式、利用十字交乘法）二次三項式的因式分解。

(三) 已熟悉二次方根的意義。

三、教學目標：

(一) 藉由整係數二次三項式十字交乘法因式分解的溫故知新過程，瞭解運用十字交乘法進行因式分解的局限性。

(二) 熟悉二次方根的意義與計算技能。

(三) 能用因式分解或配方法，解出二次方程式，並用來解題。

四、教學時間：90分鐘(二節課)

五、教學說明：

就國中階段學生而言，求方程式的解是代數領域中很重要的課題。本單元，是在學生已學習因式分解（含提公因式法、乘法公式、十字交乘法）、二次方根的單元後，讓學生利用這些技巧進行一元二次方程式的解題。然而，大多數的二次方程式，都能利用「十字交乘法」將方程式中的多項式進行因式分解，進而求出

方程式的根。但是，有些問題則無法以此方法獲得其解。因此，本單元介紹以「配方法」的方式，將二次方程式化成$(x+q)^2=r$的形式，進而求出此二次方程式的解。如此一來，我們便可解決所有一元二次方程式的所有問題了。

六、教學活動：

活動一：溫故知新

步驟 1：十字交乘法因式分解

在「利用十字交乘法做因式分解」的單元中，我們學習到利用「多項式乘法」的概念將整係數的一元二次多項式分解成兩個整係數的一次因式乘積。因此，我們可以假設，若x^2+ax+b可分解為$(x+p)(x+q)$兩個整係數一次因式的乘積，那麼，我們可以寫成：

$$x^2+ax+b=(x+p)(x+q)=x^2+(p+q)x+pq$$

透過比較係數，我們即可得知：$a=$_______；$b=$_______。

但是，如果整係數一元二次多項式的二次項係數不為 1 ，那麼，我們就可寫成：

$$ax^2+bx+c=(px+q)(rx+s)=prx^2+(ps+qr)x+qs$$

透過比較係數，我們即可得知：$a=$_______；$b=$_______；$c=$_______。

隨堂練習 1：請將以下各二次三項式因式分解成一次因式的乘積：

(1) $x^2+4x+3=$ ____________________

(2) $x^2-6x+5=$ ____________________

(3) $5x^2-17x+6=$ __________________

(4) $-3x^2+4x-1=$ __________________

步驟 2：根的意義

在「平方根的意義」單元中，我們學習到：

當 $a\geq 0$，若 $b^2=a$，則稱 b 是 a 的平方根(也稱為二次方根)。例如：$3^2=9$；$(-3)^2=9$，所以，我們稱 3 和－3 是 9 的平方根。換言之，我們可說：若 $a>0$，則 a 的平方根為_______和_______；若 $a=0$，則 a 的平方根為_______。

隨堂練習 2：試求下列各數的平方根：

(1) 25 的平方根＝________________

(2) $\sqrt{9}$ 的平方根＝________________

此外，我們在七年級「一元一次方程式的列式與求解」單元中得知，如果有一個數能夠滿足一個方程式（也就是讓方程式的等號成立），那麼，我們稱這個數是此方程式的「解」。例如：我們分別將「1」和「2」代入 $x^2-3x+2=0$ 的方程式中，發現都可使方程式等號成立，我們就稱「1 和 2 為方程式 $x^2-3x+2=0$ 的

解」，也稱「1 和 2 為方程式 $x^2-3x+2=0$ 的根」。然而，我們從「二次三項式的因式分解」得知：

$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=0$，運用「如果 A×B＝0，則 A、B 兩數中至少有一數為 0」的性質，可得知，$x=2$ 或 $x=1$，即為方程式 $x^2-3x+2=0$ 的解，也稱為方程式 $x^2-3x+2=0$ 的根。

因此，我們發現，要求二次方程式的根（或解），可以先將二次方程式左邊的二次三項式進行因式分解，再由因式分解而獲得的一次因式的乘積，判斷其根（或解）即可完成。例如：

如果我們要求 $x^2+x-12=0$ 的根（或解），我們可先將這個二次方程式左邊的 x^2+x-12，利用十字交乘法得到__________。因此，$x^2+x-12=$________×________＝0，即可得知：此二次方程式的根（或解）為 $x=$__________或 $x=$________。

隨堂練習 3：試求下列各一元二次方程式的根（或解）：

(1) $5x^2+3x-14=0$　　(2) $\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}=0$

但是，是不是所有的二次方程式都能用十字交乘法的方式將此二次方程式左邊的二次三項式進行因式分解而獲得其根（或解）呢？接下來，我們來看這個例子：$x^2-x-1=0$，我們會發現，無論我們怎麼試，都無法將 x^2-x-1 以十字交乘法因式分解成兩個

整係數一次因式的乘積。可見，「以十字交乘法因式分解二次三項式，進而解一元二次方程式」的策略，無法解所有的一元二次方程式問題。

以下，我們將要來介紹，當「十字交乘法」無法解決一元二次乘式的求根問題時，我們可以利用「配方法」的策略來解決。

活動二：平方根求解

步驟 3：利用平方根求解

有一些二次方程式缺少一次項，例如：$x^2-5=0$，這種二次方程式僅需將其整理成$x^2=5$的形式，再利用「平方根」的概念，就可得到$x=$_______。

隨堂練習 4：試求下列各一元二次方程式的根（或解）：

(1) $x^2-21=0$　　(2) $x^2-4=0$

步驟 4：利用完全平方式求解

有些二次方程式，等號左邊的式子已將含有未知數x的多項式化為完全平方式的形式。例如：$(x-5)^2-7=0$。那麼，我們可以利用「等量公理」，使得$(x-5)^2=7$，再利用「平方根」的概念，解出$x-5=$_________。因此，得知$x=$_____________。

隨堂練習 5：試求下列各一元二次方程式的根（或解）：

(1) $(3x+2)^2-8=0$。 (2) $(2x-7)^2-4=8$。

由上面的練習可以發現，如果能將一元二次方程式化成形如 $(px+q)^2=r$ 的形式，我們就可以利用平方根的概念進行求解的問題。但是，形如 $ax^2+bx+c=0$ 的一元二次方程式，如何轉換成為 $(px+q)^2=r$ 的形式呢？接下來我們要學習這類的轉換。

活動三：配成完全平方式

接下來，我們先來練習如何將一個式子依照「和的平方公式」或「差的平方公式」配成完全平方式。首先，我們來思考，如果一個 x 的二次多項式能轉換成 $(x+p)^2$ 的形式，那麼，這個多項式會是 $x^2+2px+p^2$ 的形式。因此，若要將一個二次多項式轉換成為「完全平方式」，那麼，它的常數項必為「某數」的平方；而一次項係數則為 2×「某數」。

例如，試分別將適當的數填入□中，使得該二次多項式可以配成一個完全平方式，並將這個二次多項式寫成完全平方式的形式：

(1) $x^2+6x+\square$

$=x^2+2\times$_____$+\square$

所以，我們得知

$\square=($_____$)^2=$_____

∴原式$=($_______$)^2$

(2) $x^2-5x+\square$

$=x^2-2\times$_____$+\square$

所以，我們得知

$\square=($_____$)^2=$_____

∴原式$=($_______$)^2$

隨堂練習 6：試分別將適當的數填入□中，使得該二次多項式可以配成一個完全平方式，並將這個二次多項式寫成完全平方式的形式：

(1) $x^2+9x+\square$　(2) $x^2+\frac{1}{4}x+\square$　(3) $x^2-\frac{4}{3}x+\square$

透過上面的練習，我們可以得到下面的結論：

1. 形如 x^2+mx 的式子，只需加上____________後，即可配成完全平方式 $(x+\frac{m}{2})^2$ 。
2. 形如 x^2-mx 的式子，只需加上____________後，即可配成完全平方式 $(x-\frac{m}{2})^2$ 。

活動四：利用配方法解一元二次方程式

步驟 5：二次項係數為 1 的配方法求解

當我們學會將一個二次多項式配成完全平方式之後，我們就可以針對那些無法利用「十字交乘法」求解的一元二次方程式進行解題。我們以前面所提到的 $x^2-x-1=0$ 為例：

首先，我們將方程式等號左邊的二次多項式整理成一個完全平方式：

則$\because x^2-x-1=0$

$\therefore x^2-x=1$..（移項）

$\therefore \left(x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2$.............(1)（配方）

接著，再將整理後的方程式(1)轉換成為「左邊是完全平方式，右邊是一個常數的方程式形式」：

$\therefore$(1)式可化為$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

最後，利用「平方根」的概念，我們即可求出此二次方程式的根（或解）：

$\therefore x-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{5}{4}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore x=$________________，即為二次方程式的根（或解）。

隨堂練習 7：試求下列一元二次方程式的根（或解）：

(1) $x^2-9x+5=0$　　　　(2) x^2+8x+2

步驟 6：二次項係數不為 1 的配方法求解

但是，並非我們所遇到的一元二次方程式其二次項係數均為 1 我們舉 $2x^2+5x-1=0$ 為例：

首先，將方程式等號兩邊「同時除以二次項係數」，得到一個新的方程式 $x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0$ 。

接著，我們可遵循前面所介紹的方法，將$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0$化成「等號的左邊為完全平方式，等號的右邊為常數」的形式：

$$\therefore x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=(x^2+\frac{5}{2}x)-\frac{1}{2}$$

$$=(x^2+2\times\underline{\quad}\,x+(\underline{\quad})^2)-\frac{1}{2}-(\underline{\quad})^2$$

$$=(x+\underline{\quad\ })^2-\underline{\qquad}=0$$

$$\therefore (x+\underline{\quad\ })^2=\underline{\qquad}$$

$\therefore x=$_______________，即為二次方程式$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0$的根（或解）。

在此，我們要思考一件事，二次方程式$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0$的根也是二次方程式$2x^2+5x-1=0$的根嗎？我們將上面所獲得的答案代入$2x^2+5x-1=0$，會發現這兩個根也符合$2x^2+5x-1=0$，也就是說，二次方程式$x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}=0$與二次方程式$2x^2+5x-1=0$有相同的根（或解）。

隨堂練習 8：試求下列一元二次方程式的根（或解）：

(1) $-\frac{1}{3}x^2+2x+1=0$　　(2) $2x^2-4x-30=0$

活動五：一元二次方程式的公式解

從前面經驗我們發現，當我們無法使用因式分解求一元二次方程式的解時，可以使用配方法來求得其解。接下來，我們要透過配方法的方式，來導出一個能求出一元二次方程式解的常用公式：

若 $ax^2+bx+c=0$ ，$a>0$

那麼，我們將等式兩邊同時除以 a 可得 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ ，

將常數項移項，可得 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

則 $x^2+2\cdot x\cdot$ ____ $+($____$)^2=-\frac{c}{a}+($____$)^2$

$=-\frac{c}{a}+$ ______

$=$ ____________ $=\frac{(\_\_\_\_)}{(2a)^2}$

$\therefore (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$

$\therefore x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}}$

$\therefore x=\frac{-b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

情形 1.當 $b^2-4ac>0$ 時，$x=$ ________

情形 2.當 $b^2-4ac=0$ 時，$x=$ ________

情形 3.當 $b^2-4ac<0$ 時，因為「任意實數的平方均大於或等於 0」，

因此，我們無法找到一個實數解 x，使得 $x=\sqrt{b^2-4ac}$。

因此，我們說方程式__________。

隨堂練習 9：試利用公式解的方法求下列一元二次方程式的根(或解)

(1) $x^2+4x+1=0$　　(2) $x^2+x+4=0$

活動六：結論

最後，請您自我檢視下列各問題：

(一) 如果有一個二次多項式可以利用「十字交乘法」因式分解成兩個一次式的乘積，你能做到嗎？

(二) 你能理解平方根的意義嗎？

(三) 你能求出形如 $(px+q)^2=r$ 之二次方程式的根（或解）嗎？

(四) 你能運用「配方法」將一個形如 $ax^2+bx+c=0$ 的二次方程式化成 $(x+q)^2=r$ 的形式，進而求出此二次方程式的解嗎？

(五) 你能運用「公式解」求出形如 $ax^2+bx+c=0$ 的二次方程式的解嗎？

綜合來說，未來，當我們遇到一個二次方程式時，我們可以先以「十字交乘法」的方式將二次方程式中的二次三項式進行因

式分解；若此法無法分解時，再用「配方法」的方式，將這個二次方程式化成$(x+q)^2=r$的形式，進而求出此一元二次方程式的解。此外，我們也可以利用「公式解」的方法，求出任意二次方程式的解。如此一來，我們便可解決所有一元二次方程式的所有問題了。

教學活動參考答案

活動一：

步驟 1：$a=p+q$；$b=pq$；$a=pr$；$b=ps+qr$；$c=qs$。

隨堂練習 1：(1)$(x+3)(x+1)$；(2)$(x-5)(x-1)$；(3)$(5x-2)(x-3)$；(4)$(-3x+1)(x-1)$。

步驟 2：$\sqrt{a}$；$-\sqrt{a}$；$\pm\sqrt{a}$。

隨堂練習 2：(1)± 5；(2) $\pm\sqrt{3}$。

步驟 2：$(x+4)(x-3)$；$(x+4)$；$(x-3)$；4、-3。

隨堂練習 3：(1)$x=-2,\dfrac{7}{5}$；(2) $x=-1,\dfrac{5}{6}$。

活動二：

步驟 3：$\pm\sqrt{5}$。

隨堂練習 4：(1) $x=\pm\sqrt{21}$；(2) $x=\pm 2$。

步驟 4：$\pm\sqrt{7}$；$5\pm\sqrt{7}$。

隨堂練習 5：(1) $\dfrac{-2\pm 2\sqrt{2}}{3}$；(2) $\dfrac{7\pm 2\sqrt{3}}{2}$

活動三：

(1)3；□＝3^2＝9；$(x+3)^2$；(2) $\dfrac{5}{2}$；□＝$\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$；$\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2$

隨堂練習 6：(1)$\left(\dfrac{9}{2}\right)^2$；$\left(x+\dfrac{9}{2}\right)^2$；(2) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^2$；$\left(x+\dfrac{1}{8}\right)^2$

(3) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2$；$\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2$

1. $\left(\dfrac{m}{2}\right)^2$；2. $\left(-\dfrac{m}{2}\right)^2$

活動四：

步驟 5：$x=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。

隨堂練習 7：(1) $\dfrac{9\pm\sqrt{61}}{2}$；(2) $-4\pm\sqrt{14}$

步驟 6：$\dfrac{5}{4}$；$\dfrac{5}{4}$；$\dfrac{5}{4}$；$\dfrac{5}{4}$；$\dfrac{33}{16}$；$\dfrac{5}{4}$；$\dfrac{33}{16}$；$-\dfrac{5}{4}\pm\dfrac{\sqrt{33}}{4}$。

隨堂練習 8：(1) $3\pm 2\sqrt{3}$；(2)5 或－3

活動五：

$\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{b^2}{4a^2}$，$\dfrac{-4ac+b^2}{4a^2}$，b^2-4ac $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

$\dfrac{-b}{2a}$，沒有（實數）解。

隨堂練習 9：(1) $-1\pm\sqrt{3}$；(2)無實數解。

七、指定作業：

1. 解下列各方程式：

(1) $\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{6}x-1=0$ ；　　(2) $-0.5x-0.1x^2=0.5$

2. 已知一個正數比其倒數的兩倍多 1，求此正數。

3. 解方程式 $3x+\frac{2}{x}=6$ 。

4. 已知 $3x^2-6x-21$ 可化為 $3(x+p)^2+q$ 的形式，求 p、q 的值為何？求 $3x^2-6x-21=0$ 的解。

指定作業參考解答

1. (1) $\frac{2}{3}$ ，－3； (2) $\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$ 。

2. 2。　3. $\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$ 。 4. p＝－1、q＝－24；$1\pm2\sqrt{2}$ 。

八、教學注意事項：

1. 本單元教學活動時間建議如下：活動一進行（含隨堂練習）約 25 分鐘；活動二進行約 20 分鐘；其餘部分進行一節課（指定作業與部分練習可視教學進度提供給有興趣的學生自行研究）。

2. 關於活動五，我們是以 $a>0$ 的情形去探討 $ax^2+bx+c=0$ 的

公式解。在此，我們介紹一種可以避免 a 的正負，來推導 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：

將方程式兩邊同時乘以 $4a$ 得到：$4a^2x^2+4abx+4ac=0$

我們試圖將左式化為完全平方式：

$\therefore (2ax)^2+2\cdot 2ax\cdot b+b^2=b^2-4ac$

$\therefore (2ax+b)^2=b^2-4ac$

則 $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$\therefore 2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$ ，則 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

3. 建議教師進行教學後，可提醒學生運用不同的解法去驗算其得到的解。
4. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
5. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 陳昭地主編（2014）。國民中學數學教材原型 A 冊（修訂版）。新北市：國家教育研究院。
2. 教育部（2008）。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部。

3. 國中各版本第三冊數學課本。

4. Posamentier, A. S., Stepelman, J. (1986). Teaching Secondary School Mathematics(2nd. Ed. pp.355-356). Columbus, OH：Merrill.

5. 關於一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，a、b、c 為整數，$a\neq0$，若要求其解，除了本節所教授的配方法之外，以下提出三種特殊的作法提供教師參考：

(1)差異性分割（splitting the Difference）

設 x_1 與 x_2 為一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根，

則方程式可寫成 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 或 $(x-x_1)(x-x_2)=0$

由此可知，$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ 以及 $x_1x_2=\frac{c}{a}$

我們令 $x_1=\frac{-b}{2a}+N$，這裡 N 為有理數

則 $x_2=\frac{-b}{2a}-N$

$\therefore \frac{c}{a}=x_1x_2=\left(-\frac{b}{2a}+N\right)\left(-\frac{b}{2a}-N\right)$

經由化簡可得 $N=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

因此，可得 $x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(2) 同步方程法（Method of Simultaneous Equations）

我們先以一個例子 $x^2-7x+12=0$ 進行說明：

首先，我們知道 $x_1+x_2=7$ ，$x_1x_2=12$ ，

將兩根和平方得到：$(x_1+x_2)^2=49$ ....(1)

將兩根的乘積乘以－4 得到：$-4x_1x_2=-48$ ..(2)

將上兩式相加(1)+(2)得到：$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=49-48=1$

將上式左邊化簡得到 $(x_1-x_2)^2=1$

$\therefore x_1-x_2=\pm\sqrt{1}=\pm1$

但是已知 $x_1+x_2=7$ ，

經由解聯立方程式可得 $x_1=4$ ，$x_2=3$ 。

接下來，我們再來思考方程式 $ax^2+bx+c=0$

則兩根和的平方為 $(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=\dfrac{b^2}{a^2}$

兩根乘積乘以－4 得到：$-4x_1x_2=\dfrac{-4c}{a}$

將上述二式相加可得 $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{4c}{a}$

$\therefore (x_1-x_2)^2=\dfrac{b^2-4ac}{a^2}$

$\therefore x_1-x_2=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$ ，並且 $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$

$$\therefore x_1 \text{或} x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(3)減根法（Method of Root Reduction）

同樣地，我們還是先以實例 $x^2-7x+12=0$ 進行說明：

假設 $r=x-n$ ，則 $x=r+n$ ....(1)

那麼， $x^2=(r+n)^2=r^2+2rn+n^2$ ....(2)

我們將(1)(2)代入原方程式得到：

$(r^2+2rn+n^2) - 7(r+n)+12=0$

$r^2+r(2n-7)+(n^2-7n+12)=0$

若 $2n-7=0$ ，也就是 $n=\dfrac{7}{2}$ ，

則上式可化簡為 $r^2+(n^2-7n+12)=0$

將 $n=\dfrac{7}{2}$ 代入上式得到：

$r^2+(\dfrac{49}{4}-7\times\dfrac{7}{2}+12)=0$

$r^2=\dfrac{49}{4}-12=\dfrac{1}{4}$ ，則 $r=\pm\dfrac{1}{2}$

則方程式的兩根 $x_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}=4$ ， $x_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}=3$

接下來，我們再來思考方程式 $ax^2+bx+c=0$

假設 $r=x-n$ ，則 $x=r+n$ ....(1)

那麼， $x^2=(r+n)^2=r^2+2rn+n^2$ ....(2)

我們將(1)(2)代入原方程式 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 得到：

$$(r^2+2rn+n^2)+\frac{b}{a}(r+n)+\frac{c}{a}=0$$

經整理 $r^2+r(2n+\frac{b}{a})+(n^2+\frac{bn}{a}+\frac{c}{a})=0$

為了減去 r 項，我們令 $2n+\frac{b}{a}=0$ 或 $n=\frac{-b}{2a}$

$$\therefore r^2+(n^2+\frac{bn}{a}+\frac{c}{a})=0$$

也可說 $r^2=-(n^2+\frac{bn}{a}+\frac{c}{a})$

但是，因為 $n=\frac{-b}{2a}$

$$\therefore r^2=-(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a^2}+\frac{c}{a})$$

$\therefore r^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ ，則 $r=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore x=r+n=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

主題2－4：比較三種平均數

一、授課對象：國中八年級上學期學生　　　　**撰寫者：**丁斌悅
陳彥廷
陳昭地

二、先備知識：

(一) 知道簡易不等式的性質。

(二) 熟悉平方差公式、和的平方公式、差的平方公式，並知道等式之左、右互換位改寫等式。

(三) 知道提公因式的基本方法。

(四) 知道1，4，9，16，25，36，…，81，100，121，144，169，196，225，…，等都是完全平方數。

(五) 知道$x^2=r(r>0)$恰有一個正的平方根$\sqrt{r}$，並且知道r是完全平方數或兩完全平方數的商，則$\sqrt{r}$為正整數或正分數。

(六) 知道當$a>0$，$b>0$時，$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$。

(七) 知道能用電算器按出$\sqrt{r}$取到三位小數的近似值。

(八) 知道複利計算的本利和算法。

(九) 知道簡易代數式的和或差之運算規則。

三、教學目標：

(一) 知道兩正數的算術平均數(A)、幾何平均數(G)及調和平均數(H)的定義。

(二) 能由實例中發現$A\geq G\geq H$及$G^2=A\times H$的關係。

(三) 能理解 A≥G 及 G^2＝A×H 的理由。

(四) 能從(三)的關係，找出 G≧H 的理由，因而能獲得 A≥G≥H 的關係式。

(五) 能再進一步由更多的實例，計算 A、G 及 H，進而檢驗 A≥G≥H 及 G^2＝A×H 的正確性。

(六) 能知道 A、G 及 H 在日常生活應用的實例並體會它們在數學學習上的重要性。

四、教學時間：90 分鐘或 110 分鐘(二節課或二節半)

五、教學說明：

本主題旨於引入三種基本而重要的平均數（A、G 及 H）並發現 A≥G≥H 及 G^2＝A×H 為最終目標。為此，活動一開始為引起學生的好奇心與需求，並使用電算器輔助計算這三種平均數。假設某校一位很有民主風範而有點裝糊塗的數學老師，在學期終了時，設計了五種平均數要求學生自行投票決定最有利於自己的一種算法。這位老師對這一班學生總共進行兩次的數學學習評量，每位學生自己第一次的評量成績記作a分，第二次則記作b分，建議終結的數學平均有如下的五種計算方法：

$$A=\frac{a+b}{2}，B=\frac{a+3b}{4}，C=\frac{3a+b}{4}，G=\sqrt{ab} 及 H=\frac{2ab}{a+b}$$

老師很清楚知道這班學生上次評量成績的大致分布情況：

(1) 兩次都沒有零分的情形而且恰有半數的學生第二次高於第一次。

(2) 每位學生兩次的高低分大致相差不多但沒有兩次同分的情形。

(3) 比較特殊的少數學生，高、低分之差距大了些，但是最低分的 3 倍一定大於其最高分。

這位老師心知肚明，在這樣成績分布下，假如每位學生計算都正確合乎要求（有小數位數者，依四捨五入法取到小數第二位），最高分恰有一半是採用 B 案或 C 案的公式，另最低分也恰有半數是採用 C 案或 B 案的公式（參閱教學注意事項 2），他的班級學生數有 32 位，表面上為了讓學生自行投票表明民主負責的態度，一定會發生贊成採用 B 案一定會是 16 票，此時對其他 16 位卻是最不利，同樣會發生贊成 C 案者也是另外 16 位，而對剛剛投票贊成採用 B 者最不利；於是老師就藉口否決了 B 案和 C 案；而留下 A、G 及 H 三案。（註：A 是英文 Arithmetic Mean 的字頭，G 是英文 Geometric Mean 的字頭，H 則是 Harmonic Mean 的字頭。）並且 A＞G＞H 對全部 32 位都會同時同樣的不等式。於是落入老師心理預備使用 A 案的圈套，並引發老師要求比較這三種平均數的主題教學的強烈動機慾望，隨即拋開 B 案與 C 案，而能專心注意盯注 $A \geq G \geq H$ 及 $G^2 = A \times H$ 的關係。

接著採用波利亞的怎樣解題之步驟設計繼續的活動或步驟終於完成 $A \geq G \geq H$，$G^2 = A \times H$ 之充分完整的解說，繼而來加強這些關係的印象與需求，用幾個生活實例印證來解說，期望本主題的教學能欣喜歡樂心情達成原先預設的教學目標。

六、教學活動：

活動一：先提出下面一個計算平時成績接近事實的問題，讓學生有所發現想不到的關係式。

步驟 1：假設上面的既具智慧或有點裝糊塗的數學老師提出兩次數學平時評量成績，如何使用既民主又能令全體 32 位學生能欣然接受的結算方法：

假設一位學生第一次成績得 a 分，第二位成績得 b 分，終了結算方法建議採如下五種方案的一種，並向學生公布這五案：

$$A = \frac{a+b}{2}，B = \frac{a+3b}{4}，C = \frac{3a+b}{4}，G = \sqrt{ab} \text{ 及 } H = \frac{2ab}{a+b}$$

並說可以在兩分鐘內自行計算並記錄各人這五種方案的結果，聲明有小數點時，記錄到整數以後可用分數或用四捨五入法記錄，經過兩分鐘，全體學生在被允許使用電算器的輔助下都完全正確的依序地記錄出個人的五案的得分（A、B、C、G、H）。

投票活動於是開始，不出老師所料，投贊成 B 案或 C 案都恰好有半數 16 位，投不贊成 B 案或 C 案也恰好都有 16 位，於是老師就把這兩種極端情形 B、C 兩案排除，剩下 A、G、H 三案。接著再讓學生投票，結果發現贊成 A 案者為全數 32 票，而最不贊成者則為 H 案也都是全數 32 票，你知道什麼原因嗎？

隨堂練習 1：

(1) 假設班上的名叫<u>中明</u>的學生第一次得分 25 分第二次得分 64 分，那麼他的計算結果 A＝______分，G＝______分，H 又是等於多少？______分

(2) 假設班上另一位學生名叫<u>志強</u>的，第一次得分 81 分，第二次得分 49 分，那麼他的計算結果應該是 A＝______分，G＝分，而 H＝______分。

(3) 假設你也是該班的學生，第一次得分 81 分，第二次的 100 分，那麼你核計的結果是 A＝$\frac{181}{2}$分或 90.5 分，G＝90 分及 H＝$\frac{16200}{181}$或 89.50（A、H 可以用假分數表示）那麼可得到 A＞G＞H 及 G^2＝A×H 的關係嗎？兩者都是______；只有一個是______；兩者都不是______（請打∨或×）

(4) 假設你班上的另一位同學也在該班，他的第一次與第二次

得分都是 90 分，那麼他計算的結果 A＝_____，G＝_____，H＝_____。

從上面的投票結果及隨堂練習 1 各小題後，老師請班上的學生問他們有什麼發現？隨著一位反應靈明又快速名叫<u>大明</u>的學生，首先舉手搶答：老師我發現了 $A \geq G \geq H$ 及 $G^2 = A \times H$ 的關係，隨即老師讚賞式的微笑表示贊成<u>大明</u>的答案！為更肯定這個不等式，隨後要求學生再作以下的隨堂練習 2。

隨堂練習 2：

(1) 若 $a=20$，$b=80$，則 A＝_____，G＝_____，H＝_____。

(2) 若 $a=8$，$b=2$，則 A＝_____，G＝_____，H＝_____。

(3) 若 $a=b=95$，那麼 A＝_____，G＝_____，H＝_____。

(4) 若 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{8}$，則 A＝_____，G＝_____，H＝_____。

(5) 若 $a=\frac{1}{80}$，$b=\frac{1}{20}$，則 A＝_____，G＝_____，H＝_____。

作完以上的隨堂練習 2 各小題後，老師再問全班同學所得的結果是否符合下列兩個關係式？

$$A \geq G \geq H \text{ 及 } G^2 = A \times H$$

學生全部都點點頭表示都同意這兩個式子。接著老師就說，同學你

們是否更有信心了；隨意的兩正數a與b永遠有下列的關係式了！

（*）A≥G≥H 及 G^2＝A×H

步驟 2：老師接著說，事實上，上面的關係式（*）是正確，不僅如此，假設$a\geq b$時，還有下面的關係式：

$$a\geq A，H\geq b$$

合併起來 G^2＝A×H，及$a\geq A\geq G\geq H\geq b$，其中 A 稱為$a$，$b$二正數的**算術平均數**，G 稱為$a$，$b$二正數的**幾何平均數**，而 H 稱為$a$，$b$二正數的**調和平均數**。它們恆有 G^2＝A×H，A≥G≥H 的關係！同學你們贊成或欣賞這個關係式嗎？

步驟 3：上面你們所發現的關係式，到目前為止，頂多只能說是猜測或臆測，會不會產生例外？因此我們就要更完整的說明：對任意二正數a、b，為什麼 A≥G≥H 及 G^2＝A×H 的關係式一定正確。要更一般性地說出理由，避免以偏蓋全、或有例外發生。

步驟 4：同學想了幾分鐘，默默無語，終於有同學舉手發問，老師，那麼要如何對上面的關係式作出完整的說明？於是老師就用下列的活動二，分成 3 個步驟說明給學生看！

活動二：請說明 G^2＝A×H 及 A≥G≥H 的方法。

老師說，請看下列 5～7 三個 步驟來解說。

步驟 5：直接了當的先計算 G^2＝A×H：由 $A=\dfrac{a+b}{2}$， $H=\dfrac{2ab}{a+b}$

於是 A×H＝$\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab$

得其結果ab，即為$G=\sqrt{ab}$的平方，所以得到 G^2＝A×H，

那麼完成一個等式的說明。

步驟 6：再看比較頭痛的部分，只要經過巧妙的處理，再去說明

A≥G 就不難了：

因為$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$相當於

$(\frac{a+b}{2})^2\geq(\sqrt{ab})^2$　即　$(a+b)^2\geq 4ab$

而上式又相當於

$a^2+2ab+b^2\geq 4ab$　即　$a^2-2ab+b^2\geq 0$　亦即　$(a-b)^2\geq 0$

而$(a-b)^2\geq 0$　對任意二正數a，b恆正確。

於是將上面的說明反方向進行，由$(a-b)^2\geq 0$

得$a^2-2ab+b^2\geq 0$，

再得$a^2+2ab+b^2\geq 4ab$，又得$\frac{(a+b)^2}{4}\geq ab$

隨即可得$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$（稱作**算幾不等式**）

步驟 7：合併以上兩步驟得 G^2＝A×H 及 A≥G

亦即$\frac{G}{A}=\frac{H}{G}$及$\frac{G}{A}\leq 1$故得$\frac{H}{G}=\frac{G}{A}\leq 1$，即得$\frac{H}{G}\leq 1$

於是 G≥H，故得 A≥G≥H。

老師隨即說：以上三個步驟（5～7）就是 G^2＝A×H 與 A≥G≥H

的完整理由。

步驟 8：老師再問學生，你們能舉出一些生活上的實例嗎？學生東猜西猜，好像沒有定見，於是老師說請同學看一看下面活動中的日常生活實例！

活動三：請看下列個實例：

例 1：算術平均（數）是常聽到的日常用語。例如：買賣一部汽車，賣主原定價 42 萬元，而買主認為太高了！一再盤算後出價 38 萬，兩方討價還價一番後，雙方終於同意以 40 萬元成交。40 萬元就是 38 萬元與 42 萬元的算術平均數，雙方各退讓同樣的一步：各增減 2 萬元。

例 2：在數學上使用幾何平均數的機會將來你們會發現出現很頻繁；其生活上使用的時機，就以銀行業來說就常會遇上。例如，某一銀行牌告 100 萬元三年期的借款採用年利率 5%並以複利計息，並公告每一年計算一次；某人因購屋之需，就向該銀行借了 100 萬元；那麼從一開始借款起，其本利和逐年計算如下：（單位：萬元）

100，$100\left(1+\frac{5}{100}\right)$，$100\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$，$100\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$

其中的第二年期滿 $100\left(1+\frac{5}{100}\right)$ 就是其前後一年的 100，

$100(1+\frac{5}{100})^2$的幾何平均數；同樣地，第二年期滿的

$100(1+\frac{5}{100})^2$是 100（$1+\frac{5}{100}$）與三年到期應還的本利和

$100(1+\frac{5}{100})^3$之幾何平均數。

例 3：較難舉例的是調和平均數，不過看看下面的例子，就可知道了！

提問：汽車上山的平均速率為 36 公里/小時，下山沿原路返回，平均速率為 64 公里/小時，請問上、下山一趟，全程的平均速率是每小時多少公里呢？

說明：全程平均速率等於全程距離除以所花的時間。於是可將此山路的距離設成 l 公里，全程則為 $2l$ 公里，而將上山所花的時間記成a小時，而下山所花的時間為b小時，可以得到上、下山一趟的平均速率記成$\frac{2l}{a+b}$公里/小時。

由上式可計算如下：

$$\frac{2l}{a+b}=(2l)\div(a+b)=2\div(\frac{a}{l}+\frac{b}{l})=\frac{2}{\frac{a}{l}+\frac{b}{l}}$$

而$\frac{a}{l}$和$\frac{b}{l}$是上、下山的平均速率，

因此，$\frac{2l}{a+b}$恰好是上、下山平均速率$\frac{a}{l}$和$\frac{b}{l}$的調和平均數

此題中，$\dfrac{2l}{a+b}=\dfrac{2}{\dfrac{a}{l}+\dfrac{b}{l}}$

$=\dfrac{2}{\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{64}}$ （$\dfrac{l}{a}=36,\dfrac{a}{l}=\dfrac{1}{36};\dfrac{l}{b}=64,\dfrac{b}{l}=\dfrac{1}{64}$）

$=\dfrac{2}{\dfrac{64+36}{36\times64}}$

$=\dfrac{2\times36\times64}{64+36}$

$=\dfrac{2\times36\times64}{100}=46.08$

最後的答案 46.08 公里/小時，也就是$\dfrac{2\times64\times36}{64+36}$公里/小時

所以上、下山一趟，此輛汽車全程的平均速率為上、下山各平均速率的調和平均數。

隨堂練習 3：

(1) 騎自行車上、下山的平均速率分別為 8 公里/小時與 18 公里/小時，請問這次自行車上、下山一趟，全程平均速率為每小時多少公里？

(2) 請各組學生，再舉一個調和平均數之日常生活實例。

結合上面的生活實例應該還是不少。將來你們還有許許多多生活以外的其他數學上的實例呢！另外，算幾不等式的數學實例

與應用，更會在未來的數學課或數學評量試題中出現，它是初等數學最重要的不等式之一，不可不注意呢！

活動三：（總結論）

(一) 二正數a，b的算術平均數為$A=\dfrac{a+b}{2}$，幾何平均數為$G=\sqrt{ab}$而調和平均數為$H=\dfrac{2ab}{a+b}$。

(二) 三個平均數 A、G 及 H，通通介於a，b之間，在數線上標示出二正數a，b，表示 A 的點恰好在a與b的正中間，表示 G 的點在 A 的左方，而表示 H 的點又在 G 的左方，它們都落在代表a，b之點為端點的線段上。

(三) 二正數a，b的平均數 A、G 及 H，$A\geq G\geq H$ 及 $G^2=A\times H$。G 是 A 與 H 的幾何平均數，而 $A\geq G$ 則為很重要而被簡稱為算幾不等式。

(四) 期待學生能充分理解這三種平均數在生活上的使用時機之實例。

教學活動參考解答：

活動一：

隨堂練習 1： (1) A＝44.5 或$\dfrac{89}{2}$（分），G＝40（分），H＝$\dfrac{1600}{89}$或約為 35.2 分。

(2) A＝65 分，G＝63 分，H＝$\frac{7938}{130}$或$61\frac{4}{65}$或約為 61.0 分

(3) A＝$\frac{181}{2}$或 90.5(分)，G＝90 分，H＝$\frac{16200}{181}$或$89\frac{91}{181}$

或約 89.50(分)。是橫線上”∨”其它打”×”，若跟上面不一樣時，應再要訂正錯誤之處，以能得到完全正確的結果。

(4) A＝G＝H＝90(分)。

隨堂練習 2：(1) A＝50，G＝40，H＝32。

(2) A＝5，G＝4，H＝3.2。

(3) A＝$\frac{5}{16}$，G＝$\frac{1}{4}$，H＝$\frac{1}{5}$。

(4) A＝$\frac{5}{160}$，G＝$\frac{1}{40}$，H＝$\frac{1}{50}$。

活動三：

隨堂練習 3：(1)全程平均速率為$\frac{2\times8\times18}{8+18}=\frac{288}{26}=11\frac{2}{26}=11\frac{1}{13}$

(公里/小時)(或約 11.07,11.08，或 11.1 公里/小時) 。

(2)參考指定作業第 6 題及教學注意事項 7(開放式的問題)。

七、指定作業：

1. 求下列各組數的算術平均數 A，幾何平均數 G 及調和平均數 H:

(1)（100，100） (2)（81，169）

(3)（125，5） (4)（3，3）

2. (1) 1之各小題中，符合A≧G≧H之關係嗎？

(2) 同(1)，符合G^2＝A×H嗎？

(3) $a \geq b \geq 0$，並令（a，b）或（b，a）分別為第1題中的數對，檢驗各題之A，G及H有沒有符合$a \geq A \geq G \geq H \geq b$。

3. 說明活動一中，假如學生人數8人，其中每人兩次成績完全不同，且均無0分的情形，除了少數學生外，其他每人的兩次成績相對穩定，而這少數的人的成績，兩次高低分數比值都在3倍的範圍內，請問用原來數學老師計算平時成績的方式B案或C案，有多少人B＜H或C＜H？又有多少人B＞H或C＞H？理由為何？

4. 在二正數數對（a，b）中，恆有$1 \leq \frac{a}{b} \leq 3$或$1 \leq \frac{b}{a} \leq 3$。試說明在$a \leq b \leq 3a$的情形公式算法$C = \frac{3a+b}{4}$或在$b \leq a \leq 3b$的情形公式算法$B = \frac{a+3b}{4}$分別跟$H = \frac{a+b}{2}$比較時是否可得B或C≦H？為什麼？

5. 有一位農人將其存款的一部分，分給兄妹兩人，兄分得80萬元，妹分得20萬元；後來妹覺得很不公平，建議父親採用三種方法A、G及H之任意方法公平分配給妹妹，兄妹兩

人要分得同樣款項公平分配以後，如果有多剩餘的款項就還給爸爸，不足的由爸爸來補足。請分別回答下列各問題：

(1) 若爸爸採算術平均 A 的方式，爸爸可以拿回多少錢？

(2) 若爸爸採幾何平均 G 的方式，爸爸又可拿回多少錢？

(3) 若爸爸採調和平均 H 的方式，爸爸拿回多少錢？

(4) 兄妹二人經過以上三種方法之任何一種對誰最有利？

6. 有一對父子慢速晨跑同樣圈數的操場跑道，已知父親的平均速率為 3.6 公里/小時，兒子的平均速率為 6.4 公里/小時，請問這對父子這一次的晨跑平均速率為每小時多少公里？

指定作業參考解答：

1. (1)（100，100），A＝G＝H＝100。

(2)（81，69），A＝75，G＝63，H＝$\frac{567}{25}$。

(3)（125，5），A＝65，G＝25，H＝$\frac{125}{13}$。

(4)（3，1），A＝2，G＝$\sqrt{3}$，H＝$\frac{3}{2}$。

2. (1)經 1 之(1)～(4)各題之 A、G、H 比較都有 A≥G≥H 的關係。

(2)同理(1)～(4)各題也都有 G^2＝A×H 之等式。

(3)符合 $a\geq$A≥G≥H$\geq b$，其中符合 $a\geq b$。

3. 分別各有 4 人之 B 或 C＜H，0 人 B 或 C≥H。

理由如下：不妨設$a<b$，$C=\dfrac{3a+b}{4}$，$H=\dfrac{2ab}{a+b}$

$$C\ge H \Leftrightarrow \frac{3a+b}{4}\ge\frac{2ab}{a+b}\Leftrightarrow(3a+b)(a+b)\ge 8ab$$

$$\Leftrightarrow 3a^2+4ab+b^2\ge 8ab\Leftrightarrow 3a^2-4ab+b^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(3a-b)(a-b)\ge 0\Leftrightarrow(b-a)(b-3a)\ge 0$$

但$b>a\Leftrightarrow b-a>0$為已知，故知$C\ge H\Leftrightarrow b-3a\ge 0$即$b\ge 3a$

且等式成立$\Leftrightarrow b-3a=0$即$b=3a$，故在問題的假設，有半數 4 人之 B＜H，另半數 4 人之 C＜H，而沒有人（即 0 人）之 B≥H 或 C≥H 的情形。

4. 由 3 的情況易知 C≤H；同理，可得 B≤H（仿照上面 3 的計算）。

5. (1) A＝50（萬元），可拿回 0 元。

(2) G＝40（萬元），可拿回 20 萬元。

(3) H＝32（萬元），可拿回 36 萬元。

(4) 對妹妹有利。

6. $\dfrac{2\times3.6\times6.4}{3.6+6.4}=4.608$（公里/小時）。

八、教學注意事項：

1. 教學時間建議（以二節課為例）：教學說明約 10 分鐘，活動一約 35 分鐘，活動二約 15 分鐘，活動三（含隨堂練習 3）約 15 分鐘，活動四約 5～10 分鐘，指定作業（含提示）約 5

～10 分鐘。

2. 學生可能問起當$a<b$時，A＞G＞H，此時如何知道 C 與 H 的大小關係？又如何知道 C 與 G 的大小關係？

(1) 當$b>3a$時，$C>H$；當$b=3a$時，$C=H$；當$b<3a$時，$C<H$。

以$b>3a$為例：$C=\dfrac{3a+b}{4}$，$H=\dfrac{2ab}{a+b}$；

$$C-H=\frac{3a+b}{4}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(3a^2+4ab+b^2)-8ab}{4(a+b)}=\frac{3a^2-4ab+b^2}{4(a+b)}=\frac{(3a-b)(a-b)}{4(a+b)}$$

因為$3a<b$且$a<b$，所以$C-H=\dfrac{(3a-b)(a-b)}{4(a+b)}>0$，得$C>H$。

(2) 而當$b>9a$時，$C>G$；當$b=9a$時，$C=G$；當$b<9a$時，$C<G$。

以$b>9a$為例：$C=\dfrac{3a+b}{4}$，$G=\sqrt{ab}$；

$$C>G\Leftrightarrow\frac{3a+b}{4}>\sqrt{ab}\Leftrightarrow(\frac{3a+b}{4})^2>(\sqrt{ab})^2$$

$$\Leftrightarrow(\frac{3a+b}{4})^2>ab\Leftrightarrow(3a+b)^2>16ab\Leftrightarrow 9a^2+6ab+b^2>16ab$$

$$\Leftrightarrow 9a^2-10ab+b^2>0\Leftrightarrow(9a-b)(a-b)>0$$

因為$9a<b$且$a<b$，所以可得$C>G$。

3. 設數線上代表a，b之點分別為 P，Q（如圖 1）

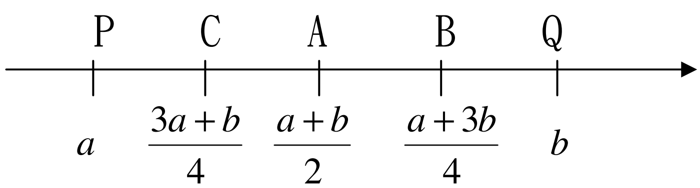


圖 1

則代表 A 的點恰為$\overline{PQ}$的中點，而代表 B 的點恰為$\overline{AQ}$的中點，

代表 C 的點也恰為$\overline{PA}$的中點。由此易知

$a<\frac{3a+b}{4}<\frac{a+b}{2}<\frac{a+3b}{4}<b$ 。

4. 有關 G≥H 的理由，亦可說明如下(兩種)：

(1) 因為 G^2＝A×H 及 A≥G，即$\underline{G}\times\underline{\underline{G}}=\underline{A}\times\underline{\underline{H}}$ 及 A≥G，故得 G≥H。

(2) $\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}\Leftrightarrow ab\geq(\frac{2ab}{a+b})^2\Leftrightarrow(a+b)^2\geq 4ab\Leftrightarrow(a-b)^2\geq 0$ 。

5. 算幾不等式之簡易應用：$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$對任意二正數$a$，$b$恆成立。

理由：$\frac{(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})}{2}\geq\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}$（算幾不等式）及，即$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{1}$亦即

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$且等號成立$\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow a=b$ 。

6. 活動三之上、下山汽車平均速率已知，要求上、下一趟此汽車全程的平均速率為上、下山平均速率的調和平均數。要求全體學生都會理解並記得這個實用實例，隨堂練習 3 亦然。

7. 在例 3 調和平均數的實用時機完成後，在時間允許下，可補充下面例題：

職業籃球賽中，有一場球賽之一位球員，上半場投籃a次進b次，下半場投籃c次進d次（a、b；c、d都大於 0 的整數），請問這一位球員這場球賽的上半場、下半場及全場命中比例各是多少？它們三者之間有何關係？

解：上半場的命中率為$\frac{b}{a}$，下半場為$\frac{d}{c}$，全場命中比例為$\frac{b+d}{a+c}$

令$\frac{b}{a}\geq\frac{d}{c}$，則$\frac{b}{a}\geq\frac{b+d}{a+c}\geq\frac{d}{c}$，當$a=c$時，全場命中比例

$\frac{b+d}{2a}=\frac{1}{2}(\frac{b}{a}+\frac{d}{c})$為上、下半場命中比例的算術平均數。而當

$b=d$時，全場命中比例$\frac{2b}{a+c}=\frac{2(\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c})}{(\frac{b}{a}+\frac{b}{c})}$，故為上、下場命中比

例的調和平均數。備註：上面$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$中a、b、c、d都是原先

次數，保持原狀，不可約分。

8. 在各主題活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
9. 在教學期間，進行各活動或隨堂練習時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵或適當的加分，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說或再一次加強相關題材的教學。

九、教學參考資料：

1. 波利亞（1957）。怎樣解題，閻育蘇譯，第 1～30 頁。臺北市：九章出版社。
2. Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 73: Averaging rates - the harmonic mean. In A. S. Posamentier, & J.

Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 337-339). Columbus, OH：Merrill.

3. Posamentier, A. S. & Stepelman, J. (1986). Unit 98: Comparing means. In A. S. Posamentier, & J. Stepelman (Eds.) Teaching Secondary School Mathematics, (2nd ed.) (pp. 384-386). Columbus, OH：Merrill.

4. 丁斌悅、陳彥廷、陳昭地（2012）。巧排真分數，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 A 冊，第 273-288 頁。新北市：國家教育研究院。

5. 陳昭地（2012）。三角形數與平方數，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 A 冊，第 307-320 頁。新北市：國家教育研究院。

6. 如圖 2，梯形 ABCD 中，$\overline{AB}//\overline{CD}$，$\overline{AB}=a$，$\overline{CD}=b$，$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於$O$，$\overleftrightarrow{EF}$為過$O$的且於底邊平行的直線，交兩腰於 E 與 F，令$\overline{EF}=h$；G、H 為兩腰的中點，$\overline{GH}=d$，則$d=\dfrac{a+b}{2}$，$h=\dfrac{2ab}{a+b}$分別為上、下底長的算術平均數與調和平均數（參見參考資料 2），因為$a\neq b$，故$d>h$，所以$\overline{GH}$必然不通過兩對角線的交點。

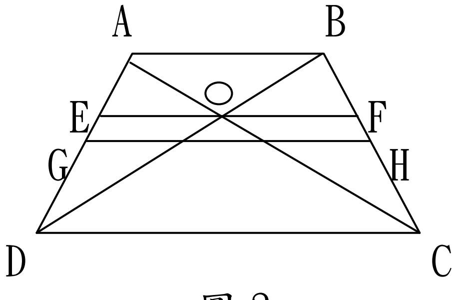


圖 2

7. 如圖 3，ΔABC 中，$\angle C$ 的內角平分線 $\overline{CD}$ 交 $\overline{AB}$ 於 D，$\angle C$ 的外角平分線 $\overline{CE}$ 交 $\overline{AB}$ 的延長線於 E，則因 ΔACD 與 ΔBCD 是分別以 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BD}$ 為底邊，過 C 點的高相同，故 $\dfrac{\Delta ACD}{\Delta BCD}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$；再看 ΔACD 與 ΔBCD 是分別以 $\overline{AC}$，$\overline{BC}$ 為底邊，過 D 作 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 邊上的高，則由 D 為平分線 $\overline{CD}$ 上的一點，故此二高相等，於是又得 $\dfrac{\Delta ACD}{\Delta BCD}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$；故得 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$，同理 $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$ 合併得 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$，再令 $r=\overline{AD}$，$s=\overline{AB}$，$t=\overline{AE}$，則可得 $\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{s}$ 即 $s=\dfrac{2rt}{r+t}$，s 為 r 與 t 的調和平均數。

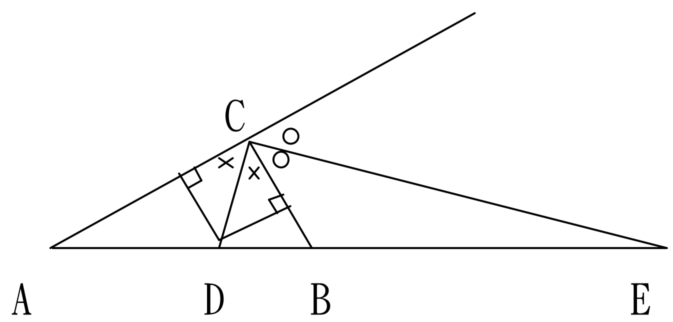


圖 3

8. 三個正數 a，b 及 c 之算術平均 A，幾何平均數 G，與調和平均 H 可以如法泡製地去定義，此時 A＝$\dfrac{a+b+c}{3}$，G＝$\sqrt[3]{abc}$，H＝$\dfrac{3abc}{ab+bc+ca}$，仍可用暴力計算得出 A≥G 再利用 A≥G 經過適當的代換推得 G≥H，但 G^2 與 A×H 未必相等。例如：1，2，4

三數的 A＝$\frac{7}{3}$，G＝2，H＝$\frac{24}{2+4+8}=\frac{24}{14}=\frac{12}{7}$，A＞G＞H，

G^2＝4＞$2\times\frac{12}{7}$＝A×H。由算幾不等式 A≧G 易得$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3$對任意三個正數$a$，$b$，$c$恆成立，此$\frac{(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c})}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}=\sqrt[3]{1}=1$，

推得$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3$。

9. 如圖 4，半圓O中，圓心O，直徑$\overline{AB}=a+b$，其中$\overline{AP}=a$，$\overline{PB}=b$，$a\neq b$，$\overline{RP}\perp\overline{AB}$於 P，R 在半圓上，$\overline{PS}\perp\overline{OR}$於 S，利用直角$\Delta ABR$及直角$\Delta ORP$之母子相似性質，可得$\overline{PR}=\sqrt{ab}$，$\overline{RS}=\frac{2ab}{a+b}$，半徑$\overline{AO}=\frac{a+b}{2}$，又由$\overline{AO}=\overline{OR}>\overline{PR}>\overline{RS}$，可知$a$，$b$二數的算術平均數＞$a$，$b$的幾何平均數＞$a$，$b$的調和平均數之幾何詮釋。

（注：直角ΔORP中，$\overline{PR}^2=\overline{OR}\times\overline{RS}\Rightarrow\overline{RS}=\frac{\overline{PR}^2}{\overline{OR}}$。）

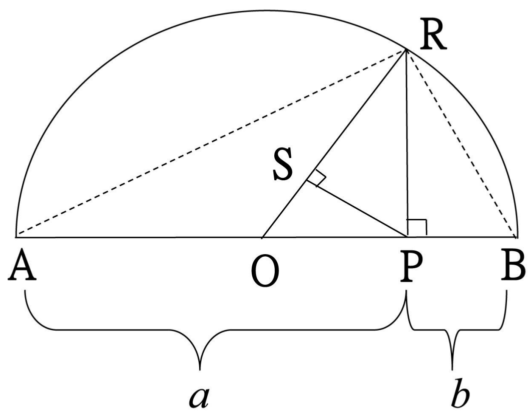


圖 4

10. 活動一中，a，b平均計法$\frac{a+3b}{4}$或$\frac{3a+b}{4}$都是a，b的一種加權平均數；a，b一般權數分別r，s（r，$s>0$，且$r+s=1$），的加權平均數定義成$ra+sb$；而幾何平均數 G＝$\sqrt{ab}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$是屬於$a$，$b$的一種冪平均，一般指數$r$，$s$（$r$，$s>0$，$r+s=1$）之冪平均定義成$a^r b^s$，利用微積分導數的工具可得$ra+sb\geq a^r b^s$之不等式，它是算幾不等式的推廣；冪平均在經濟學常被用到，例如商業上，Cobb-Douglas 生產函數常長成$f(x,y)=kx^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$，（$k$為常數，$x$代表勞力成本，$y$代表資本，單位：元）就由冪平均$x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$所決定，例如取$k=100$時，就得$g(x,y)=\frac{f(x,y)}{100}=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$，而由$rx+sy\geq x^r y^s (r=\frac{1}{4}, s=\frac{3}{4})$故知$\frac{x+3y}{4}\geq x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$，等式成立$\Leftrightarrow x=y$得$g(x,y)\leq\frac{x+3y}{4}$之加權冪平均不等式。

主題 2—5：二次函數的概念及其圖形

一、授課對象：國中八年級下學期學生　　　　**撰寫者**：丁斌悅

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　　陳彥廷

(一) 會描繪形如 $y=ax^2$ 的二次函數圖形。

(二) 會描繪形如 $y=ax^2+k$ 的二次函數圖形。

(三) 會利用配方法解一元二次方程式的概念。

三、教學目標：

(一) 能描繪形如 $y=a(x-h)^2$ 的二次函數圖形。

(二) 能描繪形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的二次函數圖形。

(三) 能將形如 $y=ax^2+bx+c$ 的二次函數利用「配方法」整理成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並描繪其圖形。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

「函數」概念對國中階段學生而言，是很重要的單元。在七年級階段，我們運用描點的方式繪製一次函數的圖形，並介紹了簡單的二次函數（形如 $y=ax^2+b$ ，$a,b\in R$ ）及其圖形。前一章節，我們又介紹二次三項式的因式分解，併利用配方法求一元二次方程式的解。現在，我們要站在過去所學的基礎之上，首先複習 $y=x^2$ 、 $y=ax^2$ 、 $y=ax^2+k$ 的描點繪製圖形；接續，進入正式課程，介紹運用配方法，將 $y=ax^2+bx+c$ 轉化成

$y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並描繪其圖形；進而求二次函數的頂點坐標、對稱軸等概念。

六、教學活動：

活動一：溫故知新

步驟 1：描繪簡單二次函數 $y=x^2$ 與 $y=-x^2$ 的圖形

在本教材原型 B 冊的「函數」單元中，我們學習到運用描點的方式描繪 $y=x^2$ 的圖形。首先，我們先選擇一些簡單的整數作為 x 的值，然後計算出 y 值：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	…									

註：請填入上表各空格。

接著，我們將上表中數對（x，y）所對應的點描繪到坐標平面上（如下圖 1）。

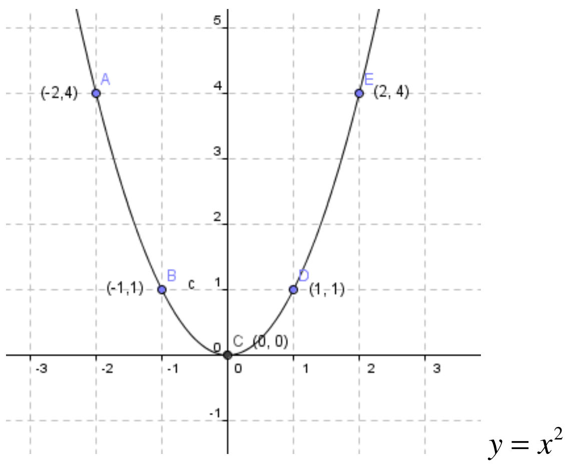


圖 1　$y=x^2$ 之圖形

如果我們能在坐標平面上找到更多符合 $y=x^2$ 的數對(x，y)

所對應的點，那麼此圖形就會愈稠密，而形成平滑的曲線。

由上圖可發現，$y=x^2$的圖形具有以下特徵：

(一) 此圖形的開口向________。

(二) 此圖形的對稱軸為________________。

(三) 此圖形的最低點為________________。

隨堂練習 1：(1)請繪製出二次函數 $y=-x^2$ 的圖形。

(2)此圖形的開口為何？

(3)此圖形的對稱軸為何？

(4)此圖形的最高點為何？

說明：同樣地，我們選擇一些簡單的整數作為 x 的值，然後計算出 y 值：

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	...									

註：請填入上表各空格。

接著，我們將上表中數對（x，y）所對應的點描繪到坐標平面上（如下圖 2）。

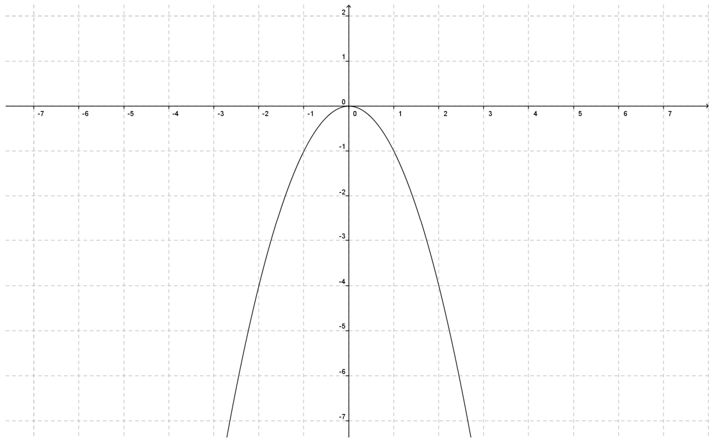


圖 2　$y=-x^2$ 的圖形

由圖形觀察得知，此圖形的開口向________（填入上、下）；對稱軸為________；圖形的最高點坐標為________。

步驟 2：簡單二次函數 $y=ax^2$ 圖形的繪製

接著，我們再將二次函數 $y=2x^2$ 與 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形描繪在坐標平面上。同樣地，我們先選擇一些簡單的整數作為 x 的值，然後計算出 y 值：

$y=2x^2$	x									
	y									
$y=\frac{1}{2}x^2$	x									
	y									

註：請填入上表各空格。

接著，我們將上表中數對（x，y）所對應的點描繪到坐標平面上（如下圖 3）。

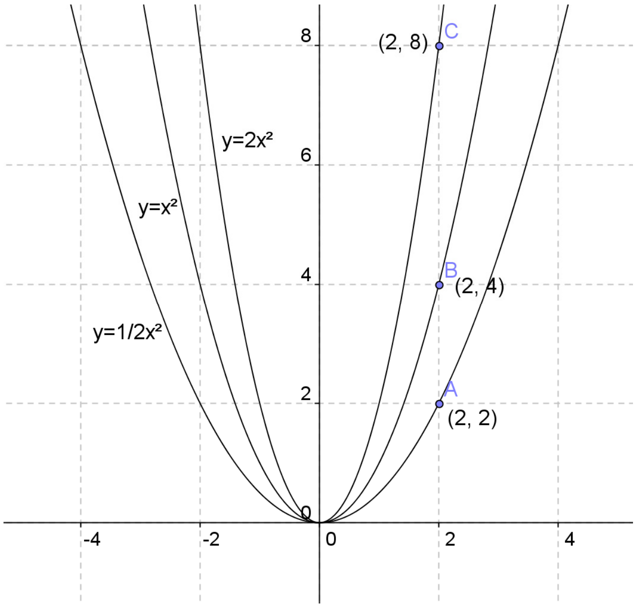


圖 3　$y=2x^2$ 與 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形

從上圖我們發現，當二次函數 $y=ax^2$（$a>0$）其 x^2 項係數愈大，其開口愈__________(填入大、小)。

隨堂練習 2：請繪製出二次函數式 $y=-2x^2$ 與 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形。

說明：同樣地，我們先選擇一些簡單的整數作為 x 的值，然後計算出 y 值：

$y=-2x^2$	x									
	y									
$y=-\frac{1}{2}x^2$	x									
	y									

註：請填入上表各空格。

接著，我們將上表中數對（x，y）所對應的點描繪到坐標平面上（如下圖 4）。

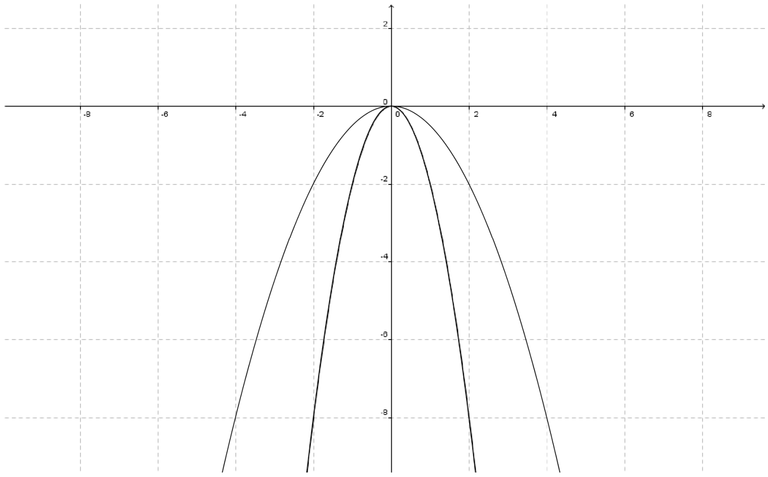


圖 4　$y=-2x^2$ 與 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形

步驟 3：簡單二次函數 $y=ax^2+k$ 圖形的繪製

接下來，我們要再描繪函數 $y=2x^2$，$y=2x^2+1$ 的圖形。同樣地，我們先選擇一些簡單的整數作為 x 的值，然後計算出 y 值，並將這些數對(x，y)所對應的點描繪到坐標平面上(如下圖 5)。

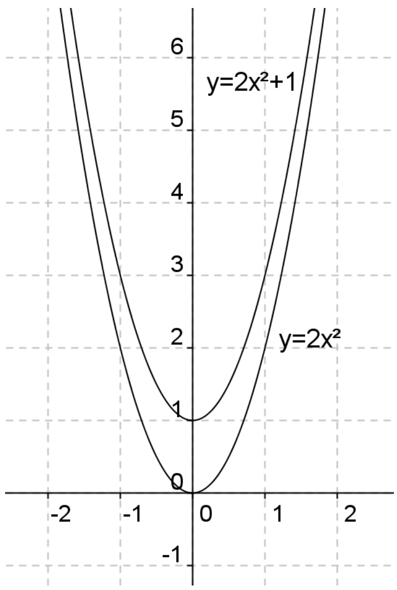


圖 5　$y=2x^2$ 與 $y=2x^2+1$ 的函數圖形

從上圖我們發現，二次函數 $y=2x^2+1$ 的圖形是將二次函數 $y=2x^2$ 的圖形向_____(填入上、下)平移____個單位長。

隨堂練習 3：請繪製出二次函數式 $y=-2x^2$ 與 $y=-2x^2+1$ 的圖形。

說明：我們先選擇一些簡單的整數作為 x 的值，然後計算出 y 值，並將這些數對（x，y）所對應的點描繪到坐標平面上（如下圖 6）。

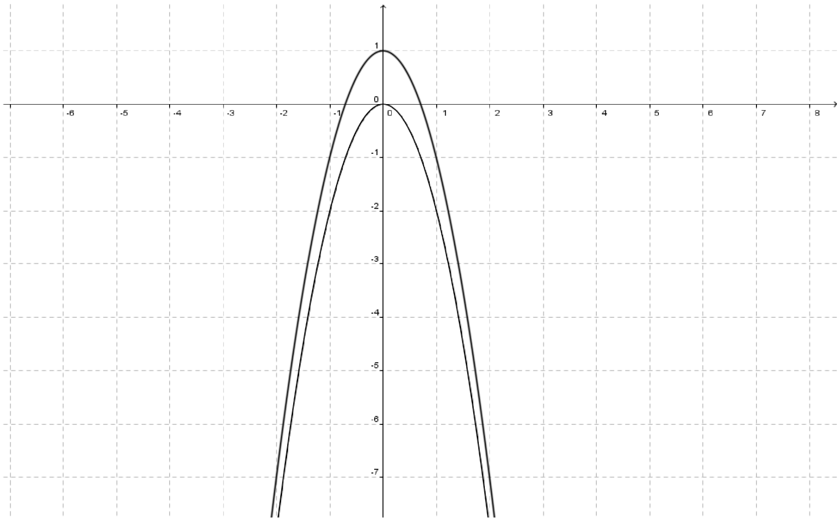


圖 6　$y=-2x^2$ 與 $y=-2x^2+1$

從上圖我們發現，二次函數 $y=-2x^2+1$ 的圖形是將二次函數 $y=-2x^2$ 的圖形向_____(填入上、下)平移____個單位長。

活動二：描繪二次函數 $y=a(x-h)^2$ 的圖形

從上述繪製二次函數 $y=ax^2$、$y=ax^2+b$ 的圖形發現，二次函數中 x^2 項係數 a 其影響圖形的特性為_________與_________。而常數項所影響的是圖形在_________（填入縱向或橫向)的平

移。接下來，我們要再來看形如二次函數 $y=a(x-h)^2$ 的圖形。

步驟 4：描繪二次函數 $y=(x-1)^2$ 的圖形

首先，讓我們來描繪二次函數 $y=(x-1)^2$ 的圖形。延續先前的經驗，我們先選擇一些簡單的整數作為 x 的值，然後計算出 y 值：

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y					0				

註：請填入上表各空格。

接著，我們將上表中數對（x，y）所對應的點描繪到坐標平面上（如下圖 7）。

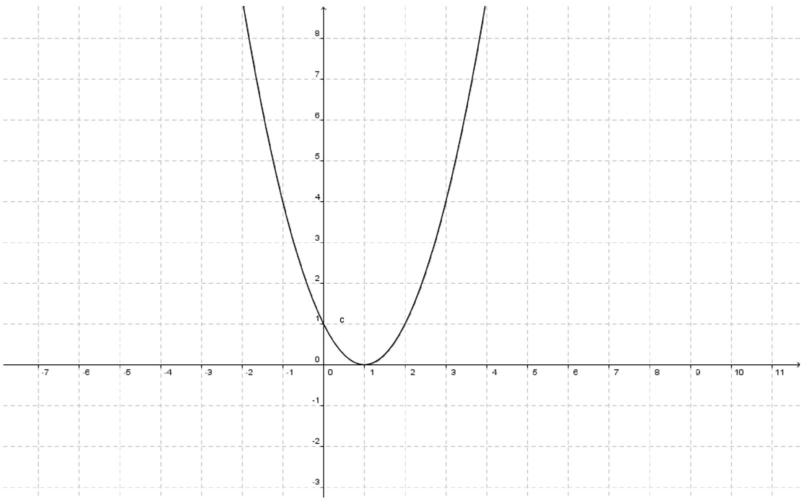


圖 7　$y=(x-1)^2$ 的圖形

我們發現，此圖形的開口向________；頂點坐標為________；對稱軸為________。

步驟 5：描繪二次函數 $y=-2(x-1)^2$ 的圖形

同樣地，我們選擇一些簡單的整數作為 x 的值，然後計算出 y 值：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y					0				

註：請填入上表各空格。

接著，我們將上表中數對（x，y）所對應的點描繪到坐標平面上（如下圖 8）。

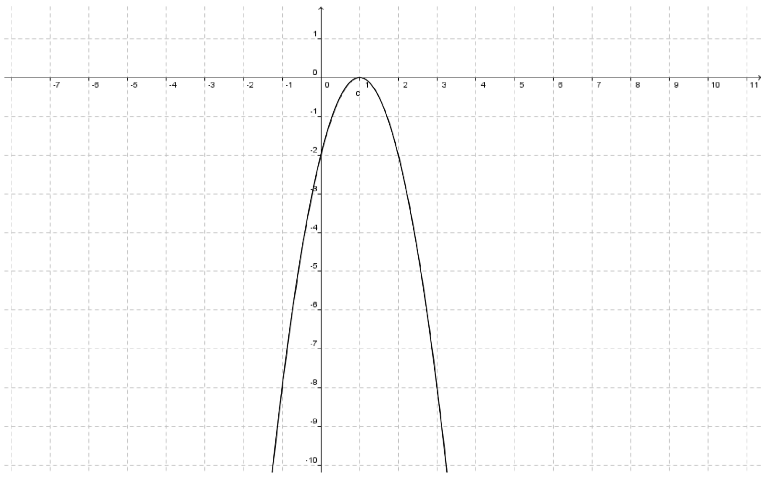


圖 8　$y=-2(x-1)^2$ 的圖形

我們發現，此圖形的開口向________；頂點坐標為________；對稱軸為________。

從上述兩個例子我們發現，如果二次函數能以 $y=a(x-h)^2$ 的方式呈現，那麼，讓 $x-h=0$ 的數值（也就是 $x=h$）即為頂點的 x 坐標。換句話說，此二次函數圖形的頂點坐標為________。對稱軸為________。

活動三：描繪二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形

接下來，我們再來描繪二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形。

步驟 6：試描繪二次函數 $y=(x-2)^2+1$ 的圖形

首先，先選擇一些簡單的整數作為 x 的值，然後計算出 y 值：

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y					1				

註：請填入上表各空格。

接著，我們將上表中數對（x，y）所對應的點描繪到坐標平面上（如下圖 9）。

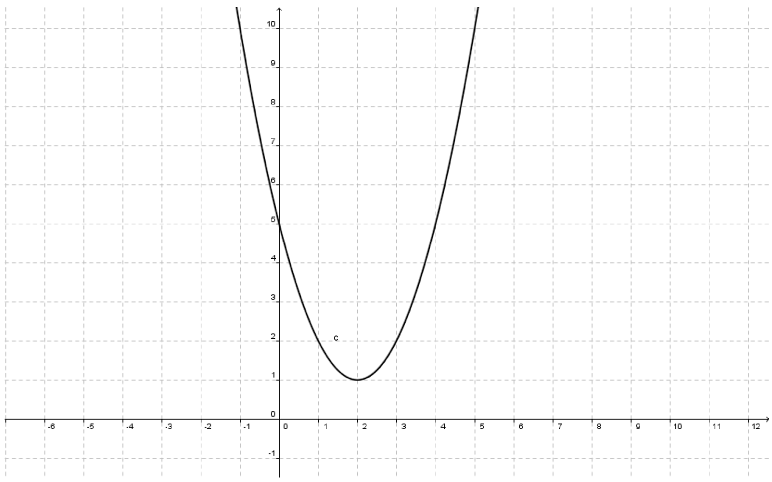


圖 9　$y=(x-2)^2+1$ 的圖形

我們發現，此圖形的開口向________；頂點坐標為________；對稱軸為________。

步驟 7： 試描繪二次函數 $y=-\frac{1}{3}(x-1)^2-2$ 的圖形

同樣地，我們先選擇一些簡單的整數作為 x 的值，然後計算出 y 值：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y					-2				

註：請填入上表各空格。

接著，我們將上表中數對（x，y）所對應的點描繪到坐標平面上（如下圖 10）。

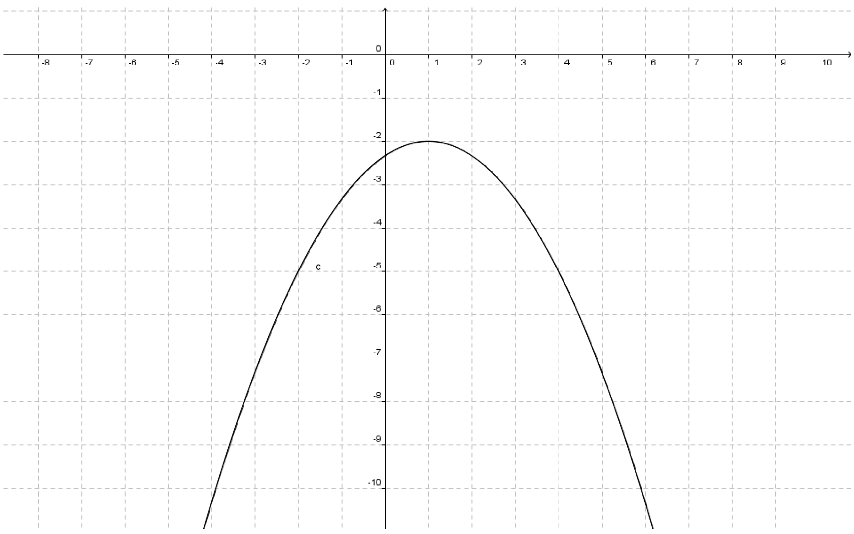


圖 10　$y=-\frac{1}{3}(x-1)^2-2$ 的圖形

我們發現，此圖形的開口向________；頂點坐標為________；對稱軸為________。

從上述兩個例子我們發現，如果二次函數能以 $y=a(x-h)^2+k$ 的方式呈現，那麼，讓 $x-h=0$ 的數值（也就是

$x=h$）即為頂點的 x 坐標。所以，此二次函數圖形的頂點坐標為________。對稱軸為________。

從上述的經驗，我們發現，只要能將二次函數整理成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，我們即可依上述的經驗，快速地找到此圖形的開口方向、頂點坐標________、對稱軸________，並找出許多符合函數的數對，並描在坐標平面上，繪製出二次函數的平滑拋物線圖形。

因此，我們接下來要學習如何利用「配方法」，將二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 處理成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，再繪製成圖形。

活動四：運用配方法繪製 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形

步驟 8：將 ax^2+bx+c 配成完全平方式

我們從過去的經驗得知，$x^2+2px+p^2$ 可整理成 $(x+p)^2$ 的形式。由此可知，二次三項式形如 x^2+bx+c 必可整理成

$x^2+2\times$____ $x+($____$)^2+c-($____$)^2=(x+$_____$)^2+c-($_____$)^2$

的形式。

步驟 9：透過這個方式，我們試著來描繪 $y=x^2+8x+9$ 的圖形。

首先，我們先整理 $y=x^2+8x+9$：

$y=x^2+8x+9$

$$= x^2+8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2 \underline{\ +9-\left(\frac{8}{2}\right)^2\ }$$

$$=(x+\underline{\qquad\quad})^2+\underline{\qquad\qquad}$$

接續，我們要選擇一些簡單的整數作為 x 的值，然後計算出 y 值：

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y					-7				

註：請填入上表各空格。

接著，我們將上表中數對（x，y）所對應的點描繪到坐標平面上（如下圖 11）。

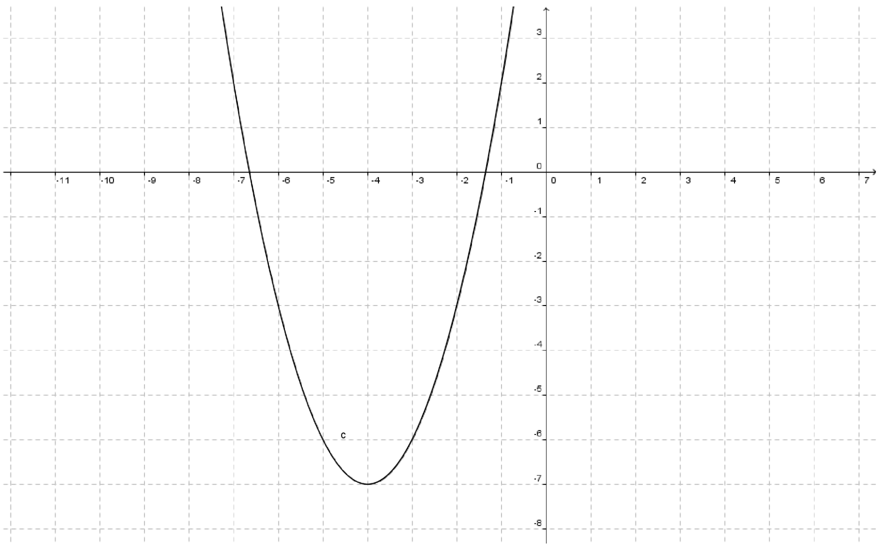


圖 11　$y=x^2+8x+9$ 的圖形

我們發現，此圖形的開口向________；頂點坐標為________；對稱軸為________。

步驟 10：接下來，我們再來描繪 $y=\frac{1}{4}x^2-3x+\frac{3}{4}$ 的圖形。

首先，我們先整理 $y=\frac{1}{4}x^2-3x+\frac{3}{4}$ ：

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{4}x^2-3x+\frac{3}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(x^2-\_\_\_\ x\right)+\frac{3}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(x^2-\_\_\_\ x+\_\_\_\_\_\right)+\frac{3}{4}-\_\_\_\_\_\_\_ \\
&= \frac{1}{4}\left(x-\_\_\_\right)^2+\_\_\_\_\_\_\_
\end{aligned}
$$

同樣地，我們要選擇一些簡單的整數作為 x 的值，然後計算出 y 值：

x									
y									

註：請填入上表各空格。

接著，我們將上表中數對（ x ， y ）所對應的點描繪到坐標平面上（如下圖 12）。

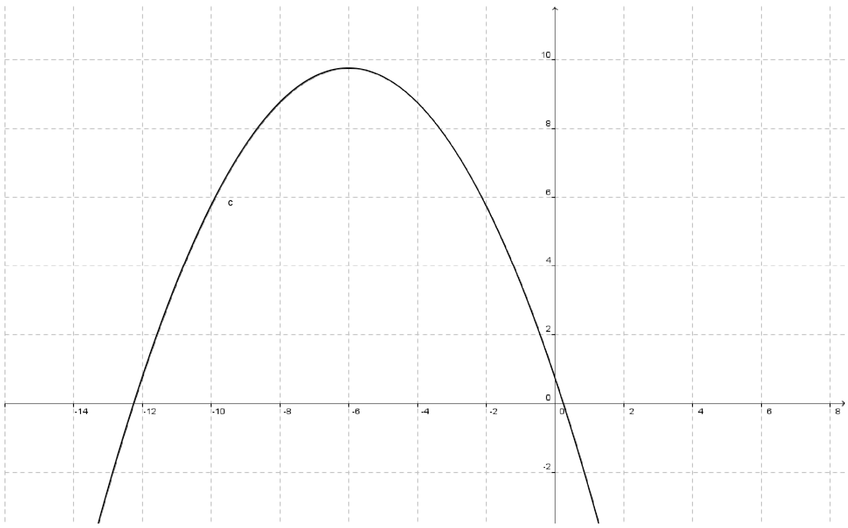


圖 12　$y=\dfrac{1}{4}x^2-3x+\dfrac{3}{4}$ 的圖形

我們發現，此圖形的開口向________；頂點坐標為________；對稱軸為________。

最後，我們以 $y=ax^2+bx+c$ 來進行探討：

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2+bx+c \\
&= a\left(x^2+\underline{\qquad}\,x\right)+c \\
&= a\left(x^2+\underline{\qquad}\,x+\underline{\qquad\quad}\right)+c-\underline{\qquad\quad} \\
&= a\left(x+\underline{\qquad}\right)^2+c-\underline{\qquad\quad}
\end{aligned}
$$

因此，我們可說，二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，其頂點坐標為________，對稱軸為________。

活動五：總結

最後，請您自我檢視下列各問題：

(一) 如果有一個形如 $y=ax^2$ 的二次函數，你能描繪其圖形嗎?

(二) 如果有一個形如 $y=ax^2+k$ 的二次函數，你能描繪其圖形嗎?

(三) 如果有一個形如 $y=a(x-h)^2$ 的二次函數，你能描繪其圖形嗎？

(四) 如果有一個形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的二次函數，你能描繪其圖形嗎？

(五) 如果有一個形如 $y=ax^2+bx+c$ 的二次函數，你能將此二次函數利用「配方法」整理成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並描繪其圖形嗎？

綜合來說，未來，當我們遇到一個二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 時，我們可以先以「配方法」的方式將二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 整理成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，再依循描點的方式描繪出二次函數的圖形。

教學活動參考答案：

活動一：

步驟 1：

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16

(一) 向上；(二) $x=0$；(三)（0，0）。

隨堂練習 1：(1) $y=-x^2$ 的圖形(略)； (2) 開口向下；

(3) 對稱軸 $x=0$ ； (4)（0，0）。

步驟 2：

$y=2x^2$	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	32	18	8	2	0	2	8	18	32
$y=\frac{1}{2}x^2$	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	8	9/2	2	1/2	0	1/2	2	9/2	8

愈小。

隨堂練習 2：

$y=-2x^2$	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	-32	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	-32
$y=-\frac{1}{2}x^2$	x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	-8	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	-8

步驟 3：上；1。

隨堂練習 3：上；1。

活動二：開口方向，開口大小。縱向。

步驟 4：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

開口向上；頂點坐標為（1，0）；對稱軸為 $x=1$ 。

步驟 5：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-32	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	-32

開口向下；頂點坐標為（1，0）；對稱軸為 $x=1$ 。

（h ，0）； $x=h$

活動三：

步驟 6：開口向上；頂點坐標為（2，1）；對稱軸為 $x=2$ 。

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	17	10	5	2	1	2	5	10	17

步驟 7：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$-\frac{22}{3}$	-5	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{7}{3}$	-2	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{10}{3}$	-5	$-\frac{22}{3}$

開口向下；頂點坐標為（1，-2）；對稱軸為 $x=1$ 。

（h，k）； $x=h$ 。（h，k）； $x=h$ 。

活動四：

步驟 8：$\frac{b}{2}$；$\frac{b}{2}$；$\frac{b}{2}$；$\frac{b}{2}$；$\frac{b}{2}$

步驟 9：4，-7，

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	9	2	-3	-6	-7	-6	-3	2	9

開口向上；頂點坐標為（-4，-7）；對稱軸為 $x=-4$ 。

步驟 10：12；12；36；9；6；$-\frac{33}{4}$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	$-\frac{17}{4}$	-6	$-\frac{29}{4}$	-8	$-\frac{33}{4}$	-8	$-\frac{29}{4}$	-6	$-\frac{17}{4}$

開口向上；頂點坐標為（6，$-\frac{33}{4}$）；對稱軸為 $x=6$。

$\frac{b}{a}$，$\frac{b}{a}$，$(\frac{b}{2a})^2$，$\frac{b^2}{4a}$，$\frac{b}{2a}$，$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$

頂點坐標為（$\frac{-b}{2a}$，$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$），對稱軸為 $x=\frac{-b}{2a}$。

七、指定作業：

1. 請寫出下列二次函數的開口方向、頂點坐標與對稱軸：

	開口方向	**頂點坐標**	**對稱軸**
甲：$y=-\frac{2}{3}x^2$			
乙：$y=-\frac{1}{3}x^2$			
丙：$y=\frac{2}{3}x^2$			
丁：$y=-\frac{4}{3}x^2$			

2. 將二次函數 $y=3(x+1)^2+2$ 的圖形，向右平移 3 單位，再向下平移 6 單位，可得到 $y=a(x-h)^2+k$ 的新圖形，求：

(1) 新圖形的頂點。

(2) 新圖形的二次函數。

指定作業參考解答：

（一）

	開口方向	頂點坐標	對稱軸
甲：$y=-\frac{2}{3}x^2$	下	（0，0）	$x=0$
乙：$y=-\frac{1}{3}x^2$	下	（0，0）	$x=0$
丙：$y=\frac{2}{3}x^2$	上	（0，0）	$x=0$
丁：$y=-\frac{4}{3}x^2$	下	（0，0）	$x=0$

（二）1.新圖形的頂點：(2，−4)。

2.新圖形的二次函數：$y=3(x-2)^2-4$。

八、教學注意事項：

1. 教學活動時間建議如下：活動一~活動二約 40~50 分鐘，活動三~活動四約 40~50 分鐘。
2. 活動一：主要讓學生能回顧過去先前已具備的知識，包括二次函數基本圖形（包括開口方向、開口大小），以及此函數圖

形在垂直方向平移與函數改變的關係。

3. 活動二：主要讓學生能理解函數圖形在水平方向平移與函數改變的關係。

4. 活動三：主要讓學生能理解函數圖形在水平、垂直方向平移與函數改變的關係。

5. 活動四：主要讓學生能運用過去所學的配方法將二次函數的一般式進行配方，進而找到頂點與對稱軸。

6. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

7. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 教育部（2002）。國民中小學九年一貫數學領域課程綱要。臺北市：教育部。

2. 丁斌悅等（2013）。函數教學篇（二），在陳昭地主編的國民中學教材原型B冊（pp.223-237）。新北市：國家教育研究院。

3. 國中各版本第六冊數學課本。