國民中學數學教材原型B冊

陳昭地教授 主編

國家教育研究院 出版

數學領域國中教材原型 B 冊

國家教育研究院 編印

國民中學數學教材原型B冊

目 次

序

數學不僅是科學的基礎，數學教育更是關乎國家公民素養和人才素質的重要因素之一。國家教育研究院推動課程與教學研究及研發適性適量適時之教材工作，進行中小學各學習領域（學科）教材研發、編輯與試用，並建置教科書資源資料庫。本數學領域教材原型研發手冊即是針對中學生與小學生所設計之教學輔助教材，期能落實課程綱要能力指標與教材細目之課程與教學之實踐，提供教師或教科書編輯者可依循或指引之教科書編輯素材，活化數學教材的內涵，並引領未來十二年國民基本教育數學教學之方向。

此計畫研發初期，本人時任國家教育研究院院長，當時曾召開會議徵詢國內數學專家學者之意見，幾經遴選承蒙陳昭地教授願意在國立臺灣師範大學教職退休後，因為對數學教育的使命感，而接下此研發編輯之重任。陳教授學經歷豐富，不但在教學及專業領域上的研究，受到學術界的肯定及重視，表現傑出，對啟蒙青年學子有滿滿的熱情，對數學教育貢獻不遺餘力，在他的號召之下，旋即組織優秀的學者專家教授與教學卓越的中小學教師等成立編輯委員會，前後歷經三年，完成本系列的教材原型作品。

本書研發編撰適合國中、小數學能力之題材，這些題材與教師未來的數學教學密切相關，並可藉此增長學生數學的學習能力，內容相當豐富，盼讀者以輕鬆愉快的心情欣賞閱讀數學的相關方法與應用，經由與日常生活相關的例題，透過循序漸進的演練，以培養學生自我學習的興趣與信心，期待能為數學教師提供便捷的教學資源。

教育部國民及學前教育署 署長
吳清山 謹識
2013 年 12 月

序

政府為回應立法院與民意的需求，於民國 92 年起責成本院組成委員會編撰九年一貫數學領域國中、小部編本教科書，經審定後上市供書，以平抑教科書價格，同時引領民間出版商改善教科書的品質。部編本教科書在完成教材示範編撰與制衡教科書市場之階段性任務後，轉型發展教材原型，本書即為教材原型的研發成果之一。

本書分為中學與小學，中學部分配合國中以上之數學教師的數學專業素養，編輯延伸性與原創性的題材，包含未來與國民教育第十年數學銜接息息相關的重要內容，提供教師編選相關教材之用，或提供教科書編輯者及民間出版業研發教師手冊及相關教材。小學部分：配合教師需求，著重於國小階段之數、計算、量與實測、幾何等相關教材教法。本套教材編撰之目的，在於能引發教師教學之共鳴，進而沿用於教學，故於其取材方向及內容，依中、小學之特性而有些許差異。

本書係由課程及教學研究中心數學教材原型研發編輯委員會陳昭地教授、鍾靜教授、謝堅教授、張東輝教授、曹博盛教授、黃幸美教授、陳彥廷教授、周筱亭研究員、李政豐教師、蘇進發教師、傅淑婷教師、李政憲教師、丁斌悅教師、莊國彰教師、魏慶雲教師、房昔梅教師、詹婉華教師、吳欣悅教師、胡蕙芬教師等，前後共計三年的辛勤投入，內容極具意義與參考價值，對落實數學教育，應該頗有助益。茲值付梓之前，特為之序，並致最高謝意。

國家教育研究院課程及教學研究中心主任

范信賢　謹識

2013 年 12 月

編輯大意

一、本研究成品為國家教育研究院數學領域教材原型研發編輯計畫第二年(民 101 年)國民中學部分的成果。

二、本研究成品共計 16 單元主題，配合符合先備知識之國中七年級下學期以上學生，提供 31 節教學節數之教材。

三、各教材主題以符合國民中學七、八年級學生的能力為取材對象，旨於銜接國小數學教材及國中教材原型 A 冊、數學應備知識、探尋數學規律、培養解題能力與正確學習態度，並提高數學學習的興趣為主要目標。

四、各單元主題教學活動及指定作業部分可直接下載應用；教學注意事項，教學參考資料或延伸性的題材主要提供教學者備用。

五、本教材單元雖經研發團隊審慎研發編輯而成，惟疏漏之處仍在所難免，使用者針對個案可直接或間接以最適當的方式調整。

六、本冊各章雖已選擇部分題材試教，做為修改本教材之依據，仍免有不週之處，敬請賜教。

主題 1－1：二元一次聯立方程式教學篇（一）

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　**撰寫者：**蘇進發

二、先備知識：

(一) 能理解一元一次方程式及其解的意義，並由具體情境中列出一元一次方程式。

(二) 能以等量公理或移項法則解一元一次方程式，並做驗算。

(三) 能對算式中相同的文字符號、常數，進行合併或化簡。

三、教學目標：

(一) 能理解二元一次方程式及其解的意義，並由具體情境中列出二元一次方程式。

(二) 能理解二元一次聯立方程式及其解的意義，並由具體情境中列出二元一次聯立方程式。

(三) 能理解二元一次聯立方程式比一元一次方程式，在處理相關應用問題的假設與列式，更方便且更直接。

(四) 能熟練使用加減消去法與代入消去法解二元一次聯立方程式。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

教學設計以猜數為動機，引發學生對二元一次聯立方程式的學習興趣，再輔以生活情境為例子，帶領學生認識二元一次方程

式與二元一次聯立方程式，讓學生體會數學與生活是息息相關的。在此過程中，我們也期待學生能發現，雖然二元一次聯立方程式的問題，仍然可以透過一元一次方程式來解決，但卻無法像二元一次聯立方程式那麼直接與方便。

最後，我們將進行代入消去法與加減消去法的教學，希望學生能明瞭二元一次聯立方程式的解法重點，其目的是要消去一個未知數，使題目簡化成一元一次方程式的問題，再利用一元一次方程式的解題方法解決問題。

六、教學活動：

活動一：猜數活動

教師藉由猜數活動，激發學生對二元一次聯立方程式的學習興趣與動機。

步驟 1：老師將預備的壁報紙(如右圖)，貼於黑板上並請一位同學上台演出，因為老師即將透過右圖的數字與同學間的簡單對話，立刻猜出這位同學心中所想的數。

1	2	3
8	9	4
7	6	5

步驟 2：老師背對黑板或將眼睛閉合，請同學指出圖中第一個數，接著再指出圖中第二個數，此時老師問同學第一個數加上第二個數為何？(若回答 8)，老師再問第一個數是第二個數的幾倍？(若回答 3)

步驟 3：老師看著黑板壁報紙上的數字冥想一下，再對著同學眼睛觀看一會兒，然後告訴同學老師已經知道答案了(第一個數字為 6 及第二個數字為 2)，並將結果寫於黑板上。

步驟 4：重複步驟 1~步驟 3，並於遊戲結束後告訴同學，老師只是利用二元一次聯立方程式的觀念，來處理猜數的問題，同學們只要學好此單元，就會跟老師一樣厲害。

說明：（此說明是針對學生回答的數作解說，其它回答的數亦有相同結果）

設第一個數為 x，第二個數為 y，則

$\begin{cases} x+y=8 \\ x=3y \end{cases}$ 解出 x=6，y=2

(此部份說明亦可於單元結束後，再告知學生，若教師在此處解說時，請說明大括號「{」的意義。)

步驟 5：老師請同學回想一下並舉例，是否小學也有利用類似此觀念解題，但不知已用了「國中二元一次聯立方程式」的解題方法。

學生回答：______________________________ 。

活動二：二元一次方程式及其解

透過生活情境例子，引導學生認識二元一次方程式及其解的意義。

步驟 6：教師先說明什麼是二元一次方程式？再舉出一些「二元一次方程式」的生活情境例子，並鼓勵學生也提出一些例子。之後，再設計一些問題，請學生判別哪些是二元一次方程式？強化他們的認知，瞭解什麼是二元一次方程式？

例題 1：舉出生活情境中的一些二元一次方程式例子。

解：

隨堂練習 1：舉出一個生活情境中的二元一次方程式例子。

解：

例題 2：下列哪些式子為 x、y 的二元一次方程式？

(1) $4x-2x-3$　　(2) $3x+y-2$

(3) $5x+4=3y$　　(4) $6x+4-2x=9$

(5) $x^2+3x-1=0$　　(6) $x-2y=4$

解：

步驟 7：老師透過數學式子，引導學生瞭解二元一次方程式的解之意義，並能感受到，當 x、y 沒有限制時，二元一次方程式的解有無限多組解。

例題 3：下列哪幾組 x、y 所代表的數，是方程式 $2x-y=3$ 的解？

(1) $x=5$、$y=7$　　(2) $x=2$、$y=-1$　　(3) $x=1$、$y=-1$

(4) $x=0.5$、$y=2$　　(5) $x=\frac{5}{3}$、$y=\frac{1}{3}$　　(6) $x=\frac{7}{2}$、$y=1$

解：

隨堂練習 2：承例題 3 的方程式 $2x-y=3$，

(1) 若 $x=10$，則 y 為多少？

(2) 若 $y=10$，則 x 為多少？

(3) 若設 x 為任意數 t，則 y 為多少？(以 t 表示)

解：

隨堂練習 3：已知 x、y 均為正整數，且 $x+2y=9$，求滿足上述條件之方程式的所有解？

解：

活動三：代入消去法與加減消去法

介紹二元一次聯立方程式，並透過代入消去法與加減消去法，解二元一次聯立方程式。

步驟 8：教師先舉例說明，用大括號將兩個二元一次方程式並列，我們稱為二元一次聯立方程式。再舉出生活情境例子，引導學生同時使用一元一次方程式與二元一次聯立方程式列式，讓學生觀察兩者間的差異，進而體會到二元一次聯立方程式，在相關問題的假設過程中，更具有方便性。

例題 4：某人帶著 500 元到市場買水果，若買 3 個蘋果與 5 個梨子，則剩下 230 元；若買 5 個蘋果與 4 個梨子，則剩下 180 元。請依下列假設條件填入答案：

(1)假設蘋果每個 x 元，由於此人帶著 500 元到市場買水果。

若買 3 個蘋果與 5 個梨子，則剩下 230 元，我們可以知道，梨子每個為：____________________元。(以 x 表示)

，再利用上式與「若買 5 個蘋果與 4 個梨子，則剩下 180 元」，我們可以列出 x 的一元一次方程式為：

______________________________。

(2)假設蘋果每個 x 元、梨子每個 y 元，因為此人買 3 個蘋果與 5 個梨子，剩下 230 元，我們可列出二元一次方程式為：________________________…(1)

又因為買 5 個蘋果與 4 個梨子，剩下 180 元，我們可列出二元一次方程式為：______________________…(2)

所以由(1)、(2)可列出二元一次聯立方程式為：

$\begin{cases} \\ \rule{6cm}{0.4pt} \end{cases}$ 。

隨堂練習 4： 已知父子兩人年齡相差 28 歲，且 3 年後父親年齡是兒子的 3 倍少 2 歲，若今年父親為 x 歲、兒子為 y 歲，則：

(1)由父子兩人年齡相差 28 歲，可以列出：______________。

(2)由 3 年後父親年齡是兒子的 3 倍少 2 歲，可以列出：

______________________。

(3)由(1)、(2) 可以列出：$\begin{cases} \\ \rule{5cm}{0.4pt} \end{cases}$ 。

步驟 9：教師利用代入消去法與加減消去法，教導學生解二元一次聯立方程。

例題 5：利用代入消去法解下列二元一次聯立方程式

(1) $\begin{cases} x+y=35 \text{............}(1) \\ 2x+4y=94 \text{.........}(2) \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+3y=4 \text{...........}(1) \\ 3x-4y=23 \text{.........}(2) \end{cases}$

說明：

代入消去法是先將一個式子化簡成為 y=*ax*+*b* 或 *x*=*ay*+*b* 的形式，代入另一個式子，用以消去其中一個未知數，使之簡化成為一元一次方程式，最後再利用「解一元一次方程式」的方法解題。

解：

隨堂練習 5：利用代入消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-2y=1 \\ 4x+3y=26 \end{cases}$

解：

例題 6：利用加減消去法解例題 5 的二元一次聯立方程式

(1) $\begin{cases} x+y=35 \text{............}(1) \\ 2x+4y=94 \text{.........}(2) \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+3y=4 \text{...........}(1) \\ 3x-4y=23 \text{.........}(2) \end{cases}$

說明：

加減消去法是利用兩個式子相加或相減，用以消去其中的一個未知數，使之簡化成一元一次方程式，再利用「解一元一次方程式」的方法解題。

解：

隨堂練習 6：試利用加減消去法解聯立方程式$\begin{cases}2x-y=3\\3x-4y=3\end{cases}$。

解：

教學活動參考解答：

活動一：

步驟 5：學生回答：若大、小兩數的和為 17，且兩數的差為 5，則大、小兩數分別為何？

活動二：

例題 1：同學常常去合作社買東西，也幫別人買…

(1)已知飲料每瓶 x 元，餅乾每包 y 元，小華買了 5 瓶飲料、8 包餅乾，總共花了 300 元，依題意可列出二元一次方程式為： $5x+8y=300$ 。

同學喜歡打籃球運動，你們知道得分有…

(2)籃球比賽有 3 分球與 2 分球，小豪在比賽過程中，投中 3 分球 x 個，2 分球 y 個，共得 21 分(小豪此次比賽沒有罰球的分數)，則依題意可列出二元一次方程式為： $3x+2y=21$。

隨堂練習 1：小芬到書局買了 5 支 x 元的原子筆與 3 本 y 元的筆記本，總共花費 200 元，依題意可列出二元一次方程式為：$5x+3y=200$。

例題 2：化簡後只含有兩個相異的未知數，且它們的次數都是一次的等式，我們稱為二元一次方程式，故選(3)與(6)。

例題3：將二元一次方程式中的 x、y，以一組特定的數值代入，若使其等號兩邊的數值相等，則我們稱該組 x、y 的值，為此方程式的解，故選(1)、(3)與(5)。

隨堂練習2：(1) $y=17$　(2) $x=\frac{13}{2}$　(3) $y=2t-3$。

隨堂練習3：因為 x、y 為正整數，且滿足 $x+2y=9$

所以從 $y=1$、2…代入式子得：

x	7	5	3	1	−1(**不合**)
y	1	2	3	4	5

解題注意事項：
y 前面的係數較大，
從 y 開始代入較方便。

答：$x=7$，$y=1$；$x=5$，$y=2$；$x=3$，$y=3$；$x=1$，$y=4$。

例題4：(1) $\frac{500-230-3x}{5}$；$5x+4\times\frac{500-230-3x}{5}=500-180$　。

(2) $3x+5y=500-230$；$5x+4y=500-180$；$\begin{cases}3x+5y=500-230\\5x+4y=500-180\end{cases}$。

隨堂練習4：$x-y=28$；$x+3=3(y+3)-2$；$\begin{cases}x-y=28\\x+3=3(y+3)-2\end{cases}$　。

活動三：

例題5：第(1)題：$\begin{cases}x+y=35\text{............}(1)\\2x+4y=94\text{.........}(2)\end{cases}$

將(1)式移項為：$y=35-x$，代入(2)中……**(預備消去 y)**

$2x+4(35-x)=94$，$2x+140-4x=94$，$-2x=-46$，$x=23$

代入第(1)式：$23+y=35$，得 $y=12$。

答：$x=23$，$y=12$。

第(2)題：$\begin{cases}2x+3y=4\text{...........}(1)\\3x-4y=23\text{.........}(2)\end{cases}$

將(1)移項為 $2x=4-3y$

$x=\dfrac{4-3y}{2}$............(3) 代入(2) **…(預備消去 x)**

$3\times\dfrac{4-3y}{2}-4y=23$，$\dfrac{12-9y}{2}-4y=23$……(同乘以 2)

$12-9y-8y=46$，$-17y=34$，$y=-2$

代入(1)式：$2x-6=4$，得 $x=5$。

答：$x=5$，$y=-2$。

隨堂練習 5：$\begin{cases}x-2y=1\text{.........}(1)\\4x+3y=26\text{....}(2)\end{cases}$

將(1)式移項可得： $x=2y+1$ …代入(2)式

$4(2y+1)+3y=26$，$8y+4+3y=26$，$11y=22$，$y=2$

代入(1)可得：$x-2\times2=1$，$x=5$。

答：$x=5$，$y=2$。

例題 6：第(1)題：$\begin{cases}x+y=35\text{............}(1)\\2x+4y=94\text{.........}(2)\end{cases}$

心中圖像

$\begin{cases}2x+2y=70\text{.......}(1)\times2\\2x+4y=94\text{.......}(2)\end{cases}$

將(2)−(1)×2 得：**……(預備消去 x)**

$(2x+4y)-(2x+2y)=94-35\times2$

$2x+4y-2x-2y=94-70$，$2y=24$，$y=12$

代入第(1)式：$x+12=35$，得 $x=23$。　　答：$x=23$，$y=12$。

第(2)題：$\begin{cases}2x+3y=4..........(1)\\3x-4y=23.........(2)\end{cases}$

將原式的(1)×4、(2)×3 得：**……(預備消去 *y*)**

$\begin{cases}8x+12y=16.........(3)\\9x-12y=69.........(4)\end{cases}$

將(3)+(4)可得：$(8x+12y)+(9x-12y)=16+69$

$17x=85$，$x=5$，代入(1)式：$10+3y=4$，得 $y=-2$。

答：$x=5$，$y=-2$。

隨堂練習 6：$\begin{cases}2x-y=3......(1)\\3x-4y=3....(2)\end{cases}$

將(1)×4−(2)可得：$(8x-4y)-(3x-4y)=12-3$

$5x=9$，$x=\dfrac{9}{5}$，代入(1)可得：$y=\dfrac{3}{5}$。

答：$x=\dfrac{9}{5}$，$y=\dfrac{3}{5}$。

七、指定作業：

1.根據下列各問題的敘述，列出二元一次方程式：

(1)小恩至福利社幫同學買東西，買了 6 個 x 元的麵包與 4 瓶 y 元的飲料，總共付款 130 元，依題意可列出二元一次方程式：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 。

(2)小瑜買 15 份禮物，總共花了 900 元，已知每份禮物內都有 1 包餅乾與 2 支棒棒糖，若每包餅乾售價為 x 元，每支棒棒糖售價為 y 元，則依題意可列出二元一次方程式：

______________________。

(3)某精品店有大、小兩種杯子各 30 個，大杯子一個 200 元，小杯子一個 50 元。該店促銷的方式：每買一個大杯子，就送一個小杯子；只買小杯子沒有任何優惠。若打烊後得知，此大、小兩種杯子共賣得 1800 元，還剩大杯子 x 個、小杯子 y 個，則依題意可列出二元一次方程式：

__________________________。

2.數學闖關活動課時，老師規定每個同學都要參加，每組可以有 4 人或 5 人。今已知全班有 37 人，且 4 人的有 x 組，5 人的有 y 組，試依題意列出二元一次方程式，並求出 x、y 的可能解？

3.兄弟兩人各有數張紀念卡，若弟給兄 10 張後，則兄的張數就是弟的 3 倍；若兄給弟 5 張後，則兄弟兩人的張數就一樣多。設兄有 x 張，弟有 y 張，依題意可列出二元一次聯立方程式為何？

4.利用代入消去法或加減消去法，解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} 3x-2y=13 \\ 4x+3y=6 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y=7 \\ 3x+5y=30 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-\dfrac{2}{3}y=-4 \end{cases}$

指定作業參考解答：

1. (1) $6x+4y=130$　(2) $15(x+2y)=900$

(3) $200(30-x)+50[30-(30-x)-y]=1800$。

2. 二元一次方程式為 $4x+5y=37$ 且 x、y 的可能解為

$x=8$，$y=1$ 與 $x=3$，$y=5$ 兩組解。

3. $\begin{cases} x+10=3(y-10) \\ x-5=y+5 \end{cases}$。

4. (1) $x=3$，$y=-2$　(2) $x=\dfrac{5}{2}$，$y=\dfrac{9}{2}$　(3) $x=-2$，$y=3$。

八、教學活動注意事項：

1.教學活動時間建議如下，活動一：約 10 分鐘，活動二：約 30 分鐘，活動三：約 50 分鐘。

2.教師在教學的過程中，盡可能透過師生互動，瞭解學生的學習情形，也同時訓練學生的表達能力。至於隨堂練習，則可邀請學生上台作答，掌握學生的學習績效。

3.活動二的例題 3，教師引導學生觀察，什麼是二元一次方程式的解，且其解不只有一組。當教學進行至隨堂練習 2 時，我們期待學生能透過題目而體會到，當 x=t(任意數)，y=2t-3 時，二元一次方程式的解有很多組解(或說無限多組解)，也與高中的參數表示法呼應。

4.活動二的隨堂練習 3，教師可視學生作答情形，考慮是否提示，從小的正整數 1 先代入，依序直到代入後不合題意為止。若有學生從 x=1，2，3，…，代入求得 y 的值，再經過判斷後，找到 $x+2y=9$ 的正整數解，也是允許的，只是教師應教導學生思考，哪一種方法是較有效率？

5.活動三的步驟 8，教師藉由題目的引導，帶領學生感受二元一次聯立方程式的假設與列式，在相關問題下，較一元一次方程式更直接與方便，用以提升學生學習二元一次聯立方程式的意願。

6.活動三的步驟 9，雖然有兩種不同的解法，但卻希望學生都能瞭解，其解法重點是一致的，透過消去一個未知數，再利用一元一次方程式的解法解題。且在例題 5、例題 6 中，我們設計同樣的題目，其目的是，讓學生學習到不同的解法，但運算結果卻是一樣的。

7.活動三的步驟9，教導學生利用代入消去法與加減消去法，解二元一次聯立方程式，重點在於概念的傳達，若要學生更加的熟練，則需教師另外抽出時間做練習。

8.本單元對於二元一次聯立方程式的解，只介紹恰有一組解的情形，至於無解或無限多組解，我們將資料補充於教學參考資料中，教師可看時機使用。

9.在各活動間，教師宜巡堂走動，加強瞭解學生學習情形。

10.在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 教育部編著(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部。
2. 國中各版本第二冊數學課本。
3. 高中各版本第三冊數學課本。
4. 國中基本學力測驗試題。94年度～100年度。
5. 蔡聰明著(2011)。從算術到代數之路。臺北市：三民書局。
6. Max A. Sobel・Evan M.Maletsky/著。張靜嚳、念家興/譯(2001)。數學教學方法。臺北市：九章出版社。

7. 補充二元一次聯立方程式無解與無限多組解的資料如下：

當二元一次聯立方程式，利用代入消去法或加減消去法求解時，在運算過程中，若發生不合理的情形時，則我們說，二元一次聯立方程式為無解；若發生不管 x、y 為何值，等式恆成立的情形，則我們說：二元一次聯立方程式有無限多組解。例如：

(1)解二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} x+2y=4 ......(1) \\ 3x+6y=6 ....(2) \end{cases}$$

型如：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}（其中 \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}）$$

解：將(1)×3−(2)可得：

$(3x+6y)-(3x+6y)=4\times3-6$，0=6(不合)， 答：無解。

(2)解二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} 2x+3y=4 ......(1) \\ 4x+6y=8 ....(2) \end{cases}$$

型如：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}（其中 \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}）$$

解：將(1)×2−(2)可得：

$(4x+6y)-(4x+6y)=4\times2-8$ ，

0=0…(式子恆成立) ， 答：無限多組解。

8. 解二元一次聯立方程式的過程與其對應圖形之關係說明如下：

當學生知道二元一次方程式的解為一直線時，教師可以透過直角坐標上的直線變化關係，補充說明解二元一次聯立方程式的過程。

首先說明：

二元一次聯立方程式的式子經過相加或相減其解不變。

(1)舉例說明：

已知 x=1、y=2 為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y=3 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 3x-2y=-1 \ldots\ldots(2) \end{cases}$

的解，則考慮(1)式×2+(2)式×3：

2(x+y)+3(3x−2y)=2×3+3×(−1)， 11x−4y=3

將 x=1、y=2，代入 11x−4y=3

得：11×1−4×2=3(成立)

即 x=1、y=2 為(1)式×2 與(2)式×3 相加所得式子的解。

(可請學生再檢驗：例如 (1)式×3−(2)式×2 是否正確)

(2)再說明：

若 x=p、y=q 為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} ax+by+c=0 \ldots\ldots(1) \\ dx+ey+f=0 \ldots\ldots(2) \end{cases}$

的解，則 x=p，y=q 也是 $k(ax+by+c)+l(dx+ey+f)=0$ 的解。

(其中 a、b、c、d、e、f 為已知數，k、l 為任意數。)

解說：

因為 x=p，y=q 為聯立方程式的解，

所以將 x=p，y=q 代入(1)式與(2)式可得：

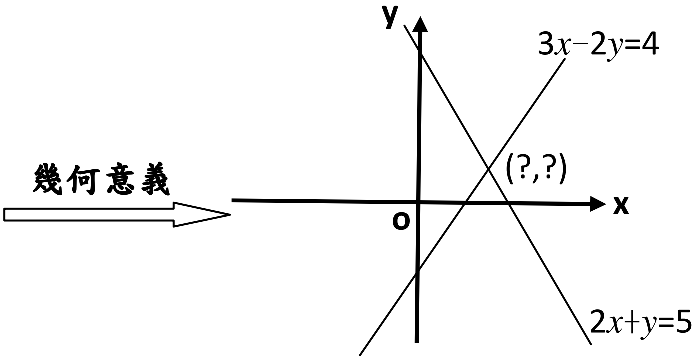
$ap+bq+c=0$ 且 $dp+eq+f=0$ 故 $k(ap+bq+c)+l(dp+eq+f)=0$

即 x=p，y=q 是 $k(ax+by+c)+l(dx+ey+f)=0$ 的解，

也就說，二元一次聯立方程式的式子經過相加或相減其解不變。接著，透過直角坐標上的直線變化關係，說明解二元一次聯立方程式的過程，其內容如下：

例如：

解 $\begin{cases} 3x-2y=4 \ldots\ldots(1) \\ 2x+y=5 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$



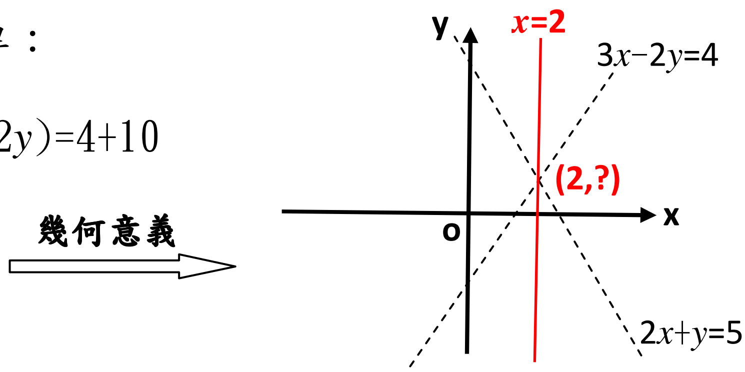
解：

將(1)+(2)×2 可得：

$(3x-2y)+(4x+2y)=4+10$

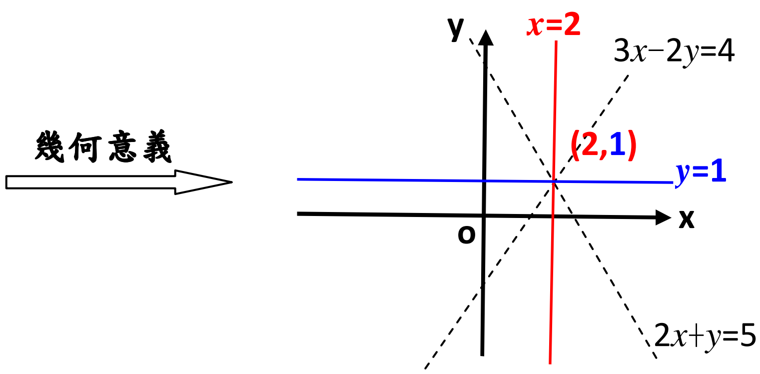
$7x=14$

$x=2$



代入(2)可得：

$y=1$



答：$x=2$，$y=1$。

說明：

此處的「幾何意義」是指，聯立方程式的求解過程，在坐標平面上的另一種對應呈現方式。

主題1－2：二元一次聯立方程式教學篇（二）

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　**撰寫者：**蘇進發

二、先備知識：

(一) 能理解一元一次方程式及其解的意義，並由具體情境中列出一元一次方程式。

(二) 能以等量公理或移項法則解一元一次方程式，並做驗算。

(三) 能對算式中相同的文字符號、常數，進行合併或化簡。

(四) 能理解二元一次方程式及其解的意義，並由具體情境中列出二元一次方程式。

(五) 能理解二元一次聯立方程式及其解的意義，並由具體情境中列出二元一次聯立方程式。

(六) 能熟練使用加減消去法與代入消去法解二元一次聯立方程式。

三、教學目標：

(一) 能分辨小學的算術方法與國中的代數方法，並掌握代數方法的使用時機，解決二元一次聯立方程式的相關問題。

(二) 能認識二元一次聯立方程式的公式解(克拉瑪公式)，並利用公式解解題。

(三) 能理解三元一次聯立方程式的解題模式，如同二元一次聯立方程式，進而解決三元一次聯立方程式的問題。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

藉由古代的雞兔同籠問題，勾起小學的學習記憶，帶領學生分辨小學的算術方法與國中的代數方法之不同處，期待學生能掌握技巧，善用國中所學的代數方法，更直接地解出二元一次聯立方程式的問題。

我們也期待學生能明瞭，二元一次聯立方程式解法的重點，其目的是要消去一個未知數，再利用一元一次方程式解題，若能掌握其技能，便可解決三元一次聯立方程式的問題。

為了讓學生對未知數的運算能更加熟悉，我們推導了二元一次聯立方程式的公式解(克拉瑪公式)，幫助學生從不同的角度來學習，希望學生能認識這個公式解，並透過公式解快速得到答案。

六、教學活動：

活動一：算術解法與代數解法

透過雞兔同籠等問題，引導學生回憶小學的算術解題方法，再利用代數的假設與解題方法，讓學生觀察兩者之差異，期待學生能善用代數方法，更直接地解出二元一次聯立方程式的問題。

例題 1：「今有雉、兔同籠，上有三十五頭，下有九十四足。問：雉、兔各幾何？」。其意思是說：「雞兔在同一個籠子內，共有 35 個頭、94 隻腳，試問雞、兔各有幾頭？」

(孫子算經下卷第 31 題…雞兔同籠問題)

說明：請先用算術方法解題，再利用代數方法解題。

解：

例題 2：兄、弟兩人在 200 公尺的運動場上，以等速率慢跑健身，且於同一個位置出發。已知兄比弟快，若以相反方向運動，每隔 20 秒相遇一次，若以相同方向運動，每隔 100 秒相遇一次，則兄、弟兩人的速率各為多少？

說明：請先用算術方法解題，再利用代數方法解題。

解：

隨堂練習 1：已知兩段繩子長度的和為 164 公分，且其長度的差為 16 公分，請利用算術方法與代數方法，分別求出此兩段繩子的長度。

解：

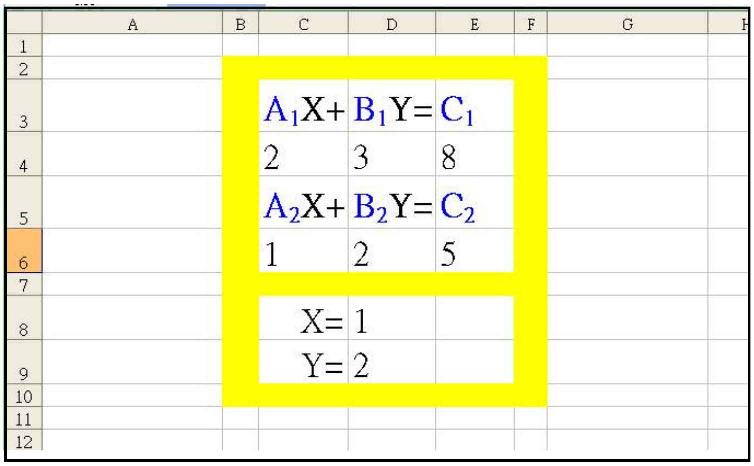
活動二：克拉瑪公式

教師介紹二元一次聯立方程式的公式解(克拉瑪公式)。

首先利用 EXCEL 的操作，只要學生輸入係數，即可得到二元一次聯立方程式的解，並提醒學生未來可以配合資訊，應用於電腦程式中。接著再告訴同學公式的由來，先引導學生認識二階行列式符號的值，再透過學生所學過的加減消去法，推導出二元一次聯立方程式的公式解(克拉瑪公式)，使學生有更廣度的學習，也熟練代數式的運算。

例題 3：請輸入二元一次聯立方程式的係數 A_1、B_1、C_1、A_2、B_2、C_2，即可求得 X、Y 的值，並請同學代回做驗算。

(教師操作已設計好的 EXCEL 檔)



例題 4：若規定符號$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，則$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$為多少？

解：

隨堂練習 2：求下列各符號的值。

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 13 \end{vmatrix}$

解：

例題 5：已知 a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 都是已知數，且 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，

求二元一次聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$的解為何？

解：

結論：我們將 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$（其中 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$、$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$、$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$)稱為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的公式解(克拉瑪公式)。

例題 6：利用公式解，解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x+4y=5 \end{cases}$。

解：

隨堂練習 3：利用二元一次聯立方程式的公式解，解下列各聯立方程式。

(1) $\begin{cases} x+3y=-3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$

解：

活動三：二元一次聯立方程式延伸

我們將二元一次聯立方程式的問題，透過消去法變成一元一次方程式，再利用一元一次方程式的解題技巧解決問題。如今相同的模式，我們亦可將三元一次聯立方程式的問題，透過消去法變成二元一次聯立方程式，再利用二元一次聯立方程式的解題方法解決問題，且學生亦可在此運算過程中，提升代數的運算能力。

例題 7：林家三姊妹，每月零用錢的總和為 7800 元。已知大姊零用錢的 2 倍是二姊零用錢的 3 倍，二姊零用錢的 3 倍是小妹零用錢的 4 倍。依據題意，試問大姊每月的零用錢為多少元？

解：

隨堂練習 4： 已知 a、b、c 表不為 0 的常數，若 $a-3b+c=0$、$2a+b-c=0$，

則：(1) a 是 b 的多少倍？ (2) c 是 b 的多少倍？

解：

隨堂練習 5： 解聯立方程式 $\begin{cases} x+2y+z=1......(1) \\ 2x+y-z=8......(2) \\ 3x+2y+2z=2..(3) \end{cases}$。

解：

教學活動參考解答：

活動一：

例題 1：(一)算術方法，先帶領學生觀察規律：

雞的頭數	35	34	33	…	?
兔的頭數	0	1	2	…	?
雞兔總腳數	70	72	74	…	94

雞減少一頭兔增加一頭時，則總腳數增加 2 隻，

所以 $(94-70)\div2=12$；即雞減少 12 頭兔增加 12 頭時，

可得總腳數為 94 隻，故將 12 頭雞換成 12 頭兔子。

答：雞有 23 頭，兔有 12 頭。

(二)代數方法，設雞有 x 頭、兔有 y 頭，則依題意可列出：

$\begin{cases} x+y=35............(1) \\ 2x+4y=94.........(2) \end{cases}$ 將(2)−(1)×2 可得：

$2y=24$，$y=12$，代入(1)可得：$x=23$。

答：雞有 23 頭，兔有 12 頭。

例題 2：(一)算術方法：

200÷20=10……兄弟的速率和

200÷100=2……兄弟的速率差

(10+2)÷2=6……兄的速率

10−6=4……弟的速率

答：兄、弟兩人的速率分別為每秒 6 公尺及每秒 4 公尺。

(二)代數方法：

設兄的速率每秒 x 公尺、弟的速率每秒 y 公尺

依題意列出：$\begin{cases} 20\times(x+y)=200 \\ 100(x-y)=200 \end{cases}$

化簡為：$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases}$

利用加減消去法解得：x=6，y=4

答：兄、弟兩人的速率分別為每秒 6 公尺及每秒 4 公尺。

隨堂練習 1：

(一)算術方法：

如圖所示

因為兩繩子長度和+兩繩子長度差=長繩子長度的兩倍

所以將結果除以 2 即為長繩子長度

故(164+16)÷2=90…長繩子長度，90−16=74…短繩子長度

答：兩段繩子長度分別為 90 公分與 74 公分。

(二)代數方法：

設兩段繩子的長度分別 x 公分與 y 公分

依題意可得：$\begin{cases} x+y=164 \\ x-y=16 \end{cases}$

利用加減消去法或代入消去法可得：

x=90，y=74

答：兩段繩子長度分別為 90 公分與 74 公分。

活動二：

例題 3：輸入 A_1=2、B_1=3、C_1=8、A_2=1、B_2=2、C_2=5，

可得 X=1、Y=2，再將 X、Y 代回驗算，

則 X=1、Y=2 代入 $\begin{cases} 2X+3Y=8.....(1) \\ X+2Y=5......(2) \end{cases}$ 中，(1)、(2)式都成立，

所以 X=1、Y=2 為聯立方程式的解。

例題 4：$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$=3×4−2×5=12−10=2 。

隨堂練習 2：(1) 13 (2) −30 。

例題 5：設 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1.......(1) \\ a_2x+b_2y=c_2......(2) \end{cases}$

將第(1)式乘以 a_2、第(2)式乘以 a_1 可得：

$$\begin{cases} a_1a_2x+a_2b_1y=a_2c_1......(3) \\ a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2......(4) \end{cases}$$

將第(4)式−第(3)式消去 x 可得：

$a_1b_2y - a_2b_1y = a_1c_2 - a_2c_1$

$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$

$y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}=\dfrac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$（其中 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$ 、$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$）

同理：

將第(1)式乘以 b_2、第(2)式乘以 b_1 可得：

$$\begin{cases}a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1......(5)\\ a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2......(6)\end{cases}$$

將第(5)式−第(6)式消去 y 可得：

$x=\dfrac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}=\dfrac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$（其中 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$ 、$\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}$）

答：$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$（其中 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$ 、$\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}$ 、$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$）

例題 6：$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}4 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}}=\dfrac{4\times4-3\times5}{2\times4-3\times3}=\dfrac{1}{-1}=-1$ ， $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}}=\dfrac{2\times5-4\times3}{2\times4-3\times3}=\dfrac{-2}{-1}=2$

答：$x=-1$，$y=2$。

隨堂練習 3：(1) $x=3$，$y=-2$　　(2) $x=2$，$y=1$ 。

活動三：

例題 7：假設大姐有零用錢 x 元、二姐有零用錢 y 元、小妹有零用錢 z 元，依題意可列出三元一次聯立方程式：

$$\begin{cases} x+y+z=7800......(1) \\ 2x=3y....................(2) \\ 3y=4z....................(3) \end{cases}$$

將(1)式做移項得 z=7800−x−y，代入(2)式、(3)式中可得：

$$\begin{cases} 2x=3y............................(4) \\ 3y=4(7800-x-y).......(5) \end{cases}$$

將(4)式做移項得 $x=\dfrac{3y}{2}$，代入(5)式中得：

$3y=4(7800-\dfrac{3y}{2}-y)$ ， $3y$=31200−$6y$−$4y$

$13y$=31200 ， y=2400 ， 代入(2)式、(3)式中得：

x=3600，z=1800

答：大姊每月的零用錢為 3600 元。

另解：

假設大姐有零用錢 x 元、二姐有零用錢 y 元、小妹有零用錢 7800−x−y 元，依題意可列出二元一次聯立方程式：

$$\begin{cases} 2x=3y............................(1) \\ 3y=4(7800-x-y).......(2) \end{cases}$$

解出 x=3600，y=2400，小妹為 7800−3600−2400=1800

答：大姊每月的零用錢為 3600 元。

隨堂練習 4：因為 $\begin{cases} a-3b+c=0....(1) \\ 2a+b-c=0....(2) \end{cases}$

由(1)+(2)可得：(預備消去 c) ， $3a$−$2b$=0

$a=\frac{2}{3}b\cdots$代入(2)式　，$\frac{4}{3}b+b-c=0$(同乘以 3)

$4b+3b-3c=0$　，$7b=3c$　，$c=\frac{7}{3}b$

答：(1) $\frac{2}{3}$　(2) $\frac{7}{3}$　。

隨堂練習 5：解聯立方程式 $\begin{cases} x+2y+z=1......(1) \\ 2x+y-z=8......(2) \\ 3x+2y+2z=2..(3) \end{cases}$

解：將(1)+(2)可得：(預備消去 z)

$3x+3y=9\cdots\cdots(4)$

將(2)×2+(3)可得：(預備消去 z)

$7x+4y=18\cdots\cdots(5)$

再解 $\begin{cases} 3x+3y=9........(4) \\ 7x+4y=18......(5) \end{cases}$

可得：$x=2$，$y=1$　，代入(1) $z=-3$

答：$x=2$，$y=1$，$z=-3$。

七、指定作業：

1.一艘船沿河流行駛，往返於相距 75 公里的港口之間，已知逆流行駛需要花 5 小時，順流行駛需要花 3 小時，若水流速度不變且船速保持穩定，試問船在靜止水中的速度為何？水流速度為何？(請用算術方法與代數方法解題)

2.已知 x、y、z 表不為 0 的常數，若 $2x+y-2z=0$、$4x-3y-9z=0$，

則$(x+y)$是 z 的幾倍？

3.利用二元一次聯立方程式的公式解，解下列各聯立方程式：

(1)$\begin{cases} 4x+y=1 \\ 3x+5y=22 \end{cases}$　　　　(2)$\begin{cases} 2x-5y=9 \\ 7x+3y=11 \end{cases}$

4.解$\begin{cases} x-2y-3z=-4 \text{......(1)} \\ 2x+z=7 \text{................(2)} \\ 3x+2y-z=12 \text{......(3)} \end{cases}$。

5.在解一元一次方程式 $2x-\dfrac{9-x}{3}-11=0$ 的過程中(恰有一組解)。

甲生猜答案為 3，代入方程式左邊得−7，不等於右邊的 0，不合；

乙生猜答案為 9，代入方程式左邊得 7，不等於右邊的 0，不合；

丙生將甲、乙兩生所猜的數字與計算結果做運算：

$\dfrac{7\times3-(-7)\times9}{7-(-7)}=\dfrac{21+63}{14}=\dfrac{84}{14}=6$，得方程式的解為 $x=6$

試說明丙生的解法，為何可以得到正確的答案？

指定作業參考解答：

1.(1)算術方法：

75÷5=15…逆流速度(船速−水速)，

75÷3=25…順流速度(船速+水速)

船速為 (25+15)÷2=20，水速為 (25−15)÷2=5

答：船速為每小時 20 公里，水速為每小時 5 公里。

(2)代數方法：

設船速為每小時 x 公里，水速為每小時 y 公里

依題意可列出：

$$\begin{cases} 5(x-y)=75 \\ 3(x+y)=75 \end{cases}$$

利用加減消去法解得：

$x=20$，$y=5$

答：船速為每小時 20 公里，水速為每小時 5 公里。

2. 解：$\begin{cases} 2x+y-2z=0........(1) \\ 4x-3y-9z=0......(2) \end{cases}$

將(1)×2−(2)可得：(預備消去 x)

$(4x+2y-4z)-(4x-3y-9z)=0-0$

$4x+2y-4z-4x+3y+9z=0$

$5y=-5z$ ， $y=-z$ ，代入(1)得：

$2x-z-2z=0$ ， $x=\frac{3}{2}z$ ，

故$(x+y)\div z=(\frac{3}{2}z-z)\div z=\frac{1}{2}$ ， 答：$\frac{1}{2}$ 。

3. (1) $x=-1$，$y=5$ (2) $x=2$，$y=-1$。

4. 解：$\begin{cases} x-2y-3z=-4......(1) \\ 2x+z=7................(2) \\ 3x+2y-z=12......(3) \end{cases}$

將(1)+(3)可得：(預備消去 y)

$4x-4z=8$……同除以 4 ， $x-z=2$……(4)

再解：$\begin{cases} 2x+z=7 ....(2) \\ x-z=2 ....(4) \end{cases}$ 可得 $x=3$，$z=1$，代入(1)得 $y=2$

答：$x=3$，$y=2$，$z=1$。

5. 解說：

(1)任何一元一次方程式，經過化簡後必為 $ax+b=0$，又因為恰有一組解 $x=-\dfrac{b}{a}$，故只要求出 a、b 之值即可得解。

(2)依題意：

將第一個猜數=3 代入 $ax+b$，可得：$3a+b=-7$

將第二個猜數=9 代入 $ax+b$，可得：$9a+b=7$。

解 a、b 的二元一次聯立方程式：$\begin{cases} 3a+b=-7 ....(1) \\ 9a+b=7 ......(2) \end{cases}$

將(2)−(1)可得：

$9a-3a=7-(-7)$ ， $(9-3)\,a=7-(-7)$

$a=\dfrac{7-(-7)}{9-3}$ 代入(1)可得：

$3\times\dfrac{7-(-7)}{9-3}+b=-7$

$b=-7-\dfrac{3\times7-3\times(-7)}{9-3}$

$=\dfrac{(-7)\times9-(-7)\times3-3\times7+3\times(-7)}{9-3}=\dfrac{(-7)\times9-3\times7}{9-3}$

原一元一次方程式的解為：

$$x=-\frac{b}{a}=-\frac{\frac{(-7)\times 9-3\times 7}{9-3}}{\frac{7-(-7)}{9-3}}=-\frac{(-7)\times 9-3\times 7}{7-(-7)}=\frac{-(-7)\times 9+3\times 7}{7-(-7)}$$

$$=\frac{3\times 7-(-7)\times 9}{7-(-7)}=\frac{21+63}{14}=\frac{84}{14}=6$$ 。

八、教學活動注意事項：

1.教學活動時間建議如下，活動一：約 30 分鐘，活動二：約 40 分鐘，活動三：約 20 分鐘。

2.教師在教學的過程中，盡可能透過師生互動，瞭解學生的前置經驗與學習情形，至於隨堂練習，則可邀請學生上台作答，掌握學生的學習績效。

3.算術方法與代數方法解二元一次聯立方程式，各有其優異處，但大部分的題目，學生只要掌握住概念，利用未知數的假設，都較容易解決問題，也符合此單元的要求。

4.活動一結束前，教師可以再透過學生間的對話，引導學生感受兩種不同的解題方式，比較國中與國小的解題差異，讓學生體會到代數的威力，也為活動做一個結論。

5.活動二的例題 3，教師可請同學提供係數的數字，利用 EXCEL 的操作，快速得到聯立方程式的答案，再次引起學生的學習

興趣，並告訴同學在 EXCEL 的設計是很簡單的，只要知道導出的公式結果即可設定。

6.活動二的例題 5，出現了 a_1、b_1、c_1、…等符號，若學生有不明瞭其意思的時候，教師應即時為學生做說明，以方便活動之進行。

7.活動二的例題 5，教師在推導公式的過程中，應注意教學的速度，並留意學生的瞭解情形，教師也可以考慮舉一個例題來解聯立方程式，並同步推導公式與之互相對應，幫助學生瞭解其意義。至於無解或無限多組解的情形，我們將資料補充於教學參考資料中，教師可看時機使用。

8.活動二的教學內容，雖然在高中時候才會出現，但目前的國中學生，已有一些學生會使用公式，且利用下課時間，來問老師理由，經考量後，其內容並非艱深難懂，且教學時，只要速度放慢，掌握學生學習效能，仍是可以進行的，也方便以後高、國中的課程銜接。

9.活動三的教學活動後，教師應與學生對話並做結論，幫助學生瞭解，三元一次聯立方程式的解法與二元一次聯立方程式的解法，其精神是一致的，只是運算的複雜度，對同學而言，有部分加深而已。

10.在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

11.在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

12.指定作業 5 的解答，若學生用文字假設來做運算，表示該生對代數的運算，已經非常熟悉，應給於極大讚賞。對七年級學生而言，能以數字來解說，已屬不錯的表現了。

解說如下：(文字假設)

(1)任何一元一次方程式，經過化簡後必為 $ax+b=0$，又因為恰有一組解 $x=-\frac{b}{a}$，故只要求出 a、b 之值即可得解。

(2)依題意：將第一個猜數($x_1=3$)代入 $ax+b$，可得：$ax_1+b=y_1(-7)$，

將第二個猜數($x_2=9$)代入 $ax+b$，可得：$ax_2+b=y_2(7)$。

再解 a、b 的二元一次聯立方程式：$\begin{cases} ax_1+b=y_1 ....(1) \\ ax_2+b=y_2 ......(2) \end{cases}$

將(1)−(2)可得：$ax_1-ax_2=y_1-y_2$

$(x_1-x_2)\,a=y_1-y_2$ ， $a=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 代入(1)可得：

$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot x_1+b=y_1$ ，

$$b=y_1-\frac{x_1y_1-x_1y_2}{x_1-x_2}$$

$$=\frac{x_1y_1-x_2y_1-x_1y_1+x_1y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$$

原一元一次方程式的解為：

$$x=-\frac{b}{a}=-\frac{\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}}{\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}}=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}$$ 。

九、教學參考資料：

1.教育部編著(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部。

2.國中各版本第二冊數學課本。

3.高中各版本第三冊數學課本。

4.國中基本學力測驗試題。94 年度～100 年度。

5.蔡聰明著(2011)。從算術到代數之路。臺北市：三民書局。

6. Max A. Sobel‧Evan M.Maletsky/著。張靜嚳、念家興/譯（2001)。數學教學方法。臺北市：九章出版社。

7.若二元一次聯立方程式 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$，則我們分成兩種情形來討論：

(此處不討論 a_2、b_2、c_2 等於 0 的情形，若 a_2、b_2、c_2 有些數為 0，教師只要代回題目運算，即可知此題為無解或無限多組解。)

(1) $\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix}$ 與 $\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}$ 有一個不為 0 時，聯立方程式無解。

（2） $\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix}$ 與 $\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}$ 皆為 0 時，聯立方程式有無限多組解。

首先說明：

依題意，此處只考慮$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$中 $cd\neq 0$ 的情形。

①若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$ ，則 $ad-bc=0$ ，

可知：$ad=bc$(同除 cd)，可得：$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ 。

②若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$ ，則 $ad-bc\neq 0$ ，

可知：$ad\neq bc$(同除 cd)，可得：$\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$ 。

接著討論第(1)種情形：

因為$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$與$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$有一個不為 0，不妨假設$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$

所以由$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$與$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$

我們可得：$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$與$\dfrac{c_1}{c_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ ，

即：$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ ，

此種情形經化簡求解後，會產生不合理的式子，

(參考二元一次聯立方程式教學篇(一))

故聯立方程式$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$為無解。

討論第(2)種情形：

因為$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$且$\Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}$與$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$皆為0，

所以 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$、$\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$與$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

即：$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$，

此種情形經化簡求解後，會產生恆等的式子，

(參考二元一次聯立方程式教學篇(一))

故聯立方程式$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$有無限多組解。

8.活動三的例題7，當學生學會比與比例式的單元後，亦可利用連比的概念解題，說明如下：

由$\begin{cases}x+y+z=7800......(1)\\ 2x=3y....................(2)\\ 3y=4z....................(3)\end{cases}$的(2)、(3)可得：

$2x=3y=4z$ (假設等於 $12k$)

則 $x=6k$、$y=4k$、$z=3k$ ， 代入(1)可得：

$6k+4k+3k=7800$ ， $13k=7800$ ， $k=600$，

$x=600\times6=3600$

答：大姊每月的零用錢為3600元。

9.指定作業 5 之補充：

因為一元一次式 $2x-\dfrac{9-x}{3}-11$，具有線性的關係，或說

$y=2x-\dfrac{9-x}{3}-11$其圖形為直線(第二章)，

所以甲生猜答案為 3，代入一元一次方程式左邊得−7，

乙生猜答案為 9，代入一元一次方程式左邊得 7，

則一元一次方程式$2x-\dfrac{9-x}{3}-11=0$成立，

表示 0 是(−7)與 7 的平均值(中點)，

故 x 亦為 3 與 9 的平均值 6(中點)。

主題1－3：二元一次聯立方程式遊戲篇

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　**撰寫者：**蘇進發

二、先備知識：

(一) 能對算式中相同的文字符號、常數，進行合併或化簡。

(二) 能理解二元一次方程式及其解的意義，並由具體情境中列出二元一次方程式。

(三) 能理解二元一次聯立方程式及其解的意義，並由具體情境中列出二元一次聯立方程式。

(四) 能熟練使用代入消去法與加減消去法解二元一次聯立方程式。

三、教學目標：

(一) 能察覺數學與生活的關連性。

(二) 能將待解決的問題轉化成數學問題。

(三) 能利用數學解決日常生活所遭遇到的問題。

(四) 能激發創意思考能力。

四、教學時間：90分鐘(二節課)

五、教學說明：

為了增進學生對數學的喜愛，並將所學與生活做連結，本單元的課程設計，將應用科技、利用魔術表演與猜數遊戲，進行一系列的教學活動，期待學生在學習過程中，能發現數學與生活是

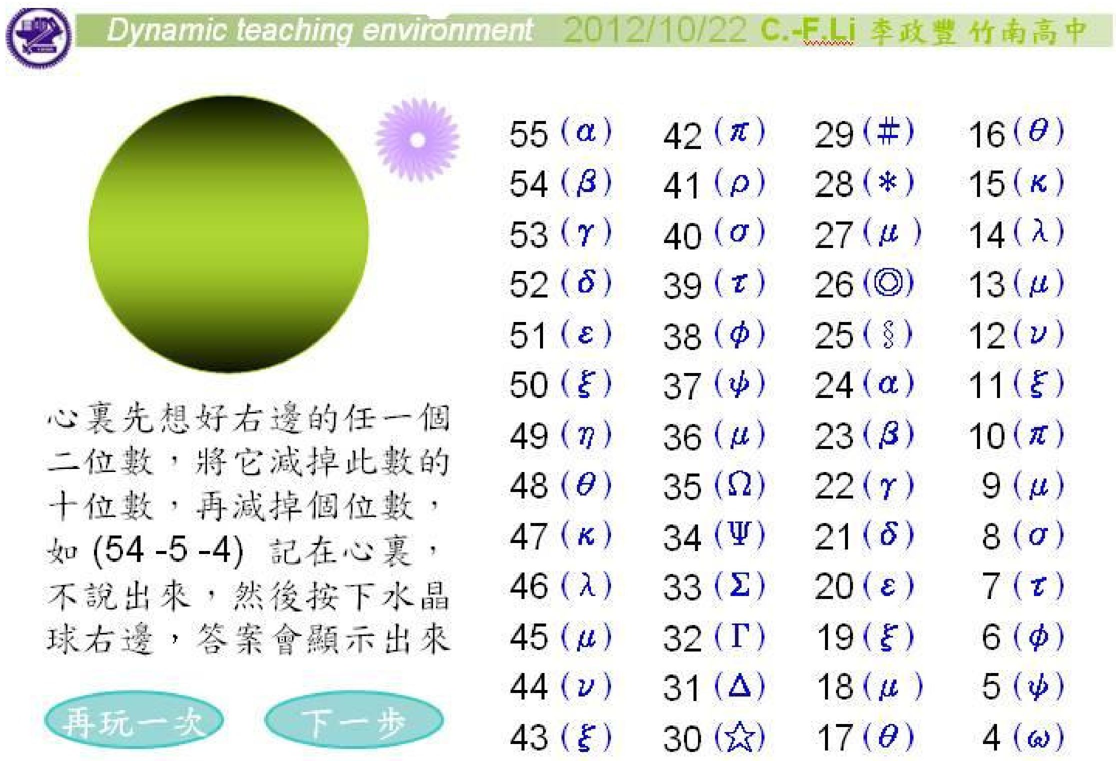
息息相關的，且能感受到數學是，有趣的、有用的、有威力的，進而與其它領域做結合，激發出學生的創意思考能力。

六、教學活動：

活動一：神秘水晶球

有顆神秘水晶球，它每次都能猜中你心中所想的符號，你知道原因嗎? 首先說明，遊戲規則如下：

先在心中想一個小於 56 的二位數(例如 54)，然後減去此數的十位數字(5)，再減去個位數字(4)，便得出答案(45)，此時記住對應到螢幕上答案(45)旁邊的符號是”μ”。當你記好後，老師在螢幕水晶球點一下，它竟然出現”μ”，同學可不要被嚇到，因為水晶球本來就是很神奇！



步驟 1：教師依序邀請 2 或 3 位同學，按照遊戲規則進行活動，並將最後數字旁的符號，寫在空白計算紙上，當教師按下水晶球時，水晶球所出現的符號，與同學所記錄的符號，是那麼神奇讓人驚訝！為什麼他們會一樣呢？

步驟 2：教師請同學思考其原因？並發表想法，若學生無法說明理由，則教師透過步驟 3 的過程，引導學生找出答案；若學生已可說出理由來，則教師可以省略步驟 3 的過程，直接進入步驟 4。

步驟 3：教師再邀請同學重複步驟 1 的過程，並將最後的數寫在黑板上，重複上述動作 3~5 次，請同學觀察它們的共通性。

【說明】：

教師：同學看著這些數，有什麼關聯性？

學生：都是 9 的倍數。

例如：甲生：34−3−4=27

乙生：48−4−8=36

丙生：23−2−3=18

教師：可以用代數(未知數)來處理嗎？

學生：假設十位數字為 x、個位數字為 y

可得：$(10x+y)-x-y=9x$

教師：同學請看水晶球中，9 的倍數旁邊之符號。

學生：都一樣(若學生說有一個不一樣，直接進入步驟 4。)

教師：真的都一樣嗎？(為步驟 4 做鋪題)

步驟 4：教師問：「為何螢幕中的 54 這個數，其旁邊的符號與剩下 9 的倍數旁邊之符號不同？」，請同學思考並說明原因。

【說明】：

在此遊戲中，按照遊戲規則進行活動，最後所產生的數，其最大的數只能為 45，因為步驟 3 中的「$9x$」，在所給的資料中，x 最多只能用 5 代入，所得即為 45，所以不可能出現 54，故 54 這個數旁邊的符號，可以與剩下 9 的倍數旁邊之符號不同。

活動二：神奇魔術手

透過魔術演出，引起學生的好奇心，進而激發出學生的創造力，為何我的答案，會出現在老師的手掌心(或手背上)呢？

步驟 5：教師在上課前，先藉由細緻的棉花棒，將答案(23)，利用沙拉脫寫於手掌心(或手背上)，並說明下一個步驟，等待風吹乾後，才開始進行活動。

步驟 6：為了讓活動能順利進行，請教師先舉例說明，「去掉百位數字」是什麼意思？「加上所去掉的百位數字」又是什麼意思？，幫助學生明瞭題意，避免不必要的干擾，妨礙活動的進行。

例如：

183 去掉百位數字將變成 83，其意思是 183-100=83。

83 加上去掉的百位數字 1，其意思是 83+1=84。

步驟 7：教師請一位同學上台幫忙演出，為了公平起見，可以由全班表決選出，教師這時可以走到同學中，背對黑板再把眼睛遮住，然後告訴學生按照下列過程，在黑板上算出答案(此時同學也可以檢查台上同學是否算對)。

教師敘述如下：

「請寫下一個介於 50 到 100 之間的二位數，

然後加上 76，

再去掉百位數字，

將剩下的二位數，再加上所去掉的百位數字，

所得的數，最後再用原數去減此數，其結果為…」

教師請同學們將答案記住，並請在台上的同學將黑板擦乾淨，然後回座位坐好。

步驟 8：教師去除遮住眼睛的東西，將手掌(或手背)張開於學生面前，之後走向黑板，此時不經意的利用左手抓起一把粉筆灰，再輕輕的放下粉筆灰(或灑粉筆灰於手背)，不讓學生發現，這時答案已經黏在教師的手掌心(或手背)。接著，教師在黑板表面上慢慢的晃動，確勿將手掌心(或手背)

與黑板摩擦，免得答案不見了，最後教師轉向同學，張開手掌心(或手背)，讓學生看見答案(23)，學生將驚訝的說：「為何答案會跑到老師的手掌心(或手背上)？」

步驟 9：學生進行分組討論，教師可邀請同學發表意見。

步驟 10：教師延續步驟 8，教師手上的答案，為何一定是 23 呢？

【說明】：

首先舉一些數來觀察，例如：

例(1) 85

$85+76=161$，$161-100=61$，$61+1=62$，$85-62=23$

例(2) 54

$54+76=130$，$130-100=30$，$30+1=31$，$54-31=23$

例(3) 92

$92+76=168$，$168-100=68$，$68+1=69$，$92-69=23$

計算結果都是 23。

接著，再利用代數(未知數)說明，如下：

假設原數為 $10a+b$，介於 50 到 100 之間，

加上 76，則變為 $10a+b+76$，

再去掉百位數字，則變為 $10a+b+76-100$，

再加上所去掉的百位數字，則變為 $10a+b+76-100+1$，

最後再用原數去減此數，則可得：

$(10a+b)-(10a+b+76-100+1)$

$=10a+b-10a-b-76+100-1$

$=23$ 。

隨堂練習 1：請同學將你的年齡乘以 2，再加上 10，接著乘以 5，之後又加上你的家庭人數(小於 10 人)，最後減去 50，則所得結果之數，其個位數字為家庭人數，剩下數字為你的年齡，請說明原因。

活動三：神算金頭腦

一列數字才剛讀完而已，教師竟然可以把它的總和算出來，老師，您的計算能力也未免太強了吧！

步驟 11：教師介紹費氏數列。

【費氏數列】

若數列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …，其第三項以後(包含第三項)，使每一項均為前兩項的和，我們稱此數列為費氏數列。

步驟 12：教師請學生到黑板旁，隨便寫出兩個數，例如 4、9 兩數，然後仿照費氏數列，依序列出其餘的數，紀錄如下：

4, 9, 13, 22, 35, 57, 92, 149, 241, 390, …,

當學生寫到第 7 個數的時候，教師已經算出前 10 項的總和為 1012，同學你知道原因嗎？

步驟 13：學生進行分組討論，教師可邀請同學發表意見。

步驟 14：承步驟 13，若學生有討論出答案，教師可邀請學生上台寫出原因，並說明理由，教師只要鼓勵並重點說明即可。若學生仍然無法解決問題時，教師可以提示與第 7 項(92)有關，請學生再繼續討論，然後引導學生找到答案。

【說明】：

假設第一、二項依序為 a、b，則數列依序如下：

$a,b,a+b,a+2b,2a+3b,3a+5b,5a+8b,8a+13b,13a+21b,$

$21a+34b,\cdots\cdots$

數列前 10 項的和為：

$a+b+(a+b)+(a+2b)+(2a+3b)+(3a+5b)+(5a+8b)+(8a+13b)+$

$(13a+21b)+(21a+34b)=55a+88b$

剛好為第 7 項的 11 倍，

即$(5a+8b)\times11=55a+88b$，

且教師計算 92×11，如右圖所示，

只要心算即可。

$$\begin{array}{r} 92 \\ \times\ 11 \\ \hline 92 \\ 92 \\ \hline 1012 \end{array}$$

步驟 15：教師請同學兩人一組，仿照步驟 12 的過程，由一位同學先寫出兩個數字，建議不要太大，例如，4、7，然後仿照費氏數列，依序寫出：

4,7,11,18,29,47,76,123,199,322,⋯

另一位同學，可以等待他寫到第 7 項時，馬上說出前 10 項的和為 836(=76×11)。(角色互換，重複動作一次。)

隨堂練習 2：承活動三的步驟 15，當學生知道前 10 項的和(836)，教師馬上知道第 12 項(843)，請說明原因。

活動四：神測魔術師

教師看著撲克牌冥想，竟然可以猜測出它們的張數差，難不成…！老師您的眼睛有穿透力？

步驟 16：教師預備一副撲克牌，從中選出 13 張紅色牌與 13 張黑色牌，共 26 張。並在班上徵求兩位助手，假設班長與副班長自願擔任。此時請班長詳細洗牌(混合)，若班上同學擔心，可以再請一位同學洗牌。

步驟 17：接著，請班長將牌分成兩堆，一堆給副班長，其餘自己保留，當副班長告訴老師他的牌有 11 張時，老師看著班長與副班長的牌之背面，進入冥想時…，教師即將告訴學生一個不可思議的猜測！

步驟 18：教師猜測說：「班長手中的紅色牌比副班長手中的黑色牌多 2 張。」

步驟 19：見證奇蹟的時候到了！請班長將手中的牌翻開，並分顏色數它們的張數，副班長也是如此進行，當結果揭曉時，

同學將驚訝的說:「老師竟然可以預測它們的張數差！」。

(教師重複步驟 16 到步驟 19 一次，幫助學生熟悉問題。)

步驟 20：學生進行分組討論，教師可邀請同學發表意見。

【說明】：

(1)首先舉一些數來觀察，例如：

假設班長有紅色牌 10 張，

則班長還有黑色牌 15−10=5(張)，

副班長有黑色牌 13−5=8(張)，

故班長手中的紅色牌比副班長手中的黑色牌多

10−8=2 。

(2)設班長手中有紅色牌 x 張，副班長手中有黑色牌 y 張

	紅色(13 張)	黑色(13 張)
班長手中的牌(15)	x	
副班長手中的牌(11)		y

則由班長手中有黑色牌$(15-x)$張與副班長有黑色牌 y 張，

及黑色牌總共有 13 張，可得：

$(15-x)+y=13$ ， 知 $x-y=2$。

亦可由副班長手中有紅色牌$(11-y)$張與班長有紅色牌 x 張，

及紅色牌總共有 13 張，可得：

$x+(11-y)=13$ ， 知 $x-y=2$。

隨堂練習 3：在活動四的步驟 18，此時教師又說：「班長手中的黑色牌比副班長手中的紅色牌多 2 張。」，請同學說明其理由。

隨堂練習 4：承活動四的步驟 17，當副班長告訴老師他手中的牌有 9 張時，同學你知道班長手中的紅色牌比副班長手中的黑色牌多了幾張？(此時，共 26 張牌，其中紅牌有 13 張，黑牌有 13 張。)

活動五：神奇心算師

透過師生間的對話，及學生的個別計算，教師可以立刻知道學生所想的數(例如身高)，你想知道原因嗎？跟著老師玩下去，你就知道原因了！

步驟 21：教師請一位同學幫忙活動的進行，首先請同學將身高寫在一張空白紙上，然後翻到背面預備做計算。

步驟 22：教師請這位同學將其身高的數，加上生日的月份數，再減去生日的日數，計算後，告訴老師你的運算結果(假設為 149)；接著，請同學繼續計算，將其身高的數，加上生日的日數，再減去生日的月份數，此時，再將運算結果告訴老師(假設為 191)。

步驟 23：教師馬上知道同學的身高為 170 公分。此時，請這位同學將所寫的身高與老師做印證。

(教師重複步驟 21 到步驟 23 一次，幫助學生瞭解問題。)

步驟 24：學生進行分組討論，教師可邀請同學發表意見。

【說明】：

方法(一)：

假設學生的身高為 y 公分，生日的月份數減去生日的日數為 x，則依題意可得：

$$\begin{cases} y+x=149......(1) \\ y-x=191......(2) \end{cases}$$

由(1)+(2)得：

$2y=340$

$y=170$ (學生身高)

方法(二)：

假設學生的身高為 h 公分，且為 x 月 y 日出生，則依題意列式，可得：

$$\begin{cases} h+x-y=149......(1) \\ h-x+y=191......(2) \end{cases}$$

由(1)+(2)得：

$2h=340$

$h=170$(學生身高)

教學活動參考解答：

隨堂練習 1：假設同學年齡為 x 歲，家庭人數為 y 人，則依題意

可得：$(x\times2+10)\times5+y-50$

$=10x+50+y-50=10x+y$。

個位數字為 y，去掉個位數字後，剩下 $\dfrac{10x+y-y}{10}=x$ 。

隨堂練習 2：假設第一、二項依序為 a、b，則數列依序如下：

$a,b,a+b,a+2b,2a+3b,3a+5b,5a+8b,8a+13b,13a+21b,$

$21a+34b,34a+55b,55a+89b,\cdots\cdots$

且前 10 項的和為 $55a+88b$，

故可知第 12 項 $55a+89b=55a+88b+b$

=”前 10 項的和”+”第 2 項” ，

即第 12 項(843)為 “前 10 項的和(836)” + ”第 2 項(7)”。

隨堂練習 3：設班長手中有紅色牌 x 張，副班長手中有黑色牌 y 張

	紅色(13 張)	黑色(13 張)
班長手中的牌(15)	x	
副班長手中的牌(11)		y

依題意可得：

班長手中的黑色牌有（$15-x$）張

副班長手中的紅色牌有 ($11-y$）張

又已知班長手中的黑色牌與副班長手中的黑色牌總

共 13 張， $(15-x)+y=13$ ，$15-x+y=13$ ， $-x+y=-2$

故將班長手中的黑色牌減去副班長手中的紅色牌為：

$(15-x)-(11-y)=15-x-11+y=4-x+y=4-2=2$。

隨堂練習 4：$\dfrac{17-9}{2}=4$　答：4 張。

七、指定作業：

1. 若有一個三位數(數字不重複)，且其百位數字為 6，用這三位數的三個數字，任取二個組成二位數之後，把這些二位數的和用這三位數的三個數字和來除，所得的結果為何？

2. 小豪在 2012 年買了一雙球鞋，小布說：「請將你球鞋的尺寸乘以 2，再加上 40，再乘以 50，再加上 13，所得的結果減去你西元的出生年，我馬上知道你的球鞋尺寸大小與你的年齡。」，同學你知道原因嗎？(小豪年齡少於 100 歲)

(年齡以虛歲表示，即出生為 1 歲，隔年為 2 歲，以此類推。)

3. 已知小華的年齡超過 9 歲，若將小華的年齡乘以 10，再把此數減去 9 的倍數(9, 18, 27, ⋯, 81)，且所減去的數不超過 81，接著去掉個位數字, 且把它加到去掉個位數字後所剩下的數中，例如，213 去掉個位數字 3 後，所剩下的數為 21，把它

加到去掉個位數字後所剩下的數中，即 3+21 的意思。最後所得的結果，竟然是小華的年齡，請說明原因。

4. 創創家有 10 人、守守家有 8 人，兩家人一同看表演，該場表演的票價如右圖所示。若創創家的總票價比守守家少 60 元，則創創家的半票比守守家的半票多幾張？

票價	
全票	60元／張
半票	30元／張

（基測 93-1-32）

5. 小亞有紅牌 16 張，黑牌 18 張，混合後分成甲、乙兩堆。若甲堆比乙堆多 12 張，且甲堆中的紅牌比乙堆中的黑牌多 5 張，則甲堆中的黑牌比乙堆中的紅牌多幾張？

（基測 96-2-22）

6. 活動五的參與學生，其生日可能是什麼時候？

7. 請同學利用此單元，設計或介紹一種類似的遊戲或魔術，可以跟同學分享。

指定作業參考解答：

1. 設此三位數的十位數字為 x，個位數字為 y

由這三位數中，任取 2 個數字組合的二位數有

$6\times10+x$，$6\times10+y$，$x\times10+6$，$x\times10+y$，$y\times10+6$，$y\times10+x$ 共有 6 組

此 6 組的總和為

$$(6\times10+x)+(6\times10+y)+(x\times10+6)+(x\times10+y)+(y\times10+6)+(y\times10+x)=22\times(6+x+y)$$

故將 $22\times(6+x+y)$除以$(6+x+y)$可得 22。

2. 設球鞋的尺寸為 x 公分，出生的西元年為 y 年，則

$[(x\times 2)+40]\times 50+13-y$

$=(\underbrace{100\times x}_{x\text{ 為球鞋尺寸}})+(\underbrace{2013-y}_{2013-y\text{ 為年齡}})$。

3. 設小華的年齡為 x 歲，9 的倍數為 $9k$，則

$\because\ x\times 10-9k$

$=10x-10k+k$

$=10(x-k)+k$

$\therefore$去掉個位數字後，所剩下的數即為：

$\dfrac{10(x-k)+k-k}{10}=x-k$ ，故 $k+(x-k) = x$ 。

4. 設創創家買 x 張半票，守守家買 y 張半票，依題意列出：

$60(10-x)+30x=60(8-y)+30y-60$

$600-60x+30x=480-60y+30y-60$

$-30x+30y=-180$

$x-y=6$

	全票	半票
創創家(10 人)	10−x	x
守守家(8 人)	8−y	y

答：6 張。

5. 設甲堆中的黑牌有 x 張，乙堆中的紅牌有 y 張，依題意列出：

$$(16-y)-(18-x)=5$$

$$16-y-18+x=5$$

$$x-y=7$$

	甲堆	乙堆
黑牌(18 張)	x	$18-x$
紅牌(16 張)	$16-y$	y

答：7 張。

6. 假設學生的身高為 y 公分，生日的月份數減去生日的日數為 x，

則依題意可得：

$$\begin{cases} y+x=149......(1) \\ y-x=191......(2) \end{cases}$$

由(1)−(2)得：$2x=-42$　，　$x=-21$

故生日的月份數減去生日的日數為−21，將答案列成表格如下：

出生月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
出生日數	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	✕	✕

學生的生日有 10 種可能情形，如上所述。

7. 略。

八、教學活動注意事項：

1.教學活動時間建議如下，活動一：約 15 分鐘，活動二：約 20 分鐘，活動三：約 20 分鐘，活動四：約 20 分鐘，活動五：約 15 分鐘。

2.本單元有 5 個教學活動，以二元一次聯立方程式遊戲篇為大標題，內含二元一次式化簡與運算，二元一次方程式，二元一次聯立方程式並非只有二元一次聯立方程式。教師可以配合課程內容，分別融入各章節的教學中，也可以斟酌上課的時間，是否做更深入的探討與觀察。

3.每個教學活動結束後，教師應歸納各活動的教學重點，幫助學生明瞭活動的學習內容。

4.在活動的探索過程中，希望學生先由數字代入找到答案，再利用代數(未知數)進行說明與論證，當然有些學生反應較快，教師可以看著時機進行調整，若學生又能用表格來增加解題的效率，則更符合我們的期待。

5.若活動中有進行分組討論時，教師應注意時間的掌控與學生的參與情形，且教師此時應留意哪些小組已經完成，可以請這些小組上台說明，教師最後只要做簡單的重點歸納即可，若其它小組有不同的意見或不同的解法，亦可上台發表。

6.本單元所設計的遊戲活動，除了要學生將問題做轉化，利用數學方法來解決問題之外，更期待透過活動的進行，激發學生的創意能力，將數學與生活做更多的結合，所以建議教師在課程中或課程後，聽聽學生有否不同的點子與想法，也可以透過學生合作，激盪出不同的作品。

7.活動二的步驟 9 與步驟 10，當同學在進行討論的過程中，教師應留意學生的反應，若有小組仍然不知道答案為什麼是 23 時，教師可以先將步驟 10 的前半部，舉一些數來觀察其規律性，當做提示。此時，若有其它小組已經進行過這部份，亦可請他們上台說明。

8.活動三的步驟 11，教師可以引用一些生活中的植物，例如，鳳梨、松果、向日葵花、花椰菜等，來介紹費氏數列，增加學生的學習動機。

9.活動三的步驟 12，若教師請學生上台計算時，為了怕學生因為緊張而計算錯誤，可以兩個人一起合作運算，或預備計算機供學生使用。

10.活動三的步驟 13，當有些小組討論出答案時，教師可以邀請同學將答案寫於黑板，讓全班同學更清楚其代數的運算過程或利用實物投影機，將學生的作答情形，投影於布幕並請學生說明之。

11.活動四的步驟 20，教師可視學生的討論情形，考慮是否要提供表格，供學生進行討論，減少問題的複雜度。

12.活動五之步驟 24，若學生不知如何進行，則教師可建議在討論時，再舉一些例子，增進學生對此活動的熟悉度，方便學生做觀察與思考，例子如下：

學生	身高(公分)	生日(月/日)	計算結果(1)	計算結果(2)
甲	176	2/28	150	202
乙	165	10/31	144	186
丙	158	8/15	151	165

接著，學生再利用二元一次聯立方程式進行解題。

13.在各活動間，教師宜巡堂走動，加強瞭解學生學習情形。

14.在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 教育部編著(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部。

2. 國中各版本第二冊數學課本。

3. 國中基本學力測驗試題。93 年度～100 年度。

4. Max A. Sobel・Evan M.Maletsky/著。張靜譽、念家興/譯(2001)。數學教學方法。臺北市：九章出版社。

5. Alfred S.Posamentier/著。葉偉文/譯(2005)。神奇數學 117。臺北市：天下文化。

6. 神秘水晶球參考資料(2012/11/23)：(http://www.flashlightcreative.net/portfolio/1-flash/9-mindreader.html)

主題 2—1：直角坐標平面教學篇（一）

一、授課對象：國中七年級下學期學生 **撰寫者：**李政憲

二、先備知識： 陳昭地

(一) 能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。

(二) 能理解平面直角坐標系。

(三) 知道三角形面積公式=底×高÷2

(四) 知道梯形面積公式=（上底+下底）×高÷2

三、教學目標：

(一) 瞭解坐標平面上水平線與鉛直線距離及所圍面積的計算方式。

(二) 能計算直角坐標系上三點所圍成的三角形面積。

(三) 能理解三角形求面積公式的便捷解法並加以應用。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

先瞭解坐標平面上水平線與鉛直線距離及所圍面積的計算方式；接著透過面積切割的方式，讓學生瞭解坐標平面上三角形的面積計算方式，並能提供不同解法，進一步討論面積公式的便捷解法並加以應用。

六、教學活動：

子題一：直道而行

活動一：透過坐標平面上水平兩點的已知坐標，瞭解其距離的計算方式。

步驟 1：教師在黑板上繪製坐標平面，並繪製 A(2,3)、B(6,3)兩點。

步驟 2：詢問全班或抽問同學，A、B 兩點的距離為多少？你是如何計算出來的？

步驟 3：請問 A、B 兩點的坐標、所在位置與其距離有何關係？

隨堂練習 1：已知坐標平面上 C(-2,-2)、D(5,-2)，請問：

(1) C、D 兩點的距離為多少？

(2) C、D 兩點的坐標、所在位置與其距離有何關係？

結論：E 點坐標 (a,b)，F 點坐標為(c,d)，且 E、F 兩點在同一條水平線（與 x 軸平行或與 y 軸垂直的直線）上，則 E、F 兩點距離為$|a- c|$，且 $b= d$。

活動二：透過坐標平面上垂直兩點的已知坐標，瞭解其距離的計算方式。

步驟 4：教師在黑板上繪製坐標平面，並繪製 G(-2,5)、H(-2,-1)兩點。

步驟 5：詢問全班或抽問同學，G、H 兩點的距離為多少？你是如何計算出來的？

步驟 6：請問 G、H 兩點的坐標、所在位置與其距離有何關係？

隨堂練習 2：已知坐標平面上 I 點坐標(4,6)，且 J 點在 I 點的正下方 5 個單位長，請問：

(1) J 點的坐標為何？

(2) I、J 兩點所在位置與其坐標有何關係？

結論：K 點坐標 (a,b)，L 點坐標為(c,d)，且 K、L 兩點在同一條鉛直線（與 x 軸垂直或與 y 軸平行的直線）上，則 K、L 兩點距離為$|b-d|$，且 $a=c$。

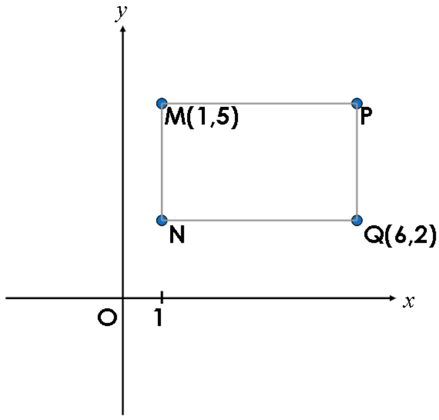
子題二：面積計算

活動三：如圖，MNQP 為一矩形，線段 NQ 平行於 x 軸，且 M 點坐標(1,5)，Q 點坐標(6,2)，

(1)P 點與 N 點的坐標分別為何？

(2)計算四邊形 MNQP 的周長。

(3)計算三角形 PQN 的面積。



※提問 1：

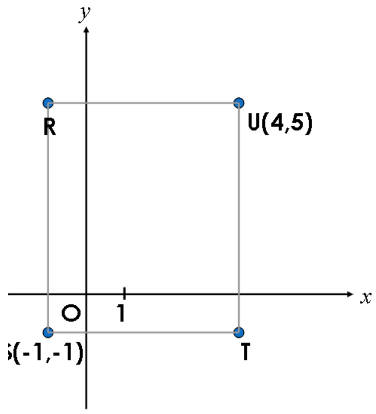
(1)以上(2)、(3)題的答案與各點的 x 或 y 坐標有何關係？

(2) Q 點到直線 MP 的距離與矩形邊長有何關係？

隨堂練習 3：如圖，RSTU 為一矩形，且 S 點坐標 (-1,-1)，U 點坐標(4,5)，線段 ST 平行於 x 軸，請問：

(1) 四邊形 RSTU 的周長為多少？

(2) 計算三角形 RUT 的面積。

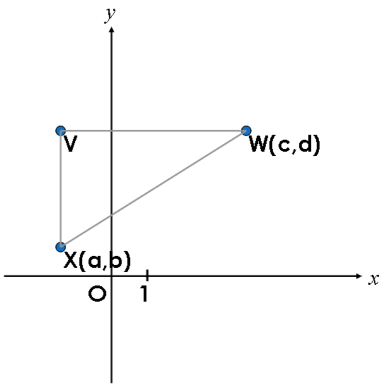


※提問 2：

(1)以上各題答案與各點的坐標有何關係？

(2) S 點到直線 TU 的距離與矩形邊長有何關係？

結論：如圖，VWX 為一直角三角形，$\overline{VW}$ 為水平線，且坐標 X(a,b)，W(c,d)，則：



(1) V 點坐標為(a,d)；

(2)三角形 VXW 的底 $\overline{VW}$ 為 $|a-c|$，高 $\overline{VX}$ 為 $|b-d|$，

其面積為 $\frac{1}{2}|a-c|\times|b-d|$ 。

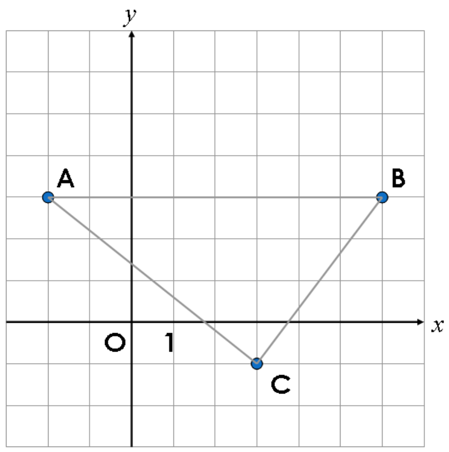
子題三：面積切割

活動四：如圖，A 點坐標 (-2,3)，B 點坐標為(6,3)，C 點坐標為(3,-1)，請問：

(1)若以 AB 邊長為底，△ABC 底與高的長度分別是多少？

(2)計算△ABC 的面積為多少？

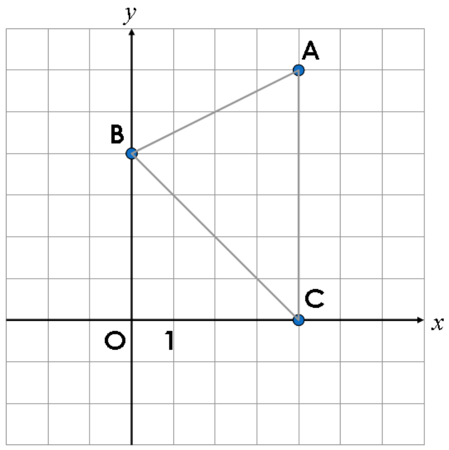
(3)請畫出同樣以 AB 為底，面積與△ABC 相等的另外三個不同三角形。



隨堂練習 4：如圖，A 點坐標 (4,6)，B 點坐標為(0,4)，C 點坐標為(4,0)，請問：

(1)若要計算△ABC 面積，你要以哪一段邊長為底？高是多少？

(2)計算△ABC 的面積。



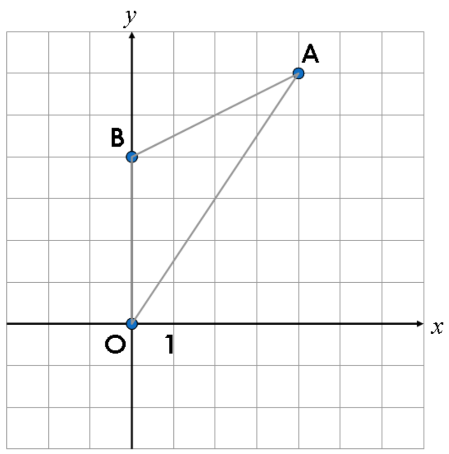
※提問 3：

除了目前的方法，請提供其他方法同樣算出△ABC 的面積。

活動五：如圖，A 點坐標 (4,6)，B 點坐標為(0,4)，請問：

(1)若要計算△ABO 的面積，你要以哪一段邊長為底？高是多少？

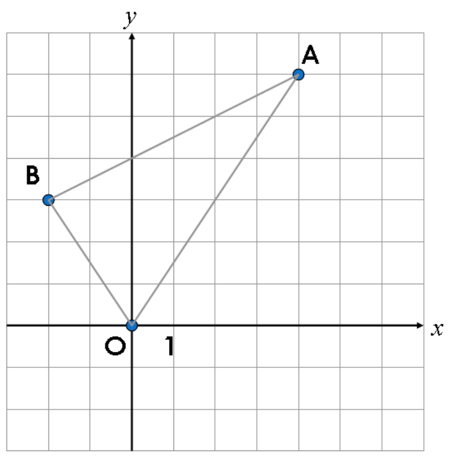
(2)計算△ABO 的面積。



※提問 4：

除了目前的方法，請提供其他方法同樣算出△ABO 的面積。

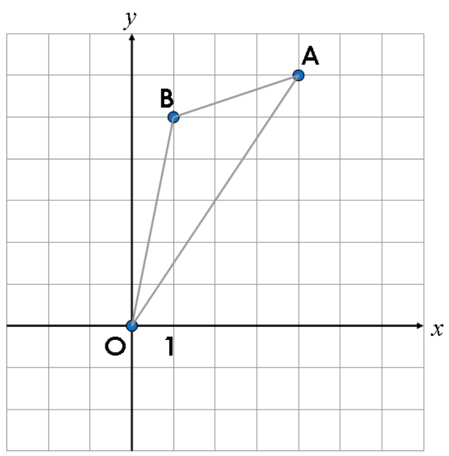
活動六：如圖，A 點坐標 (4,6)，B 點坐標為(-2,3)，請計算△ABO 的面積，並說明你的作法。



※提問 5：

除了目前的方法，請提供其他方法同樣算出△ABO 的面積。

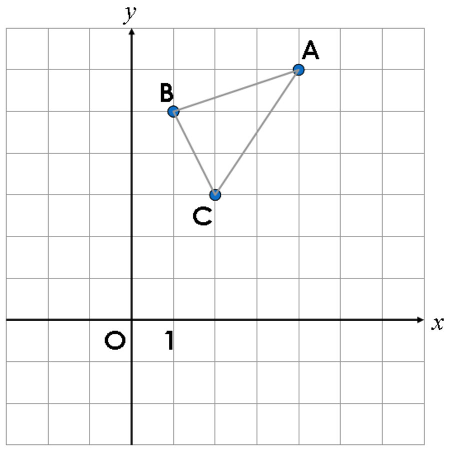
隨堂練習 5：如圖，A 點坐標 (4,6)，B 點坐標為(1,5)，請計算△ABO 的面積，並說明你的作法。



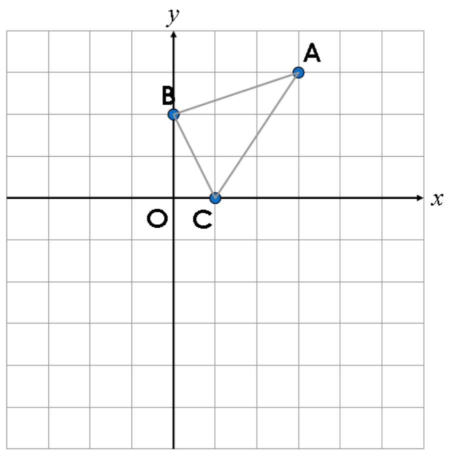
※提問 6：

除了目前的方法，請提供其他方法同樣算出△ABO 的面積。

活動七：如圖，A 點坐標 (4,6)，B 點坐標為(1,5)，C 點坐標為(2,3)，計算△ABC 的面積，並說明你的作法。



隨堂練習 6： 如圖，A 點坐標(3,3)，B 點坐標為(0,2)，C 點坐標為(1,0)，計算△ABC 的面積，並說明你的作法。

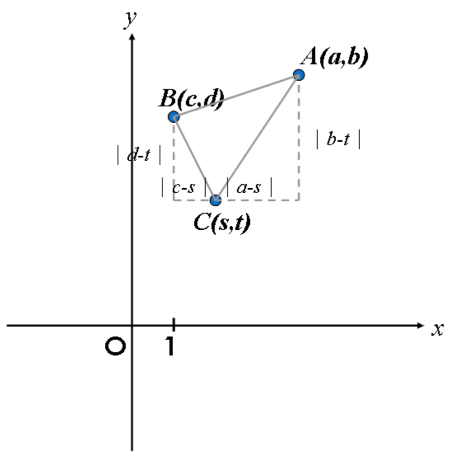


※提問 7：

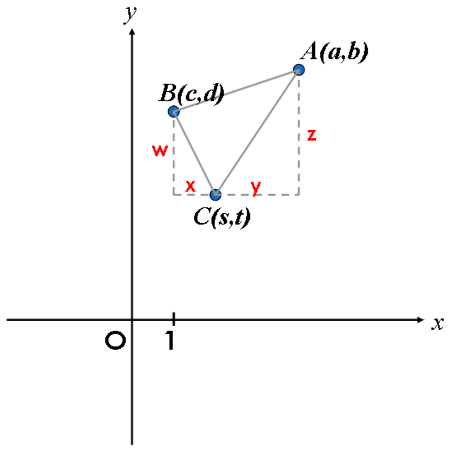
請問你計算△ABC 面積的方法，與活動七的方法有何關係？

子題四：面積便捷解法

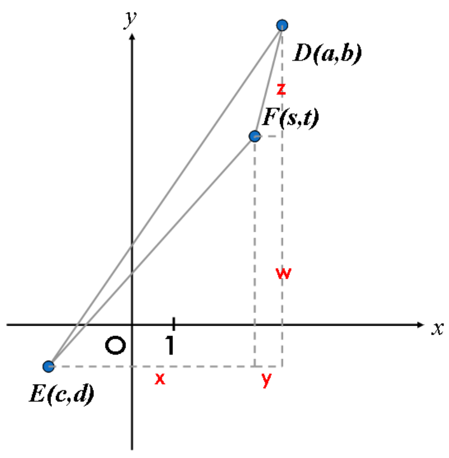
活動八： 如圖，A 點坐標(a,b)，B 點坐標為(c,d)，C 點坐標為(s,t)，請利用以上的面積切割方式，計算△ABC 的面積。



隨堂練習 7：承活動八，若｜d-t｜= w，｜c-s｜= x，｜a-s｜= y，｜b-t｜= z；試以 w、x、y、z 表示△ABC 的面積。



隨堂練習 8：如圖所示，按△DEF 各頂點繪製水平與鉛直線，其線段長度分別為 w、x、y、z。請以 w、x、y、z 表示△DEF 的面積。



※提問 8：

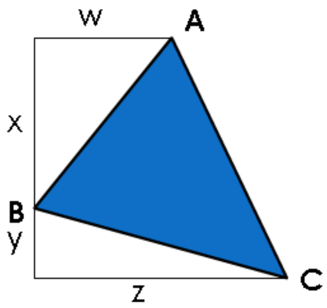
比較隨堂練習 7 與隨堂練習 8 中，△ABC 與△DEF 的表示方式，請問兩者面積的結果是否相關？

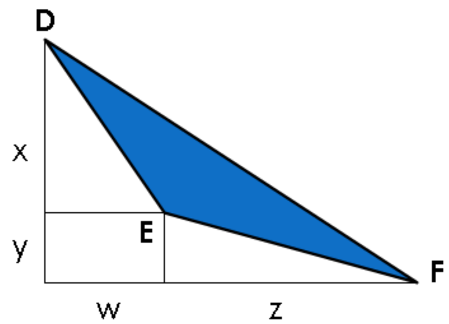
結論：(1)坐標平面上的三角形，若底為水平或鉛直線，可直接計算其面積；

(2)坐標平面上的三角形，若底不為水平或鉛直線時，可透過梯形及三角形的拼貼切割計算其面積，如圖：

△ABC=(xz+yw)÷2

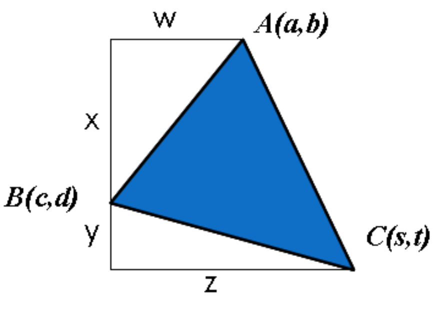
△DEF=(xz-yw)÷2



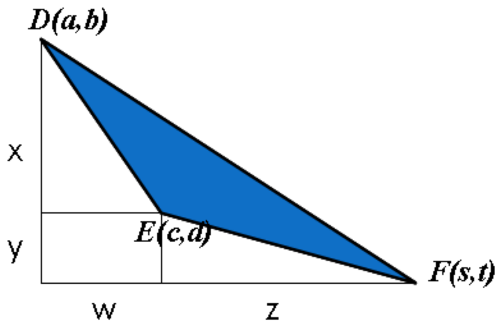


活動九：三點面積進階公式討論

如下圖，△ABC 及其坐標如下，試利用結論(1)和(2)的結果，以 A、B、C 三點坐標表示△ABC 的面積。



隨堂練習 9：如下圖，△DEF 及其坐標如下，試利用結論(1)和(2)的結果，以 D、E、F 三點坐標表示△DEF 的面積。



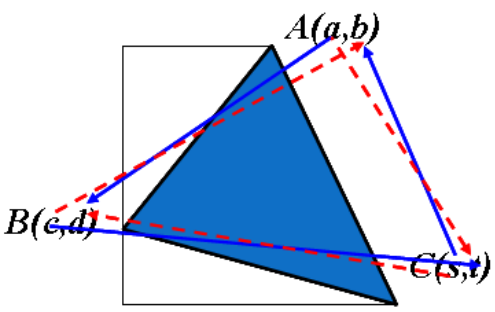
※提問 9：

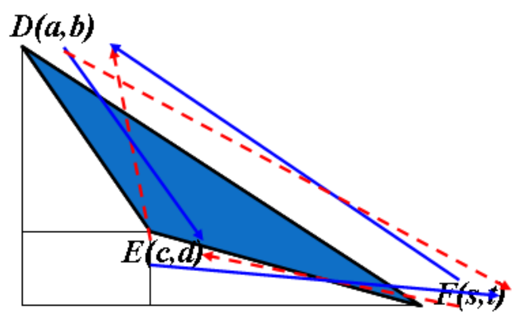
若定義$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$，我們稱之為行列式。

請將活動九與隨堂練習 9 的結論，整理成行列式的形式。

結論：如下圖，以坐標形式分別表示結論 4 的結果，以行列式的形式整理後，可以得到：$\left(\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & s \\ d & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s & a \\ t & b \end{vmatrix}\right) \div 2$

的結果，並可簡記為 $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a & c & s & c \\ b & d & t & d \end{vmatrix}$ 。





活動十：三點面積進階公式應用

已知 A(3,5)、B(1,2)、C(6,1)，試利用活動九結論的公式，求出△ABC 的面積。

隨堂練習 10：請分別以底下兩種方式計算活動十的問題，並且說明與原始方式的差異性：

(1) $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$　　　(2) $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

※提問 10：

由隨堂練習 10 的結果，我們可以得到以進階公式計算三角形面積時，需注意哪些要求？

結論：進階公式 $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a & c & s & c \\ b & d & t & d \end{vmatrix}$ 我們稱為「測量師公式」，在計算三角形面積時，應符合以下兩種要求：

(1) (a,b)、(c,d)與(s,t)以逆時針排列，以維持其計算結果恆為正。

(2)若無法確定(a,b)、(c,d)與(s,t)的排列順序，則需將進階公式的值加上絕對值｜　　｜符號，以 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a & c & s & c \\ b & d & t & d \end{vmatrix}\right|$表示。

教學活動參考解答：

活動一：

A、B 兩點距離為 4，因｜6-2｜＝4。

A、B 兩點在同一水平線上，y 坐標相同，距離即為其 x 坐標的差值。

隨堂練習 1：(1) C、D 兩點距離為 7，因｜5-(-2)｜＝7。

(2) C、D 兩點在同一水平線上，y 坐標相同，距離即為其 x 坐標的差值。

活動二：

G、H 兩點距離為 6，因｜5-(-1)｜＝6。

G、H 兩點在同一鉛直線上，x 坐標相同，距離即為其 y 坐標的差值。

隨堂練習 2：(1) ｜6-5｜=1，故 J 點坐標為(4,1)。

(2) I、J 兩點在同一鉛直線上，x 坐標相同，距離即為其 y 坐標的差值。

活動三：

(1) P 點坐標(6,5)、N 點坐標(1,2)

(2) 四邊形 MNQP 的周長為(5+3)×2=16

(3) △PQN 的面積為$\frac{5\times3}{2}=\frac{15}{2}$。

※提問 1：

(1)矩形的長即為水平兩點的距離，矩形的寬則為鉛直兩點的距離。

(2)Q 點到直線 MP 的距離即為矩形的一邊長。

隨堂練習 3：(1) 四邊形 RSTU 的周長為(5+6)×2=22。

(2) 三角形 RUT 的面積=5×6÷2=15。

※提問 2：

(1) 矩形的長即為水平兩點的距離，矩形的寬則為鉛直兩點的距離。

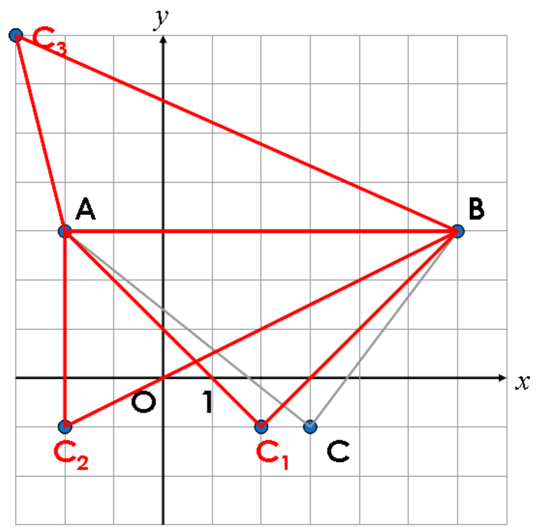
(2) S 點到直線 TU 的距離即為矩形的一邊長。

活動四：

(1) △ABC 底的長度=8，高的長度=4。

(2) △ABC 的面積=8×4÷2=16。

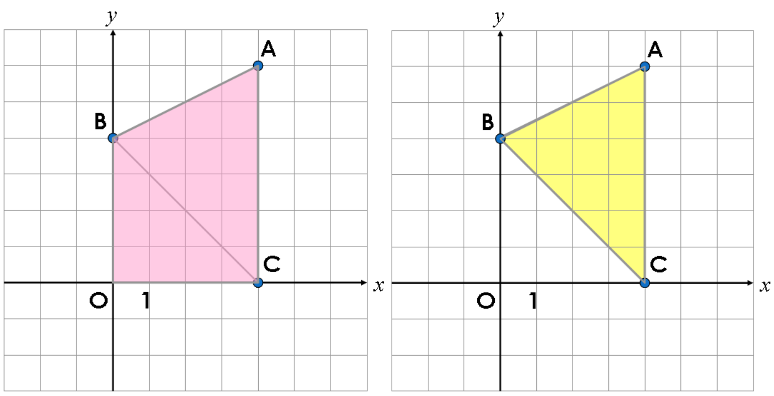
(3) 參考解答如下：



隨堂練習 4：(1) 以線段 AC 為底，高為 4。

(2) △ABC 的面積=6×4÷2=12。

※提問 3：參考解答如下圖，可透過梯形或三角形切割方式。

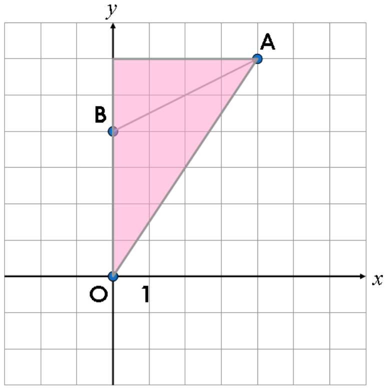


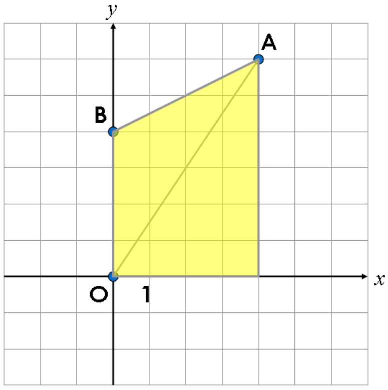
活動五：

(1) 以線段 BO 為底，高為 4。

(2) △ABO 的面積=4×4÷2=8。

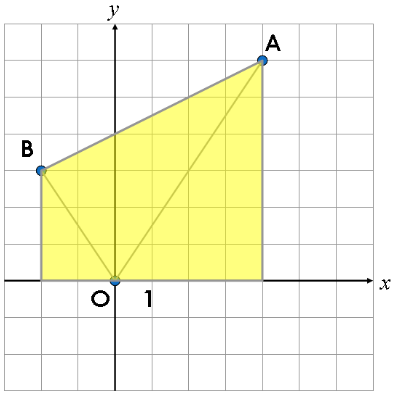
※提問 4：參考解答如下圖，可透過三角形或梯形切割方式。





活動六：

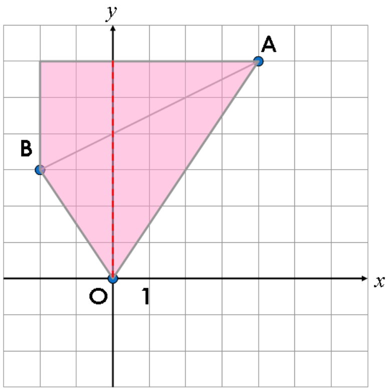
參考解答如下圖，可透過梯形與三角形切割方式。

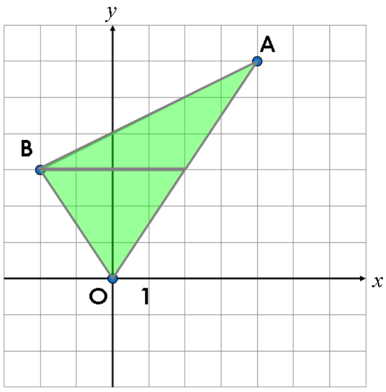


(3+6)×6÷2=27，27-3-12=12 平方單位

※提問 5：如下圖，可透過三角形及梯形切割方式或直接切割

三角形 DFO





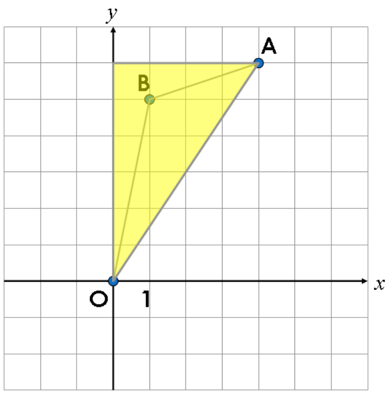
(3+6)×2÷2=9　　　　　　4×3÷2×2=12

6×4÷2=12

6×3÷2=9

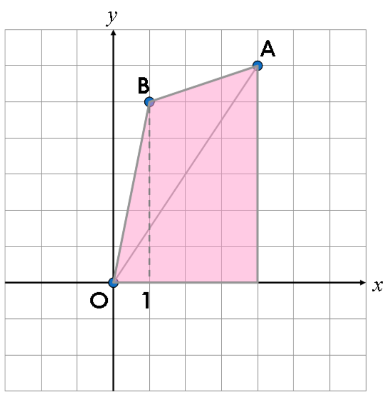
9+12-9=12

隨堂練習 5：參考解答如下圖，可透過三角形與梯形的切割方式。



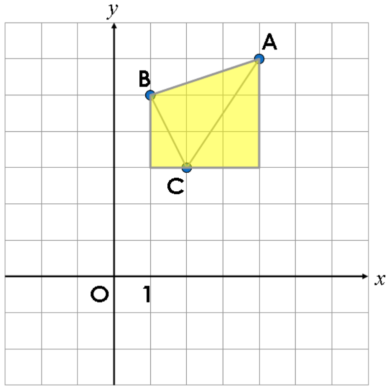
4×6÷2-(1+4)×1÷2-5×1÷2=7 平方單位

※提問 6：參考解答如下圖，可透過其他三角形與梯形的切割方式。



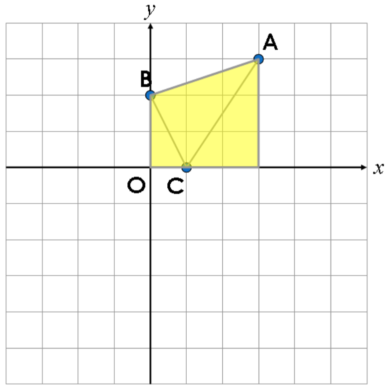
活動七：

參考解答如下圖，可透過梯形與三角形的切割方式。



(2+3)×3÷2−2×1÷2−2×3÷2=3.5 平方單位

隨堂練習 6：參考解答如下圖，可透過梯形與三角形的切割方式。

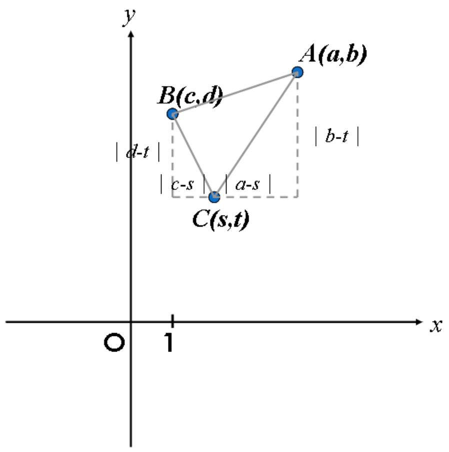


(2+3)×3÷2−2×1÷2−2×3÷2=3.5 平方單位

※提問 7：切割方法相同。

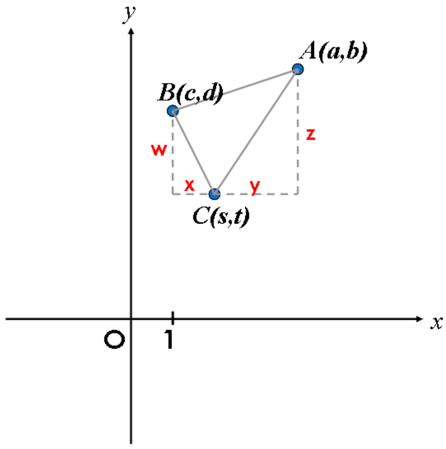
活動八：

參考解答如下圖，可透過梯形與三角形的切割方式：



$(|d-t|+|b-t|)\times(|a-c|)\div 2-|d-t|\times|c-s|\div 2-|b-t|\times|a-s|\div 2$

隨堂練習 7：



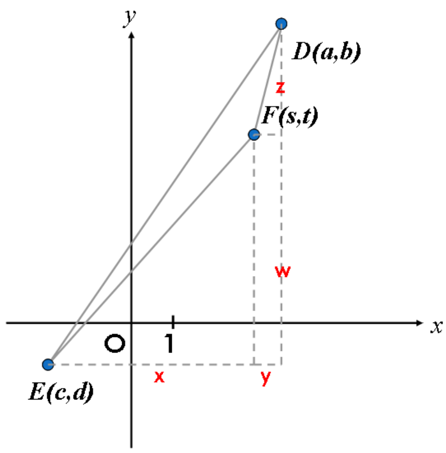
$$[(t-d)+(b-t)]\times(a-c)\div 2-(d-t)\times(c-s)\div 2-(b-t)\times(a-s)\div 2$$

$$=(w+z)\times(x+y)\div 2-wx\div 2-yz\div 2$$

$$=(wx+wy+xz+yz-wx-yz)\div 2$$

$$=(xz+yw)\div 2$$

隨堂練習 8：



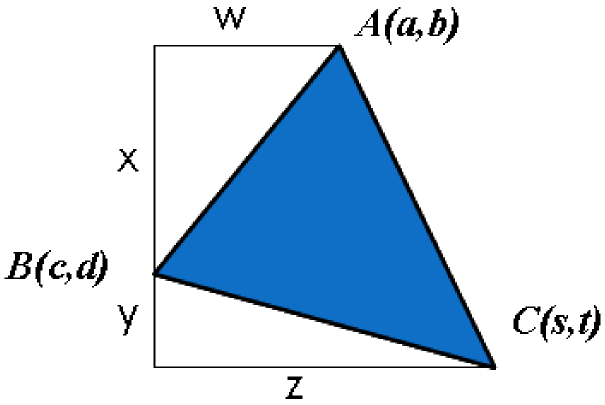
$$\triangle \mathrm{DEF}=(x+y)(w+z)\div 2-xw\div 2-yz\div 2-yw$$

$$=(xw+yw+xz+yz-xw-yz-2yw)\div 2$$

$$=(xz-yw)\div 2$$

※提問 8：$\mathbf{(xz+yw)\div 2 \Rightarrow (xz-yw)\div 2}$，公式中 w、x、y、z 相對位置相同，僅中間的運算符號＋、－不同。可視作原本圖形中的 w 與 z 兩線段，由異側移至同側，故符號由正變為負。

活動九：



$\triangle ABC=(xz+yw)\div 2$

$=[(b-d)\times(s-c)+(a-c)\times(d-t)]\div 2$

$=(bs+cd-bc-ds+ad+ct-at-cd)\div 2$

$=(bs+ad+ct-bc-ds-at)\div 2$

隨堂練習 9：

$\triangle DEF=(xz-yw)\div 2$

$=[(b-d)\times(s-c)-(d-t)\times(c-a)]\div 2$

$=(bs+ad+ct-bc-ds-at)\div 2$

與△ABC 結論相同！！

※提問 9：$(bs+ad+ct-bc-ds-at)\div 2=[(ad-bc)+(ct-ds)+(bs-at)]\div 2$

$$=\left(\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & s \\ d & t \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} s & a \\ t & b \end{vmatrix}\right)\div 2$$

活動十：

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(6-5+1-12+30-3)=\frac{17}{2}$$

隨堂練習 10：

(1) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1-12+30-3+6-5)=\frac{17}{2}$，與原結果相同。

(2) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} =\frac{1}{2}(3-30+12-1+5-6)=-\frac{17}{2}$，與原結果同值異號

※提問 10：詳見結論 6。

七、指定作業：

1. 分別利用①切割方式 ②結論 4 與③結論 6 計算底下三角形的面積：

   (1)A(1,5)、B(3,-7)、C(-4,2)

   (2)D(-6,-6)、E(4,9)、F(1,-1)

2. 計算下列三角形的面積：

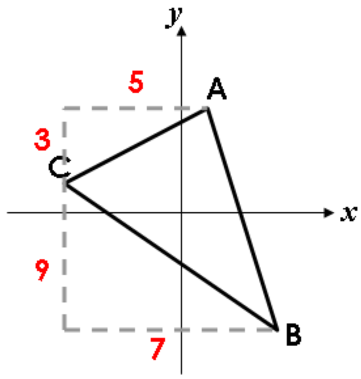
   (1)G($\frac{1}{2}$,3)、H(10,$\frac{-8}{3}$)、I(-6,$\frac{-2}{5}$)

   (2)J($13\frac{1}{3}$,-24)、K($-8\frac{2}{3}$,30)、L($-7\frac{1}{2}$, $-10\frac{1}{2}$)

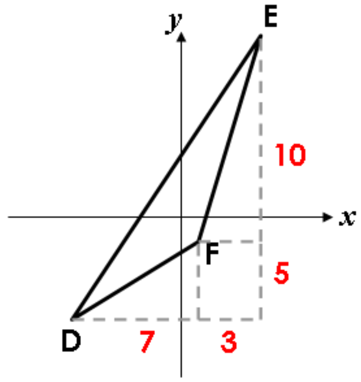
3. 已知坐標平面上五點坐標分別為 A(6,1)、B(10,-3)、C(3,-7)、D(-3,-4)、E(-4,3)，請計算五邊形 ABCDE 的面積。

指定作業參考解答：

1.(1) 33（參考圖形如下）。



(2) $\frac{55}{2}$（參考圖形如下）。

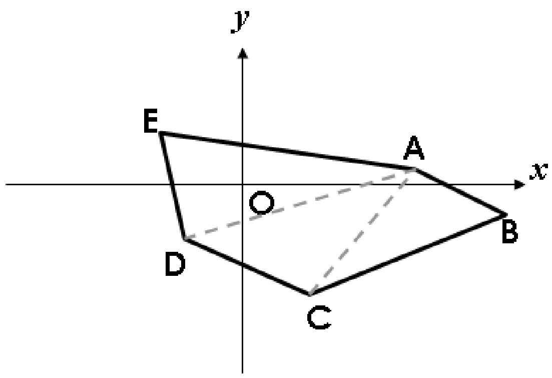


2.參考答案如下：

(1) $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 10 & -6 & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{-8}{3} & \frac{-2}{3} & 3 \end{vmatrix}\right| = 34\frac{17}{30}$ ， (2) $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \frac{40}{3} & \frac{-26}{3} & \frac{-15}{2} & \frac{40}{3} \\ -24 & 20 & \frac{-21}{2} & -24 \end{vmatrix}\right| = 414$ 。

3.參考答案如下：

五邊形 ABCDE 面積=△ABC+△ACD+△ADE= $\frac{169}{2}$



另解：$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 6 & -4 & -3 & 3 & 10 & 6 \\ 1 & 3 & -4 & -7 & -3 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{169}{2}$

八、教學活動注意事項：

1.教學活動時間建議如下，教學說明(含引起動機)：各活動約 5~10 分鐘（活動八~十各約 20 分鐘），子題一~子題三可於七年級常態班以 1 節課進行，子題四因牽涉較多的符號計算，建議於八年級學習完乘法公式後再行於進度外課程（如輔導課）作補充。（第一節課建議進行至活動六~七，第二節課再進行其餘活動）

2.本課程教學重點應放在子題一～三，子題四則可視教學進度與學生程度再行補充，並適時補充乘法分配律的概念。

3.活動一的步驟 1 可藉由方格黑板或投影簡報以節省教師的教學時間；隨堂練習則可由學生自行繪製，結論 1 的歸納再由教師配合圖解說明加上絕對值的意義。

4.活動二的步驟 1 可藉由方格黑板或投影簡報以節省教師的教學時間；隨堂練習則可由學生自行繪製，結論 2 的歸納再由教師配合圖解說明加上絕對值的意義。

5.活動三的主要目的為了解坐標平面上的點到水平或鉛直線距離的計算方式，並可在學習完直線方程式後，輔以方程式計

算所圍矩形面積及周長或三角形的面積。

6.子題三（活動四~七）為本單元教學重點，教師宜多舉例或鼓勵學生發表想法。

7.活動四(3)應協助學生歸納只要 C 點在 y=-1 或 y=7 的水平線上，則所形成的三角形均能符合要求。

8.提問 5 直接切割三角形 ABO 的方式可視教學時間與學生程度適時補充斜率或日後以直線方程式交點輔助之。

9.活動七與隨堂練習 6 的差異性在坐標軸的平移，並藉以推出提問 7 的結論。

10.子題四需具備乘法分配律的概念，建議常態班級應先補充相關知識，並分為兩個半節分別進行說明與討論，以利學生進行前後差異性的比較。

11.活動八結論若學生無法直接得到，可透過附件的 GSP 數位教學檔案進行比較歸納，另(2)的內容若學生不易了解，可先討論 w=0 或 y=0 的特例，以利學生漸近式理解，並要提醒學生 x、y、z 與 w 均為近似值。

12.關於活動九結論行列式的整理方式，教師可配合結論 5 圖形的說明作公式的理解與記憶，並且提供實例計算讓學生進行比較以利瞭解。

13.活動十主要在進行公式的應用，並進一步討論隨堂練習 10 的

結果，以得到最後的結論 6；若學生無法確實了解，可提供較多的例子或由教師直接計算進行歸納結論。

14.關於活動十結論的其他說明方式，可進一步參考由李政豐老師所編寫的原型教材「不等式之教學篇」中的「測量師公式」，比較代數與幾何不同向度的說明方式。

15.指定作業第 1.題可在計算完畢後讓學生比較各種計算方式的優劣性；第 2.題主要希望學生能利用便捷公式計算坐標非整數點的三角形面積值；第 3.題可在切割三角形的計算方式完畢後，再行補充四點以上（此題為五點）按逆(順)時針排列計算行列式值較快速的計算方式，並可視學生程度給予部份提示（切割方式）或由學生自行探索討論得知。

16.在各活動教學時，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

17.在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1.李政憲、蘇進發 (2013)。直角坐標平面之活動篇，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 B 冊。新北市：國家教育研究院。

2.李政豐（2013）。不等式之教學篇，陳昭地主編：國民中學數

學教材原型 B 冊。新北市：國家教育研究院。

主題 2—2：直角坐標平面教學篇（二）

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　**撰寫者**：李政憲

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　陳昭地

(一) 能理解平面直角坐標系。

(二) 能理解二元一次方程式的意義。

(三) 能熟練二元一次聯立方程式的解法，並用來解題。

三、教學目標：

(一) 能繪製二元一次方程式的圖形，並理解坐標平面一直線上的所有點坐標恰符合某一個二元一次方程式的解。

(二) 知道常數方程式（$x=c$ 或 $y=c$）為二元一次方程式的特例，並能繪製其圖形。

(三) 能觀察格子點坐標與方程式係數的關係。

(四) 理解二元一次方程式標準式 $y=ax+b$ 的意義，並能應用於相關問題上。

(五) 瞭解二元一次聯立方程式在坐標平面上的意義，並透過其交點計算所圍成的多邊形面積。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

先瞭解二元一次方程式的解在坐標平面的意義，透過水平線與鉛直線探討其特例（子題一）；接著藉由方程式的觀察，讓學生

知道坐標平面上格子點與方程式係數的關係，進一步討論二元一次方程式標準式的意義並進行應用（子題二）。最後能瞭解二元一次聯立方程式在坐標平面的意義，並透過交點計算其圍成的多邊形面積（子題三）。

六、教學活動：

子題一：二元一次方程式的圖形

活動一：瞭解二元一次方程式的所有解，在坐標平面上可以形成一條直線。

步驟 1：教師在黑板上寫上方程式：$y=2x+1$。

步驟 2：詢問全班或抽問同學，請問黑板上的算式，是我們學過的哪一種方程式？

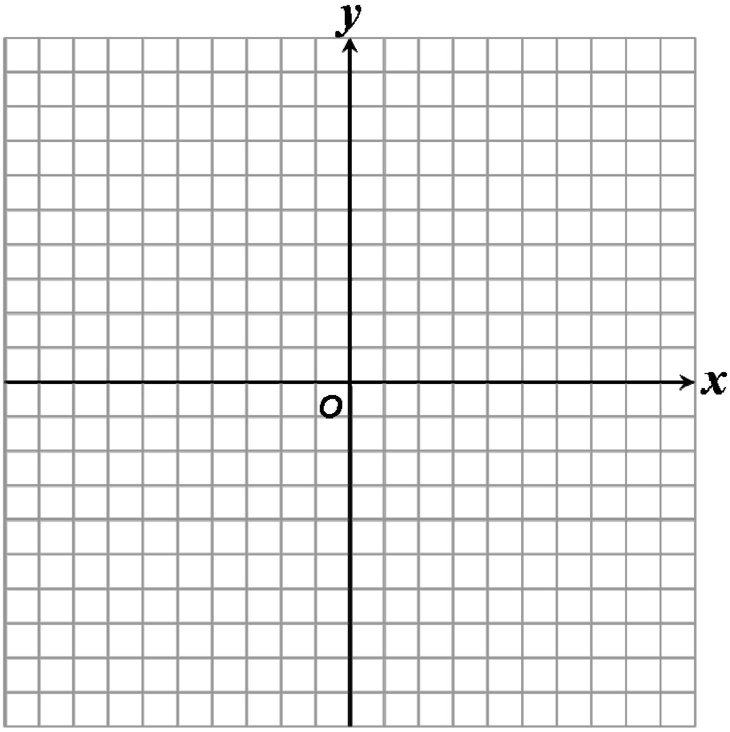
步驟 3：請問這個方程式的解有幾個？請列出至少 10 個以上的（包含分數或小數）。

步驟 4：教師繪製坐標平面或使用方格黑板，請同學逐一將步驟 3 的解以數對（x，y）方式，描繪在坐標平面上。

步驟 5：請同學觀察，步驟 4 所描繪的點在坐標平面上，會形成什麼樣的圖形？

步驟 6：試著將這些點連成一條直線，請在直線上找出至少 3 個點（包含分數與小數），檢驗這些數對（x，y），是否也符合二元一次方程式 $y=2x+1$ 的解？

《請同學依照老師步驟於底下坐標圖上同步完成》



隨堂練習 1：已知二元一次方程式 $y=x-3$，請依序回答下列問題：

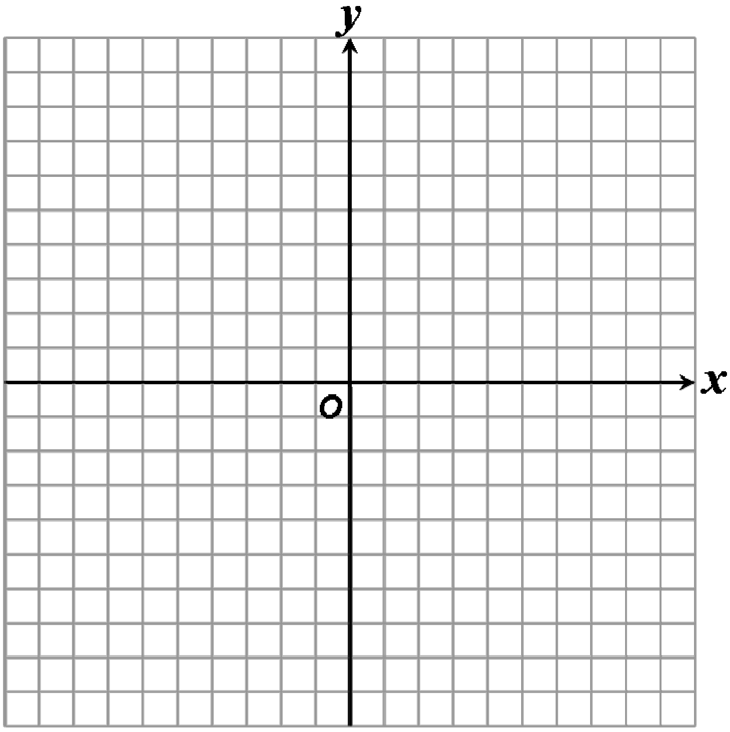
(1)請找出符合上述方程式的五個解並寫成(x,y)的形式。

(2)請將你找出的五個解（x，y）繪製在坐標平面上，

請問這五個點的位置有什麼特性？

(3)請試著將這五個點連成直線，並在直線上找出另外兩個點，檢驗這兩個點的坐標（x，y）是否符合方程式 $y=x-3$。

《請同學依照上述步驟於底下坐標圖上自行完成》



結論：凡是二元一次方程式的所有點，在坐標平面上所形成的圖形，必為一條直線；反之，在坐標平面一條直線上的所有點坐標（x，y），必同時是某一個二元一次方程式的解，也就是這些（x，y），必同時符合此二元一次方程式。

※提問 1：

(1)請問若要繪製一條直線，最少需要幾個點？

(2)在坐標平面上找三個以上的點繪製直線，其優缺點分別為何？

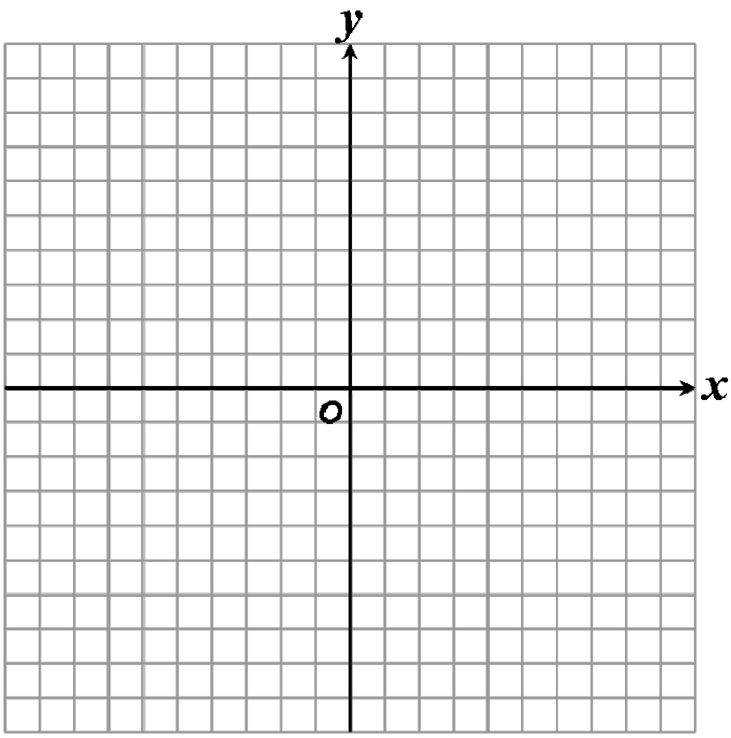
活動二：透過坐標平面上垂直兩點的已知坐標，瞭解其所在直線的方程式。

步驟 7：教師在黑板上繪製坐標平面，並繪製 A(-2,5)、B(-2,-1)、C(-2,3)三點。

步驟 8：詢問全班或抽問同學，A、B、C 三點坐標有何關聯？是否會同時符合方程式 $x+0y=-2$？

步驟 9：連接 A、B、C 三點形成一直線，在這條直線上再找出另外兩個點，看看這兩個點的坐標是否仍會符合上述方程式。

《請同學依照老師步驟於底下坐標圖上同步完成》



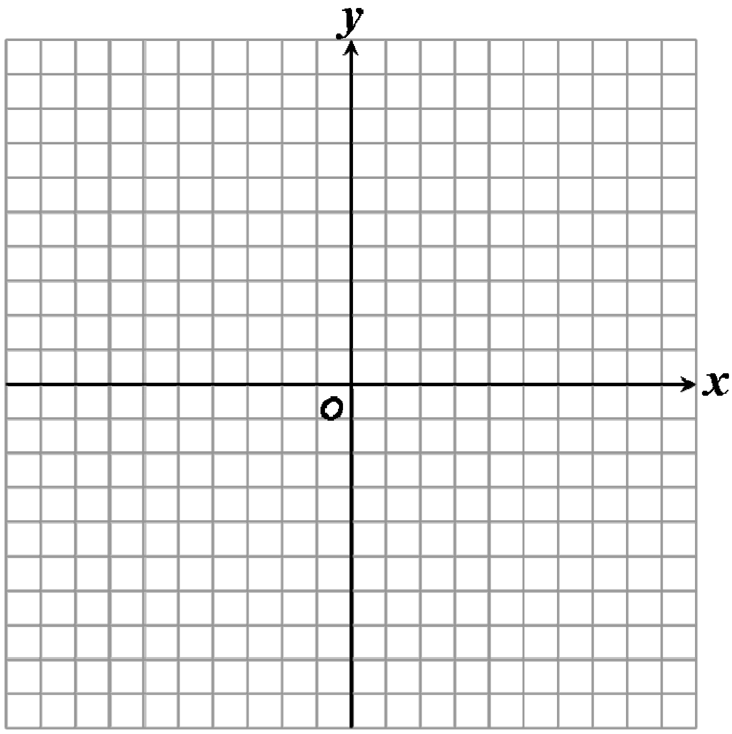
隨堂練習 2：已知方程式 $x+0y=3$，請依序回答下列問題：

(1)請找出符合上述方程式的三個解，並將其坐標（x，y）繪製於坐標平面上。

(2)連接上述的三個解形成一條直線，並另外找出在這條直線的兩個點。

(3)檢驗這兩個點的（x，y）值，是否仍符合方程式 $x+0y=3$？

《請同學依照上述步驟於底下坐標圖上自行完成》



※提問 2：

(1)請問方程式 $3x+0y=-5$ 的所有解，在數線上會形成什麼樣的圖形？

(2)數線上垂直 x 軸（或平行 y 軸）直線上的所有點，所形成的方程式會是什麼形式？

(3)坐標平面上 y 軸上的所有點，所形成的方程式為何？

活動三：透過坐標平面上水平兩點的已知坐標，瞭解其所在直線的方程式。

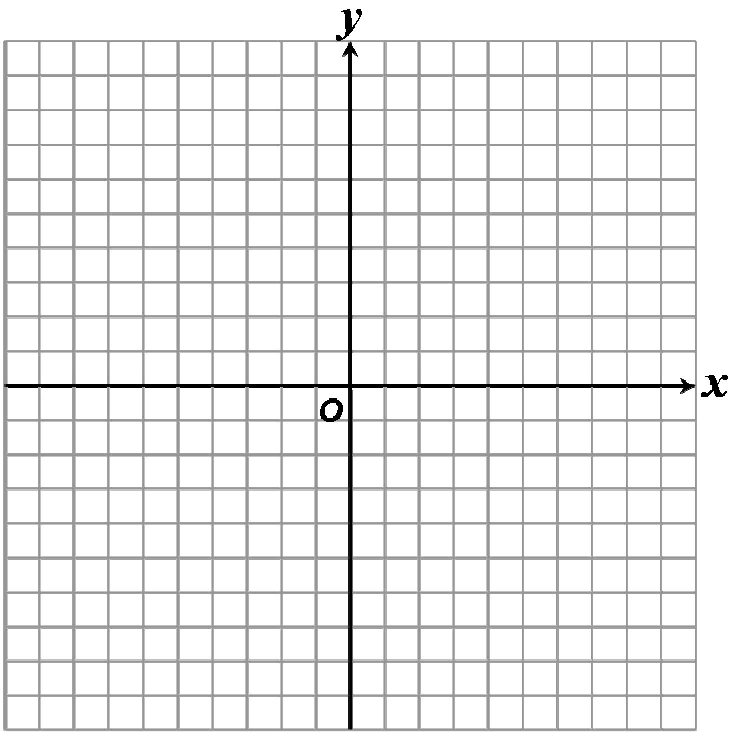
步驟 10：教師在黑板上繪製坐標平面，並寫下方程式：$0x+y=5$。

步驟 11：詢問全班或抽問同學，根據活動二的討論過程，請猜測這個方程式的解所形成的圖形，會是什麼樣的圖形？

步驟 12： 找出兩個符合這個方程式的解，連接後形成一條直線，看看是否與你的猜測相同。

步驟 13： 找出這條直線上的另外一個點，看看是否也符合方程式：$0x+y=5$。

《請同學依照老師步驟於底下坐標圖上同步完成》



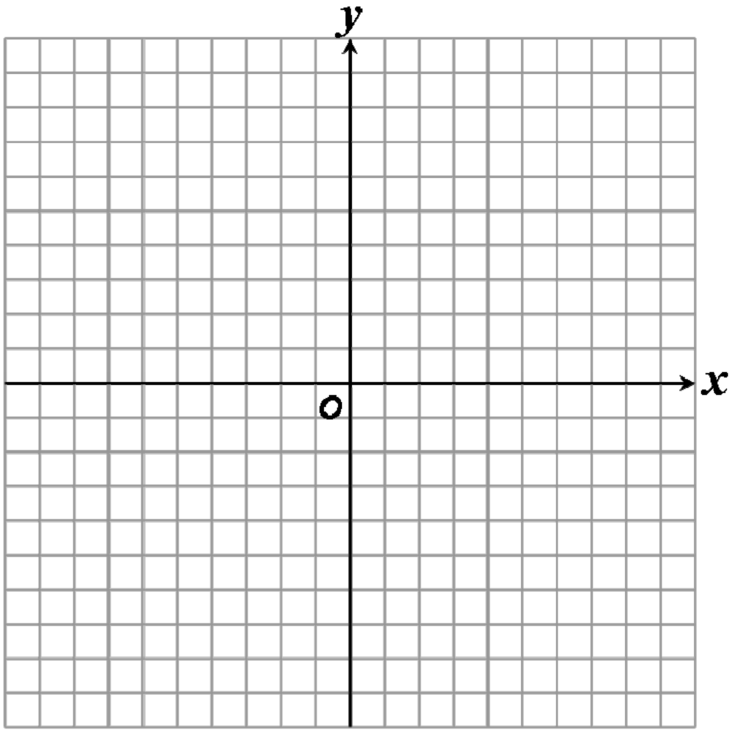
隨堂練習 3： 已知坐標平面上兩點$(7,-\frac{7}{2})$、$(-5,-\frac{7}{2})$，請依序回答下列問題：

(1)請在坐標平面上繪製這兩點，連接這兩點形成一直線，根據活動三，找出符合此直線的方程式。

(2)另外找出在這條直線的一個點。

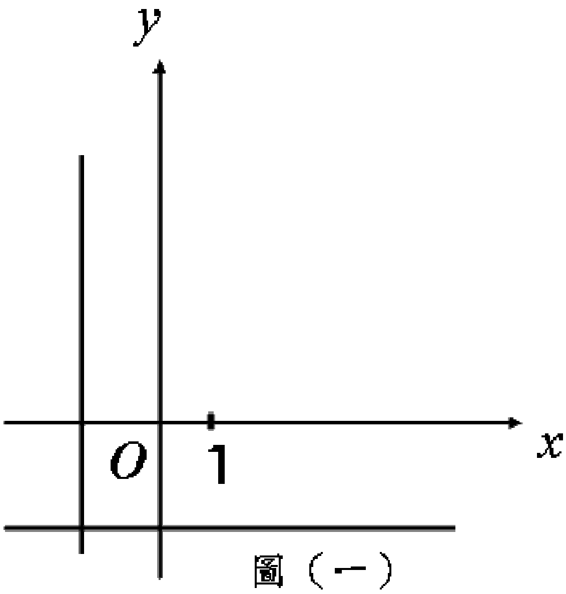
(3)檢驗這個點的（x，y），是否符合你所找出的方程式。

《請同學依照上述步驟於底下坐標圖上自行完成》

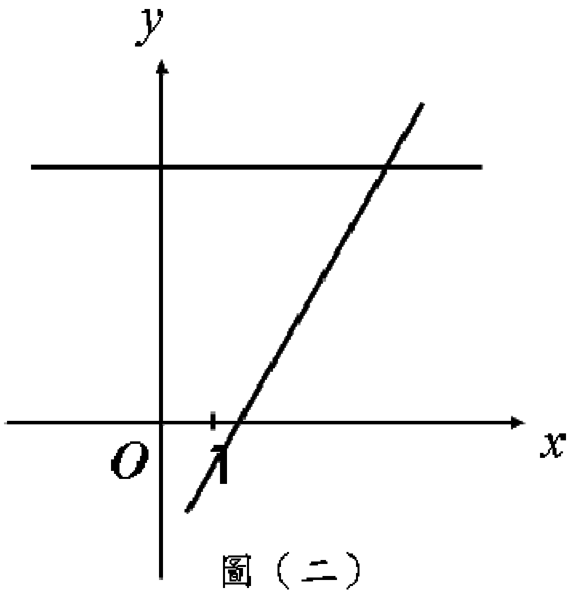


※提問 3：

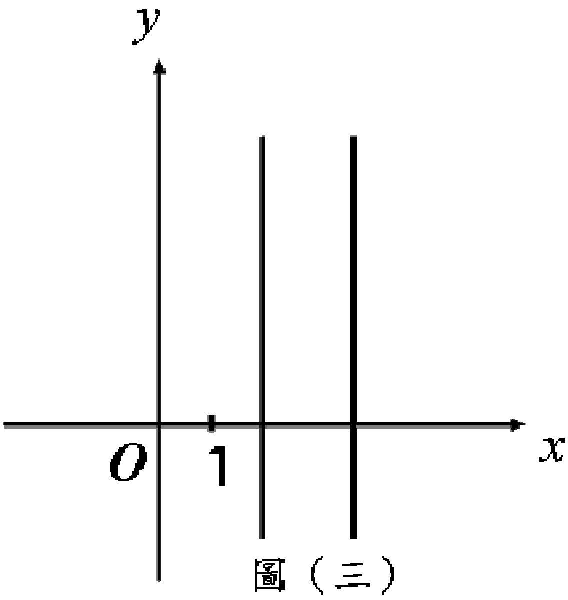
兩條相異直線在坐標平面上的關係可分為兩種，一種為相交於一點（如下圖一、二），另一種為兩直線互相平行（如下圖三、四、五）。請畫圖思考下列問題：



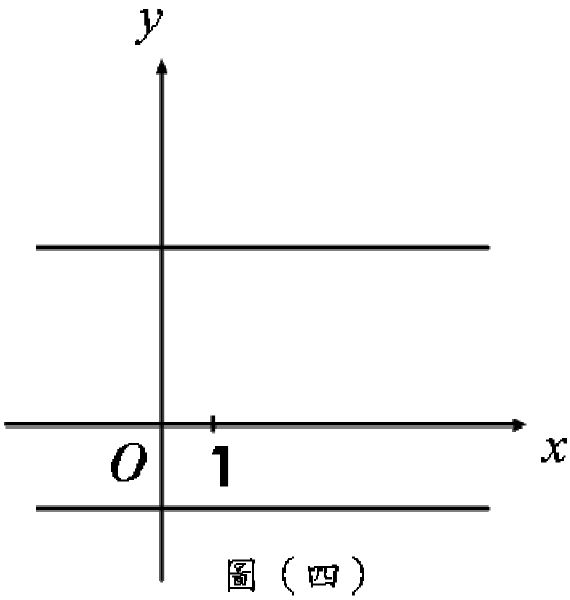
圖（一）



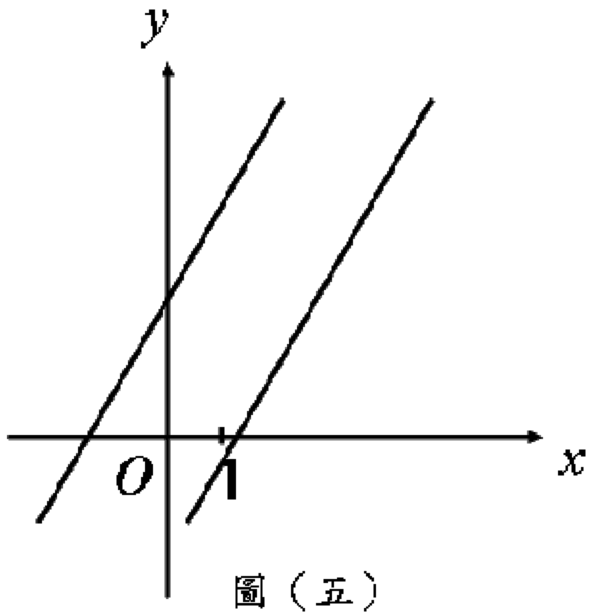
圖（二）



圖（三）



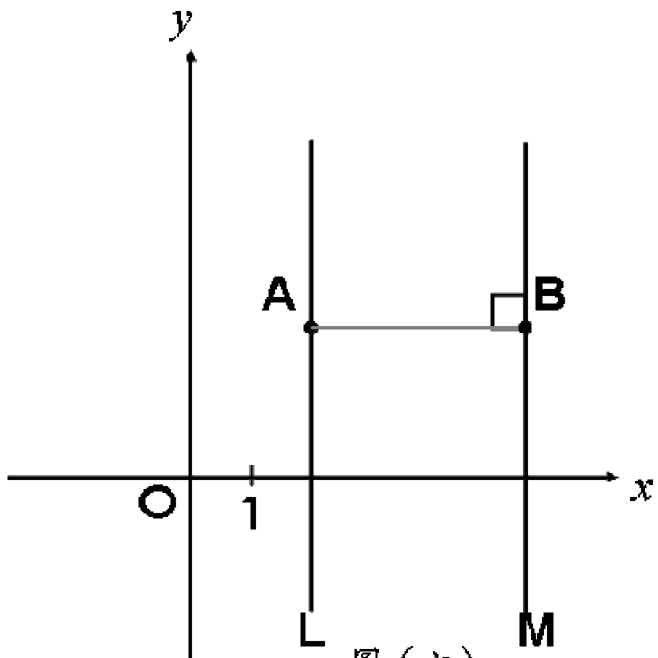
圖（四）



圖（五）

(1)請問方程式 $3x+0y=-9$（可省略 $0y$ 寫成 $3x=-9$）與 $0x+2y=3$（可省略 $0x$ 寫成 $2y=3$）是否有交點？若有交點，請說明其交點坐標。

(2)請問方程式 $x=5$ 與 $5x=-8$ 是否有交點？若有交點，請說明交點坐標；若沒有交點，我們稱這兩條直線「互相平行」；當兩直線互相平行時，我們可利用底下**繪製垂直線**的方式，計算兩直線的最短距離（如下圖六及其說明）。請利用此方式，計算這兩條直線的最短距離，並說明其交點及距離與方程式關係。

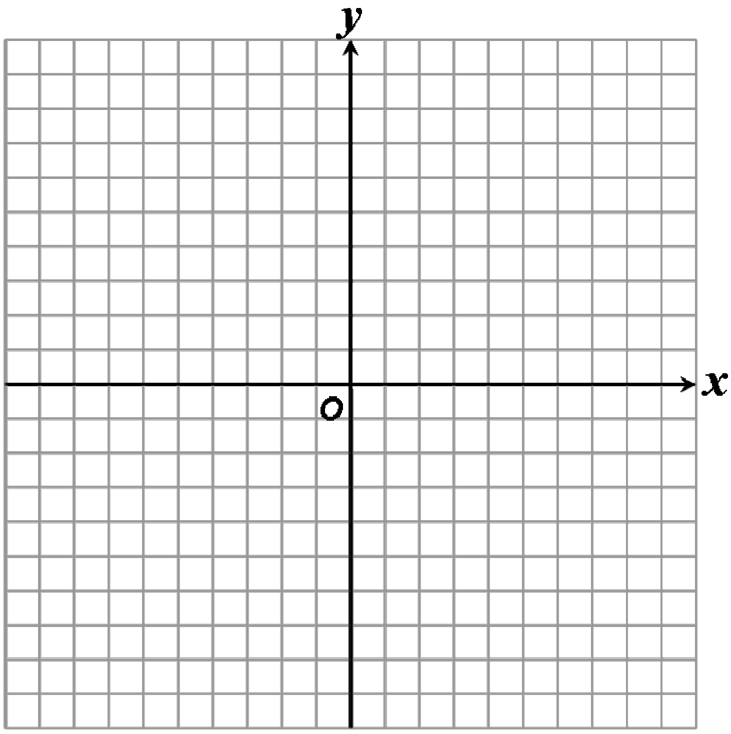


圖（六）

說明：如圖(六)，互相平行的兩直線 L 與 M 中，在 L 上任取一點 A，並過 A 點作 M 的垂直線段 AB 交直線 M 於 B 點，則 $\overline{AB}$ 即為 L 與 M 的最短距離。

(3)在坐標平面上繪製方程式 x =-5、x =1、y =0 與 $y=-\frac{5}{3}$ 的圖形，並計算其交點坐標與所圍成的面積。

《請同學依照上述步驟於底下坐標圖上自行完成》



結論：

(一)坐標平面上直線方程式 $x=a$ 的圖形必為一條垂直 x 軸（或平行 y 軸）的直線，反之，所有垂直 x 軸（或平行 y 軸）直線的方程式必為 $x=a$。

(二)坐標平面上直線方程式 $y=b$ 的圖形必為一條平行 x 軸（或垂直 y 軸）的直線，反之所有平行 x 軸（或垂直 y 軸）直線的方程式必為 $y=b$。

(三)凡 $x=a$ 與 $y=b$ 的兩直線必垂直，其交點坐標為（a，b），另可透過兩平行直線 $x=a$ 與 $x=c$（或 $y=b$ 與 $y=d$）的方程式計算其最短距離或所圍成的矩形面積。

子題二：直線圖形與方程式討論

活動四： 瞭解二元一次方程式的繪製方式，探討解的規律性與方程式係數的關係。

步驟 14： 教師在黑板上寫上方程式：$2x-3y=0$。

步驟 15： 詢問全班或抽問同學黑板上的算式，是哪一種方程式？將所有的解（x，y）描繪在坐標平面會形成什麼圖形？

步驟 16： 找出這個方程式的 5 個整數解並寫入下列表格中，分別計算 x 為底下結果的 y 值。

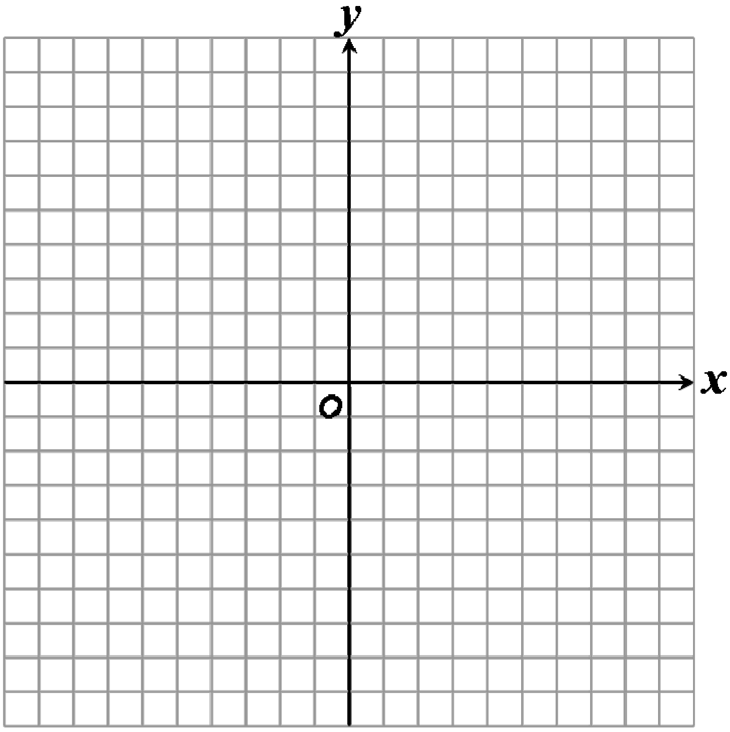
x	-3	0	3	6	9
y					

步驟 17： 教師繪製坐標平面或使用方格黑板，讓同學逐一將步驟 16 的數對（x，y）描繪在坐標平面上。

步驟 18： 請同學觀察，步驟 16 表格內的數字，其分別的 x 坐標與 y 坐標增加（或減少）是否有其規律？這種規律在步驟 17 坐標平面上的意義為何？

步驟 19： 試著將這些點連成一條直線，請在直線上再找出 2 個整數點（包含正數與負數），檢驗這些數對（x，y），是否也符合步驟 18 所得到的規律？

《請同學依照老師步驟於底下坐標圖上自行完成》



隨堂練習 4：已知方程式：$2x+3y=-3$，請依序回答下列問題：

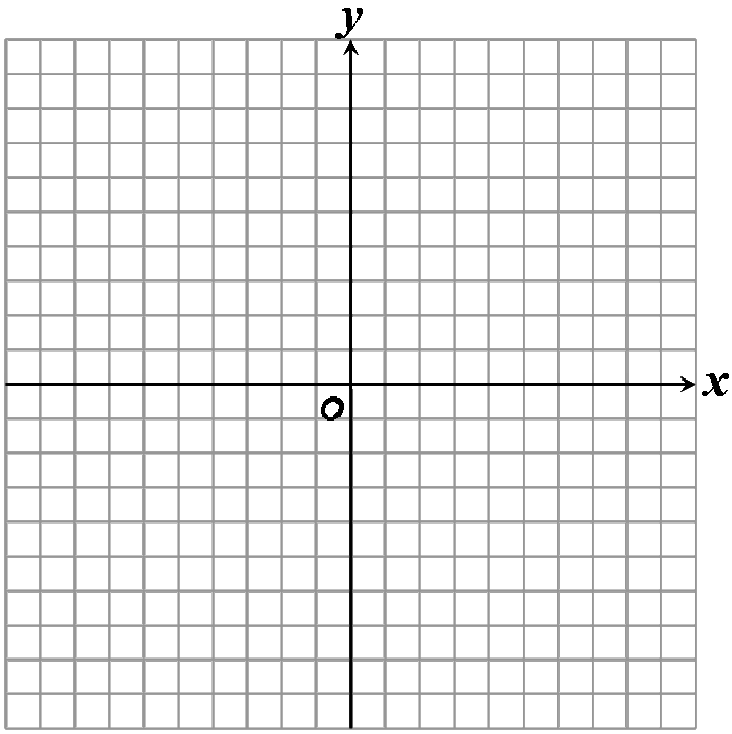
(1)請在找出五個符合這個方程式的整數解，並在坐標平面上繪製這五個點。

x	0	3			
y	-1				

(2)請問在(1)中表格內的數字，其分別 x 坐標與 y 坐標增加（或減少）是否有其規律？這種規律在坐標平面的意義為何？

(3)連接五點成一直線，在直線上再找出兩個整數點，檢驗這兩個解是否也符合(2)中的規律。

《請同學依照上述步驟於底下坐標圖上自行完成》



結論：

(一)凡形如 $Ax+By=C$ 的二元一次方程式，其 x 與 y 的係數會影響其整數解（在坐標平面上我們稱為格子點）位置的關聯性，並依 A、B 值的大小作增減。

(二)當（m,n）為符合方程式 $Ax+By=C$ 的一組整數解（其中 m、n、A、B 與 C 皆為整數）時，則（$m+B,n-A$）為符合此方程式的另一組整數解，並可依此規律找出第三組以上的整數解。

(三)故當方程式：$Ax+By=C$ 的 A、B 兩數同號時，其解的 x 坐標增加時，y 坐標會隨之減少；而 A、B 兩數異號時，其解的 x 坐標增加，y 坐標也隨之增加。

活動五：瞭解形如 $Ax+By=C$ 的直線方程式整理為直線標準式

$y=ax+b$ 的概念與應用。

步驟 20：觀察下列方程式：

$5x+3y=-3$……(1)

$2x-y=1$……(2)

$4x+3y=0$……(3)

$0x+2y=3$……(4)

$3x+0y=-9$……(5)

步驟 21：依等量公理（或移項法則）可整理方程式(1)為：

$y=-\frac{5}{3}x-1$ 的形式

步驟 22：凡以方程式 $y=ax+b$ 表示直線的形式稱為「直線標準式」，經由整理(1)中的 $a=-\frac{5}{3}$，$b=-1$。

步驟 23：試著整理方程式(2)～(5)，看看是否都能整理成標準式 $y=ax+b$ 的形式，整理後的 a 與 b 各為多少？

步驟 24：請問有哪些方程式無法整理成標準式？這些方程式共同的特性為何？

隨堂練習 5：已知方程式：$2x+y=-3$，請依序回答下列問題：

(1)請將此方程式整理為標準式 $y=ax+b$ 的形式。

(2)分別將 $x=0$ 與 $y=0$ 代入原方程式與標準式各得到兩組

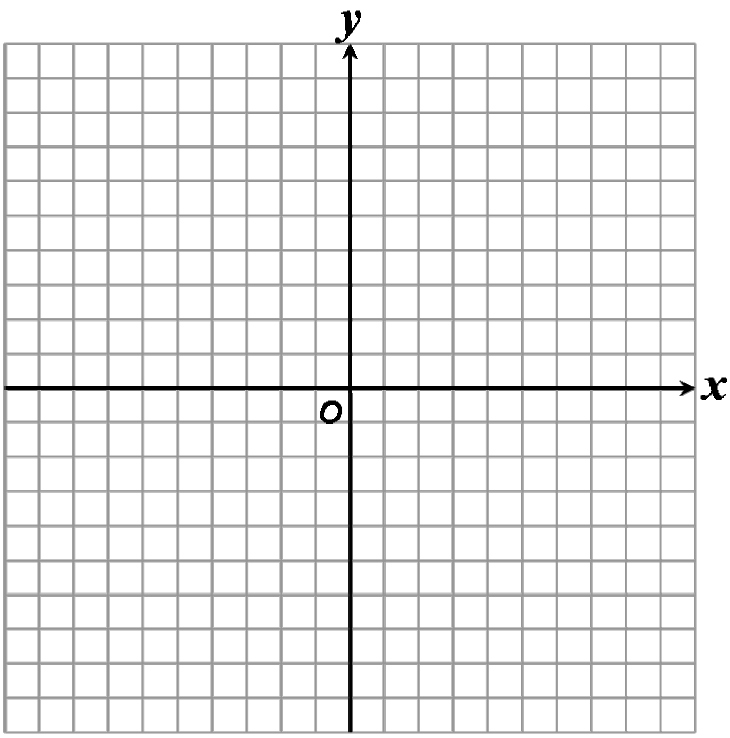
解，請問代入兩個方程式所得到的解結果相同嗎？

(3)在坐標平面上畫出此直線，請問這兩組解所代表的意義為何？

(4)在同一坐標平面上畫出另一直線： $y=-2x+1$，請問這條直線與坐標平面上 x 軸與 y 軸的交點分別為何？

(5)觀察這兩條直線的關係，請問你覺得這兩條直線的交點在第幾象限？你如何說明你猜測的結論？

《請同學依照上述步驟於底下坐標圖上自行完成》



活動六：瞭解直線標準式 $y= ax+b$ 的使用時機與延伸應用。

步驟 25：已知坐標平面上三點 A、B、C 坐標分別如下：

A(1,5)、B(1,-7)、C(-3,5)

步驟 26：在坐標平面上繪製這三個點，看看會形成什麼圖形？

步驟 27：分別說明直線 AB 與直線 AC 的方程式。

步驟 28：你覺得直線 BC 的方程式是否會符合直線標準式 $y=ax+b$？為什麼呢？

步驟 29：透過步驟 28 的結論，寫出直線 BC 的方程式。

隨堂練習 6：已知坐標平面上 A、B 兩點坐標分別為 A(-3, 2)與 B(2,3)：

(1)請寫出通過 A、B 兩點的直線 L 方程式。

(2)請問此直線 L 與兩軸的交點為何？

(3)若有另一直線 M 通過原點(0,0)並與此直線平行，請計算直線 M 的方程式。

※提問 4：

想想看，將直線方程式 $Ax+By=C$ 改以標準式 $y=ax+b$ 表示的優點與限制分別為何？

結論：

(一)凡形如 $Ax+By=C$（$B\neq 0$）的方程式必能整理為 $y=ax+b$ 形式的直線標準式；其中若 $a=0$ 時則 $y=\frac{c}{b}$，其圖形為平行 x 軸（或垂直 y 軸）的直線。若 $b=0$ 時 $x=\frac{c}{a}$ 則無法整理為直線標準式，其圖形為垂直 x 軸（或平行 y 軸）的直線。

(二)直線標準式 $y= ax+b$ 中的 a 值代表的是這條直線的方向與傾斜程度（我們稱之為斜率），b 值代表的是這條直線與 y 軸的交點為$(0,b)$（我們稱 b 為 y 軸截距）；兩相異直線 a 值不同時將會產生一個交點，a 值相同 b 值不同時兩直線會平行，若 a、 b 值均相同時則兩直線會重合。

(三)二元一次方程式 $Ax+By=C$ 或 $y= ax+b$ 在坐標平面上的意義為一條直線，將 $x=0$ 代入所得到的坐標為此直線與 y 軸的交點，將 $y=0$ 代入所得到的坐標為此直線與 x 軸的交點。

(四)若 A、B 不在坐標平面同一條鉛直線的直線上，可透過標準式 $y= ax+b$ 的假設計算直線 AB 的方程式。

子題三：聯立方程式圖形意義與延伸應用

活動七：瞭解兩條不平行的直線方程式聯立計算後所得的解即為其交點。

步驟 30：已知坐標平面上兩直線方程式分別如下：

$y=x-5$　　　　　　$y=-x+3$

步驟 31：在坐標平面上分別繪製這兩條直線，看看這兩條直線是否會平行？

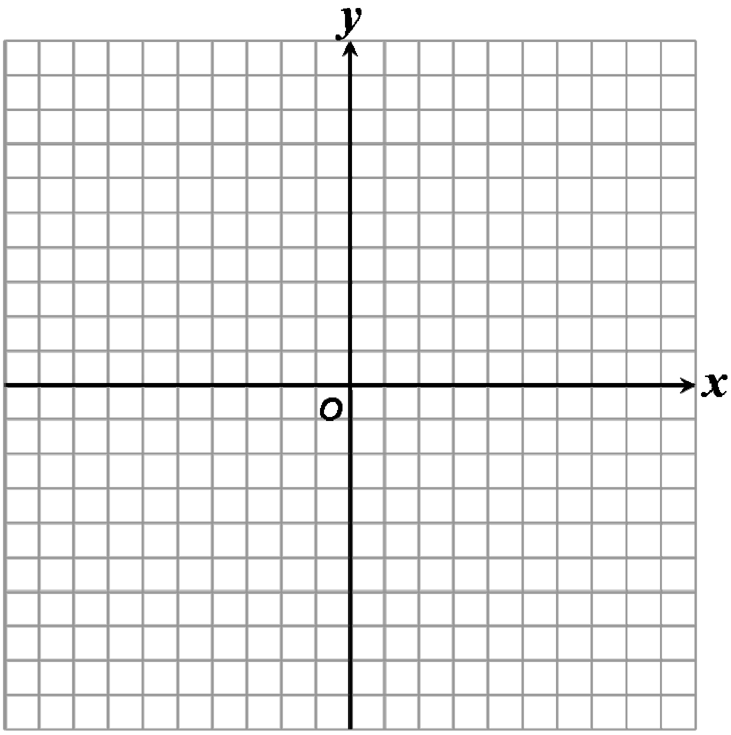
步驟 32：若此兩直線不平行，則會在坐標平面上產生交點，請觀察此交點在坐標平面上的坐標為何？

步驟 33：解聯立方程式：$\begin{cases} y=x-5 \\ y=-x+3 \end{cases}$，請問所得到的解（$x$，$y$）

與步驟 32 的坐標有何關係？

步驟 34：說明步驟 32 與步驟 33 的結果為何相同。

《請同學依照老師步驟於底下坐標圖上同步完成》



隨堂練習 7：坐標平面上三條直線 L、M、N 方程式分別如下：

L：$x+2y=3$，M：$2x+4y=3$，N：$y=-2x-3$

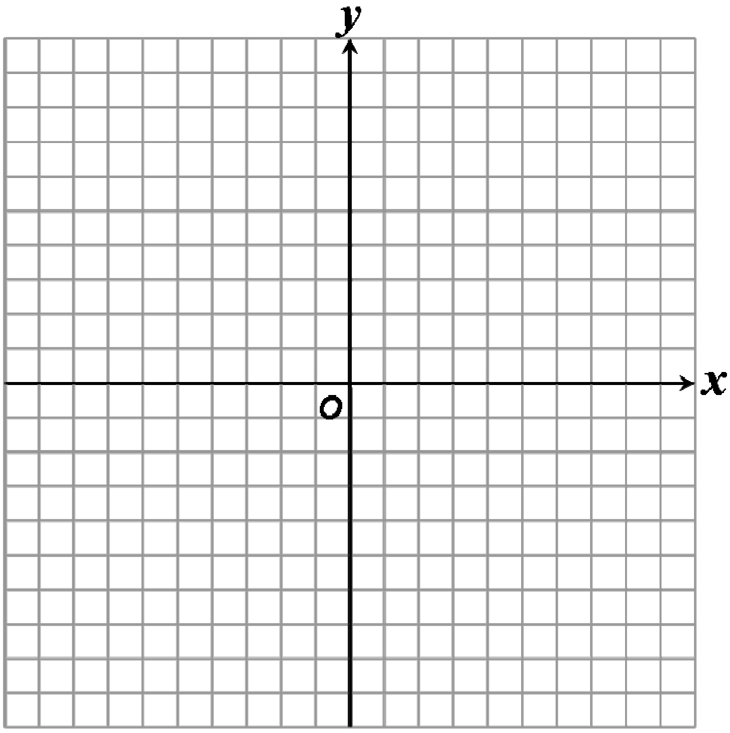
(1)在坐標平面繪製三條直線，觀察哪些直線會互相平行？

(2)請問互相平行的直線方程式有何關聯？

(3)請問哪些直線會有交點？交點坐標分別為何？

(4)若平面上另有直線 P：$3y+6x=1$，你覺得與以上三條直線有何關聯？請繪圖確認你的結果是否正確。

《請同學依照上述步驟於底下坐標圖上自行完成》



活動八：透過直線方程式計算交點，計算三角形的面積。

坐標平面上兩條直線 L、M 的方程式分別如下：

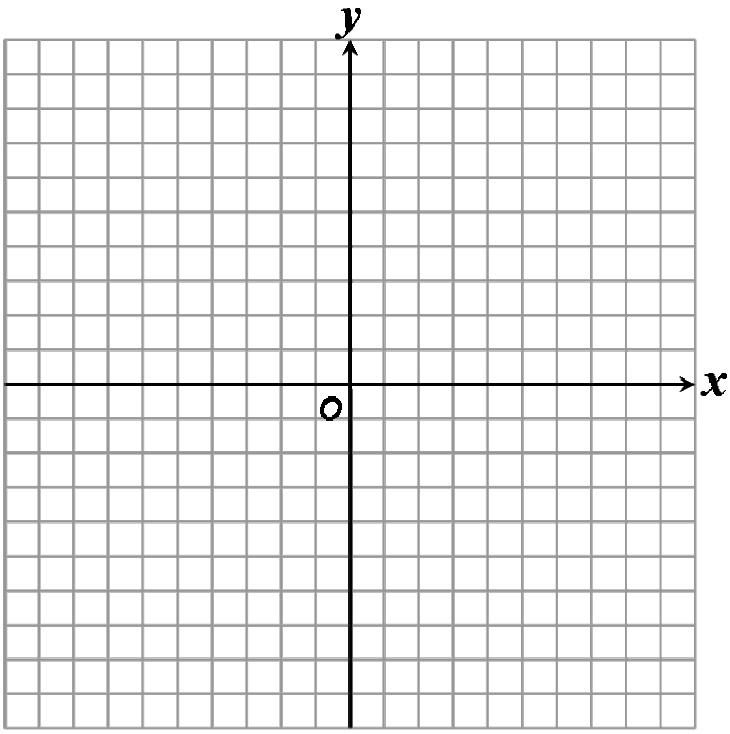
L：$3x+2y=-5$，M：$y=-x-1$

(1) 計算兩條直線所形成交點 A 為何？

(2) 請問兩條直線與 x 軸的交點 B、C 分別為何？

(3) 在坐標平面上繪製直線 L 與 M，並計算三角形 ABC 的面積。

《請同學依照老師步驟於底下坐標圖上同步完成》



隨堂練習 8：坐標平面三直線 L、M 與 N 的方程式分別如下：

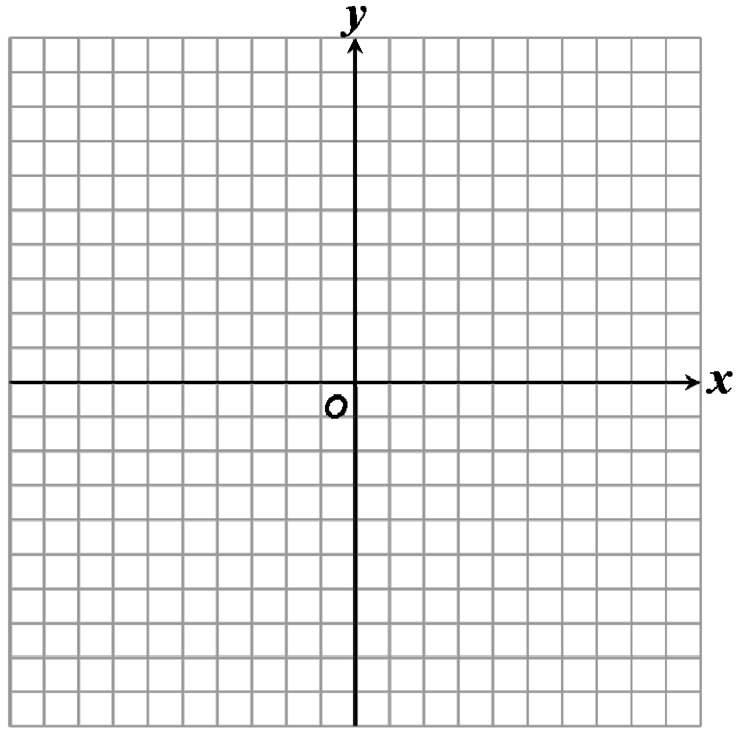
L：$3x+2y=-5$，M：$y=-1$，N：$x=3$

(1)求此三條直線所形成三個交點 A、B、C 分別為何？

(2)在坐標平面上繪製三條直線的圖形。

(3)說明三角形 ABC 是什麼三角形，並計算三角形 ABC 的面積。

《請同學依照上述步驟於底下坐標圖上自行完成》



結論：

(一)若兩直線不平行，則可透過聯立方程式計算解為其交點；

(二)若兩直線平行，整理方程式為同一類型後，兩方程式的 x 與 y 係數成比例，且不同於常數項所成的比例。

(三)直線與 x 軸交點為令 y=0 代入求解，直線與 y 軸交點為令 x=0 代入求解；

(四)透過不平行直線交點所圍成的封閉區域圖形，可計算其面積。

教學活動參考解答：

活動一：

步驟 2：二元一次方程式

步驟 3：無限多個。參考答案：x=0，y=1；x=1，y=3；x=2，y=5；

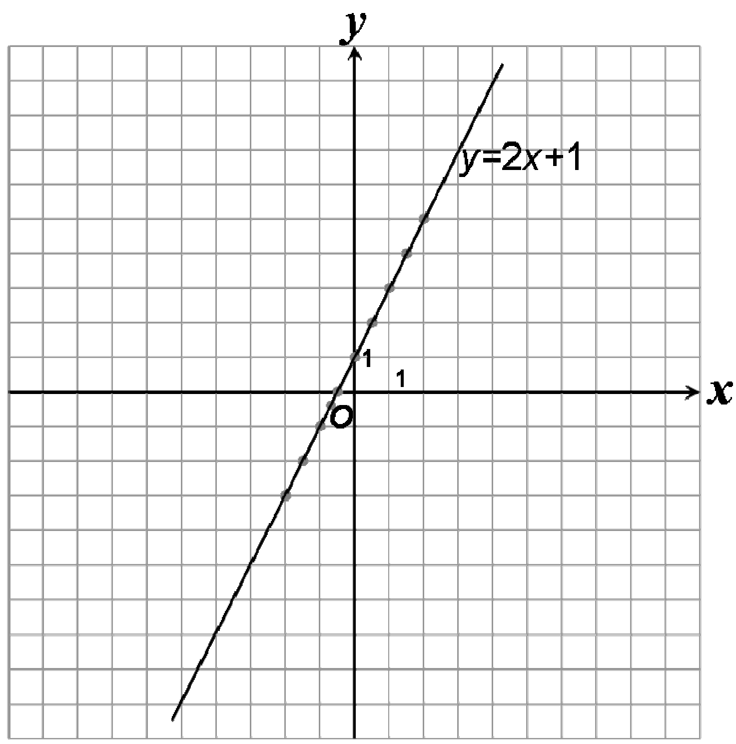
x=-1，y=-1；x=-2，y=-3；x=0.5，y=2；x=1.5，y=4；

x=-0.5，y=0；x=-1.5，y=-2；$x=-\frac{5}{2}$，y=-4；……。

步驟 4：參考步驟 6 完成圖形。

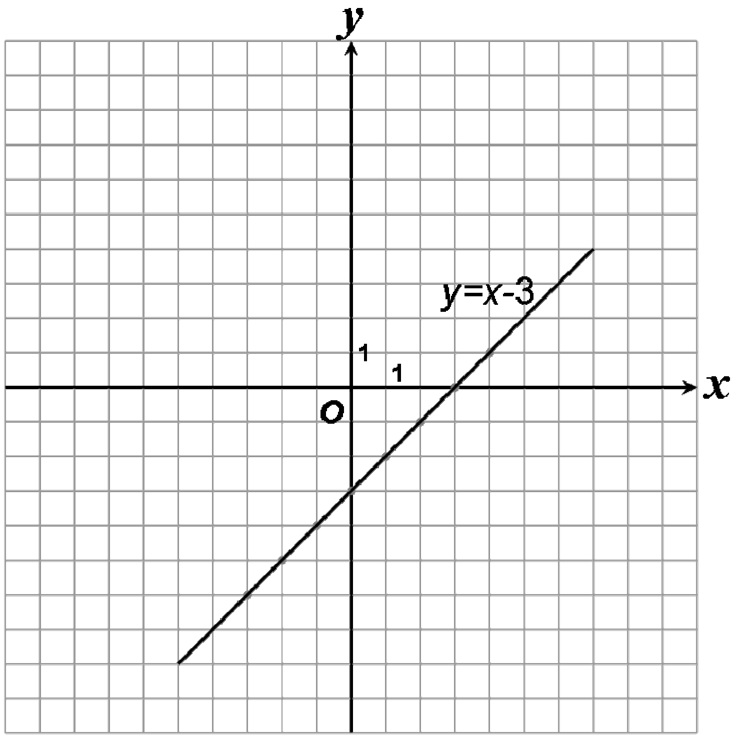
步驟 5：一直線。

步驟 6：是。參考數對（x，y）=（3，7）、（-2.5，-4）、（-3，-5）



隨堂練習 1：(1)（0，-3）、（1，-2）、（2，-1）、（3，0）、（4，1）

(2)如下圖，在同一條直線上。



(3)是。參考數對（x，y）=（-1，-4）、(-2，-5）

※提問 1：(1)兩個。

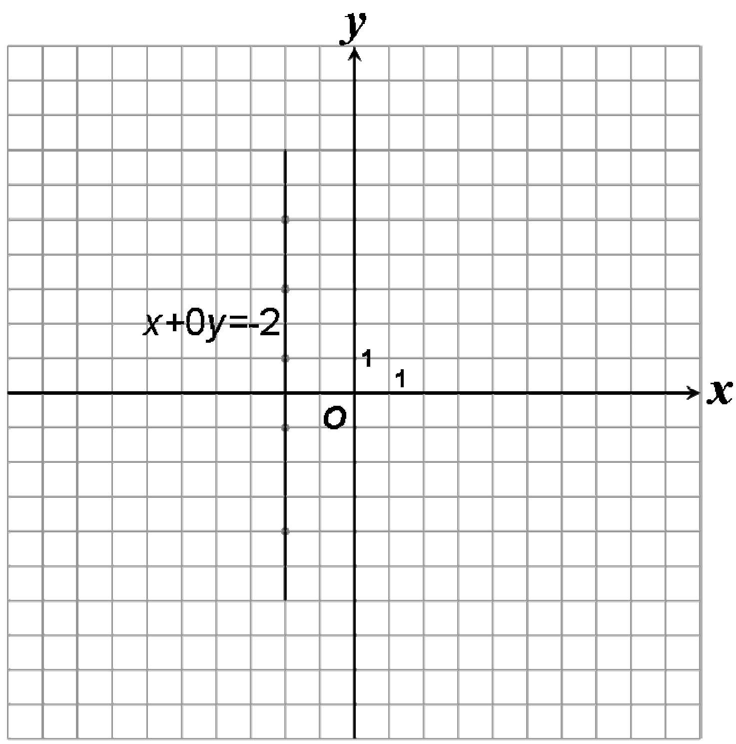
(2)優點：可確定是否成為一直線（作為驗算用）；

缺點：花費較多時間計算與繪製。

活動二：

步驟 8：x 坐標均為-2。$x+0y=-2$。

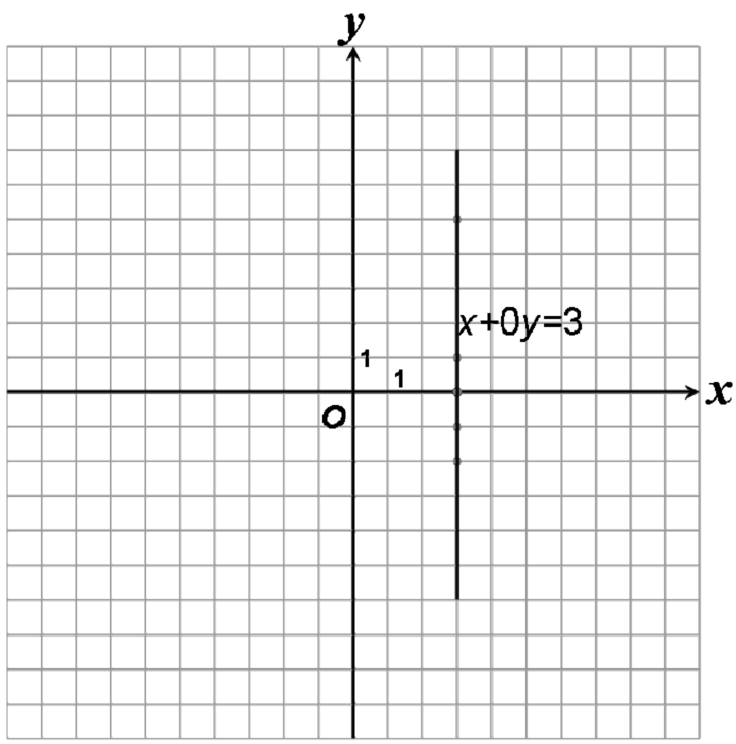
步驟 9：是，參考數對（x，y）=（-2，1）、(-2，-4），圖形如下：



隨堂練習 2：(1)參考數對（x，y）＝（3，1）、（3，0）、（3，-2）

(2)參考數對（x，y）＝（3，-1）、（3，5）

(3)是。參考圖形如下：



※提問 2：(1) 一條垂直 x 軸的直線（直線上的 x 坐標均為 $-\frac{5}{3}$）。

(2) $x=a$ 或 $x+0y=a$，a 為任意數。

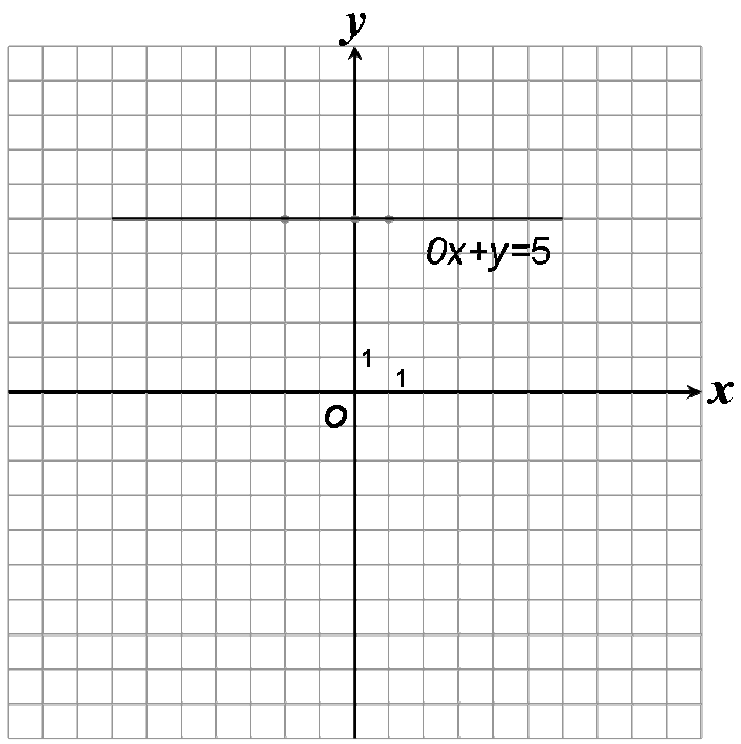
(3) $x=0$。

活動三：

步驟 11：一條平行 x 軸（或垂直 y 軸）的直線。

步驟 12：是。參考解答：(0,5)、(1,5)

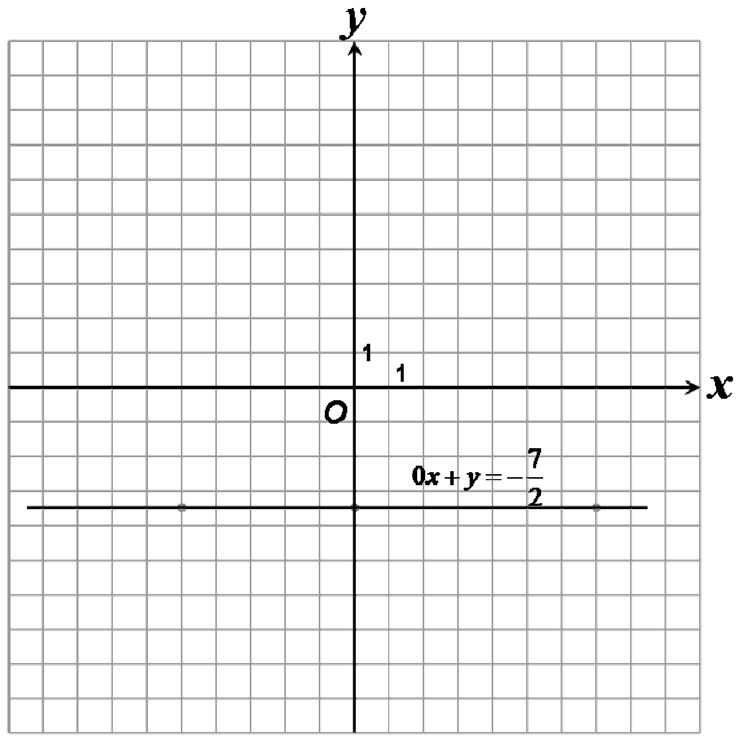
步驟 13：是。參考解答：(-2,5)，圖形繪製如下：



隨堂練習 3：(1)$0x+y=-\frac{7}{2}$（或 $2y+7=0$）。圖形參考如下：

(2)參考數對：$(0,-\frac{7}{2})$。

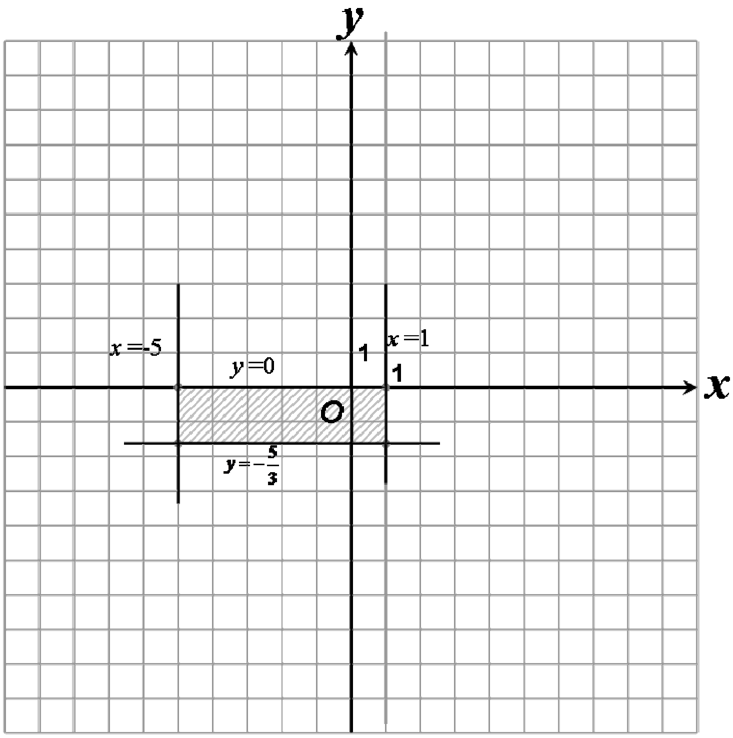
(3)是。



※提問 3：(1)是。交點為$(-3,\frac{3}{2})$。

(2)否（兩直線平行）。最短距離為$\left|5-\left(-\frac{8}{5}\right)\right|=6\frac{3}{5}$，恰為兩直線方程式的 x 值相減的絕對值。

(3)交點坐標(1,0)、$(1,-\frac{5}{3})$、(-5,0)、$(-5,-\frac{5}{3})$。圖形參考如下：



面積為$|-5-1|\times\left|0-\left(-\frac{5}{3}\right)\right|=6\times\frac{5}{3}$=10。

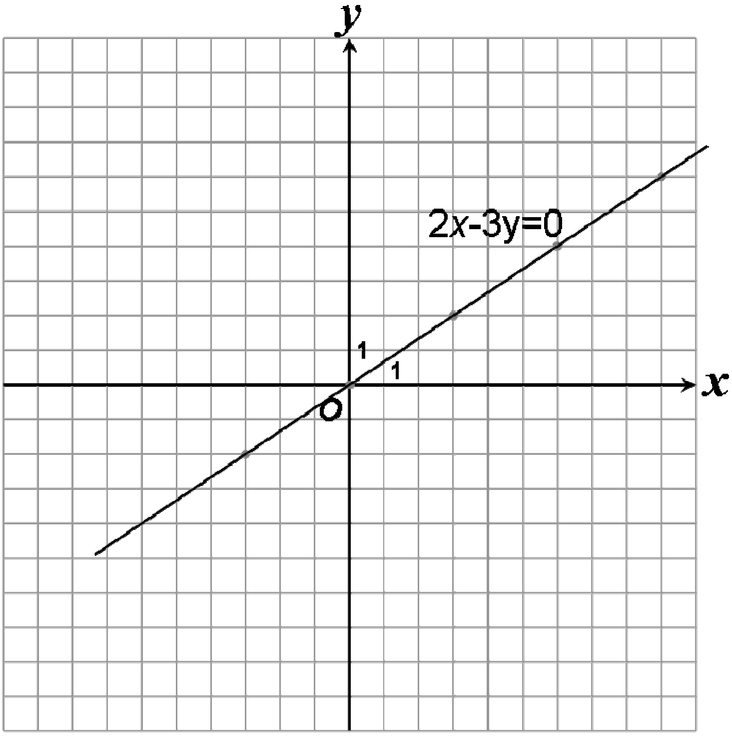
活動四：

步驟 15：二元一次方程式。一條(斜)直線。

步驟 16：參考解答

x	-3	0	3	6	9
y	-2	0	2	4	6

步驟 17：圖形繪製如下：



步驟 18：是。x 坐標每增加（減少）3， y 坐標即增加（減少）2。

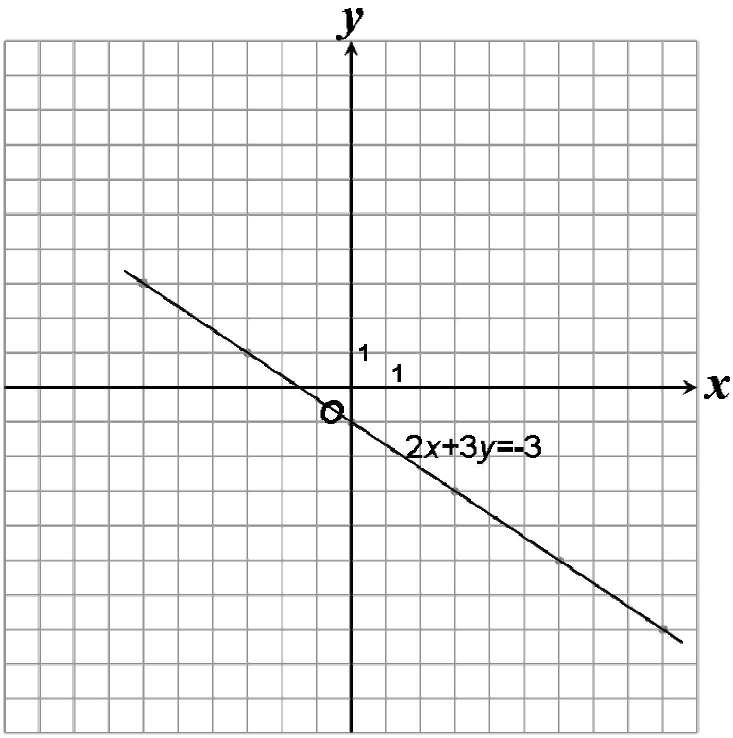
步驟 19：是。參考解答：(-6,-4)、(12,8)。

隨堂練習 4：(1)參考解答如下：

X	0	3	6	9	-3
Y	-1	-3	-5	-7	1

(2)是。x 坐標每增加（減少）3， y 坐標即減少（增加）2。

(3)是。參考解答：(12,-9)、(-6,3)，圖形繪製如下：



活動五：

步驟 23：$2x-y=1$……(2)，整理得 $y=2x-1$，即 $a=2$，$b=-1$。

$4x+3y=0$……(3)，整理得 $y=-\frac{4}{3}x$，即 $a=-\frac{4}{3}$，$b=0$。

$0x+2y=3$……(4)，整理得 $y=\frac{3}{2}$，即 $a=0$，$b=\frac{3}{2}$。

$3x+0y=-9$……(5)，整理得 $x=-3$。

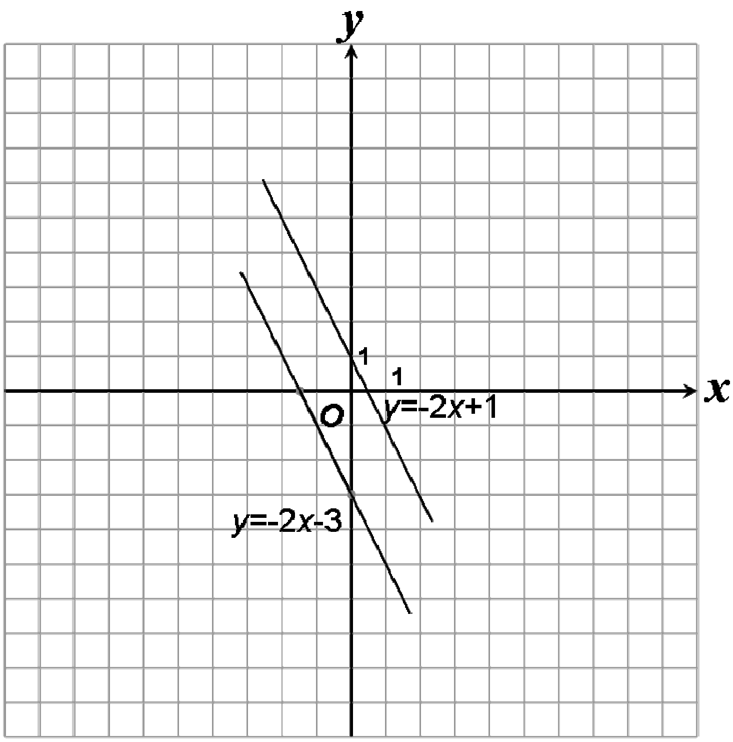
步驟 24：方程式(5)無法整理成標準式，因其 y 所乘的數字為 0。

隨堂練習 5：(1)整理得 $y=-2x-3$。

(2)(0,-3)、$(-\frac{3}{2},0)$。是。

(3)兩組解為其與兩軸的交點：

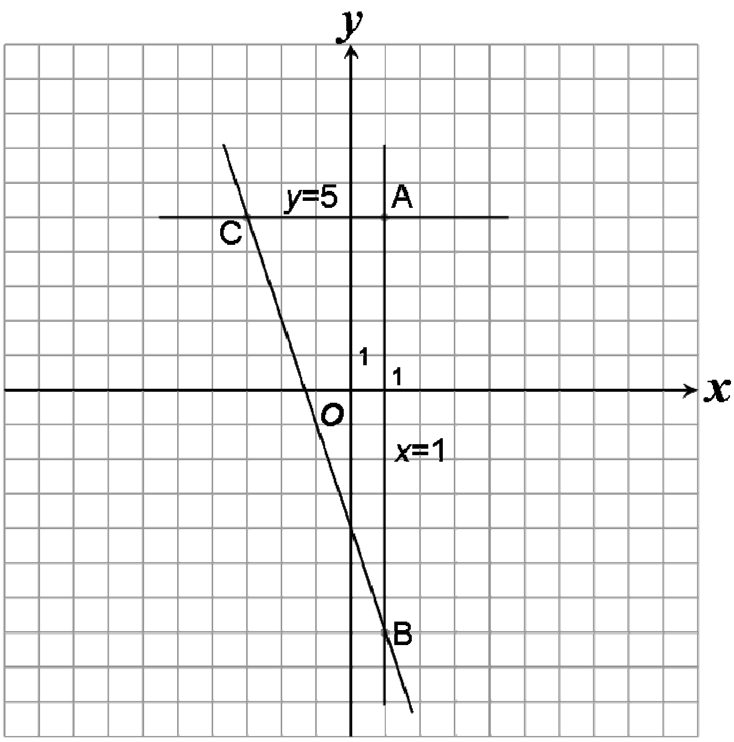
(4)(0,1)、$(\frac{1}{2},0)$。圖形參考如下：



(5)兩直線無交點（即兩直線平行）。因其 x 坐標均為每增加（減少）1， y 坐標即減少（增加）2。

活動六：

步驟 26：直角三角形。圖形參考如下：



步驟 27：直線 AB：x=1，直線 AC： y=5。

步驟 28：是，因其為不垂直 x 軸的斜直線。

步驟 29：將(1,-7)、(-3,5)分別代入直線標準式 y= ax+b，可得聯立方程式：

$\begin{cases} -7=a+b \\ 5=-3a+b \end{cases}$，解得 a=-3，b=-4，故方程式為：y= -3x-4

隨堂練習 6：(1) $y=\frac{1}{5}x+\frac{13}{5}$

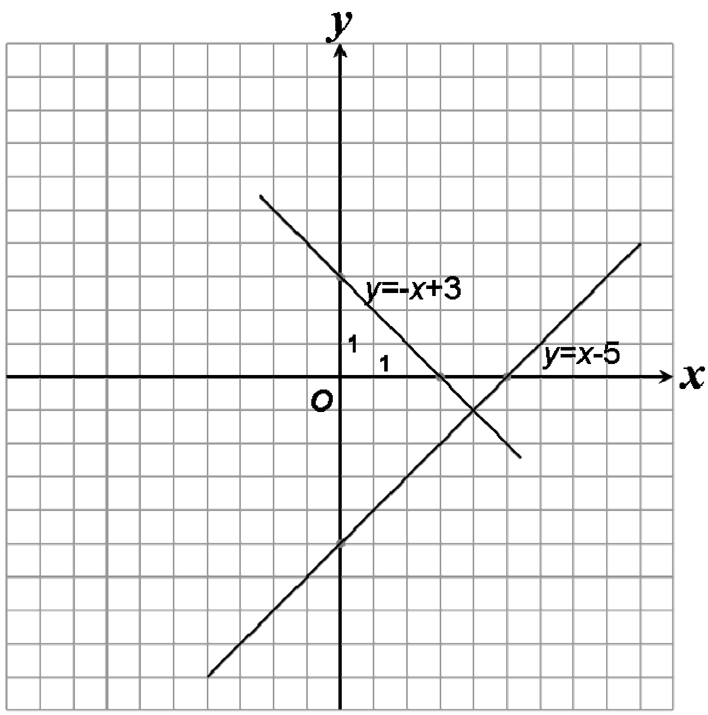
(2) x 軸交點：(-13,0)，y 軸交點：(0, $\frac{13}{5}$)

(3) $y=\frac{1}{5}x$

※提問 4：優點，未知係數較少，較方便計算。限制，當 $Ax+By=C$ 中的 B=0 時，則無法改寫成 $y=ax+b$ 的形式。

活動七：

步驟 31：否。圖形參考如下：



步驟 32：(4,-1)。

步驟 33：x=4， y=-1。與步驟 3 所得結果相同。

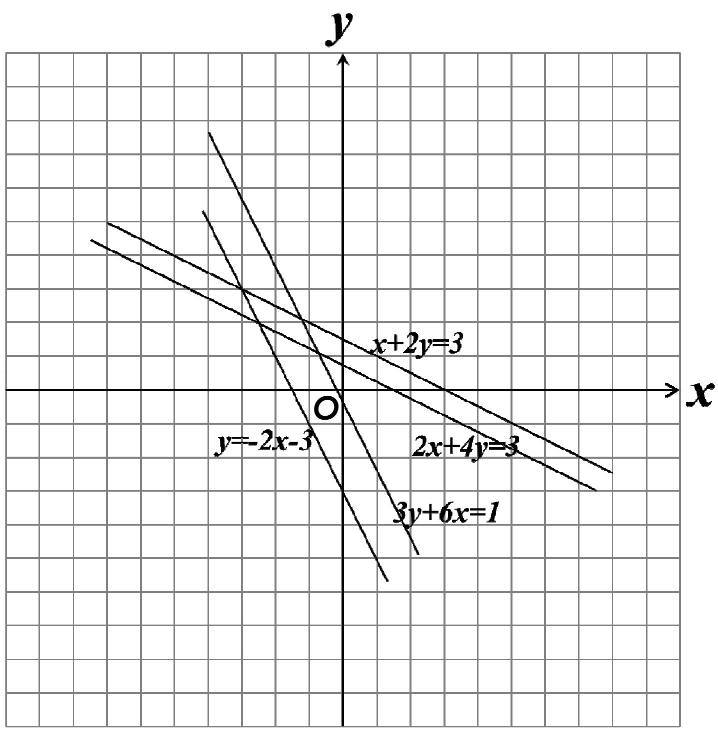
步驟 34：聯立方程式的解（同時符合兩方程式的解）即為兩直線的交點。

隨堂練習 7：(1)L、M。

(2)將 L 與 M 化為標準式 $y=ax+b$ 後，其 a 值相同。

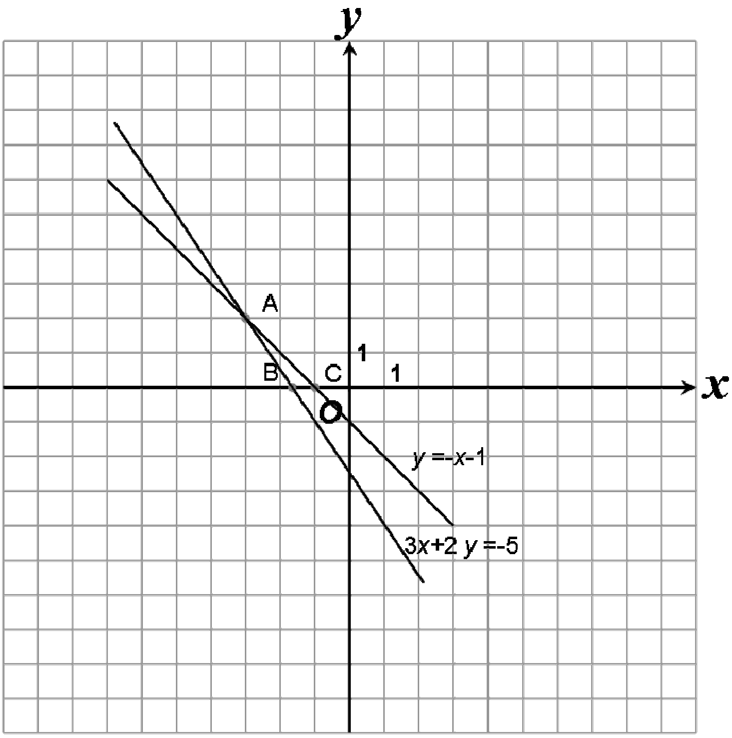
(3)L、N，交點為$(-1,-1)$；M、N，交點為$(-\frac{5}{2},2)$

(4)P 與 N 平行，且與 L、M 有交點。圖形參考如下：



活動八：(1)交點 A 坐標(-3,2)　　(2)B$(-\frac{5}{3},0)$、C(-1,0)

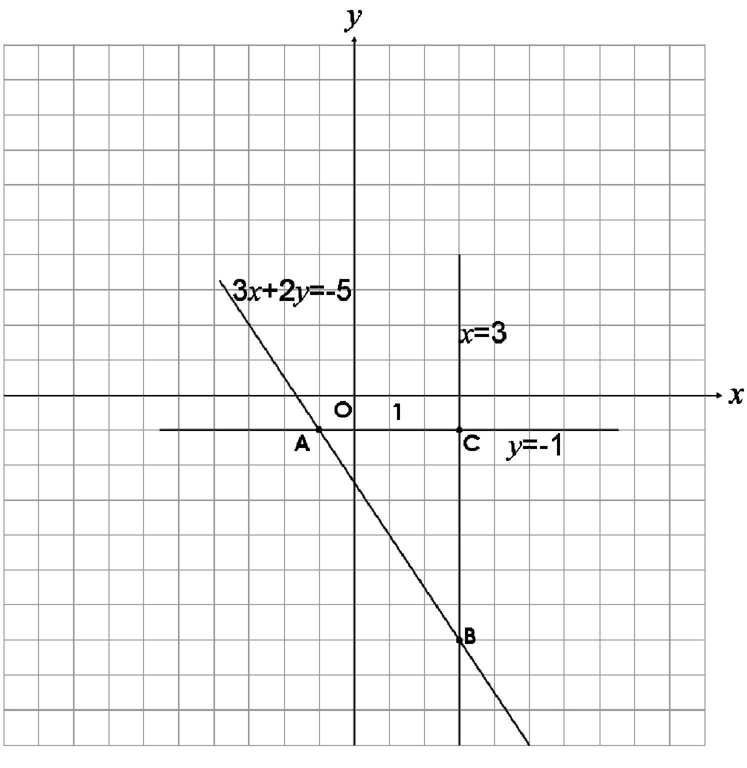
(3)三角形 ABC 面積=$\left|-\frac{5}{3}-(-1)\right|\times 2\div 2=\frac{2}{3}$，圖形繪製如下：



隨堂練習 8：L：$3x+2y=-5$，M：$y=-1$，N：$x=3$

(1)A(-1,-1)、B(3,-7)、C(3,-1)

(2)繪製圖形如下：



(3)三角形 ABC 為直角三角形，面積=4×6÷2=12。

七、指定作業：

1. 已知坐標平面上三條直線方程式如下：

L：$y=-\frac{2}{3}$　M：$2x+10=4$　N：$2x-y=1$

(1)請問三直線是否會圍成三角形？若可圍成三角形，請計算此三角形的三個頂點坐標。

(2)計算三個交點所圍成的三角形面積。

(3)若另有直線 K 與 L 垂直、直線 P 與 N 平行，試寫出直線 K 與直線 P 可能的直線方程式。

2. 已知坐標平面上直線 L 通過(0,3)、(3, $-\frac{1}{2}$)，試求下列問題：

(1)找出此直線的另外三個整數解。

(2)試求此直線與兩軸交點所圍成的三角形面積。

(3)若另一直線 M：$7x+ay=b$ 與 L 平行並通過(0,-1)，試求 a-b 的值。

3. 坐標平面三直線 L、M 與 N 的方程式分別如下：

L：x-$3y$ =-13，M：y =$2x$+1，N：$3y$+$4x$ = -7

(1)請問三直線的關係為平行或交於一點？並請分別求出三直線的交點。

(2)在坐標平面上繪製直線圖形與其交點，並求出直線交點所圍成的三角形面積。

指定作業參考解答：

1. (1) 會形成三角形，頂點坐標：(-3，$-\frac{2}{3}$)、(-3，-7)、($\frac{1}{6}$，$-\frac{2}{3}$)

(2) $\left|-\frac{2}{3}-(-7)\right|\times\left|-3-\frac{1}{6}\right|\times\frac{1}{2}=\frac{19}{3}\times\frac{19}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{361}{36}$

(3) 直線 K：$x=a$（a 為任意數）；直線 P：$2x-y=b$（$b\neq 1$）。

2. (1) （6,-4）、(12,-11)、(18,-18）

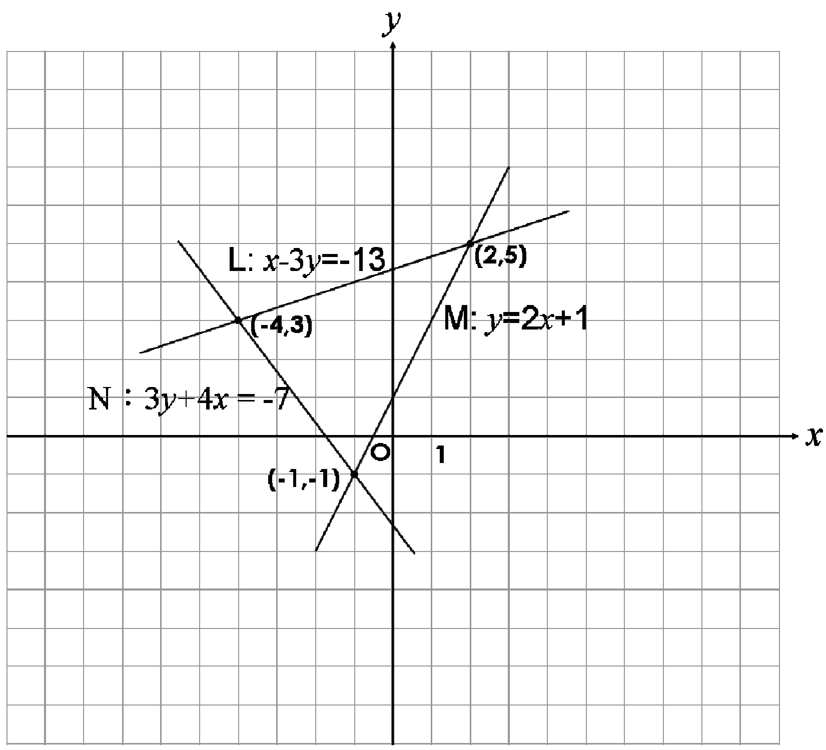
(2) 直線方程式：$y=-\frac{7}{6}x+3$，與兩軸交點：(0,3)、($\frac{18}{7}$,0)

(3) a=6，b=-6，a-b=12

3. (1) 均交於一點，L 與 M 的交點：(2,5)，L 與 N 的交點：(-4,3)，

M 與 N 的交點：(-1,-1)

(2) 參考解答如下，所圍成的三角形面積為：15（平方單位）。



八、教學活動注意事項：

1.教學活動時間建議如下，教學說明(含引起動機)：各活動約8~12 分鐘（第一節課建議進行至活動 4，第二節課再進行其餘活動）。

2.活動一與隨堂練習 1 的主要目的為透過窮舉法觀察二元一次方程式的所有解，無論是整數、分數或小數，在坐標平面上可以形成一條直線，反之亦同，建議可搭配動態幾何軟體（GSP 或 GGB）操作，並進一步探討繪製直線的限制與需求。

3.活動二與活動三在確認鉛直線 $x=a$ 及水平線 $y=b$ 的圖形，並探討平行線的意義與方程式特性，進一步確認其交點並計算其所圍成的面積，可與《直角坐標平面之教學篇 I》搭配教學，另外提問 2(2)、(3)的差異性主要在討論水平線與垂直線的一般例與特例（兩軸）的方程式關係。

4.關於提問 3(2)，若學生無法瞭解說明的內容，建議教師再提供實例以供學生計算比較。

5.活動四的目的在找斜直線方程式的整數解，為使學生繪製圖形方便不易犯錯，教師可逐步說明，或於先前章節二元一次方程式時即加以補充，若學生無法理解結論（二）的意義，教師宜多舉例說明；另外教師於教學時宜說明並要同學思考為何要取格子點（方便運算）並且歸納一開始 x 坐標的取法

與方程式係數的關係；另外方程式係數與格子點移動的關係，教師應多舉例說明，以歸納得到結論(2)的結果。

6.活動五、六為直線標準式的整理、意義與使用時機及限制，關於活動六結論(2)斜率的完整介紹，教師可參考教學參考資料 3：《比與比例式之教學篇》加以說明；至於截距名詞的理解與應用，教師可視學生程度與教學進度適時舉例補充。另外提問 4 的優點，教師可適時說明藉以判斷兩直線是否平行時的關鍵。

7.活動七探討任意兩個二元一次方程式圖形及其解所代表的意義，教師宜反覆詢問其相關性，並進行相關驗證以加強學生印象。活動八另外加入了兩軸交點，教師應確認兩軸方程式學生 是否確實瞭解。

8.活動八與指定作業中求三角形的面積，教師可與《直角坐標平面之教學篇 I》或搭配《不等式之教學篇》課程進行教學，確認學生直接利用交點或間接利用方程式，搭配三角形及矩形的切割方式，是否均能解出坐標平面上所圍成的封閉區域面積，另外指定作業第 2 題的作答，教師可提示學生觀察 x 與 y 值的增減關係（x 每增加 3，y 即減少 $\frac{7}{2}$）以利作答。

9.關於活動八結論（二）的敘述，若學生無法瞭解其意義，教師可就現有例子加以說明或再補充其他例子，並適時補充若

兩直線方程式：$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$，則其交點與 x、y 的係數關係為：

(1)若兩直線交於一點，則其 x 與 y 的係數：

$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$（就斜直線討論，即 a_1、a_2、b_1、b_2 均不為 0）

(2)若兩直線平行（無交點），則其 x 與 y 的係數：

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$（就斜直線討論，即 a_1、a_2、b_1、b_2 均不為 0）

(3)若兩直線重合（無限多個交點），則其 x 與 y 的係數：

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$（就斜直線討論，即 a_1、a_2、b_1、b_2 均不為 0）

10.在各活動教學時，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

11. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1.李政憲，蘇進發 (2013)。直角坐標平面之活動篇，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 B 冊。新北市：國家教育研究院。

2.李政憲，陳昭地（2013）。直角坐標平面之教學篇（一），陳昭地主編：國民中學數學教材原型 B 冊。新北市：國家

教育研究院。

3.傅淑婷，陳昭地（2013）。比例教學篇斜率，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 B 冊。新北市：國家教育研究院。

4.李政豐（2013）。不等式之教學篇，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 B 冊。新北市：國家教育研究院。

主題2－3：直角坐標平面活動篇

一、授課對象：國中七年級下學期學生 **撰寫者**：李政憲

二、先備知識： 蘇進發

(一) 能由長度測量的經驗，透過刻度尺的方式來認識數線，並標記整數。

(二) 能做分數與小數的互換，並標記在數線上。

三、教學目標：

(一) 能理解直角坐標系，一對一完全對應的關係。

(二) 瞭解並應用常用坐標表示法，描述點在平面的所在位置。

四、教學時間：45 分鐘(一節課)

五、教學說明：

透過活動的方式，引起學生學習坐標的興趣，並介紹坐標的對應關係，以及唯一表示法的數學概念。

六、教學活動：

子題：坐標神算

活動一：以「坐標神算」活動引起學生學習動機

步驟 1：教師於課前與小老師（或班長）先行溝通，告知接下來要進行的活動，口語所代表的意義：

以一個班級 35~36 人為例：

將其分為六行，每一行可代表不同的項目，可透過男

人、女人、小孩、動物、植物與非生物等不同類型的相關種類。如：

（1）男人：爺爺、外公、伯伯、爸爸、叔叔…（或人名）

（2）女人：奶奶、外婆、嬸嬸、媽媽、阿姨…（或人名）

（3）小孩：同學、弟弟、妹妹、寶寶…（或人名）

（4）動物：狗、貓、鳥、魚…

（5）植物：玫瑰、百合、蘭花、小草…

（6）非生物：石頭、筆、球、瓶子…

（可依需求自行增減以上種類或數量）

說明接下來課程要透過約定，進行猜測同學座位（或座號）的活動。以每班 6（行）×6（列）配合上述項目(1)至(6)為例，若選定同學為第 3 行【配合項目(3)：小孩】第 4 列【配合項目(4)：動物】，則可在受測者進教室同時，由教師不經意說出：「昨天我們家女兒（小孩）看到了一隻狗（動物）……」接著再進行心電感應的活動（事實上，此時受測者已接收到被猜測同學的相對位置），由受測者說出正確答案。並要受測者進行練習熟練，確定瞭解彼此約定。

步驟 2：教師進到教室，向全班同學說明要進行一個與小老師（或班長，以下簡稱受測者）心電感應的活動，並請受測者離席。

步驟 3：請教室內的同學，自行指定希望被猜測的同學一名，再請小老師（或班長）回座。

步驟 4：接下來老師透過先前的約定，開始敘述一個故事或運用動作，將被猜測同學的座位（或座號）等相關訊息，透露給受測者得知。

此處再提供以下兩種方法以供參考使用：

（一）同一項目對應法：

以每班 7（行）×7（列）配合排定的項目（顏色與生肖）為例，若選定同學為第 5 行【配合顏色：藍色】第 6 列【配合生肖：蛇】，則可在受測者進教室同時，由教師不經意說出：「各位有看過藍色（顏色排序第 5）的蛇（生肖排序第 6）嗎？……」接著再進行心電感應的活動（事實上，此時受測者已接收到被猜測同學相對位置），並由受測者說出正確答案。

（二）數字按壓（或眨眼）對應法：

以每班 7（行）×5（列）為例，若選定同學為第 5 行第 2 列，則可在受測者進教室後，教師大拇指按壓學生雙手，直接進行心電感應的活動，事先約定教師的左手為行、右手為列，由受測者說出正確答案（為避免師生異性時，身體接觸的困擾，也可改為左右眼眨眼）。

隨堂練習 1：由活動一的進行，請學生猜測受測者如何得到答案，或教師與受測者如何進行約定；並請同學兩兩一組，自行設計彼此暗號，並透過上台分享，討論如何約定與進行，可以讓整個活動更不會留下破綻。

活動二：坐標初探

由活動一及隨堂練習的進行，我們可以瞭解只要是平面上的位置，我們可以透過適當的分割，讓平面上的各點都能有一個確切的位置，這種分割方式稱為「坐標」，而坐標的約定通常是先直（排或行，以下簡稱「行」）再橫（列），並以（行，列）表示其所在位置。接著思考以下問題：

1. 為何要約定先行再列，是否有先列再行的生活實例？
2. 請問第 3 行第 2 列與第 2 行第 3 列的同學是否不同？
3. 經約定先行再列，各平面上點的位置是否唯一？不同位置的點是否坐標均不相同？

隨堂練習 2：觀察以下座位表並回答問題：

			講臺		
	第 5 行	第 4 行	第 3 行	第 2 行	第 1 行
第 1 列		承芳			小明
第 2 列			弘文		
第 3 列	天佑			小華	
第 4 列					
第 5 列		阿信		一心	

表 5-1-1　教室座位示意圖

(1)小明的坐標位置為＿＿＿＿＿，天佑的坐標位置為＿＿＿＿＿；

(2)位置在(2,3)的同學為＿＿＿＿＿，在(3,2)的同學是＿＿＿＿＿；

(3)今天因換位置，所有同學均向右兩排移動，請問阿信的新位置坐標為＿＿＿＿＿；

(4)承上題，若向右移動後，老師發現承芳的身高過高，再向後調整三排，則承芳的新位置為＿＿＿＿＿；

(5)第一次段考結束，上表同學因數學成績不佳留校進行課業加強，並於輔導完畢進行測驗，且老師要求每位同學的前後左右不得坐其他同學。若阿宗也是要測驗的一位同學，則他可以坐的位置有哪些？（請將坐標全部列出）

(6)承上題，按照老師補測驗排座位規定（每位同學的前後左右不得坐其他同學），請問教室最多可坐幾位同學？

活動三：請問貴姓

步驟 5：請同學翻開附件一，依序看看你母親（或好朋友、喜歡的人）的姓，分別在哪兩張卡片上？

步驟 6：同學分別報出兩張卡片的號碼後，由教師猜測你所想的人的姓為何。

步驟 7：同學思考並討論教師如何猜測正確答案的方式，並請瞭解方法的同學，示範猜測方式給尚未瞭解同學思考；待超過半數以上的同學均能找出規律，由同學自行說明其猜測方式。

步驟 8：請問同學這個活動與剛剛介紹的「坐標」是否相關？主要在學習「坐標」的哪些概念？

步驟 9：請問「其他姓氏」應該排在「右感應」的哪一張的第幾個？以目前「左通靈」（11 張）與「右感應」（12 張）的卡片張數，最多可以出現多少姓氏？

步驟 10：依照上述的討論，我們可繪製對應圖如下，請試著找出自己的姓氏與對應的坐標關係：

左通靈(行) 右感應(列)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	丁	白	杜	姚	夏	康	彭	葉	潘	戴	蘇
2	于	石	汪	姜	孫	張	曾	董	蔡	薛	鐘
3	孔	任	沈	施	徐	張簡	游	詹	蔣	謝	顧
4	尤	朱	阮	柯	涂	曹	湯	賈	鄧	鍾	龔
5	尹	江	卓	段	秦	梁	程	鄒	鄭	韓	
6	方	何	周	洪	翁	莊	童	雷	黎	簡	
7	毛	余	孟	紀	袁	許	賀	廖	盧	藍	
8	牛	吳	林	胡	郝	連	馮	熊	蕭	顏	
9	王	呂	邱	范	馬	郭	黃	趙	賴	魏	
10	古	宋	邵	范姜	高	陳	楊	劉	錢	羅	
11	史	巫	金	韋	崔	陸	溫	歐	閻	譚	
12	田	李	侯	唐	常	傅	萬	歐陽	龍	嚴	

表 5-1-2　「請問貴姓」對應表

步驟 11：根據表 5-1-2 的百家姓，設計「左通靈」與「右感應」的卡片，並驗證是否正確。

隨堂練習 3：

「種田無定例，全靠著節氣。」我國民間自古普遍流傳這句俗語，至今未改，可見節氣受到一般農民重視的程度，二十四節氣是我國古代曆法家所獨創，用來指示一年中氣候寒暑變化的週

期，以補救我國以前使用陰曆日期，無法配合季節變化的缺點。而二十四節氣的形成原因，主要是地球繞日公轉，地軸是傾斜著運行，因此地球在公轉軌道上各個不同位置，受到陽光的照射量因直射或斜射而多寡不同。二十四節氣簡單的說就是地球繞日公轉軌道上的二十四個點，好比公轉軌道上的里程標誌，到了甚麼節氣，就會有甚麼氣候，以反映一年中各個不同時期的氣候寒暑變化。

二十四節氣的名稱分別是立春、雨水、驚蟄、春分、清明、穀雨、立夏、小滿、芒種、夏至、小暑、大暑、立秋、處暑、白露、秋分、寒露、霜降、立冬、小雪、大雪、冬至、小寒、大寒。因為二十四節氣在陽曆上的日期變動不大，故亦有人將二十四節氣在陽曆上的日期，編有「上半年逢六、二十一，下半年逢八、二十三，前後不過一、二天。」的口訣；底下是二十四節氣對照國曆的可能日期：

名稱	**可能日期**	**名稱**	**可能日期**
小寒	1/5-7	小暑	7/6-8
大寒	1/19-21	大暑	7/22-24
立春	2/3-5	立秋	8/7-9
雨水	2/18-20	處暑	8/22-24

驚蟄	3/5-7	白露	9/7-9
春分	3/20-22	秋分	9/22-24
清明	4/4-6	寒露	10/7-9
穀雨	4/19-21	霜降	10/23-24
立夏	5/5-7	立冬	11/7-8
小滿	5/20-22	小雪	11/21-23
芒種	6/5-7	大雪	12/6-8
夏至	6/20-22	冬至	12/21-23

表 5-1-3　二十四節氣日期對照表

請兩兩一組，將二十四節氣按活動三設計「左通靈」與「右感應」的卡片，並驗證是否正確。

教學活動參考解答：

隨堂練習 1：略。

活動二：

1.一般習慣約定先行再列，但仍有例外，如電影院坐票即為先列再行。

2.第 3 行第 2 列與第 2 行第 3 列的位置不同，同學自不相同。

3.各點的位置唯一，且不同位置的點坐標均不相同。

隨堂練習 2：

1.小明的坐標 (1,1) ，天佑的坐標位置為 (5,3) ；

2.位置在(2,3)的同學為 小華 ，在(3,2)的同學是 弘文 ；

3.阿信的新位置坐標為 (2,5) ；

3.承芳的新位置為 (2,4) ；

4.可以坐的位置有(1,4)與(3,4)；

5.教室最多可坐 13 位同學，座位分布如下：

	第 5 行	第 4 行	第 3 行	第 2 行	第 1 行
第 1 列					
第 2 列					
第 3 列					
第 4 列					
第 5 列					

活動三：

步驟 5：略。

步驟 6：教師記住同學報出的第一張卡片號碼，並在第二張卡片上找到第一張號碼的位置；例如：第一張為「左通靈」第 6 張，則第二張「右感應」第 10 張即找尋由左往右，由上至下第 6 個姓，亦即為「陳」。

步驟 7：略。

步驟 8：是，因每一個坐標所對應的位置表示皆為唯一，故重新排列後的位置也跟著固定。

步驟 9：「其他姓氏」為「左通靈」第 11 張第 5 個，應在「右感應」的第 5 張第 11 個，但為猜測活動的順利，已在此先行刪除，也就是若學生的姓氏在左通靈第 11 張，右感應並沒有出現，則其姓氏為「其他姓氏」。最多可出現 $11\times12=132$ 個姓氏。

步驟 10：略。

隨堂練習 3：參考答案如下：

左通靈：

1	2	3	4	5
小寒	春分	芒種	處暑	立冬
大寒	清明	夏至	白露	小雪
立春	穀雨	小暑	秋分	大雪
雨水	立夏	大暑	寒露	冬至
驚蟄	小滿	立秋	霜降	

右感應：

1	2	3	4	5
小寒	大寒	立春	雨水	驚蟄
春分	清明	穀雨	立夏	小滿
芒種	夏至	小暑	大暑	立秋
處暑	白露	秋分	寒露	霜降
立冬	小雪	大雪	冬至	

七、指定作業：

1. 見表 5-1-1，若將行與列的左右與上下順序互換（即還原為原坐標的呈現方式），請問：

   (1)小華與一心的新坐標分別為何？

   (2)新坐標$(2,1)$與$(3,4)$的同學，分別是哪些人？

   (3)原來坐標（$3,2$）的同學，新坐標為何？

   (4)新坐標(a,b)的同學，原坐標為何？

2. 若要依活動三，設計一個猜測居住地（以臺灣 319 鄉為例）的活動，請問你最少需要幾張卡片？每張卡片有幾個鄉鎮？你是如何計算出來的？

指定作業參考解答：

1.(1) 小華(4,3)，一心(4,1)(參照下表 5-1-2)

	第 1 行	第 2 行	第 3 行	第 4 行	第 5 行
第 5 列		承芳			小明
第 4 列			弘文		
第 3 列	天佑			小華	
第 2 列					
第 1 列		阿信		一心	

表 5-1-4　教室座位示意圖(重排)

(2) 小華(4,3)，一心(4,1)

(3) (2,1)：阿信，(3,4)：弘文

(4) 新坐標(3,4)

(5) 原坐標$(6-a, 6-b)$

2. 因 $17^2=289$，$18^2=324$，故左通靈需要 18 張，每張 18 個鄉鎮(第 14~18 張各 17 個鄉鎮)；右感應則需 18 張，每張 18 個鄉鎮(第 18 張 13 個鄉鎮)。

八、教學活動注意事項：

1.教學活動時間建議如下，各活動進行(含隨堂練習)：約 15 分鐘。

2.活動一的進行，教師可依學生反應與教學時間，配合隨機交換位置與抽籤，自行決定以上方法一至三，實際進行一至三種，藉以提升學生學習動機與思考，盡量貼近生活並掌握時間，並縮短於 15 分鐘內結束，以利接下來活動的進行與討論。

3.隨堂練習 1 的設計主要是讓學生熟悉先約定為行，後約定為列的教學目的；教師宜在教學中說明「排」即為「行」的概念。

4.活動二進行完畢後，教師宜提醒學生並強調在坐標平面時，行的增加為由左至右，列的增加為由下至上，恰與學生所在位置的判別順序相反；或由教師所在位置（講台）判別，即為正確的坐標規定，並請同學上台進行演練。

5.活動二與隨堂練習 2 的設計，主要是配合教室座位與實際生活可能會發生的例子，讓學生思考並討論坐標表示的唯一性；而隨堂練習 2 第 6 題的設計，主要是測驗學生在是否能將各點在平面上均勻排列，教師亦可配合 *excel* 軟體，進行座位表設計與互換的教學，並確認學生坐標對應的概念是否正確；另外若教學時間與學生程度允許，可再討論或補充若改為 n 列 m 行時（n、m 可為正整數或未知數）的情形，個數與排法是否有所不同；並進一步思考若上述人數減少時，要如何安排座位，以讓每位同學距離最遠的安排方式，為國二

要學習的勾股定理作準備。若要進行上述的討論與距離測量活動，建議教師可多利用半節至一節課進行討論與進行，並以皮尺直接測量，以確認學生的想法是否正確。

6.活動三的設計，主要是將坐標(a,b)的點，經重排對應至(b,a)，強調坐標一對一完全對應的特性，教師應再加以強調。並透過表 5-1-2 進行本單元的結論。教師可藉由反覆來回對照詢問，確認學生已達成學習目標；至於活動進行可透過附件一的姓名卡片放大列印或附件二的魔術互動簡報進行，並可視時間與學生程度由學生分組討論其結果的原因。另外建議活動三的進行，宜循序觀看卡片或簡報；或是同學先給予教師左通靈的卡片，並告知教師右通靈的序號，可收較佳的呈現效果。另若學生無法自行找出規律，教師可先藉由較為簡單的例子（如十二生肖的猜測，詳見附件三簡報內容，感謝林口國中葉麗珠老師協助製作提供）說明，進一步透過適當引導，要同學觀察兩張出現同樣姓氏的卡片，是否有其共通性？並透過互動簡報完整對應表的彙整以利學習。另外活動三的姓氏，主要參照臺灣及大陸常用百家姓（詳見教學參考資料 2，感謝台灣使用者經驗設計協會理事長蔡志浩先生整理提供），若班上學生有部分的姓氏較為特別，教師可自行修改卡片及簡報內容；另外應先約定接受猜測的學生先行寫下要猜

測的姓氏，且若有其他學生於活動間已瞭解要猜測的姓氏，應保持安靜以利接下來活動的順遂。

7.教師亦可於坐標平面教學完畢後，藉由活動一與活動三的進行，搭配附件四「直角坐標平面遊戲學習單」的使用，使坐標對應的概念更為清楚。

8.隨堂練習 1 與隨堂練習 3 的設計，主要讓學生自行設計與教學內容相關活動，藉以發揮其創意，並加深對活動的理解應用。

9.指定作業第 1 題的設計，主要目的在將坐標正確的標示方式讓學生瞭解，並進一步討論新舊坐標互換的公式，教師可配合隨堂練習 2，討論坐標或原點平移時的運算規則；另外第 2 題則希望同學能藉由討論，發現個數與卡片數的關聯性，亦即卡片數×每張個數＝總個數，而最需要的最少卡片數即為大或等於 $\sqrt{\text{總個數}}$ 的最小整數（此單元尚未進行根號的教學，建議教師可利用「最少卡片數×最少卡片數≦總個數」的概念進行說明）。

10.在各活動教學時，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

11. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1.林壽福、吳如皓（2009）。數學魔術——27 個數學概念奇蹟，

台北：尖端。

2.蔡志浩。台灣百家姓：(檢索日期：2013/2/3)

http://taiwan.chtsai.org/2006/01/10/taiwan_baijiaxing/

3.「二十四節氣」相關網頁：(檢索日期：2013/2/3)

http://www.24solar.tw/about1-1.htm

http://www.coa.gov.tw/view.php?catid=286

附件一：「請問貴姓」卡片組

「左通靈」-1

丁	于	孔	尤
尹	方	毛	牛
王	古	史	田

「左通靈」-2

白	石	任	朱
江	何	余	吳
呂	宋	巫	李

「左通靈」-3

杜	汪	沈	阮
卓	周	孟	林
邱	邵	金	侯

「左通靈」-4

姚	姜	施	柯
段	洪	紀	胡
范	范姜	韋	唐

「左通靈」-5

夏	孫	徐	涂
秦	翁	袁	郝
馬	高	崔	常

「左通靈」-6

康	張	張簡	曹
梁	莊	許	連
郭	陳	陸	傅

「左通靈」-7

彭	曾	游	湯
程	童	賀	馮
黃	楊	溫	萬

「左通靈」-8

葉	董	詹	賈
鄒	雷	廖	熊
趙	劉	歐	歐陽

「左通靈」-9

潘	蔡	蔣	鄧
鄭	黎	盧	蕭
賴	錢	閻	龍

「左通靈」-10

戴	薛	謝	鍾
韓	簡	藍	顏
魏	羅	譚	嚴

「左通靈」-11

蘇	鐘	顧	龔
其他姓氏			

「右感應」-1

丁	白	杜	姚
夏	康	彭	葉
潘	戴	蘇	

「右感應」-2

于	石	汪	姜
孫	張	曾	董
蔡	薛	鐘	

「右感應」-3

孔	任	沈	施
徐	張簡	游	詹
蔣	謝	顧	

「右感應」-4

尤	朱	阮	柯
涂	曹	湯	賈
鄧	鍾	龔	

「右感應」-5

尹	江	卓	段
秦	梁	程	鄒
鄭	韓		

「右感應」-6

方	何	周	洪
翁	莊	童	雷
黎	簡		

「右感應」-7

毛	余	孟	紀
袁	許	賀	廖
盧	藍		

「右感應」-8

牛	吳	林	胡
郝	連	馮	熊
蕭	顏		

「右感應」-9

王	呂	邱	范
馬	郭	黃	趙
賴	魏		

「右感應」-10

古	宋	邵	范姜
高	陳	楊	劉
錢	羅		

「右感應」-11

史	巫	金	韋
崔	陸	溫	歐
閻	譚		

「右感應」-12

田	李	侯	唐
常	傅	萬	歐陽
龍	嚴		

附件二：「請問貴姓」魔術互動簡報

「請問貴姓」數學魔術

新北市林口國中
李政憲 製作
jenshian@yahoo.com.tw

左頁圖　結論　右頁圖

1

丁	于	孔	尤
尹	方	毛	牛
王	古	史	田

2

白	石	任	朱
江	何	余	吳
呂	宋	巫	李

3

杜	汪	沈	阮
卓	周	孟	林
邱	邵	金	侯

4

姚	姜	施	柯
段	洪	紀	胡
范	范姜	韋	唐

5

夏	孫	徐	涂
秦	翁	袁	郝
馬	高	崔	常

6

康	張	張簡	曹
梁	莊	許	連
郭	陳	陸	傅

7

彭	曾	游	湯
程	童	賀	馮
黃	楊	溫	萬

8

葉	董	詹	賈
鄒	雷	廖	熊
趙	劉	歐	歐陽

9

潘	蔡	蔣	鄧
鄭	黎	盧	蕭
賴	錢	閻	龍

10

戴	薛	謝	鍾
韓	簡	藍	顏
魏	羅	譚	嚴

11

蘇	鐘	顧	龔
其他姓氏			

1

丁	白	杜	姚
夏	康	彭	葉
潘	戴	蘇	

2

于	石	汪	姜
孫	張	曾	董
蔡	薛	鐘	

3

孔	任	沈	施
徐	張簡	游	詹
蔣	謝	顏	

4

尤	朱	阮	柯
涂	曹	湯	賈
鄧	鍾	龔	

5

尹	江	卓	段
秦	梁	程	鄒
鄭	韓		

6

方	何	周	洪
翁	莊	童	雷
黎	簡		

7

毛	余	孟	紀
袁	許	賀	廖
盧	藍		

8

牛	吳	林	胡
郝	連	馮	熊
蕭	顏		

9

王	呂	邱	范
馬	郭	黃	趙
賴	魏		

10

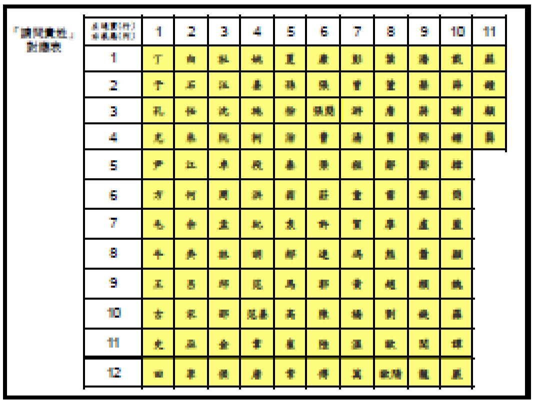
古	宋	邵	范姜
高	陳	楊	劉
錢	羅		

11

史	巫	金	韋
崔	陸	溫	歐
閻	譚		

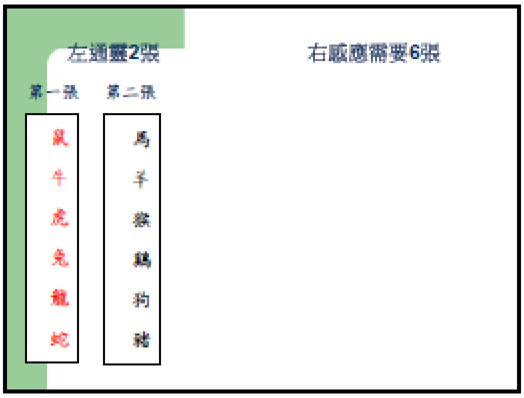
12

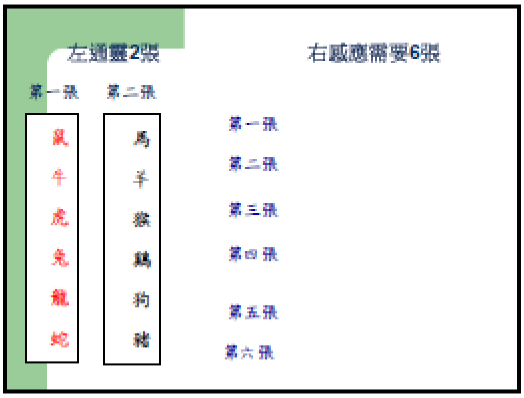
田	李	侯	唐
常	傅	萬	歐陽
龍	嚴		



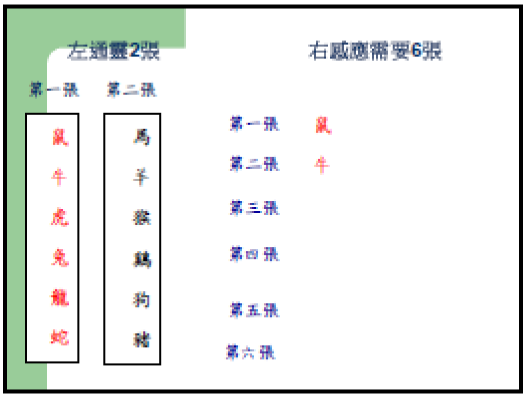
[illegible]	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	丁	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
10	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
11	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	

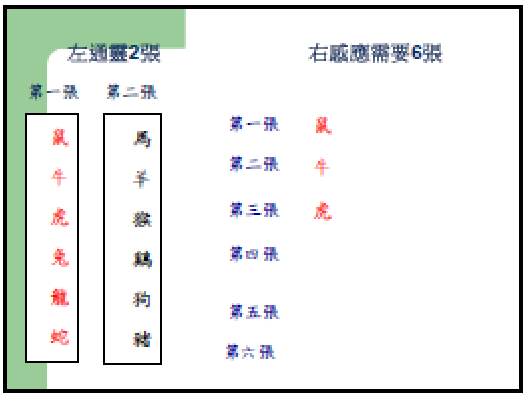
附件三：「十二生肖」補充簡報

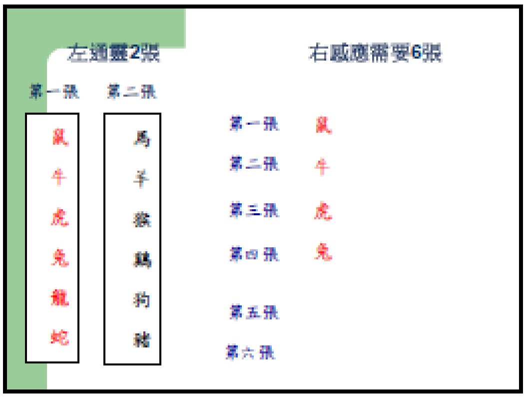





左通靈2張
右感應需要6張
第一張
第二張
鼠 牛 虎 兔 龍 蛇
馬 羊 猴 雞 狗 豬
第一張 鼠
第二張
第三張
第四張
第五張
第六張


左通靈2張
右感應需要6張
第一張
第二張
鼠 牛 虎 兔 龍 蛇
馬 羊 猴 雞 狗 豬
第一張 鼠
第二張 牛
第三張
第四張
第五張
第六張


左通靈2張
右感應需要6張
第一張
第二張
鼠 牛 虎 兔 龍 蛇
馬 羊 猴 雞 狗 豬
第一張 鼠
第二張 牛
第三張 虎
第四張
第五張
第六張


左通靈2張
右感應需要6張
第一張
第二張
鼠 牛 虎 兔 龍 蛇
馬 羊 猴 雞 狗 豬
第一張 鼠
第二張 牛
第三張 虎
第四張 兔
第五張
第六張


左通靈2張
右感應需要6張
第一張
第二張
鼠 牛 虎 兔 龍 蛇
馬 羊 猴 雞 狗 豬
第一張 鼠
第二張 牛
第三張 虎
第四張 兔
第五張 龍
第六張


左通靈2張
右感應需要6張
第一張
第二張
鼠 牛 虎 兔 龍 蛇
馬 羊 猴 雞 狗 豬
第一張 鼠
第二張 牛
第三張 虎
第四張 兔
第五張 龍
第六張 蛇


左通靈2張
右感應需要6張
第一張 第二張
鼠 牛 虎 兔 龍 蛇
馬 羊 猴 雞 狗 豬
第一張 鼠 馬
第二張 牛
第三張 虎
第四張 兔
第五張 龍
第六張 蛇


左通靈2張
右感應需要6張
第一張 第二張
鼠 牛 虎 兔 龍 蛇
馬 羊 猴 雞 狗 豬
第一張 鼠 馬
第二張 牛 羊
第三張 虎
第四張 兔
第五張 龍
第六張 蛇

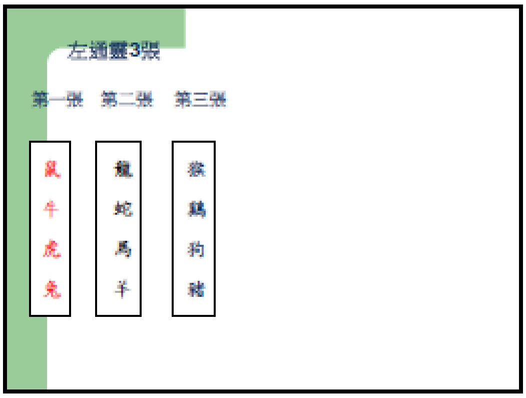

左通靈2張
右感應需要6張
第一張 第二張
鼠 牛 虎 兔 龍 蛇
馬 羊 猴 雞 狗 豬
第一張 鼠 馬
第二張 牛 羊
第三張 虎 猴
第四張 兔
第五張 龍
第六張 蛇

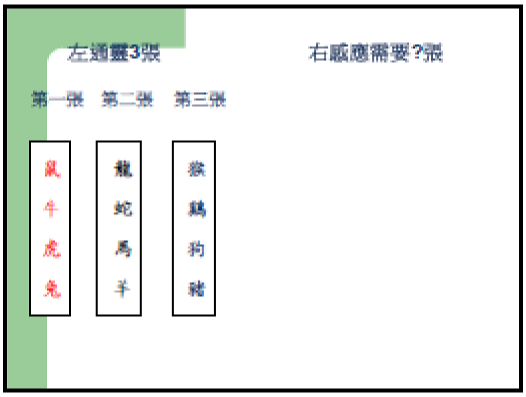

左通靈2張
右感應需要6張
第一張 第二張
鼠 牛 虎 兔 龍 蛇
馬 羊 猴 雞 狗 豬
第一張 鼠 馬
第二張 牛 羊
第三張 虎 猴
第四張 兔 雞
第五張 龍
第六張 蛇

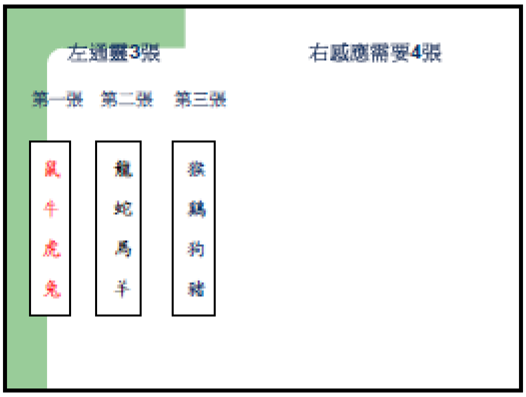

左通靈2張
右感應需要6張
第一張 第二張
鼠 牛 虎 兔 龍 蛇
馬 羊 猴 雞 狗 豬
第一張 鼠 馬
第二張 牛 羊
第三張 虎 猴
第四張 兔 雞
第五張 龍 狗
第六張 蛇

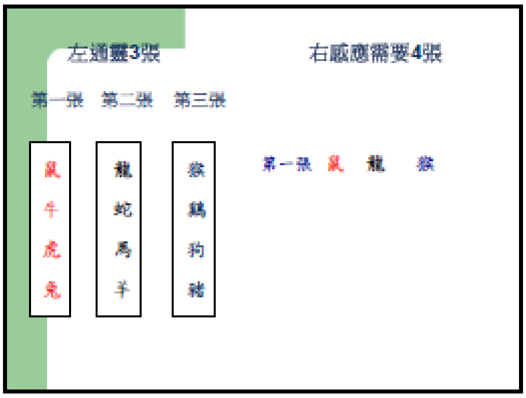

左通靈2張
右感應需要6張
第一張 第二張
鼠 牛 虎 兔 龍 蛇
馬 羊 猴 雞 狗 豬
第一張 鼠 馬
第二張 牛 羊
第三張 虎 猴
第四張 兔 雞
第五張 龍 狗
第六張 蛇 豬

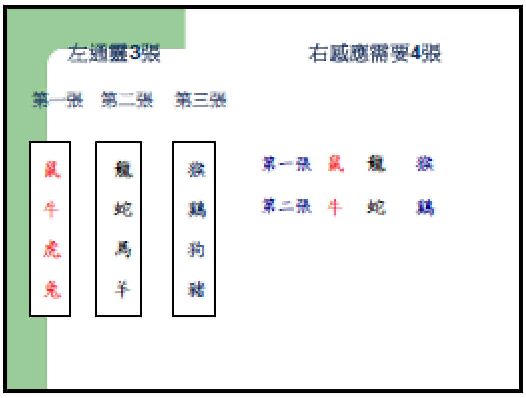

左邊需3張

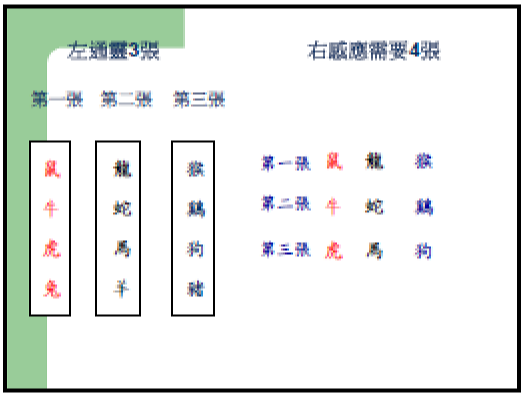

左邊需3張
第一張 第二張 第三張
鼠 牛 虎 兔
龍 蛇 馬 羊
猴 雞 狗 豬

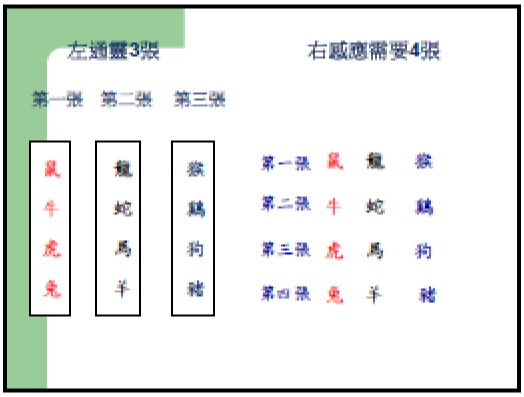

左邊需3張
右邊應需要?張
第一張 第二張 第三張
鼠 牛 虎 兔
龍 蛇 馬 羊
猴 雞 狗 豬

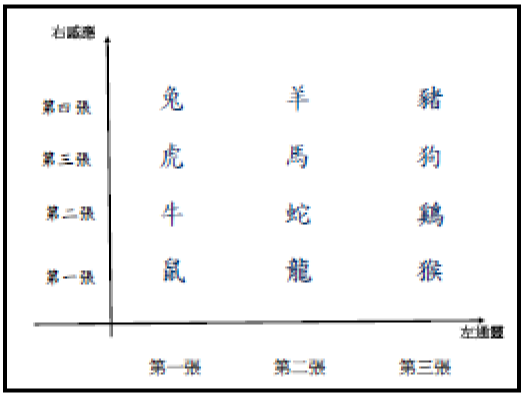

左邊需3張
右邊應需要4張
第一張 第二張 第三張
鼠 牛 虎 兔
龍 蛇 馬 羊
猴 雞 狗 豬


左邊需3張
右邊應需要4張
第一張 第二張 第三張
鼠 牛 虎 兔
龍 蛇 馬 羊
猴 雞 狗 豬
第一張 鼠 龍 猴


左邊需3張
右邊應需要4張
第一張 第二張 第三張
鼠 牛 虎 兔
龍 蛇 馬 羊
猴 雞 狗 豬
第一張 鼠 龍 猴
第二張 牛 蛇 雞


左通靈3張
右感應需要4張
第一張 第二張 第三張
鼠 牛 虎 兔
龍 蛇 馬 羊
猴 鷄 狗 豬
第一張 鼠 龍 猴
第二張 牛 蛇 鷄
第三張 虎 馬 狗


左通靈3張
右感應需要4張
第一張 第二張 第三張
鼠 牛 虎 兔
龍 蛇 馬 羊
猴 鷄 狗 豬
第一張 鼠 龍 猴
第二張 牛 蛇 鷄
第三張 虎 馬 狗
第四張 兔 羊 豬


右感應
第四張 兔 羊 豬
第三張 虎 馬 狗
第二張 牛 蛇 鷄
第一張 鼠 龍 猴
左通靈
第一張 第二張 第三張


十二生肖圖片來源：
http://maxctc.pixnet.net/blog/post/40446268

附件四：直角坐標平面遊戲　　　學　　習　　單

班級：　　　座號：　　　姓名：

1. 請自己設計橫列、直列所代表的種類，並寫下此活動的情境。
   例：直列爲顏色 (紅、橙、黃、綠、藍、靛、紫…)
   橫列爲數字 (1、2、3、4、5…)
   情境：早上騎車到學校途中，看到一輛發財車，車上載著一群豬。結果發現一隻全身黃色的豬，牠的尾巴還捲成一個 6 的數字，…….。

2. (1) 請設計猜測班上同學名字（或座號）的卡片

左通靈	右感應
1.	**1.**
2.	**2.**
3.	**3.**
4.	**4.**
5.	**5.**
6.	**6.**
7.	**7.**
8.	**8.**
9.	**9.**

(2)左通靈需要________張卡片，右通靈需要_______張卡片。合計最少需要________張卡片。你是如何算出的？

主題3－1：比例教學篇斜率

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　**撰寫者：**傅淑婷

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　陳昭地

(一) 能理解二元一次方程式及其解的意義。

(二) 能在直角坐標平面上描繪出二元一次方程式的圖形。

(三) 能在直角坐標平面上，計算多邊形面積。

三、教學目標：

(一) 能認識斜率的意義。

(二) 能瞭解同一直線上，任意二點求出的斜率都相等。(排除鉛直線)

(三) 能瞭解直線方程式化成 $y=ax+b$ 的形式時，x 項的係數就是斜率。

(四) 能瞭解互相平行的兩條直線，斜率相等。(排除鉛直線)

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

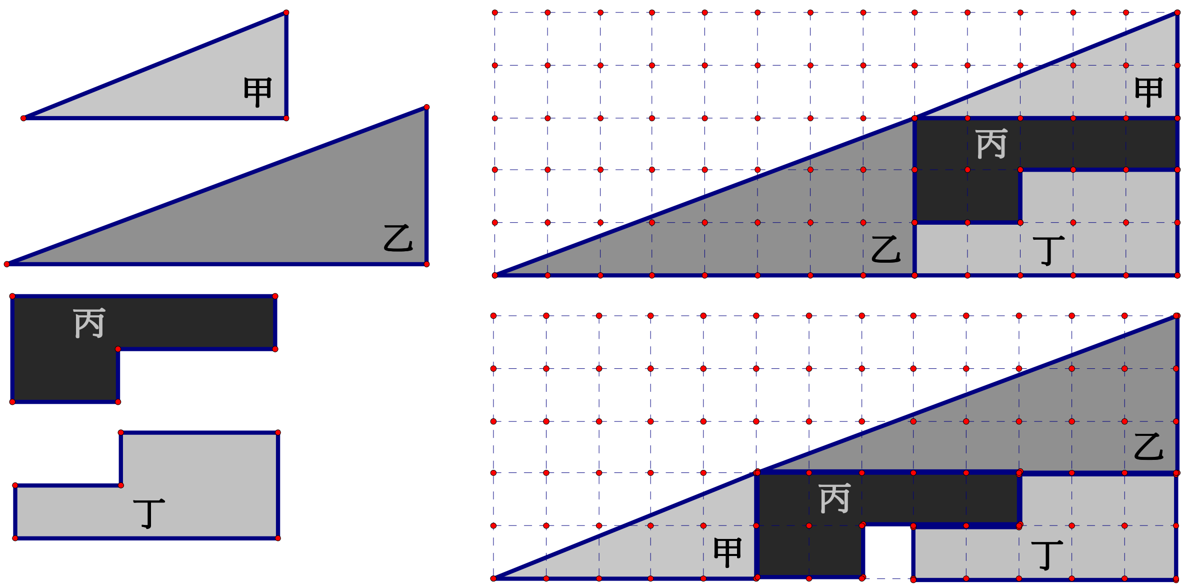
五、教學說明：

第一節課，利用拼圖「為什麼差一平方單位？」，引發學習斜率動機。接著介紹斜率的定義，使學生體會除了傾斜角度(直線跟 x 軸正向的夾角)之外，還可以用垂直向上與水平向右的比值表示山路的傾斜程度。定義斜率之後先用實例計算斜率，接著觀察斜率數值大小所代表的幾何意義。最後回到動機例中，引導學生思

考兩個圖形相差一平方單位的關鍵，並深入計算二個圖形的面積。第二節課主要是探討坐標平面上直線的斜率。先定義坐標平面上的直線如何求出斜率，接著觀察直線方程式化成 $y=ax+b$ 的形式時，x 項的係數就是斜率。最後觀察歸納兩條非鉛直之直線平行時，兩直線的斜率相等。因為學生首次接觸斜率概念，所以本單元先不討論鉛直線的情形。

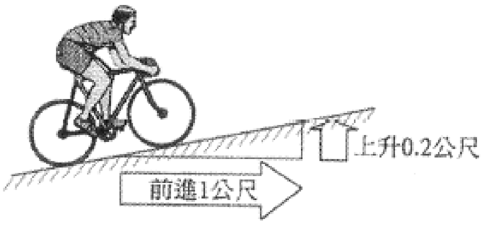
六、教學活動：

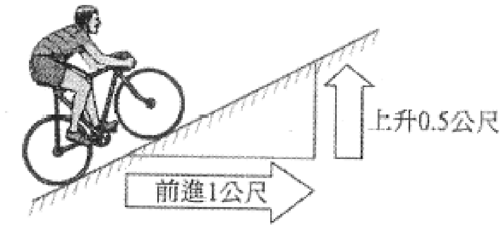
活動一：準備教具，請兩位同學上台，分別將甲、乙、丙、丁四塊拼圖拼成底為 13，高為 5 的直角三角形。(教師可以預先安排二種狀況，將最上方的一塊分別使用甲拼圖和乙拼圖拚入，請大家觀察兩位同學拼出的直角三角形有何不同，為什麼差 1 平方單位面積？)



步驟 1：爬山的時候，有些山路比較平緩，有些山路比較陡峭。例如有兩位朋友互相爭吵，誰爬的山比較陡？請問如何具體說明山的陡峭程度呢？____________________

步驟 2：認識直角三角形斜邊的斜率：





如上圖觀察山路的側面圖，為了描述山路陡峭的程度，

我們規定斜率=$\dfrac{\text{鉛直向上的量}}{\text{水平向右的量}}$。

左圖水平向右前進 1 公尺時，垂直向上升高 0.2 公尺，

斜率=0.2

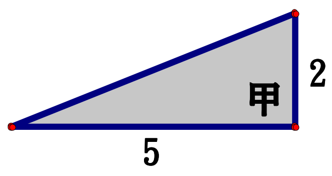
右圖水平向右前進 1 公尺時，垂直向上升高 0.5 公尺，

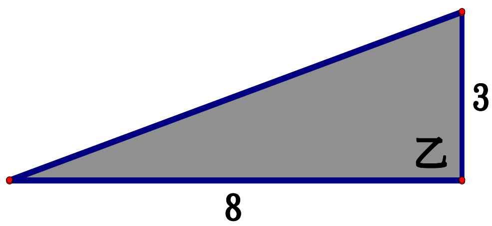
斜率=0.5

所以右圖的斜率 ＞ 左圖的斜率，表示右圖的山路較陡。

步驟 3：利用直角三角形斜邊的斜率規定，分別求出活動一中，

甲拼圖斜邊的斜率=_____，乙拼圖斜邊的斜率=______。

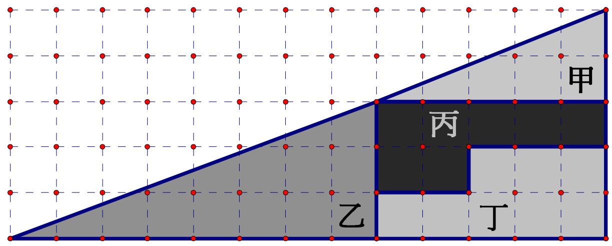


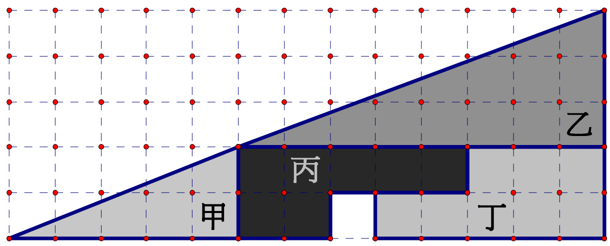


步驟 4： 甲拼圖和乙拼圖的斜邊，哪一個比較陡？ ______

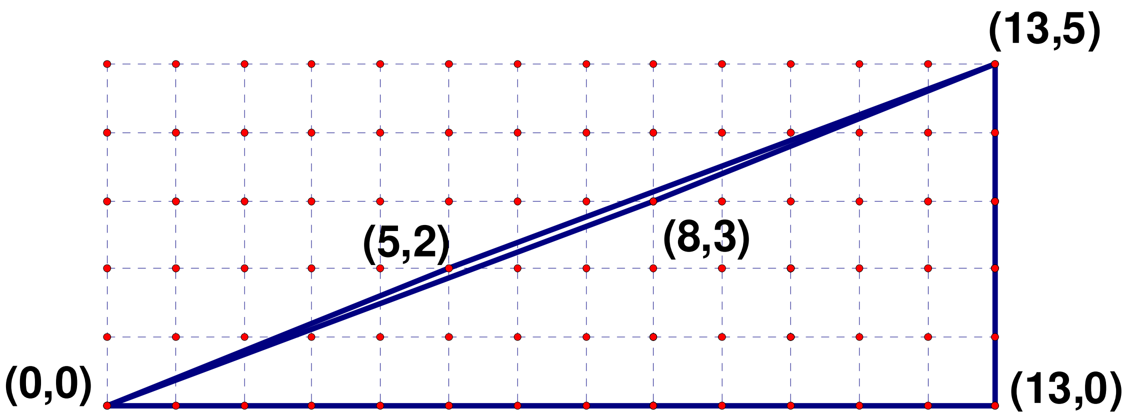
步驟 5： 四塊拼圖的完成圖斜邊真的是直線嗎？ ______

請說明理由：________________________________





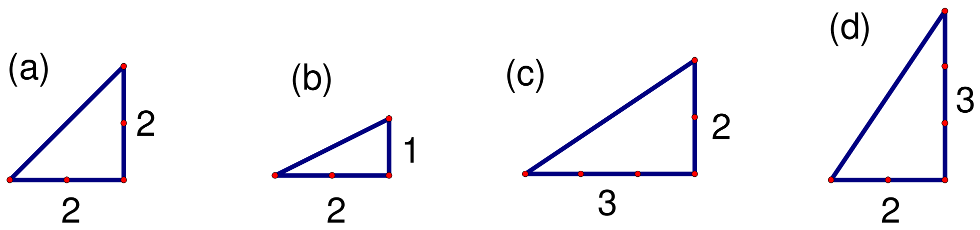
步驟 6： 兩位同學拼出的完成圖有何不同？為什麼面積差 1 平方單位？(提示：將兩位同學拼出的完成圖疊合在一起，且將一些重要的點標示如下，並算出每一個斜邊的斜率。你有甚麼發現？)



請說明理由：________________________________

隨堂練習 1：

(1) 下面四個直角三角形的斜邊，斜率分別是多少？



斜率=_____，斜率= _____， 斜率= _____ ，斜率= _____

(2) 比較四個斜率的大小： ____________________

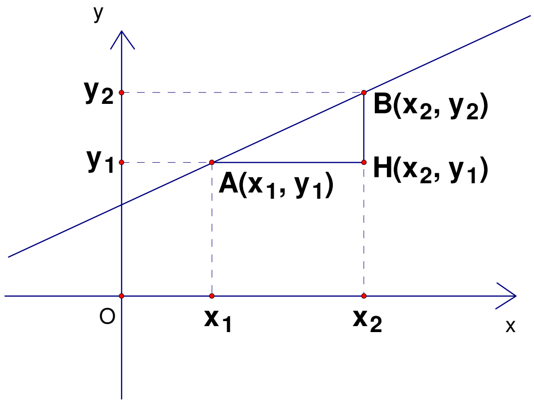
(3) 是否斜率越大的斜邊就越陡？ ______________

結論：

(一)為了描述山路陡峭的程度，觀察山路的側面所形成的直角三角形，規定直角三角形斜邊的斜率=$\dfrac{\text{鉛直向上的量}}{\text{水平向右的量}}$。

(二)斜率的數值代表斜邊的陡峭程度，斜率越大的斜邊越陡。

活動二：在坐標平面上，我們已經能畫出二元一次方程式的圖形，這些直線上的點在變動時，其鉛垂方向與水平方向變動的比值就叫作斜率。(鉛垂方向向上變動為正，向下變動為負；水平方向向右變動為正，向左變動為負。)



如上圖中，在直線上有兩點 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，

由 A 點變動到 B 點，水平方向的變動量是 $x_2 - x_1$，

鉛直方向的變動量是 $y_2 - y_1$。

所以 $\overline{AB}$ 的斜率 $= \dfrac{\text{鉛直變動的量}}{\text{水平變動的量}}$

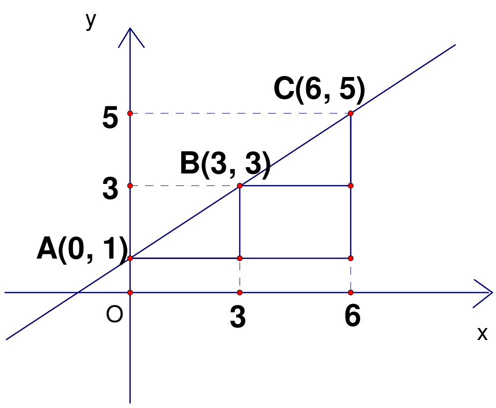
如果由 B 點變動到 A 點，水平方向的變動量是 $x_1 - x_2$，

鉛直方向的變動量是 $y_1 - y_2$。

所以 $\overline{AB}$ 的斜率 $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

步驟 7：下圖 A、B、C 為直線 $y = \dfrac{2}{3}x + 1$ 上的三個點，

已知 A(0, 1)、B(3, 3)、C(6, 5)。



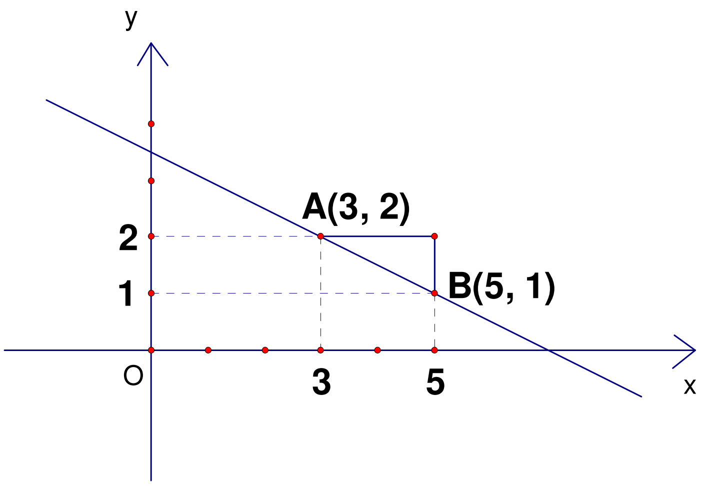
(1) 請算出 $\overline{AB}$ 的斜率= ________ ，$\overline{AC}$ 的斜率= ________

$\overline{BC}$ 的斜率= ________

(2) 觀察每一線段的斜率一樣嗎？ __________

(3) 斜率與直線方程式 $y=\frac{2}{3}x+1$ 有何關係？ __________

步驟 8： 已知直線上 A、B 兩點的坐標分別為 A(3, 2)、B(5, 1)：



(1) 觀察上圖由 A 點到 B 點，水平向右前進 2 單位，垂直向下 1 單位，所以 $\overline{AB}$ 的斜率= ________ 。

(2) 觀察上圖若由 B 點到 A 點，水平向左前進 2 單位，垂直向上 1 單位，所以 $\overline{AB}$ 的斜率= _______ 。

(3) 由 A 點到 B 點算出的斜率，和由 B 點到 A 點算出的斜率是否相同？ ________

(4) 直線 AB 的方程式為 ____________________。(化成 $y=ax+b$ 的形式。)

(5) 斜率與直線 AB 的方程式有何關係？ ________________

(6) 觀察斜率的正負與直線的方向有何關係？ ____________

結論：

(一) 坐標平面上觀察直線的傾斜程度，設 A(x_1, y_1)、B(x_2, y_2)，

由 A 點變動到 B 點和由 B 點變動到 A 點的斜率一樣，直線

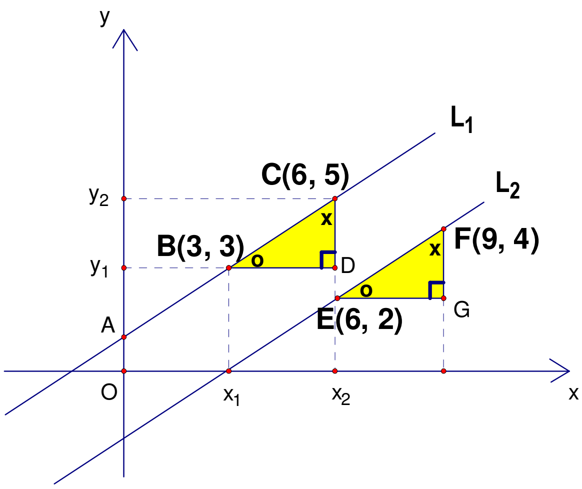
$$\text{AB 的斜率}=\frac{\text{鉛直變動的量}}{\text{水平變動的量}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

(二) 同一直線上，任意兩點所求得的斜率一樣。

(三) 直線方程式化成 $y=ax+b$ 的形式時，x 項的係數就是斜率。

(四) 直線為左下到右上方向時，斜率為正。直線為左上到右下方向時，斜率為負。

活動三：在坐標平面上有二條直線，直線 L_1：$4x-6y=-6$，直線 L_2：$2x-3y=6$。已知 B(3, 3)、C(6, 5) 為直線 L_1 上的二點；E(6, 2)、F(9, 4) 為直線 L_2 上的二點。



(1) 利用直線方程式的係數關係，判斷 L_1、L_2 是否平行？___

(2) 將直線 L_1、L_2 化成 $y=ax+b$ 的形式，則直線 L_1

為________________，直線 L_2 為________________。

兩直線化成 $y=ax+b$ 的形式時，x 項的係數是否相等？__

(3) 利用直線 L_1 上兩點求斜率時，B 點向右 3 單位，向上 2 單位到達 C 點，所以直線 L_1 的斜率= __________。

(4) 利用直線 L_2 上兩點求斜率時，E 點向右 3 單位，向上 2 單位到達 F 點，所以直線 L_2 的斜率= __________。

(5) 可以觀察兩直線互相平行時，兩直線斜率 m_1，m_2 有何關係？ ___________ 。

結論：兩直線互相平行時，兩直線斜率關係式為 $m_1=m_2$。

教學活動參考解答：

活動一：

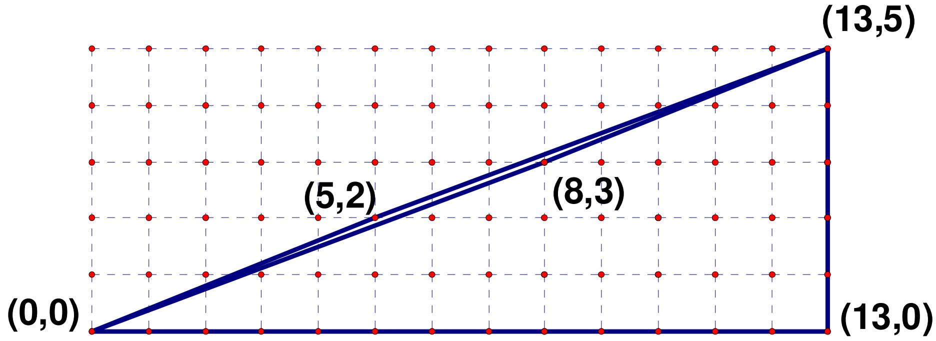
步驟 1：可以利用傾斜角度(斜面跟 x 軸正向的夾角)說明山路的陡峭程度。

步驟 3：甲=$\frac{2}{5}$，乙=$\frac{3}{8}$。

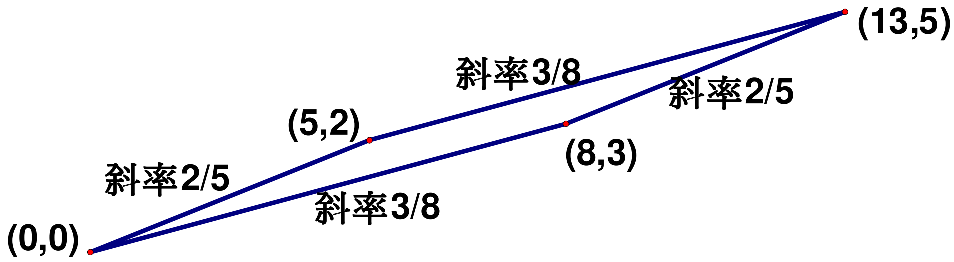
步驟 4：甲比乙陡。

步驟 5：完成圖斜邊不是直線，而是由兩段不同斜率的線段連接而成。

步驟 6：將兩個拼圖的完成圖疊在一起時，會發現直角三角形的斜邊不是完全重合，中間有一個小小的縫隙。



放大中間的縫隙可知為一平行四邊形，如下圖：



利用行列式形式的面積公式，計算中間縫隙的面積，恰好為 1 平方單位：

$$面積=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 8 & 13 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}|40+26-39-25|=1$$

隨堂練習 1：(1)斜率為 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$ (2) $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<1<\frac{3}{2}$ (3)是。

活動二：

步驟 7：(1)斜率為$\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}$ (2)斜率一樣 (3)直線方程式化成 $y=ax+$b 的形式時，x 項的係數就是斜率。

步驟 8：(1) 斜率為$-\frac{1}{2}$　(2) 斜率為$-\frac{1}{2}$　(3) 斜率相同。

(4) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$ (5)直線方程式化成 $y=ax+b$ 的形式時，x 項的係數就是斜率。(6)直線為左下到右上方向時，斜率為正。直線為右下到左上方向時，斜率為負。

活動三：

(1) 利用直線方程式的係數關係，因為$\frac{4}{2}=\frac{-6}{-3}\neq\frac{-6}{6}$，所以兩直線互相平行。 (2) $y=\frac{2}{3}x+1$ ，$y=\frac{2}{3}x-2$ ，是。

(3)斜率為$\frac{2}{3}$。　(4)斜率為$\frac{2}{3}$。　(5)斜率 $m_1=m_2$。

七、指定作業：

1.試求下列各組兩點數對所決定直線的斜率：

(1) (3, 4)、(5, 6)　　　(2) (0, 5)、(4, 9)

(3) (7, 10)、(9, 8)　　　(4) (－1, －3)、(0, 8)

2.以下六條直線 L_1：$2x+y=5$ ，L_2：$2x-y=5$ ，L_3：$x+2y=5$ ，L_4：$x-2y=5$ ，L_5： $y=2x+1$ ，L_6： $y=-2x+3$，先將方程式化成 $y=ax+b$ 的形式，並求出每一條直線的斜率，再判斷六條直線間何者有平行的關係？

直線方程式	化成 $y=ax+b$ 的形式	斜率
L_1：$2x+y=5$		
L_2：$2x-y=5$		
L_3：$x+2y=5$		
L_4：$x-2y=5$		
L_5：$y=2x+1$		
L_6：$y=-2x+3$		
互相平行的直線		

指定作業參考解答：

1. (1) 1　(2) 1　(3) -1　(4) 11

2.

直線方程式	化成 $y=ax+b$ 的形式	斜率
L_1：$2x+y=5$	$y=-2x+5$	-2
L_2：$2x-y=5$	$y=2x-5$	2
L_3：$x+2y=5$	$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$
L_4：$x-2y=5$	$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
L_5：$y=2x+1$	$y=2x+1$	2
L_6：$y=-2x+3$	$y=-2x+3$	-2
互相平行的直線	L_2 和 L_5 ， L_1 和 L_6	

八、教學活動注意事項：

1.教學活動時間建議如下，第一節課教學說明(含引起動機)：約 15 分，活動一：約 30 分鐘，第一節課教學說明(含引起動機)：約 5 分鐘，活動二：約 20 分鐘，活動三：約 20 分鐘。

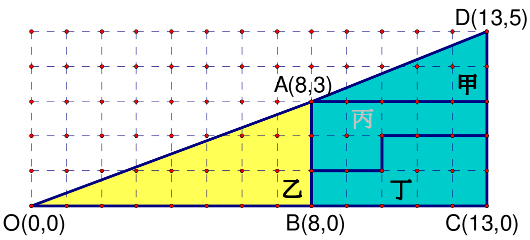
2.活動一開始引入斜率的概念，由於以爬山時直角斜面向上為例，所以斜率為正。主要強調斜率的分母是水平方向的變動，分子是鉛直方向的變動即可。

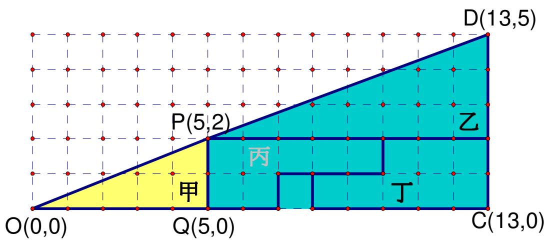
3.活動一試教時，學生對於如何描述山路陡峭程度，能夠聯想到傾斜角度(直線跟 x 軸正向的夾角)。教師不妨與學生討論並說明一些特殊角度與斜率的關係。

4.活動一的步驟 6，由於是開放性的討論題目，教師可以利用這個問題，教導學生數學研究中多方思考、多方印證的學習態度。試教時學生出現下列多種的解題方法。

學生的作法一：與教學活動參考解答一樣，直接計算兩完成圖疊合在一起時，中間縫隙所形成的平行四邊形面積是 1 平方單位。

學生的作法二：如下圖將圖形切割成三角形和梯形，計算兩個完成圖的面積差是 1 平方單位。

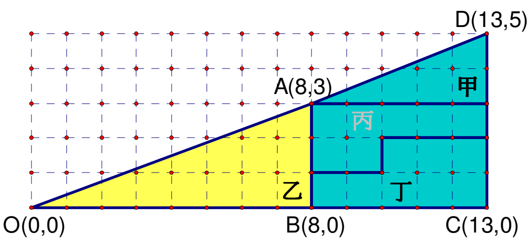


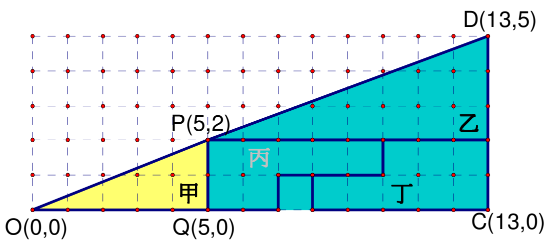


△OAB+梯形 ABCD 面積 　　　△OPQ+梯形 PQCD 面積

=12+20=32 　　　　　　　　=5+28=33

學生的作法三：利用行列式形式的面積公式，分別計算兩個完成圖的面積差是 1 平方單位。





左圖四邊形面積

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 13 & 13 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|65+39-40\right|=32$$

右圖四邊形面積

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 13 & 13 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|65+26-25\right|=33$$

5.第二節課由活動二開始，先介紹坐標平面上直線的斜率，需加入強調水平方向變動以向右為正，向左為負；鉛直方向變動以向上為正，向下為負。

6.活動二中，關於直線方程式化成 $y=ax+b$ 的形式時，x 項的係數就是斜率。教師也可以更詳盡說明 $y=\frac{2}{3}x+1$ 的斜率與平移

後 $y=\frac{2}{3}x$ 的斜率相同。

7.活動三中，關於兩直線平行時，斜率相等的結論，在國中七年級階段，只需由斜率定義直觀觀察得知，不需特別證明。

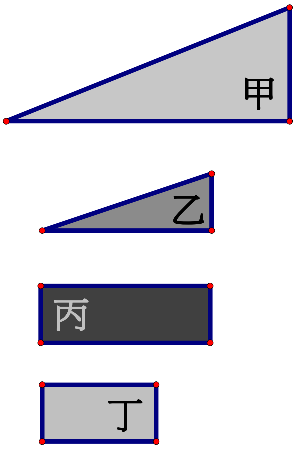
8.在各活動教學時，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

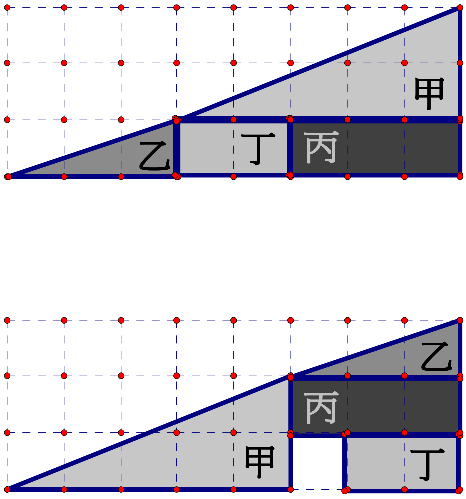
9.在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1.李政憲，陳昭地(2013)。直角坐標平面之教學篇(二)，陳昭地主編：國民中學數學教材原型 B 冊。新北市：國家教育研究院。

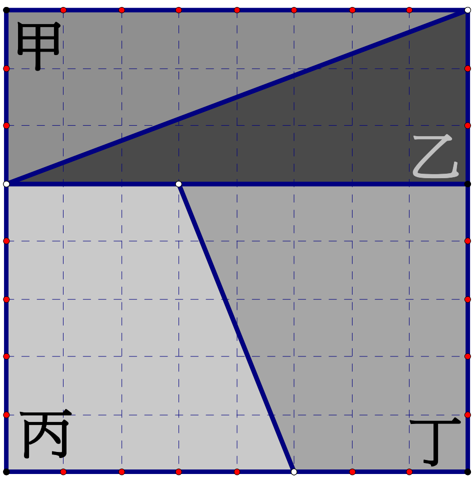
2.活動一拼圖中的長度與費波那契數列有密切的關係。費波那契數列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144…….。數列中的第三項起都等於前兩項之和，也就是 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$。活動一中，使用的直角三角形兩股長分別是 2、5 和 3、8，拼成的大直角三角形兩股長為 5、13，都是費波那契數。仿照上述模式，可以製作類似的拼圖謎題，使得兩種拼法相差 1 單位面積。例如下圖：直角三角形兩股長分別是 1、3 和 2、5，拼成的大直角三角形兩股長為 3、8。

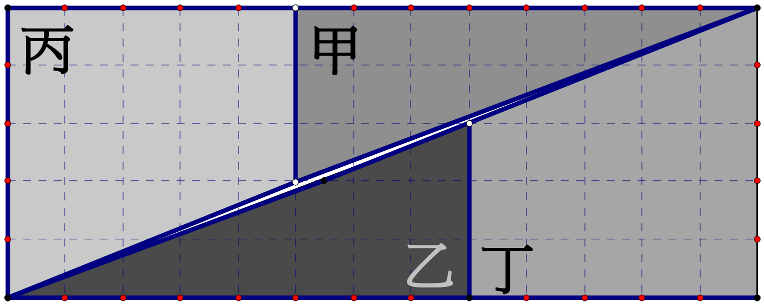




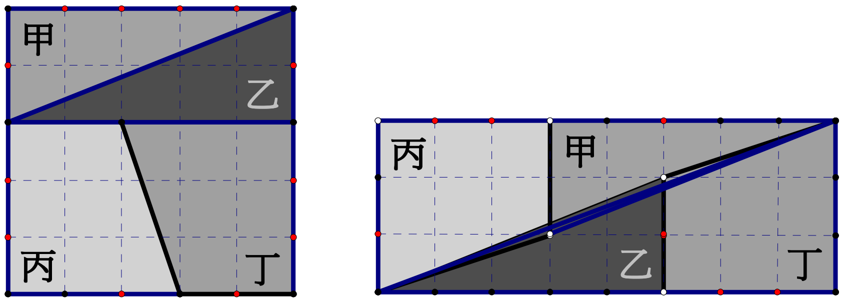
3.利用費波那契數製作成拼圖，產生相差 1 單位面積的謎題，

還有下列另一種模式：將 8×8 的正方形，如下切割成甲、乙、丙、丁四個拚圖，再將這四塊拼圖拼入 5×13 的長方形中，8×8=64，5×13=65，64≠65，相差 1 單位面積也是產生在長方形 5×13 中間會有一條平行四邊形的縫隙。





4.上題利用費波那契數 5、8、13 製作成拼圖，同樣模式適當的選取連續三個費波那契數，亦可製作成相差 1 單位面積的謎題。例如改用費波那契數 3、5、8，將 5x5 的正方形，如下切割成甲、乙、丙、丁四個拚圖，再將這四塊拼圖拼入 3x8 的長方形中，5x5=25，3x8=24，25≠24。



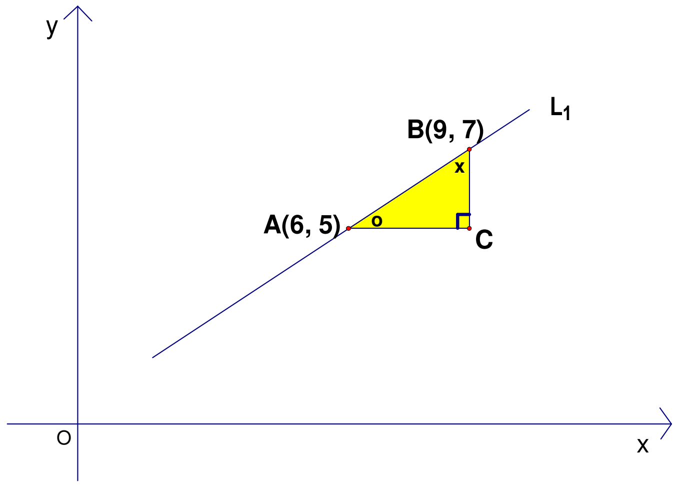
特別注意，此次將正方形拼成長方形時，面積反而多出 1 單位面積，也就是長方形中間會重疊出一塊平行四邊形區域。

觀察費波那契數列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,89,144……。

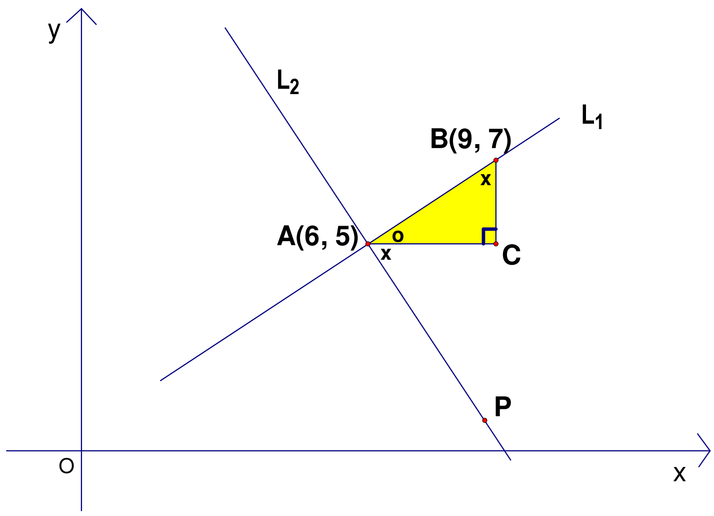
連續三個費波那契數，第一數與第三數的乘積剛好和中間數的平方相差 1，至於多 1 或少 1，則依序交替出現。這樣的現象在製作拼圖時，也交替出現多 1 單位面積或少 1 單位面積的情況，這正是數學的神秘與奇趣之處。

5.在坐標平面上若要探討垂直的二直線，斜率之間有何關係式？我們可以採取如下的步驟說明：

(1)設直線 L_1：$2x-3y=-3$，在直線 L_1 上取點 A(6, 5)、B(9, 7)。求直線 L_1 斜率時，A 點向右 3 單位，向上 2 單位到達 B 點，所以下圖中 $\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=2$，$\angle C=90^\circ$，直線 L_1 的斜率 $=\dfrac{2}{3}$。



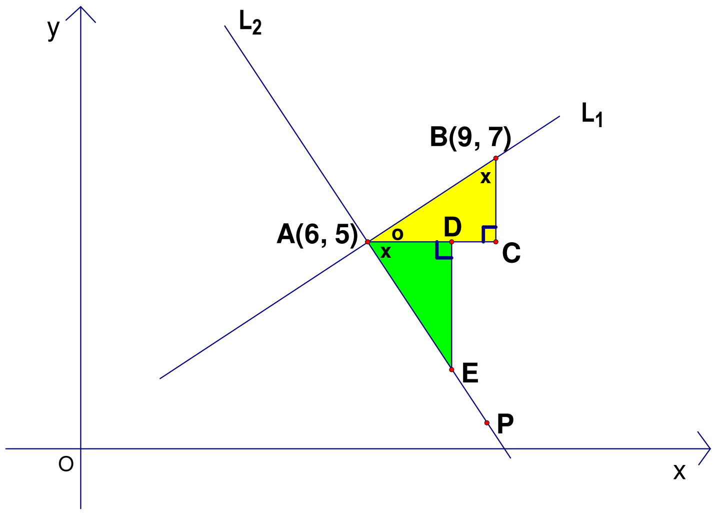
(2)下圖中過 A 點作 $\angle CAP=\angle ABC$，$\because \angle BAC+\angle ABC=90^\circ$，$\therefore \angle BAC+\angle CAP=90^\circ$。作出直線 L_1 的垂直線 L_2。



(3)下圖中在直線 AC 上取 $\overline{AD}=\overline{BC}$，過 D 點作 $\overline{AD}$ 的垂直線與直線 L_2 交於 E 點。則△ABC 和△EAD 中，

∵∠EAD=∠ABC，∠EDA=∠ACB=90° ，$\overline{AD}=\overline{BC}$

∴△ABC≅△EAD(ASA 全等) ∴$\overline{DE}=\overline{AC}$



所以求直線 L_2 斜率時，A 點向右 2 單位，向下 3 單位到達 E 點，直線 L_2 的斜率$=-\dfrac{3}{2}$。

由以上觀察得知兩直線互相垂直時，所形成的直角△ABC 和△EAD 全等，所以求兩直線斜率時，兩者斜率的值互為倒數且符號正負相異，推論出兩直線斜率的乘積等於－1。

結論：兩直線互相垂直時，兩直線的斜率關係式為 $m_1 \times m_2=-1$。

主題 3－2：比例生活篇（一）

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　**撰寫者：** 傅淑婷
陳昭地

二、先備知識：

(一) 能認識比與比值的意義。

(二) 能熟練比例式的基本運算。

三、教學目標：

(一) 能認識生活中一些比例的名詞意義。

(二) 能瞭解 a：b 與 c：d 的混合意義。

(即以實例瞭解混合後比例不一定等於(a+c)：(b+d)。)

(三) 能瞭解 a：b 與 c：d 的乘除意義。

(即以實例瞭解相乘後比例等於 $ac:bd$ ；相除後比例等於$\frac{a}{c}:\frac{b}{d}$。)

(四) 能思考一些比例的問題。

(五) 能解說一些比例的關係式。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

當學生學過比和比例式之後，利用一些生活上常見的實例，使學生更了解比例的意義。再進階一點，利用實例觀察兩種比例互相混合的結果，以及其他比例的證明與應用。

六、教學活動：

活動一： 同學喜歡打棒球或看棒球嗎？要如何計算打者的打擊率和投手的防禦率呢？先了解一下何謂打擊率和防禦率呢？打擊率是指打者全部打擊次數中，擊出安打的比例。

$$打擊率=\frac{擊出安打次數}{全部打擊次數}\times 100\%$$

防禦率是指投手平均每投九局球的自責失分。

防禦率的算法=自責分÷所投局數 × 9

步驟 1： 蘇大砲在本季球賽中，到目前為止總共出場打擊 22 次，擊出 5 次安打，計算本季目前的打擊率是多少？

步驟 2： 在 2010 年球賽中，郭泓志投了 60 局，自責失分 8 分，締造道奇 127 年以來最低防禦率記錄，算算看當年他的防禦率是多少呢？

活動二： 有甲、乙兩個袋子都裝有一些數量的紅球與白球，數一數兩個袋子中的紅、白球數量比例。

甲袋中的紅球：白球=7：4，乙袋中的紅球：白球=8：5。現在將兩個袋子的紅、白球混合一起，想想看混合後的紅球：白球的個數比？

步驟 3： 若甲袋中紅球 7 個，白球 4 個；

乙袋中紅球 8 個，白球 5 個。

混合後的紅球：白球的個數= ____：_____

是否等於(7+8)：(4+5)？ ____

步驟 4：若甲袋中紅球 14 個，白球 8 個；

乙袋中紅球 8 個，白球 5 個。

混合後的紅球：白球的個數= ____：_____

是否等於(7+8)：(4+5)？ ____

步驟 5：若甲袋中紅球 7 個，白球 4 個；

乙袋中紅球 16 個，白球 10 個。

混合後的紅球：白球的個數= ____：_____

是否等於(7+8)：(4+5)？ ____

步驟 6：觀察步驟 1～3，三種狀況的球數比都是甲袋中的

紅球：白球=7：4，乙袋中的紅球：白球=8：5。

為什麼混合後的紅球：白球的個數比都不一樣？

因此若要假設甲、乙袋中的紅球、白球個數，

可以設甲袋中紅球_____個，白球_____個。

可以設乙袋中紅球_____個，白球_____個。

步驟 7：已知甲袋中的紅球：白球=7：4，乙袋中的紅球：白球=8：5。

若混合後紅球：白球的個數比= 17： 10，

且混合後袋中共有 162 個球。

則原來甲、乙袋中各有多少個紅、白球？

甲袋中有紅球 ____個，白球 ____個；

乙袋中有紅球 ____個，白球_____個。

步驟 8： 已知甲袋中的紅球：白球=7：4，乙袋中的紅球：白球=8：5。

若混合後紅球：白球的個數比= 17：10，

則原來甲、乙袋中各有多少個紅、白球？

最小可能的解是甲袋中有紅球 ____個，白球 ____個；

乙袋中有紅球 ____個，白球_____個。

活動三： 台灣的珍珠奶茶是國際知名的飲料，有很多國家都有珍珠奶茶的專賣店，但是是否世界各地都可以喝到一樣好喝的珍珠奶茶呢？據說非常困難，因為食材的品質無法控制，調配的比例與製作的流程也很難有統一的標準。我們先來研究糖的濃度，通常指的是重量百分濃度，精確的計算就是糖的重量在全部溶液重量中所佔的比例。例如：3 公克的糖加入 97 公克的水形成 100 公克重的糖水溶液，糖佔全部溶液的比例就是 3％，也就是糖的濃度為 3％。

步驟 9： 如何調配出濃度為 6 ％的糖水溶液 100 公克？

步驟 10： 如果需要濃度為 6 ％的糖水 500 公克，如何調配？

步驟 11： 濃度 3 ％的糖水 100 公克和 6 ％的糖水 100 公克二種糖水混合，糖的濃度變成多少？

步驟 12： 濃度 3 ％的糖水 200 公克和 6 ％的糖水 100 公克二種糖水混合，糖的濃度變成多少？

步驟 13： 濃度 3 ％的糖水 100 公克和 6 ％的糖水 200 公克二種糖水混合，糖的濃度變成多少？

活動四： 小珍投資 100 萬元開設泡沫紅茶店，6 個月後邀請朋友小珠增資 50 萬元，增加設備座椅等擴大營業，一年後結算紅利，以下有三種方案分配紅利，請你想一想怎樣的比例分配比較合理？

甲方案：以小珍和小珠投資的錢數比= 100 萬元：50 萬元=2：1

乙方案：以小珍和小珠投資的月數比= 12 月：6 月=2：1

丙方案：以小珍和小珠投資的錢數×月數= 4：1

活動五： 美美蛋糕店發現今年的麵粉、奶油、糖的進價成本都增加了，所以打算調整蛋糕的售價。原方案是要漲價 40％才能反映成本，但是又怕一次調漲太多，影響消費者的購買意願。所以新方案是希望以漸進式的方案調整，第一次調漲 20％，三個月後再調漲 20％。但是精打細算的媽媽發現這樣調漲的幅度不一樣，你知道差多少嗎？

步驟 14：美美蛋糕店最暢銷的提拉米蘇蛋糕原先定價是 800 元。

計算原方案一次調漲 40%，定價變成 _______元。

若按照新方案先調漲 20%，三個月後再調漲 20%，

二次調漲之後，定價變成 _______元。

你是聰明的消費者，知道二種方案差 _______元。

調漲的幅度差 _______%。

活動六：美美蛋糕店有二筆投資，結束營業後都拿回 12 萬元。但是仔細計算其中一筆投資賠 20%，另一筆投資賺 20%，試問這二筆投資總結是賺還是賠呢？

步驟 15：一筆投資拿回 12 萬元卻賠 20%，

可以算出成本 __________ 元。

另一筆投資拿回 12 萬元但是賺 20%，

可以算出成本 __________ 元。

總成本 __________ 元，總收入 ___________ 元。

所以二筆投資總結是賺或賠 ___________ 元。

活動七：已知比例式 $a：b = c：d$ 成立，則下列比例式何者成立？請說明理由。

(1)$(a+b)：b = (c+d)：d$

$(2)(a-b):b=(c-d):d$

$(3)(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$　　(假設 $a\neq b$)

$(4)(2a+3b):(a-4b)=(2c+3d):(c-4d)$　(假設 $a\neq 4b$)

教學活動參考解答：

活動一：打擊率≒ 22.7%，防禦率=1.2。

步驟 1：打擊率$=\dfrac{\text{擊出安打次數}}{\text{全部打擊次數}}\times 100\%=\dfrac{5}{22}\times 100\%\fallingdotseq 0.22727\times 100\%=22.7\%$

步驟 2：防禦率的算法=自責分÷所投局數 × 9=8÷60×9=1.2

郭泓志曾經於西元 2010 年季賽結束，創下防禦率 1.2 的紀錄，也就是說平均 9 局只會掉 1.2 分，這當然是值得喝采的佳績。防禦率的高低較能明確地反映了一個投手的表現，相較於勝投數常受隊友打擊和防守表現的影響，防禦率主要計算投手的自責失分，也就是如果隊友守備失誤引起的失分不算是投手的自責失分。一般而言在長期的職棒球季中，防禦率在 3 至 4 的投手算是稱職的投手，2 至 3 算是很優秀的投手，2 以下則是頂尖的投手。

活動二：

步驟 3：紅球：白球的個數 ＝5：3，等於(7+8)：(4+5)

步驟 4：紅球：白球的個數 ＝22：13，不等於(7+8)：(4+5)

步驟 5：紅球：白球的個數 ＝23：14，不等於(7+8)：(4+5)

步驟 6：因為已知甲袋中的紅球：白球=7：4，

乙袋中的紅球：白球=8：5。

真正的個數可以是這個比例的任意正整數倍，

所以混合後的紅、白球比例也會跟著改變。

可以設甲袋中紅球 $7x$ 個，白球 $4x$ 個。

可以設乙袋中紅球 $8y$ 個，白球 $5y$ 個。

步驟 7：甲袋中有紅球 70 個，白球 40 個。

乙袋中有紅球 32 個，白球 20 個。

說明：甲、乙袋混合後袋中共有 162 個球。

若混合後紅球：白球的個數比= 17：10，

則可算出混合後紅球 102 個，白球 60 個。

因為設原來甲袋中紅球 $7x$ 個，白球 $4x$ 個。

乙袋中紅球 $8y$ 個，白球 $5y$ 個。

列式 $\begin{cases} 7x+8y=102 \\ 4x+5y=60 \end{cases}$，解出 $x=10$，$y=4$

可以算出原來甲袋中紅球 70 個，白球 40 個。

乙袋中紅球 32 個，白球 20 個。

步驟 8：最小可能的解是甲袋中有紅球 35 個，白球 20 個。

乙袋中有紅球 16 個，白球 10 個。

說明：設甲袋中紅球 $7x$ 個，白球 $4x$ 個。

乙袋中紅球 $8y$ 個，白球 $5y$ 個。

若$(7x+8y)$：$(4x+5y)=17$：10

則 $70x+80y=68x+85y$，整理得知 $2x=5y$

也就是當 x：$y=5$：2 時，

混合後的紅球：白球 $=17$：10。

最小可能的解是當 $x=5$，$y=2$ 時。

即甲袋紅球 35 個，白球 20 個。

乙袋紅球 16 個，白球 10 個。

活動三：

步驟 9：6 公克的糖 ＋94 公克的水。

步驟 10：30 公克的糖 ＋470 公克的水。

步驟 11：混合後糖的濃度 4.5 ％

步驟 12：混合後糖的濃度 4 ％

步驟 13：混合後糖的濃度 5 ％

說明：以步驟 12 為例：

$$\text{混合後糖的濃度}=\frac{\text{糖的重量}}{\text{全部溶液的重量}}=\frac{3\%\times 200+6\%\times 100}{200+100}$$

歸納結果：

濃度 3 ％的糖水和 6 ％的糖水各倒 m：n 比例時，

$$\text{混合後糖的濃度}=\frac{3\%\times m+6\%\times n}{m+n}$$

也可以改寫混合後糖的濃度=$3\%\times\frac{m}{m+n}+6\%\times\frac{n}{m+n}$。

活動四：

丙方案比較合理。

說明：小珍投資 100 萬元，總共投資時間 12 月

小珠投資 50 萬元，總共投資時間 6 月

考慮投入金錢與時間=100 萬×12 月：50 萬×6 月＝4：1

活動五：

步驟 14：1120 元，1152 元，32 元，4%。

說明：(1)原方案：800×(1+40%)=1120

新方案：第一次 800×(1+20%)=960

第二次 960×(1+20%)=1152

新方案比原方案多漲了 32 元。

(2)原方案是原價的(1+40%)=1.4 倍

新方案是原價的(1+20%)×(1+20%)=1.44 倍

新方案比原方案多漲了 0.04 倍，即 4%。

活動六：

步驟 15：15 萬元，10 萬元，25 萬元，24 萬元，賠 1 萬元。

說明：一筆投資拿回 12 萬元卻賠 20%，可以算出成本：

120000÷(1－20%)＝150000

另一筆投資拿回 12 萬元但是賺 20%，可以算出成本：

120000÷(1+20%)＝100000

總成本 15 萬元+10 萬元=25 萬元

總收入 12 萬元× 2=24 萬元

所以二筆投資總結是賠 1 萬元。

活動七：四個比例式都成立。可以證明如下：

(1)已知比例式 $a：b = c：d$ 成立，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

所以 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ 成立 ⇨ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

⇨ 即 $(a+b)：b = (c+d)：d$ 成立

(2)已知比例式 $a：b = c：d$ 成立，即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

所以 $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ 成立 ⇨ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

⇨ 即 $(a-b)：b = (c-d)：d$ 成立

(3)上面兩式成立，即 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ……(1)且

$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ ……(2)

⇨（1）÷（2)可得 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

即 $(a+b)：(a-b) = (c+d)：(c-d)$ 成立

(3)已知比例式 $a:b=c:d$ 成立，可設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$

則 $a=bk$，$c=dk$ 代入(4)比例式

左$=(2a+3b):(a-4b)=(2bk+3b):(bk-4b)=(2k+3):(k-4)$

右$=(2c+3d):(c-4d)=(2dk+3d):(dk-4d)=(2k+3):(k-4)$

左=右 $\Longrightarrow$ 所以$(2a+3b):(a-4b)=(2c+3d):(c-4d)$ 成立

七、指定作業：

1. 蘇大砲到目前為止總共出場打擊 22 次，擊出 5 次安打，如果蘇大砲在接下來的連續二次打擊中都擊出安打，則他的打擊率可以進步變成多少呢？

2. 已知郭泓志某一場比賽，自責 2 分，投球 7 局又一人($7\frac{1}{3}$局)，則單看這場比賽防禦率為多少？

3. 濃度 10 ％的糖水和 20 ％的糖水的二種糖水，要各倒多少比例，可以混合出濃度 17 ％的糖？

4. 資訊月展覽時，小明想要購買的筆電，相同的產品，相同的定價。甲公司先給 20 ％的折扣，經討價還價後，按降價後的價格再降 10 ％。乙公司一口氣就降 30 ％，試問小明應如何選擇比較划算？

5. 中東情勢緊張，中油的浮動油價上週調漲 10%，後因美國介

入調停，情勢趨緩，本週回跌 10%。試問經過這兩週的油價波動，油價是否和兩週前未調整時相同？

指定作業參考解答：

1. 打擊率=$\frac{7}{24}$=0.291666……≒ 29.17%
2. 防禦率的算法=$2\div7\frac{1}{3}\times 9=\frac{54}{22}$≒2.45
3. 濃度 10 %的糖水：濃度 20 %的糖水= 3：7
4. 乙公司降 30 %划算。

   甲公司給 20 %折扣，降價後的價格再降 10 %，

   售價是定價的(1－20%)×(1－10%)=0.72

   乙公司一口氣就降 30 %，售價是定價的(1－30%)=0.7
5. 不會相同，原價的(1+10%)×(1－10%)=0.99

   變成原價的 99%。

八、教學活動注意事項：

1. 教學活動時間建議如下，第一節說明活動一(含引起動機)：約 10 分，活動二：約 20 分鐘，活動三：約 15 分鐘，第二節教學說明(含引起動機)：約 5 分，活動四：約 5 分鐘，活動五：約 10 分鐘，活動六：約 10 分鐘，活動七：約 15 分鐘。

2. 活動二中，甲袋中的紅球：白球=a：b，可設為 ak 個、bk 個，乙袋中的紅球：白球= c：d，可設為 ct 個、dt 個。($kt\neq 0$)
現在將兩個袋子的紅、白球加在一起時，兩個比例相加時，因為 k、t 值的不同而有不同可能。當 $k\neq t$ 時，
紅球：白球=$(ak+ct)$：$(bk+dt)$ $\neq(a+c)$：$(b+d)$。
教師也可以深入與學生討論當 $k = t$ 時，上述不等式反而會變成等式成立。
3. 活動三中，教學目標先認識濃度的意義，再由步驟 3～步驟 5 了解不同濃度的糖水混合時，混合後的濃度與加入兩種糖水的比例有密切的關係。
4. 活動四中，若投資金額比為 a：b，可設金額為 ak 元、bk 元投資時間比為 c：d，可設時間為 ct 月、dt 月。($kt\neq 0$)
總投資效益須考慮投入的金額與時間的乘積，
總投資效益= $ak\times ct$：$bk\times dt = ac$：bd
兩個比例乘積時等於 ac：bd，不受 k、t 值的影響。
5. 活動五中，主要是日常生活中一些比例概念的澄清。折扣或漲價都是以當時的價錢為標準量，每折扣或漲價一次標準量也跟著改變。
6. 活動六中，比例式的證明可以視學生的學習狀況刪減。
7. 在各活動教學時，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

8. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

張奠宙、戴再平(主編)(1998)。用國中數學解日常生活中的問題(pp. 8-13)。臺北市：九章出版社。

主題 3－3：比例生活篇（二）

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　**撰寫者：**傅淑婷

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　　李政豐

(一) 能認識比與比值的意義。

(二) 能理解比、比例式、正比和反比的意義。

(三) 能理解連比、連比例式的意義。

三、教學目標：

(一) 能瞭解影印機放大倍率與比例尺的意義。

(二) 能瞭解等比例模型中，表面積比是邊長的平方比；體積比是邊長的立方比。

(三) 能瞭解生活中一些反比例的實例，並求出連比的反比。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

當學生學過正比、反比、連比例之後，再利用一些生活上常見的實例，使學生了解邊長比、面積比和體積比的關係。還有生物學上運用到比例來估算，以及物理學上很多變數間有反比關係，希望藉由這些實例，使學生能了解數學與生活以及其他學科間的密切關係。

六、教學活動

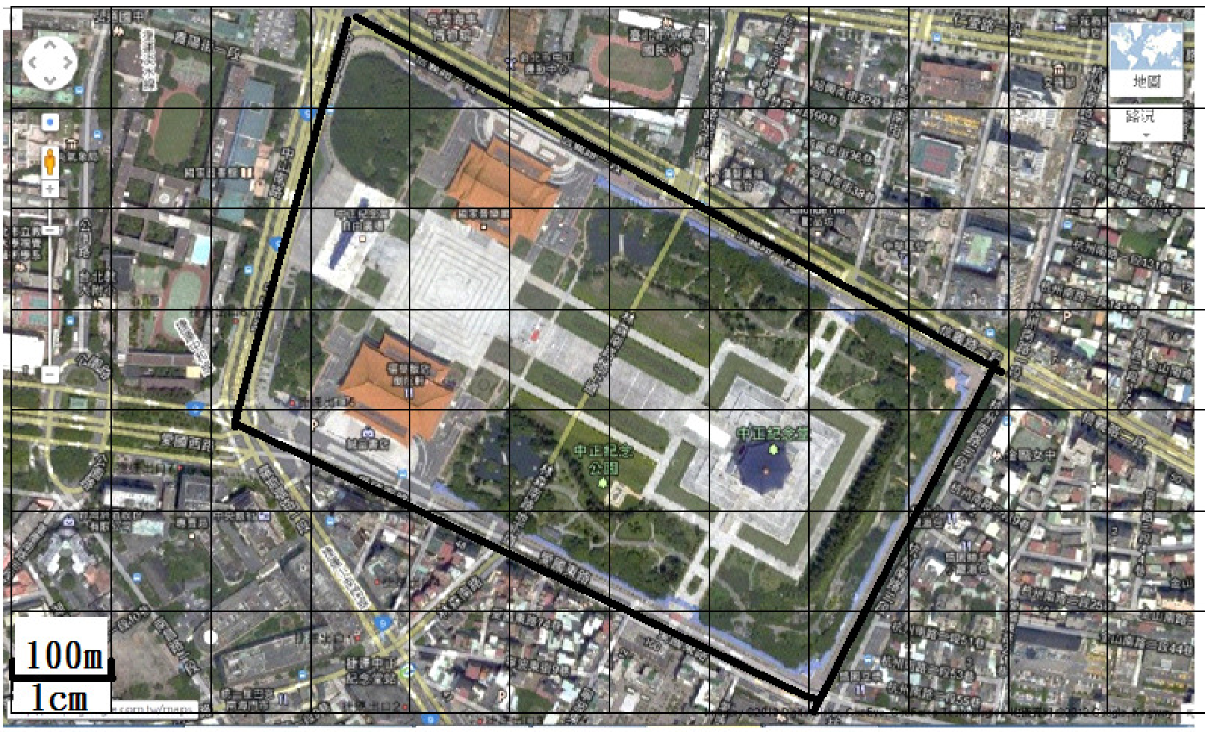
活動一：美美畫了一隻小玉兔圖，想要放大作為中秋節海報插圖。她到便利商店的影印機將圖形影印放大，首先在影印機上選擇放大的倍率 150%。(下圖為影印機圖示)

得到如下的放大結果：

步驟 1：影印機上的放大倍率 150%倍，指的是邊長放大為原來的 1.5 倍。所以原圖中的長放大為原來的 1.5 倍，寬也放大為原來的 1.5 倍，整個圖形面積變成為原來的 ________ 倍。

步驟 2：美美想要帶外國朋友去參觀中正紀念堂，她先上網搜尋中正紀念堂的展場與交通資訊。並且觀察中正紀念堂的google 衛星地圖，中間框起來的區域為中正紀念堂基地，左下角是比例尺的圖示，顯示地圖中正方形方格邊長1 公分實際等於 100 公尺。

(已知 1 公頃=100 公畝，1 公畝=100 平方公尺)



請回答下列問題：

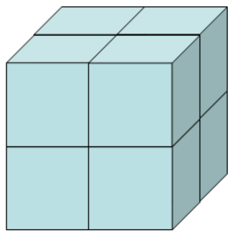
1. 縮圖上長度與實際上長度的比或比值叫做比例尺，所以這個地圖的比例尺為 ___________ 或 ____________ 。

2. 中正紀念堂整個基地的實際面積是縮圖上面積的________倍。

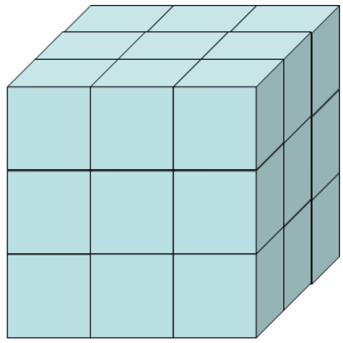
3. 試著預估中正紀念堂基地總面積，下列選項哪些正確？_______

   (1)2500 平方公尺 (2) 25 公畝 (3)250000 平方公尺 (4) 25 公頃

活動二：日常生活中，除了平面上等比例放大、縮小圖形外，也常見很多等比例放大、縮小的立體模型。下圖就是邊長2公分和邊長3公分的正立方體積木，美美有很多1平方公分的正方形顏色貼紙，她想要將積木的表面貼上貼紙，則兩個立體模型所需要的貼紙數和邊長有何關係？



$2\times2\times2$



$3\times3\times3$

步驟 3：計算 $2\times2\times2$ 積木表面積為 __________平方公分

$3\times3\times3$ 積木表面積為 __________平方公分

兩個立體模型所需要的貼紙數比= ___________ 。

步驟 4：泰國首都曼谷的臥佛寺以供奉巨大金佛著稱，平日香火鼎盛是遊客必到之景點。巨大的臥佛前還有一座比例縮小的臥佛，依照泰國習俗民眾參拜結束，會將金箔貼在縮小的臥佛上作為祈福的意義。假設兩座臥佛是等比例的模型，且兩者的高度比為10：1，若想在兩座臥佛的表面用金箔貼滿，需要使用金箔的面積比為_______。

活動三：準備一袋的綠豆和一些紅豆，我們可以先數好一些小數量的紅豆，混入較大數量的綠豆中，利用比例估算綠豆的數量有多少。

步驟 5：數好 400 顆紅豆，倒入較大數量的綠豆中均勻混合，請幾位學生依次取一些豆子，數一數取得的豆子中，紀錄紅豆與綠豆各有多少個？假設結果如下：用比例估算綠豆的數量有多少？討論這種估算方式有甚麼優、缺點，需要注意哪些狀況以提高準確度？

	甲學生	乙學生	丙學生
數一數取得的豆子	紅豆 12，綠豆 75	紅豆 14，綠豆 88	紅豆 5，綠豆 32
計算出綠豆的總數			

活動四：我們日常常用的 A4 影印紙，通常是 500 張包裝成一包，量一量一包 A4 影印紙的厚度大約是 6 公分，我們可以據此估算出一張紙的厚度大約= ________ 公分 。

想想看是不是比直接量一張紙準確？ ______

如果有一疊紙的厚度是 15.6 公分，也可以依照比例算出大約有 __________ 張。

活動五：我們已經學過當兩變數 x 和 y 成反比時，會有關係式

$xy=k$，也就是 $x=\dfrac{k}{y}$ (k 為定數，$k\neq 0$)。

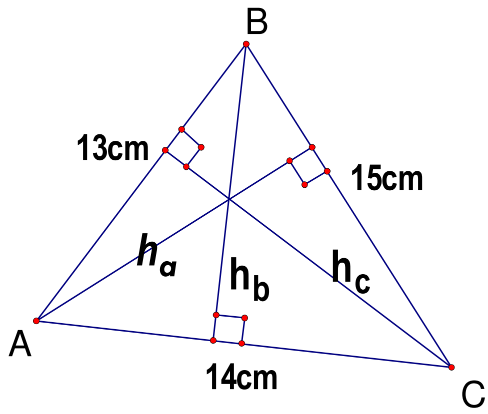
所以可以定義 $a:b$ 的反比是 $\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}=b:a$ 。

連比例 $a:b:c$ 的反比是 $\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}:\dfrac{1}{c}=bc:ac:ab$ 。

觀察以下的例子：

△ABC 中，三邊長 $\overline{AB}$=13cm、$\overline{AC}$=14cm、$\overline{BC}$=15cm，

已知△ABC 的面積為 84cm^2。



設 $\overline{AB}$ 上的高為 h_c，

設 $\overline{AC}$ 上的高為 h_b，

設 $\overline{BC}$ 上的高為 h_a，

回答下列問題：

(1) 求三邊長的比 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=$ ____________。

(2) 求三對應高的比 $h_c:h_b:h_a=$ ____________。

(3) 比較上列兩個連比有何關係？ ____________。

活動六：三個齒輪 A、B、C 銜接著，齒數分別是 A=60、B=45、

C=30。試問 A 齒輪旋轉 9 圈時，

(1) B 齒輪旋轉 _______圈。

(2) 此時 C 齒輪旋轉 ________圈。

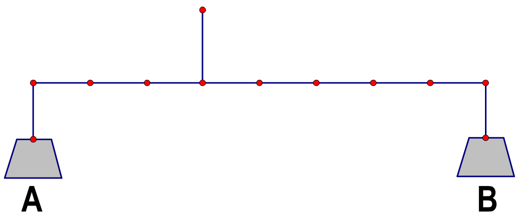
(3) 三個齒輪的齒數比 A：B：C= ______________。

(4) 三個齒輪所旋轉的圈數 A：B：C= ______________。

(5) 比較上列兩個連比有何關係？ ______________。

活動七：小時候玩過蹺蹺板的同學都知道，體重重的人要坐靠近中間支點，體重輕的人則要遠離一點才會平衡。我們在物理學上很早就發現，力矩=力×力臂，支點兩側的順時針力矩等於逆時針力矩時，蹺蹺板就會形成平衡。

例如圖中：



A 秤盤距離支點 3 單位，A 秤盤上放 10 克的砝碼，

則支點左側的逆時針力矩=10×3=30

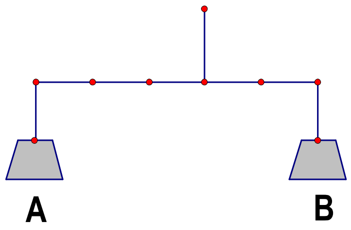
若蹺蹺板形成平衡，則支點兩側力矩相等，

因為 B 秤盤距離支點 5 單位，

所以 B 秤盤上放 6 克的砝碼，5×6=30，蹺蹺板形成平衡。

步驟 6：下圖是一個形成平衡的天秤，A 秤盤距離支點 3 單位，B 秤盤距離支點 2 單位。

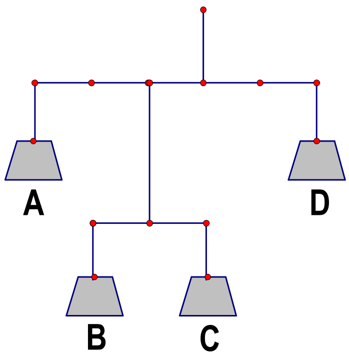
則 A、B 兩秤盤上的重量比為 ____________。



步驟 7：下圖是一個形成平衡的天秤，A 秤盤放 4 克的砝碼，

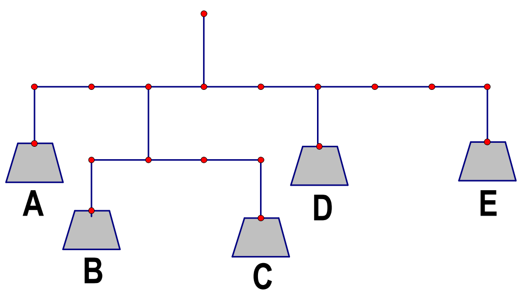
B、C 秤盤各放 1 克的砝碼。

則 D 秤盤上的砝碼重量為 ________ 克。



步驟 8：將重量為 1、2、3、4、5 克的砝碼，放入下圖 5 個秤盤　中，

每個秤盤恰好放置一個砝碼，使得所有的天秤平衡。



填入1~5克的砝碼

A=___克，B=____克，C=____克，D=____克，E=____克。

教學活動參考解答：

活動一：

步驟 1：2.25 倍。

步驟 2：$\dfrac{1}{10000}$ 或 1：10000，10^8 倍，(3)(4)。

說明：依比例尺的定義，這個地圖的比例尺為 1：10000 或 $\dfrac{1}{10000}$

也就是實際長度是縮圖上長度的 10000 倍。

因為縮圖上邊長 1 公分實際等於 100 公尺，

所以縮圖上面積 1 平方公分實際等於 100 公尺×100 公尺，

中正紀念堂的實際面積是縮圖上面積的 $10000^2 = 10^8$ 倍。

預估中正紀念堂基地總面積時，先數一數縮圖上基地大約

是 25 個正方形方格，1 方格實際等於 10000 平方公尺，

因此中正紀念堂總面積大約是 250000 平方公尺，

換算單位大約為 25 公頃。

活動二：

步驟 3：24 平方公分，54 平方公分，4：9。

說明：2×2×2 積木表面積 24 平方公分，需要 24 個正方形貼紙，

3×3×3 積木表面積 54 平方公分，需要 54 個正方形貼紙。

兩個立體模型所需要的貼紙數比=24：54 = 4：9

貼紙數的比=立體模型的表面積比=邊長的平方比。

步驟 4： 100：1。

說明：因為大小兩座臥佛的高度比為 10：1，

則兩座臥佛的表面積比為 10^2：1^2= 100：1

所以金箔的面積比= 100：1。

活動三：

	甲學生	乙學生	丙學生
數一數取得的豆子	紅豆 12，綠豆 75	紅豆 14，綠豆 88	紅豆 5，綠豆 32
計算出綠豆的總數	2500	2514	2560

說明：設原來的綠豆總數是 x，倒入的紅豆總數是 400，其比例與取出的紅豆、綠豆比例一樣。

所以甲學生列式得 x：400 = 75：12

算出綠豆總數是 x=2500

同理，乙學生算出綠豆總數大約是 2514

同理，丙學生算出綠豆總數是 2560

這種估算方式只能算出大約的綠豆總數，比不上一粒一粒數的準確，但是卻有省時省力的優點。只需注意混入的紅豆數太少，或是取出計數的豆子太少，都會使誤差變大。

活動四：0.012 公分，是， 1300 張。

說明：500 張的厚度是 6 公分，

可見 1 張紙的厚度是 6÷500 ≒0.012 (公分)，

一疊紙的厚度是 15.6 公分，

算出大約有 15.6÷0.012 ≒1300 (張)。

活動五：(1) $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}$=13：14：15

(2) h_c：h_b：h_a = 210：195：182

(3) $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}$和 h_c：h_b：h_a兩個連比是反比關係。

說明：ΔABC**的面積** $= \dfrac{\overline{AB}\times h_c}{2} = \dfrac{\overline{AC}\times h_b}{2} = \dfrac{\overline{BC}\times h_a}{2} = 84$

已知三邊長$\overline{AB}$=13cm、$\overline{AC}$=14cm、$\overline{BC}$=15cm，

依序求出三高 $h_c = \dfrac{84\times 2}{13} = \dfrac{168}{13}$ ，

$h_b = \dfrac{84\times 2}{14} = \dfrac{168}{14}$ ，

$h_a = \dfrac{84\times 2}{15} = \dfrac{168}{15}$ 。

h_c：h_b：h_a $= \dfrac{168}{13}:\dfrac{168}{14}:\dfrac{168}{15} = \dfrac{1}{13}:\dfrac{1}{14}:\dfrac{1}{15} = 210:195:182$

因為$\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}$=13：14：15，而 h_c：h_b：h_a $= \dfrac{1}{13}:\dfrac{1}{14}:\dfrac{1}{15}$

所以$\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}$和 h_c：h_b：h_a兩個連比是反比關係。

活動六：(1) 12 圈 (2) 18 圈 (3) 60:45:30 (4) 3:4:6 (5)反比關係。

說明：A 齒輪旋轉 9 圈時，總共經過 60×9=540(齒)

(1) B 齒輪旋轉 540÷45=12(圈)

(2) C 齒輪旋轉 540÷30=18(圈)

(3) 三個齒輪的齒數比 A：B：C=60:45:30

(4) 三個齒輪所旋轉的圈數 A：B：C= 9:12:18= 3:4:6

(5) 上列兩個連比是反比關係。因為 $\frac{1}{60}:\frac{1}{45}:\frac{1}{30}$=3:4:6

活動七：

步驟 6：重量比為 2：3。

說明：力與力臂成反比，A：B 的力臂比=3：2

則 A、B 秤盤上的重量比 A：B=2：3

步驟 7：D=7 克。

說明：支點左側逆時針力矩=4×3+2×1=14=右側順時針力矩

所以 D 秤盤上的砝碼重量為 7 克，才會平衡。

步驟 8：A=3 克，B=4 克，C=2 克，D=5 克，E=1 克。

說明：因為 B：C 的力臂比=1：2

則 B、C 秤盤上的重量比 B：C=2：1

(1) 若 B=2 克，C=1 克：

①當 A=3 克，則支點左側的力矩=3×3+3×1=12

若 D=4 克，E=5 克，支點右側的力矩=4×2+5×5=33

若 D=5 克，E=4 克，支點右側的力矩=5×2+4×5=30

兩種形況，左側的力矩≠右側的力矩，都不合。

②當 A=4 克，則支點左側的力矩=4×3+3×1=15

若 D=3 克，E=5 克，支點右側的力矩=3×2+5×5=31

若 D=5 克，E=3 克，支點右側的力矩=5×2+3×5=25

兩種形況，左側的力矩≠右側的力矩，都不合。

③當 A=5 克，則支點左側的力矩=5×3+3×1=18

若 D=3 克，E=4 克，支點右側的力矩=3×2+4×5=26

若 D=4 克，E=3 克，支點右側的力矩=4×2+3×5=23

兩種形況，左側的力矩≠右側的力矩，都不合。

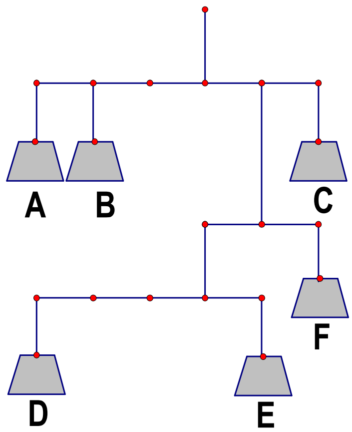
(2) 若 B=4 克，C=2 克，則推算出 A=3 克，D=5 克，E=1 克，可使得所有的天秤平衡。

七、指定作業：

1. 金佛的紀念品專賣店裡，陳列著大大小小許多等比例的金佛公仔，已知大小兩金佛公仔的高度比為 5：2，美美發現實心的大金佛實在太重了，所以選擇買了實心的小金佛，回家秤重發現小金佛是 1.6 公斤，由此推知大金佛有多重？
2. 在生物學上，我們也常利用比例來估算族群的大小。例如校園魚池中有很多吳郭魚，我們可以先捕捉 50 隻吳郭魚，在魚尾用油性簽字筆標記記號，再將這些魚放回魚池中。三天後再重新捕捉 40 隻吳郭魚發現裡面有 5 隻標記有記號，你可以由此估算出魚池內吳郭魚的總數嗎？

3. △ABC 中，$\overline{AB}=10$、$\overline{AC}=15$、$\overline{BC}=20$，設 $\overline{AB}$ 上的高為 h_c，設 $\overline{AC}$ 上的高為 h_b，設 $\overline{BC}$ 上的高為 h_a，求 $h_c：h_b：h_a=$？

4. 將重量為 1、2、3、4、5、6 克的砝碼，放入下圖 6 個秤盤中，每個秤盤恰好放置一個砝碼，使得所有的天秤平衡。



填入1~6克的砝碼

指定作業參考解答：

1. 25 公斤。($1.6\times\left(\frac{5}{2}\right)^3=25$)

2. 400 隻。

3. $h_c：h_b：h_a=6：4：3$。

4. A=2 克，B=6 克，C=5 克，D=1 克，E=3 克，F=4 克。

八、教學活動注意事項：

1. 教學活動時間建議如下，第一節課教學說明(含引起動機)：約 5 分鐘，活動一：約 10 分鐘，活動二：約 10 分鐘，活動

三：約 20 分鐘。第二節課教學說明(含引起動機)：約 5 分鐘，活動四：約 10 分鐘，活動五：約 10 分鐘，活動六：約 5 分鐘，活動六：約 15 分鐘。

2. 活動三中的紅豆、綠豆，活動四中的 A4 紙張都是很容易取得的實物，可以分組實際帶領學生操作。
3. 活動五、六、七，主要是希望利用實例讓學生觀察到

   a：b 的反比是 $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a$ 。

   連比例 a：b：c 的反比是 $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=bc:ac:ab$ 。
4. 在各活動教學時，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
5. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 活動三是常見的中學機率問題，在統計學上用到超幾何分布的最大概度估計值，相關概念如下：我們以取球的試驗，利用 Geogebra、Excel VBA 動態模擬的特性，作輔助探討。

   假設箱中有球，總數量為 S_n，其中紅球數為 m，非紅球數為 (S_n-m)，從箱中隨機任取 n 個球出 $P_i(s_n)=\frac{C_i^m\cdot C_{n-i}^{s_n-m}}{C_n^{s_n}}, i=0,1,2.........n$ ，

表示取出的 n 個球中恰有 i 個紅球之機率。這是一個超幾何分布的範例，我們必須先了解超幾何分布的基本統計量與性質。

引理(1) $i\cdot C_i^m = m\cdot C_{i-1}^{m-1}$

pf：$i\cdot C_i^m = i\cdot\dfrac{m!}{(m-i)!i!} = m\cdot\dfrac{(m-1)!}{((m-1)-(i-1))!(i-1)!} = m\cdot C_{i-1}^{m-1}$

引理(2) $C_n^{s_n} = \dfrac{s_n}{n}\cdot C_{n-1}^{s_n-1}$

pf：$C_n^{s_n} = \dfrac{s_n!}{n!(s_n-n)!} = \dfrac{s_n}{n}\cdot\dfrac{(s_n-1)!}{(n-1)!((s_n-1)-(n-1))!} = \dfrac{s_n}{n}\cdot C_{n-1}^{s_n-1}$

定理(一)超幾何分布的期望值

$$E(x)=\sum_{i=0}^{n} i\cdot\frac{C_i^m C_{n-i}^{s_n-m}}{C_n^{s_n}} = n\cdot\frac{m}{s_n} = np$$

(若 $p=\dfrac{m}{s_n}$)

pf：$E(x)=\sum_{i=0}^{n} i\cdot\dfrac{C_i^m C_{n-i}^{s_n-m}}{C_n^{s_n}} = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{m\cdot C_{i-1}^{m-1}\cdot C_{((n-1)-(i-1))}^{((s_n-1)-(m-1))}}{\dfrac{s_n}{n}\cdot C_{(n-1)}^{(s_n-1)}}$(利用引理(1)及引理(2))

$$= n\cdot\frac{m}{s_n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{C_{i-1}^{m-1}\cdot C_{((n-1)-(i-1))}^{((s_n-1)-(m-1))}}{C_{(n-1)}^{(s_n-1)}} = n\cdot\frac{m}{s_n}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\frac{C_j^{m-1}\cdot C_{((n-1)-j)}^{((s_n-1)-(m-1))}}{C_{(n-1)}^{(s_n-1)}}$$

$$= n\cdot\frac{m}{s_n} = np \quad (\text{令 } j=i-1)$$

其中$\sum_{\mathrm{j}=0}^{n-1}\dfrac{C_{\mathrm{j}}^{m-1}\cdot C_{((n-1)-\mathrm{j})}^{((s_n-1)-(m-1))}}{C_{(n-1)}^{(s_n-1)}}$可以看成是總球數($S_n$-1)，其中紅球數($m$-1)，從中取出($n$-1)個球之超幾何分布的機率總和，故

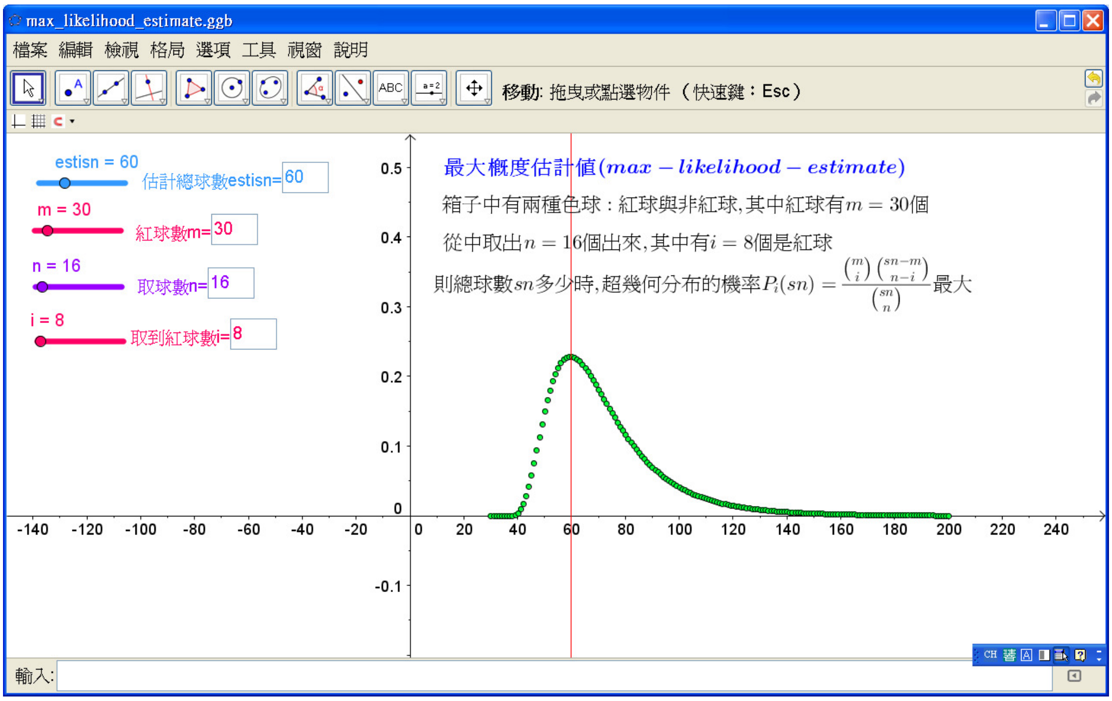
$\sum_{\mathrm{j}=0}^{n-1}\dfrac{C_{\mathrm{j}}^{m-1}\cdot C_{((n-1)-\mathrm{j})}^{((s_n-1)-(m-1))}}{C_{(n-1)}^{(s_n-1)}} = 1$。

最大概度估計法(mle)模擬實驗的情境：假設箱中有球，總數

量 S_n 為未知，其中紅球數 m 是已知，非紅球數(S_n-m)為未知，從箱中隨機任取 n 個球出來，n 是已知，取出紅球的個數 i 也是已知，$P_i(s_n)=\dfrac{C_i^m\cdot C_{n-i}^{s_n-m}}{C_n^{s_n}},i=0,1,2.........n$，表示取出的 n 個球中恰有 i 個紅球之機率。

當 m=30,n=16, i =8 已知的條件下，當 S_n 逐漸增加，$P_i(s_n)$ 大小的變化為何？

下圖(一)中的綠點它的 x 坐標是球的總數 S_n，y 坐標是機率質量函數 $P_i(s_n)$ 的值。



觀察上圖(一)，$P_i(s_n)$ 值先漸增而後漸減，大約在 S_n=60，$P_i(s_n)$ 有最大值。

於是我們想觀察 $P_i(s_n)$ 漸增的條件：

首先考慮 $\dfrac{P_i(s_n)}{P_i(s_n-1)}=\dfrac{(s_n-m)(s_n-n)}{s_n(s_n-m-n+i)}\geq 1$ 的情況

$\dfrac{(s_n-m)(s_n-n)}{s_n(s_n-m-n+i)}\geq 1 \Leftrightarrow (s_n-m)(s_n-n)\geq s_n(s_n-m-n+i) \Leftrightarrow s_n\leq\dfrac{mn}{i}$

亦即 $s_n\leq\dfrac{mn}{i}$ 的情況，當 S_n 漸增，$P_i(s_n)$ 也逐漸增加，

在 $s_n=\dfrac{mn}{i}$ 時，$P_i(s_n)$ 有最大值。

也就是 $s_n=\dfrac{mn}{i} \Leftrightarrow \dfrac{m}{s_n}=\dfrac{i}{n}$ 時 $P_i(s_n)$ 有最大值。

在超幾何分布，假設：

(a)總球數 S_n 未知。

(b)紅球數 m、取球數 n、以及 n 球中取得的紅球數 i 三數皆為已知。

在上面$(a)(b)$兩條件下，我們將 $P_i(s_n)$ 有最大值的情況，以不同的敘述列出如下：

(1) $s_n\leq\dfrac{mn}{i}$ 時，$P_i(s_n)$ 隨 S_n 增加而漸增，在 $s_n=\dfrac{mn}{i}$ 時，$P_i(s_n)$ 有最大值。

(2)在取得的 n 球中，紅球數等於超幾何分布的期望值，即 $i=np$ (若 $p=\dfrac{m}{s_n}$) $P_i(s_n)$ 有最大值。

(3)總球數中的紅球比率，等於取球數中的紅球比率，即 $\dfrac{m}{s_n}=\dfrac{i}{n}$ 時 $P_i(s_n)$ 有最大值。

當我們以 $P_i(s_n)$ 有最大值的情況下求得的 S_n，作為總球數的估計值。就稱為最大概度估計法(maximum-likelihood estimate)。

2. 我們以估計明德水庫的大頭鰱總數為例：

(1)估計法必須有一定的準確度，才算是好的估計。

(2)做記號的大頭鰱數目 m 不可太少，要佔總數 S_n 的顯著比率，否則準確度不高。

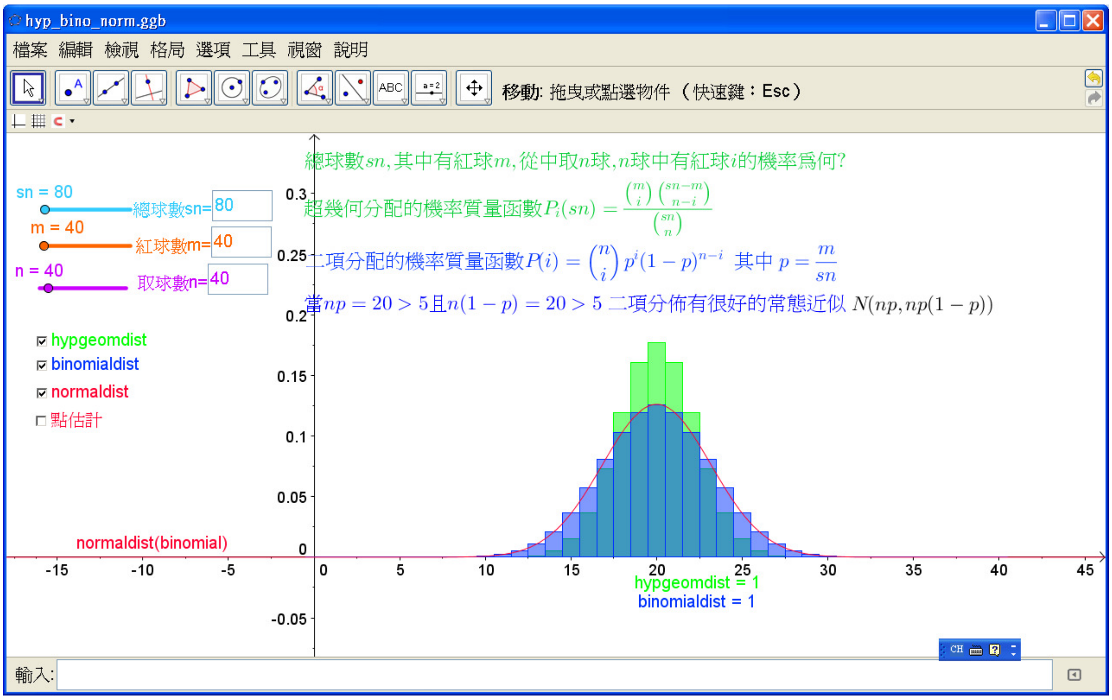
(3)抽樣試驗必須考慮所花的經費，否則竭澤而漁，把水庫的水放乾一定可以算得大頭鰱的總數，但這是最不經濟的一個做法。

(4)當我們的經費固定的情況下，第二次捕捉的魚數 n，當然是愈多愈好，所估計的大頭鰱總數 S_n 愈準確。

(5)這裡純粹只用到超幾何分布的點估計，沒有用到二項分佈、常態分布的模式。

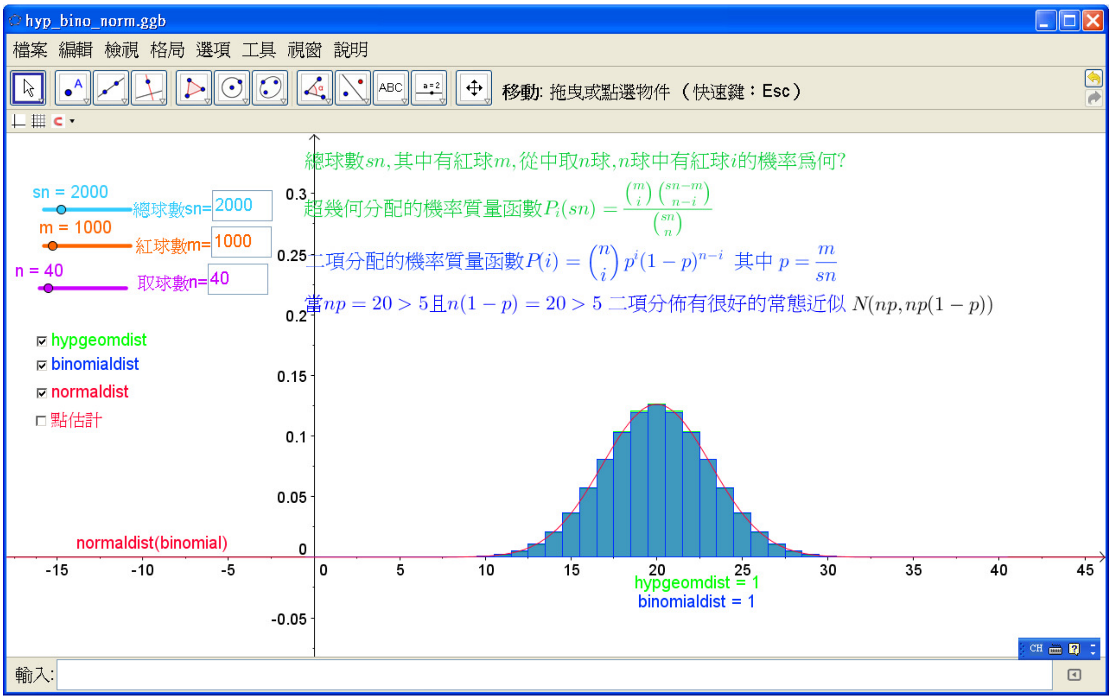
如果是要求 95%信心水準的$\frac{i}{n}$的信賴區間(區間估計)，要能夠接近常態分布，必須第二次捕捉的魚數$n<\frac{m}{10}$，要比第一次捕捉來做記號的魚數 m 及水庫大頭鰱總數 S_n 都小很多，$n \ll m$ 且 $n \ll S_n$(但是 n 也不能太小，如果 S_n 有 10 萬，m 有 3 萬，n 取 1000 左右是恰當的)，才會接近常態分布，才適合討論 95%信心水準的信賴區間，否則會造成較大的估計誤差。

如下圖(二)取球數 n 與紅球數 m、總球數 S_n，比較接近，超幾何分布與常態分布差很多，討論比率之 95%信心水準的信賴區間是不適合的。



圖(二)

如下圖(三)紅球數 m、總球數 S_n 都比取球數 n 大 10 倍以上，超幾何分布就會接近二項分布及常態分布，討論比率之 95%信心水準的信賴區間是比較適合的。



圖(三)

以上參考資料：

1. 林光賢譯(1995)。機率導論，Sheldon Ross 著(pp. 206-214)。臺北市：華泰書局。

2. 鄭惟厚、胡學穎著(2011)。基礎統計(pp. 124-130)。臺北市：東華書局。

3. 馬秀蘭、吳德邦編著(2008)。統計學以 Microsoft Excel 為例(pp. 88-90)。新北市：新文京開發出版股份有限公司。

主題 4－1：函數教學篇（一）

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　　**撰寫者：**陳彥廷

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　丁斌悅

(一) 能理解數量關係並進行解題。

(二) 能理解正比與反比之概念。

三、教學目標：

(一) 能認識變數與函數。

(二) 能在直角坐標平面上描繪一次函數的圖形。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

西元 1453 年，歐洲歷經了中世紀一千年間的「科學黑暗時代」，到了近代，數學終於逐漸發展起來……。當時，東羅馬帝國為了捍衛首都君士坦丁堡，在巴爾幹半島建築了長達七公里的城牆與護城河。然而，最後在奧斯曼土耳其準備了長達八公尺的巨砲攻擊下，東羅馬帝國從此瓦解、滅亡。

在此之前，關於大砲飛行路徑的說法，是源於亞里斯多德所述：「被發射的物體，會一直往前衝，直到推進力消失為止，然後就垂直落下」，但從觀察結果看來，似乎不是如此。根據西元 1537 年《新科學》一書中提到：「45 度的發射角可以使子彈飛得最遠」。以落體研究成名的伽利略也表示：「在重力影響不大的斜面進行實

驗，彈道是呈拋物線的形狀」。而笛卡爾則是將方程式中的 x, y 值一組一組地當作直角座標系的點座標，並畫出圖形，首先將圖形與方程式結合在一起，於是形成「座標幾何學」，又稱為「解析幾何學」。因此，笛卡爾致力於研究求得曲線的切線方法，也就是研究砲彈一瞬間會飛往甚麼方向，這就是「函數」的起源。而笛卡爾認為：「方程式是靜態的圖形，函數則可視為動態的圖形」。而尤拉(Euler)就為函數下了一個解釋：「函數常解釋為一變量依另一變量而變」。

六、教學活動：

那麼，甚麼叫做函數呢？生活中有沒有關於函數的經驗呢？首先，我們從生活中的例子開始來思考：例如，我們生活中常見的飲料販賣機，只要我們按下販賣機上面的「按鈕」，就可以得到 1 瓶飲料，而且，按下不同的按鈕會得到不同的飲料。這種「按鈕」與「飲料」間的對應關係，我們稱為「函數」。此外，像我們到棒球場看職棒，其售票說明如下：100 公分(不含 100 公分)不用買票；100 公分至 140 公分(不含 140 公分)半票；140 公分以上全票。根據上述說明，「身高」與「票別」對應關係的購票行為也是一種「函數」。因此，我們可說：「兩個數量之間，它們所產生的對應關係。其中先改變的量，我們稱之為「自變數(或自變量)，通常以 x 表示」，因為「自變數」的改變，依循既定規則而改變的量，稱之為

「應變數(或應變量)，通常以 y 表示」。此時，我們就稱 y 是 x 的函數。舉例來說，$y=ax+b$，a,b 為常數，y 會隨著 x 的值改變而跟著改變，我們稱 x 為「自變數(量)」，稱 y 為「應變數(量)」。

活動一：一次函數

1. 試在直角坐標平面上畫出下列各函數的圖形：

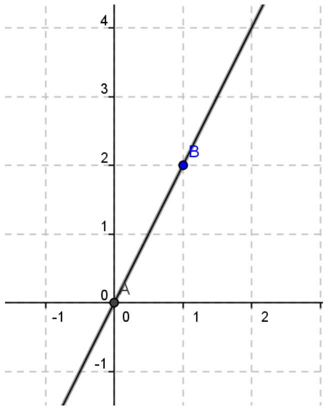
(1) 試畫出 $y=2x$，$y=\frac{1}{2}x$ 的圖形。

(2) 試畫出 $y=-2x$，$y=-\frac{1}{2}x$ 的圖形。

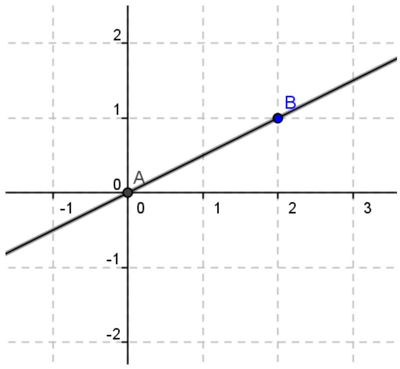
(3) 試畫出 $y=2x+1$，$y=\frac{1}{2}x+1$ 的圖形。

(4) 試畫出 $y=-2x+1$，$y=-\frac{1}{2}x+1$ 的圖形。

步驟 1：首先，我們在坐標平面上依序畫出上述各函數的圖形：



$y=2x$



$y=\frac{1}{2}x$

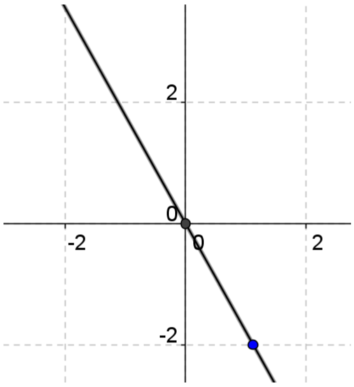
(1)

1. 在坐標平面上任意找到滿足函數 $y=2x$ 關係的兩個點 A（0,0）和 B（1, 2）。
2. 我們再取更多的點（0,0）、（2,4）...
3. 連接 A, B，並延伸成一條直線。
4. 我們發現，所有我們所取的點都在 $\overleftrightarrow{AB}$ 上。因此，我們可以把 $\overleftrightarrow{AB}$ 視為 $y=2x$ 的圖形。

1.在坐標平面上任意找到滿足函數 $y=\frac{1}{2}x$ 關係的兩個點 A（0,0）和 B（2, 1）。

2.有了上一題的經驗，我們可以直接連接 A, B，並延伸成一條直線，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 即為 $y=\frac{1}{2}x$ 的圖形。

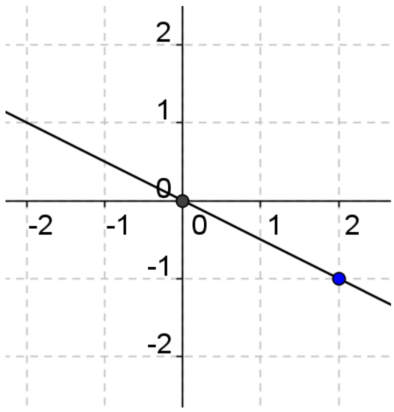
(2)



$y=-2x$

1.在坐標平面上任意找到滿足函數 $y=-2x$ 關係的兩個點 A（0,0）和 B（1, －2）。

2.連接 A, B 並延伸成一條直線，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 即為 $y=-2x$ 的圖形。

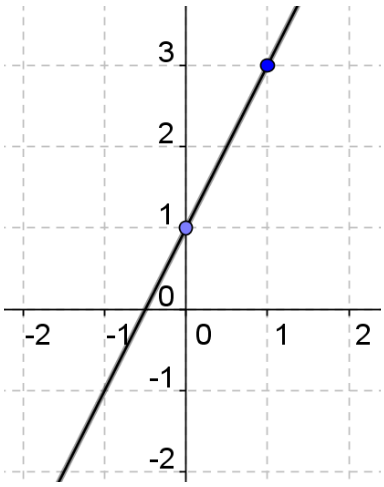


$y=-\frac{1}{2}x$

1.在坐標平面上任意找到滿足函數 $y=-2x$ 關係的兩個點 A（0,0）和 B（2, －1）。

2.連接 A, B 並延伸成一條直線，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 即為 $y=-2x$ 的圖形。

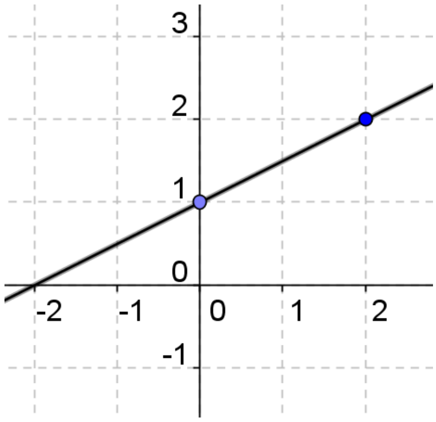
(3)



$y=2x+1$

1.在坐標平面上任意找到滿足函數 $y=2x+1$ 關係的兩個點 A（0,1）和 B（1, 3）。

2.連接 A, B 並延伸成一條直線，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 即為 $y=2x+1$ 的圖形。

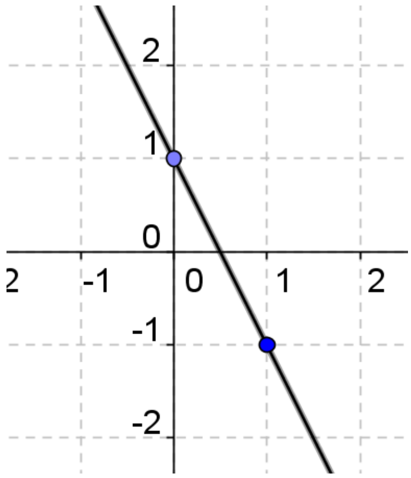


$y=\frac{1}{2}x+1$

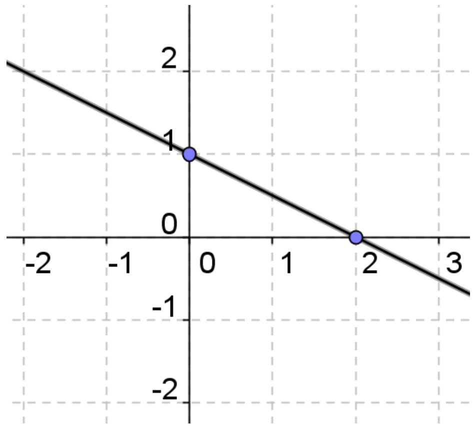
1.在坐標平面上任意找到滿足函數 $y=\frac{1}{2}x+1$ 關係的兩個點 A（0,1）和 B（2, 2）。

2.連接 A, B 並延伸成一條直線，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 即為 $y=\frac{1}{2}x+1$ 的圖形。

(4)



$y=-2x+1$



$y=-\frac{1}{2}x+1$

1.在坐標平面上任意找到滿足函數 $y=-2x+1$ 關係的兩個點 A（0,1）和 B（1, －1）。

2.連接 A, B 並延伸成一條直線，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 即為 $y=2x+1$ 的圖形。

1.在坐標平面上任意找到滿足函數 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 關係的兩個點 A（0,1）和 B（2, 0）。

2.連接 A, B 並延伸成一條直線，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 即為 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 的圖形。

【小結】透過上述函數繪圖，可以發現：

(一)在繪製上述任何函數圖形時，無論我們在坐標平面上取了多少滿足函數的點，這些點都會落在我們所繪製的直線圖形上。

(二)這些函數的自變數(量) x 最高次方都為 1 次，我們稱之為「一次函數」。

2. 從上面你所畫的圖形觀察，你發現了什麼？

(1) x 的係數（正負、大小）對函數圖形有何影響？

(2) 若函數沒有常數項，則圖形有何特徵？

(3) 每一個自變數(量) x 的值有多少個應變數(量) y 的值與之對應？

(4) 每一個應變數(量) y 的值有多少個自變數(量) x 的值與之對應？

步驟 2：我們從上述圖形觀察，提出以下發現：

(1)觀察上述「一次函數」的 x 的係數，可發現：

I. 當 x 的係數為「正」（x 的係數＞0）時，直線圖形會由左而右逐漸________（填入上升；下降）；相對的，如果 x 的係數為「負」（x 的係數＜0）時，直線圖形會由左而右逐漸________（填入上升；下降）。

II. 並且，無論 x 的係數為「正」或「負」，其「係數的絕對值」愈大，則直線圖形上升（或下降）的速度愈__________（填入快；慢）。

III. 若函數中沒有常數項，其直線圖形必通過_________。

IV. 我們可以拿一支尺，以垂直 x 軸的方向由左而右的方向逐漸平移，可發現尺與函數圖形始終維持_____個交點，因此，可說每一個自變數(量) x 的值均有_____個應變數(量) y 的值與之對應。同理，我們再將尺以垂直 y 軸的方向由上而下的方向逐漸平移，可發現尺與函數圖形始終維持_____個交點，因此，可說每一個應變數(量) y 的值

均有____個應變數(量) x的值與之對應。

活動二：常數函數

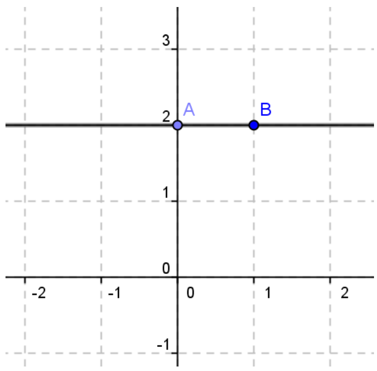
1. 試在直角坐標平面上畫出$y=2$，$y=\frac{1}{2}$函數的圖形。
2. 從上面你所畫的圖形觀察，你發現了什麼？

(1) 函數圖形有何特徵？

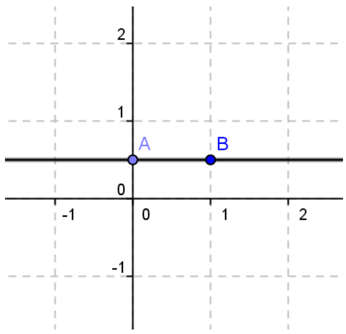
(2) 每一個自變數(量) x的值有多少個應變數(量) y的值與之對應？

(3) 每一個應變數(量) y的值有多少個自變數(量) x的值與之對應？

解法 1.依題意，我們在坐標平面上畫出函數圖形如下：



$y=2$



$y=\frac{1}{2}$

(1)在坐標平面上任意找到滿足函數$y=2$關係的兩個點 A（0,2）和 B（1, 2）。

(2)連接 A, B 並延伸成一條直線，則$\overleftrightarrow{AB}$即為$y=2$的圖形。

(3)在坐標平面上任意找到滿足函數$y=\frac{1}{2}$關係的兩個點 A（$0,\frac{1}{2}$）和 B（1，$y=\frac{1}{2}$）。

(4)連接 A, B 並延伸成一條直線，則$\overleftrightarrow{AB}$即為$y=\frac{1}{2}$的圖形。

2.我們從上述圖形觀察，提出以下發現：

(1) 上述函數無論自變數(量) x為何，其對應的y值都是固定的值，圖形為直線，並且都是水平線，也就是平行x軸的直線。

(2) 同樣地，我們拿一支尺，以垂直x軸的方向由左而右的方向逐漸平移，可發現尺與函數圖形始終維持 1 個交點，因此，可說每一個自變數(量) x的值均有 1 個應變數(量) y的值與之對應。同理，我們再將尺以垂直y軸的方向由上而下的方向逐漸平移，可發現尺與函數圖形會在y的值為 2 或$\frac{1}{2}$時有無限多個交點，因此，可說每一個特定的應變數(量) y（在上述題目為$y=2$ 或$y=\frac{1}{2}$）均有無限多個自變數(量) x的值與之對應。

【小結】

(一)從活動一與活動二所畫的圖形觀察，我們發現，這些函數都是「$y=ax+b$，a,b為常數」的函數，其圖形均為「直線」的形式，因此，我們稱之為「線型(性)函數」。其中，若$a\neq0$，稱為「一次函數」；若$a=0$，稱為「常數函數」。

(二)綜合上述「線型(性)函數」，我們發現：

1.每一個自變數(量) x的值均只有 1 個應變數(量) y的值與之對應。

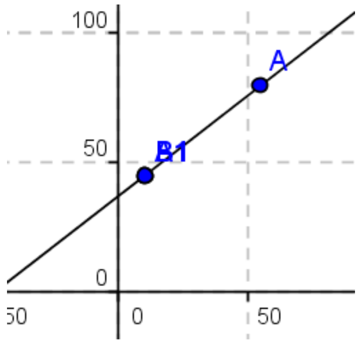
2.但是，每一個應變數(量) y 的值會有 1 個或多個應變數(量) x 的值與之對應。

隨堂練習 1：

某次月考，班上數學成績最高分為 55 分，最低分為 10 分。老師為了調整大家的得分，因此，決定以線型函數的形式將全班分數略作調整。分數調整後，原先得分 55 分的調整為 80 分；原先得分 10 分的調整為 45 分。若<u>小華</u>原來的得分是 25 分，請問：他調整後的分數為多少分？

解法 首先，我們將教師調整的規則彙整如下表

調整前分數	x	10	…	55
調整後分數	y	45	…	80



∵ 教師欲依線型函數的形式調整分數，

∴ 我們可將學生「調整前分數」設為自變量(數) x，因調整而改變的「調整後分數」設為應變量(數) y，則 y 與 x 的關係可寫成「$y=ax+b$」的形式，其圖形如上。

將（10, 45）與（55, 80）分別代入 $y=ax+b$，可獲得：

$$\begin{cases} 45=a\times 10+b......(1) \\ 80=a\times 55+b......(2) \end{cases}$$

由(2)－(1)可得：$45a=35$，∴ $a=\dfrac{7}{9}$ 代入(1)

$\therefore \frac{70}{9}+b=45$ $\therefore b=\frac{335}{9}$

因此，可將教師修改分數的線型函數寫成$y=\frac{7}{9}x+\frac{335}{9}$的形式。接續，再將甲的原始分數 25 分代入函數中的x值，則甲調整後的分數就為$56\frac{2}{3}$分。

活動三：絕對值函數

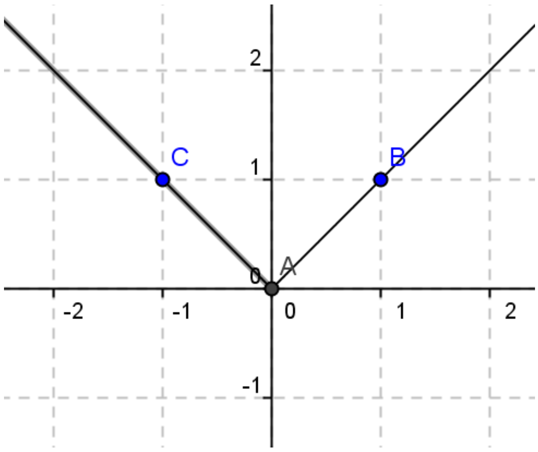
我們之前談到「絕對值」的意義：某數的絕對值代表該數與原點的距離。例如：｜5｜＝5，代表 5 與原點的距離為 5；｜－$3\frac{1}{2}$｜＝$3\frac{1}{2}$，代表－$3\frac{1}{2}$與原點的距離為$3\frac{1}{2}$。

1.接下來，請你在直角坐標平面上畫出$y=|x|$函數的圖形。

步驟 3：由於絕對值運算會將所有正負數均轉變為正數，因此，我們同時考慮正負值的x，將函數$y=|x|$中自變量(數) x的值與應變量(數) y的值之對應彙製下表：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	2	1	0	1	2	…

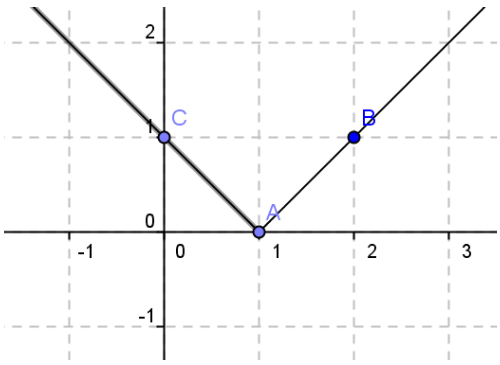
接著，再繪製函數$y=|x|$的圖形如下：



從上述圖形發現，「$x=0$」為圖形中兩條射線的折點處，它以直線「$x=0$（也稱為Y軸）」為對稱軸，形成左右對稱的圖形。

2.請你在直角坐標平面再畫出$y=|x-1|$，$y=|x+1|$函數的圖形。

步驟4：我們可將上述兩個函數圖繪製如下：

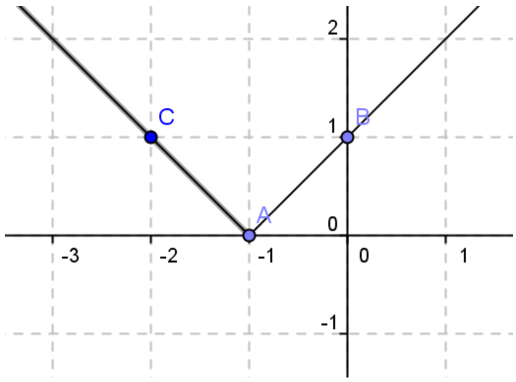


1.我們先考慮$x-1=0 \Rightarrow x=1$

2.依據活動三的經驗，可知(1, 0)將是圖形的折點，因此，我們計算出以下各點的坐標

x		-1	0	1	2	3	…
y		2	1	0	1	2	…

3.將上述各點描繪在坐標平面上，即可獲致圖形如上。



1.我們先考慮$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

2.依據活動三的經驗，可知(-1, 0)將是圖形的折點，因此，我們計算出以下各點的坐標

x		-3	-2	-1	0	1	…
y		2	1	0	1	2	…

3.將上述各點描繪在坐標平面上，即可獲致圖形如上。

3.請你觀察你所畫出來的圖形，這些圖形的折點坐標為何？

步驟 5：透過觀察，可發現：絕對值函數的折點，會發生在每一個絕對值為 0 時。因此，$y=|x-1|$與 $y=|x+1|$函數的折點坐標分別為（1，0）與（－1，0）。

4.(1) 每一個自變數(量) x的值有多少個應變數(量)y的值與之對應？

(2) 每一個應變數(量) y的值有多少個自變數(量)x的值與之對應？

步驟 6：透過觀察，也發現：

(1) 每一個自變數(量)x的值只有 1 個應變數(量)y的值與之對應。

(2) 每一個應變數(量)y的值有 0 個或 1 個或 2 個自變數(量)x的值與之對應。

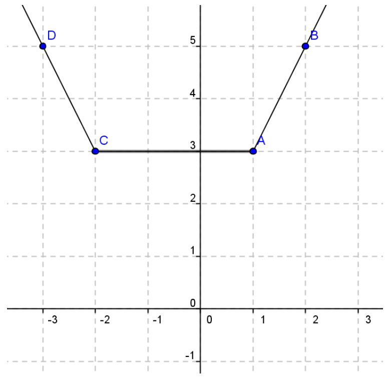
【小結】

(一)像上述有自變數(量)x包括在絕對值運算內的函數，我們稱為絕對值函數。

(二)而這些絕對值函數折點是發生在使得絕對值為 0 的時候。也就是說，凡是形如$y=|x-a|$的絕對值函數，其圖形為折線，而其折點產生在$x=a$處。

隨堂練習 2： 試在直角坐標平面畫出 $y=|x-1|+|x+2|$ 函數的圖形。

解法 我們將 $y=|x-1|+|x+2|$ 函數圖繪製如下：



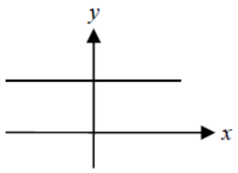
從上題的經驗，我們發現，$x=1$ 與 $x=-2$ 會是折點產生的地方。因此，我們取以下各點：

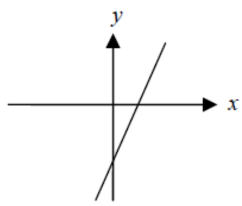
x	⋯	-3	-2	1	2	⋯
y	⋯	5	3	3	5	⋯

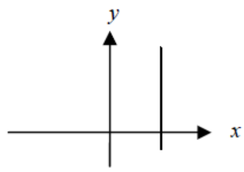
接著，再將這些點描在坐標平面上，並連線即可獲得圖形。

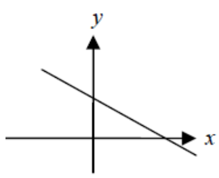
七、指定作業：

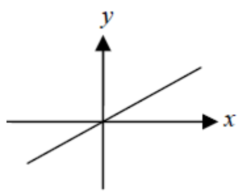
1.下列何者是函數 $y=2x-3$ 畫在坐標平面上的圖形？

(1)


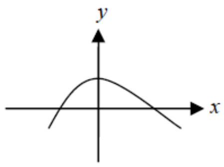
(2)


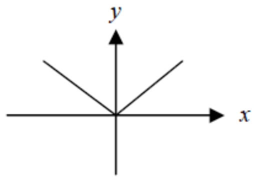
(3)


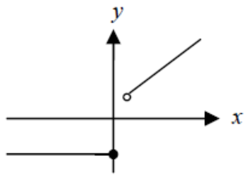
(4)


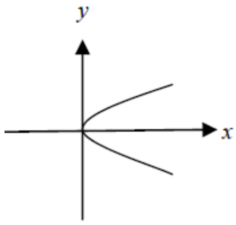
(5)


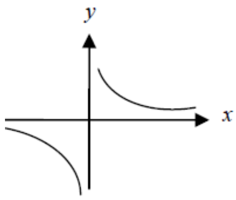
2.下列哪一個圖形無法形成 y 是 x 的函數？

(1) 

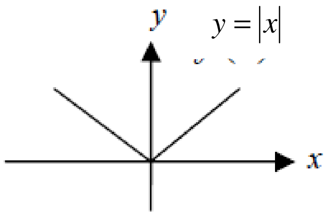
(2) 

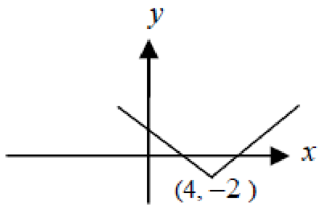
(3) 

(4) 

(5) 

3.圖(1)是 $y=|x|$ 函數的圖形。那麼，下列選項中哪個函數圖形為圖(2)？

圖(1) 

圖(2) 

(A) $y=|x-2|-4$　(B) $y=|x-2|+4$　(C) $y=|x+4|-2$

(D) $y=|x-4|-2$　(E) $y=|x-2|+2$

指定作業參考解答：

1. (2)。因為 $y=2x-3$ 必通過(0, －3)，且一次函數的 x 項係數為「正」，直線圖形會由左而右逐漸上升。

2. (4)。要滿足 y 是 x 的函數，必須符合「一（個自變數值 x）對一（個應變數值 y）」或「多（個自變數值 x）對一（個應變數值 y）」。由圖形觀察，(D)選項是「一（個自變數值 x）對多（個應變數值 y）」不符合上述條件。

3. (4)。∵絕對值函數圖形的折點發生在使絕對值為 0 時。而圖形折點的 x 坐標為 4，所以函數中必含有 $|x-4|$，且當 $x=4$ 時，$y=|x-4|-2=-2$ 故選(D)。

八、教學活動注意事項：

1.本單元教學時間建議如下：各活動進行（含隨堂練習）：15~20 分鐘。

2.本單元主要在介紹函數的概念以及線型函數圖形的特性。在概念的安排上依序是一次函數、常數函數以及絕對值函數。

3.本教材的對象為國中七年級學生。因此，並不強調函數中定義域與對應域的概念。

4.函數概念亦於教材原型 A 冊第 10 單元（頁 284）介紹。讀者可自行參閱。

5.在各活動教學時，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

6.在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1.劉嘉琪（2008）。高中三年級學生對函數與方程式概念之研究—以高雄市某高中為例（未出版之碩士論文）。屏東

市：國立屏東教育大學。

2.教育部（2008）。國民中小學九年一貫數學領域課程綱要。臺北市：教育部。

3.國中各版本第二冊數學課本。

主題 4－2：函數教學篇（二）

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　**撰寫者：**陳彥廷

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　　丁斌悅

(一) 能理解數量關係並進行解題。

(二) 能理解正比與反比之概念。

(三) 能在直角坐標平面上描繪一次函數的圖形。

三、教學目標：

(一) 能認識變數與函數。

(二) 能理解二次函數的樣式並繪出其圖形。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

談到函數在歷史上的發展過程，曹亮吉提到：

其實，函數的概念是隨著微積分的發展而演變，直到十九世紀才完全成熟。

自從伽利略(1564-1642)研究落體運動，發現「物體在空中下降的距離，與所經過的時間的平方成正比」、「物體從高度固定的斜板滑落所需的時間與斜坡的長度成正比」，到了十七世紀科學革命，又開始注重自然界的動態現象，因此促使函數動態觀念的描述漸趨成熟。

然而，研究運動也引出更多的曲線，而曲線和函數之間，也

經由坐標的引入，變得不可分離。最早的想法認為：一個函數是一個代數式子，只含變數及加減乘除開方等符號。漸漸地，有一些像三角、對數、指數等也加了進來，加上種種曲線的研究，由這些函數經四則運算及合成運算可得的所謂初等函數，在十八世紀上半葉就已經非常清楚了。

每一函數都有它的對應規則，這些規則的表現方法至少有三種：式子、圖形、數表，$f(x)=x^2+x+1$即是一個式子，但其實它代表一段敘述，說明 x 與 $y=f(x)$的對應，只是我們太習慣於多項式所代表的意義，就認為它是個式子。$f(x)=[x]$（高斯函數）等也一樣，開始時是一段敘述，久了就成為式子。

式子之外，函數最常以曲線的形式出現。譬如兩電線桿之間的電線所成的曲線，小提琴的聲波曲線；它們也可用式子表示出來。但像某地的氣溫變化曲線，患病者的腦波曲線等，就很難用式子表示。不過，從這些曲線的變化，還是可以對情況有相當的了解。

第三種函數表示法為數表，它使我們馬上查得函數值（或其近似值)，這在應用數學上非常重要，而製表的原則及方法則有賴於微積分。

六、教學活動：

活動一：二次函數

1.試在直角坐標平面上畫出下列各函數的圖形：

(1) 試畫出 $y=x^2$，$y=-x^2$ 的圖形。

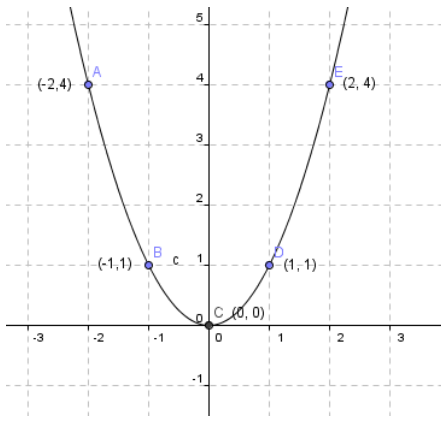
(2) 試畫出 $y=2x^2$，$y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形。

(3) 試畫出 $y=2x^2+1$，$y=-\frac{1}{2}x^2+1$ 的圖形。

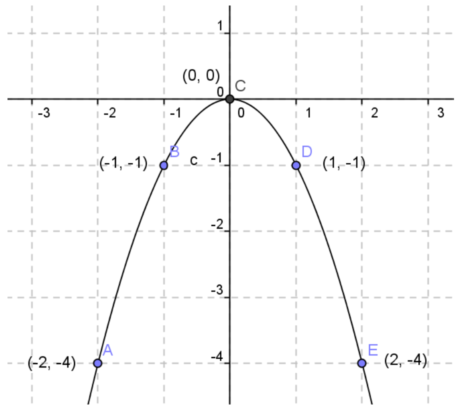
(4) 試畫出 $y=(x+1)^2$，$y=(x-1)^2$ 的圖形。

步驟 1：我們在坐標平面上依序畫出上述各函數的圖形如下

(1)



$y=x^2$



$y=-x^2$

1.首先，我們先觀察函數 $y=x^2$ 的式子發現，任給 x 一組相反數（例如：$x=1$ 以及 $x=-1$），代入函數，其對應的 y 值都相同。也就是說，對於任一正數 y 值，均有 2 個 x 值與之對應。

2.因此，我們計算出以下各點的坐標

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	4	1	0	1	4	…

3.將上述各點描繪在坐標平面上，即可獲致圖形如上。

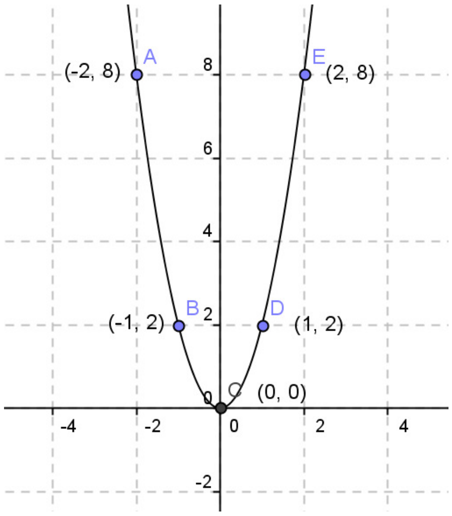
1.首先，我們先觀察函數 $y=-x^2$ 的式子發現，任給 x 一組相反數（例如：$x=1$ 以及 $x=-1$），代入函數，其對應的 y 值都相同。也就是說，對於任一負數 y 值，均有 2 個 x 值與之對應。

2.因此，我們計算出以下各點的坐標

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-4	-1	0	-1	-4	…

3.將上述各點描繪在坐標平面上，即可獲致圖形如上。

(2)



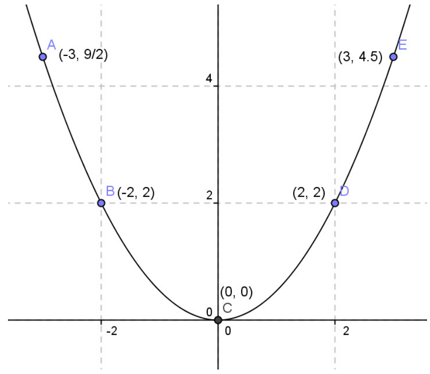
$y=2x^2$

1.首先，我們先觀察函數 $y=2x^2$ 的式子發現，任給 x 一組相反數(例如：$x=1$ 以及 $x=-1$)，代入函數，其對應的 y 值都相同。也就是說，對於任一正數 y 值，均有 2 個 x 值與之對應。

2.因此，我們計算出以下各點的坐標

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	8	2	0	2	8	…

3.將上述各點描繪在坐標平面上，即可獲致圖形如上。



$y=\dfrac{1}{2}x^2$

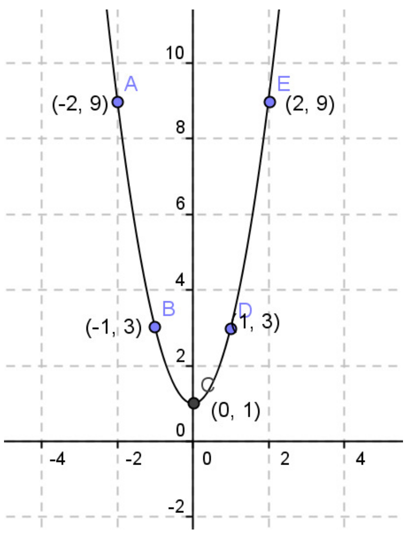
1.首先，我們先觀察函數 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 的式子發現，任給 x 一組相反數(例如：$x=1$ 以及 $x=-1$)，代入函數，其對應的 y 值都相同。也就是說，對於任一正數 y 值，均有 2 個 x 值與之對應。

2.因此，我們計算出以下各點的坐標

x	…	-3	-2	0	2	3	…
y	…	4.5	2	0	2	4.5	…

3.將上述各點描繪在坐標平面上，即可獲致圖形如上。

(3)

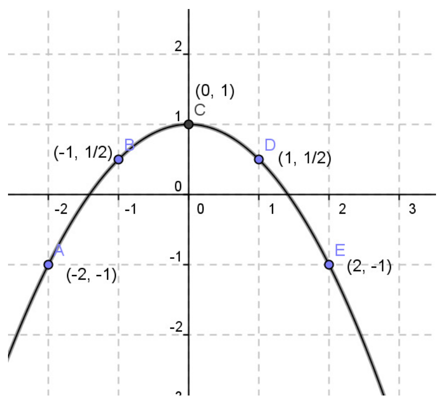


$y=2x^2+1$

1.有了前面例子的經驗，我們發現：對於任一個大於 1 的正數 y 值，均有 2 個 x 值與之對應。

2.因此，我們計算出以下各點的坐標

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	9	3	1	3	9	…



$y=-\dfrac{1}{2}x^2+1$

1.有了前面例子的經驗，我們發現：對於任一個小於 1 的 y 值，均有 2 個 x 值與之對應。

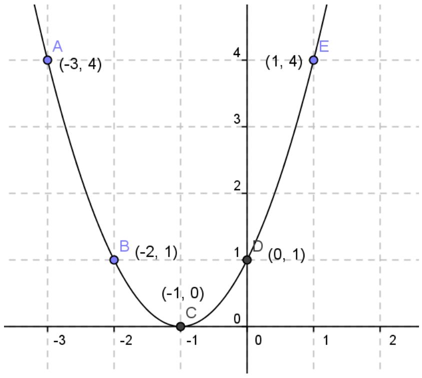
2.因此，我們計算出以下各點的坐標

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-1	1/2	1	1/2	-1	…

3.將上述各點描繪在坐標平面上，即可獲致圖形如上。

3.將上述各點描繪在坐標平面上，即可獲致圖形如上。

(4)



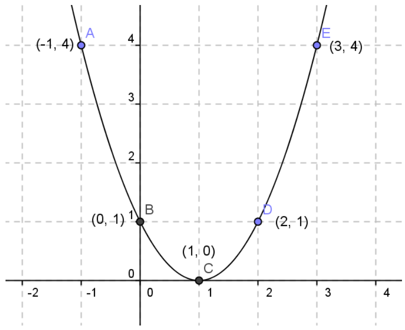
$y=(x+1)^2$

1.有了前面例子的經驗，我們發現：對於任一正數 y 值，均有 2 個 x 值與之對應。

2.因此，我們計算出以下各點的坐標

x	…	-3	-2	-1	0	1	…
y	…	4	1	0	1	4	…

3.將上述各點描繪在坐標平面上，即可獲致圖形如上。



$y=(x-1)^2$

1.有了前面例子的經驗，我們發現：對於任一正數 y 值，均有 2 個 x 值與之對應。

2.因此，我們計算出以下各點的坐標

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	4	1	0	1	4	…

3.將上述各點描繪在坐標平面上，即可獲致圖形如上。

【小結】透過上述函數繪圖，我們可以發現：

(一)上述函數的自變數(量) x 最高次方都為 2 次，我們稱 之為「二次函數」。而二次函數的圖形，我們稱它為「拋物線」。

(二)上述二次函數的圖形，都會以某一條直線為對稱軸形成「左右相互對稱」的圖形，也就是說，這些「拋物線」圖形有一條「對稱軸」，而且對稱軸必通過圖形的最高點或最低點。

2. 從上面你所畫的圖形觀察，你發現了什麼？

(1) x^2 的係數（正負、大小）對函數圖形有何影響？

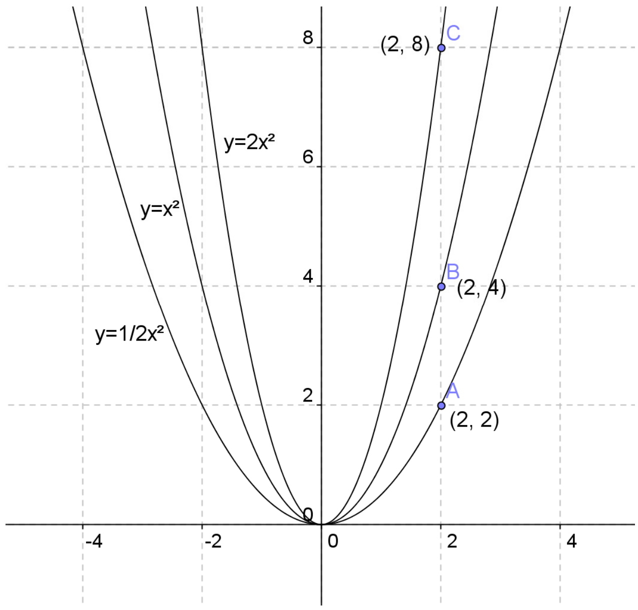
(2) 函數中的常數項對函數圖形有何影響？

(3) 每一個自變數(量) x 的值有多少個應變數(量) y 的值與之對應？

(4) 每一個應變數(量) y 的值有多少個自變數(量) x 的值與之對應？

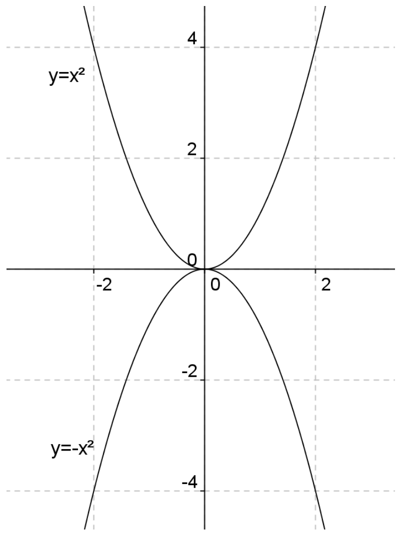
步驟 2： 欲回答上述問題，我們以上述函數為例，逐步進行討論：

1.首先，我們將 $y=x^2$，$y=2x^2$，$y=\frac{1}{2}x^2$ 等函數畫在同一個坐標平面上。



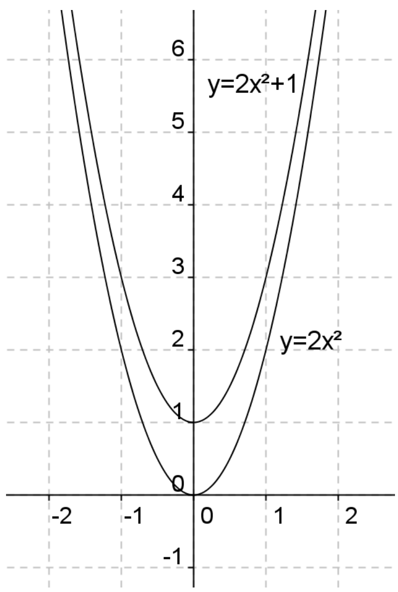
2.從上圖我們發現，當二次函數的自變數(量) x 的 x^2 係數愈大，其開口愈_______(填入大、小)。

3.我們再將 $y=x^2$，$y=-x^2$ 函數畫在同一個坐標平面上。



4.從上圖我們發現，當二次函數的自變數(量) x 的 x^2 係數為「正」，其開口向_______(填入上、下)；當二次函數的自變數(量) x 的 x^2 係數為「負」，其開口向_______(填入上、下)。

5.接著，我們再將 $y=2x^2$， $y=2x^2+1$ 函數畫在同一個坐標平面上。



6.從上圖我們發現，若將同一個自變數(量) x 的值代入 $y=2x^2$，$y=2x^2+1$ 函數，則 $y=2x^2+1$ 函數的應變數(量) y 的值永遠比 $y=2x^2$ 函數的應變數(量) y 的值多 1。也就是說，$y=2x^2+1$ 函數的圖形是將 $y=2x^2$ 函數的圖形向_____(填入上、下)平移____個單位長。

7.因此，我們可說，函數 $y=2x^2+1$ 中常數項會使函數 $y=2x^2$ 圖形在坐標平面上產生平移的效果。

8.而上述二次函數的圖形，每一個自變數(量) x 的值都只有 1 個應變數(量) y 的值與之對應；但是，每一個應變數(量) y 的值有 1 個或 2 個自變數(量) x 的值與之對應。

【小結】透過上述討論，我們發現：若 a,b,c 為定值，$a\neq 0$，則

(一) $y=ax^2+bx+c$ 的圖形為拋物線。

(二) 若 $a>0$，其圖形開口向上，且 a 的值愈大，其圖形開口愈小。

(三) 若 $a<0$，其圖形開口向下，且 a 的絕對值愈大，其圖形開口愈小。

隨堂練習 1：

在高處，讓一顆小石頭垂直落下，經過 t 秒後，小石頭落下的距離 $h=4.9\times t^2$（$t\geq 0$）：

(1)若小石頭從屋頂垂直落下，經 5 秒後落到地面。試問：原

先小石頭的高度為何？

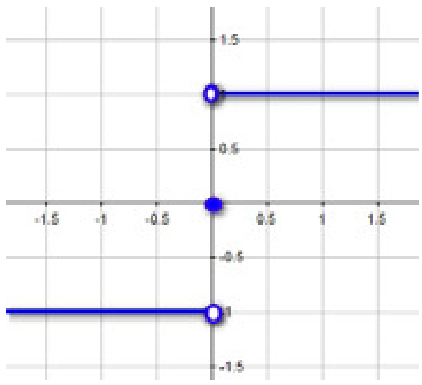
(2)請你將小石頭落下的時間作為自變數(量)，落下的距離作為應變數(量)，在直角坐標平面上畫出其函數的圖形。

【小結】綜合上述活動及隨堂練習，我們發現對於每一個函數而言，每一個自變數(量) x 的值只能有一個應變數(量) y 的值與之對應，但是，每一個應變數(量) y 的值卻可以有一個或多個自變數(量) x 的值與之對應。我們將函數這樣的特性稱之為「一（個自變數）對一（個應變數）」或「多（個自變數）對一（個應變數）」。例如，上述「線型函數」稱之為「一（個自變數）對一（個應變數）的函數」；「二次函數」稱之為「多（個自變數）對一（個應變數）的函數」。

活動二： 符號函數

1. 試在直角坐標平面上畫出 $y=\begin{cases}1, 當 x>0 \text{ 時} \\ 0, 當 x=0 \text{ 時} \\ -1, 當 x<0 \text{ 時}\end{cases}$ 函數的圖形。

步驟 3： $y=\begin{cases}1, 當 x>0 \text{ 時} \\ 0, 當 x=0 \text{ 時} \\ -1, 當 x<0 \text{ 時}\end{cases}$ 的圖形如右：



2.從上面你所畫的圖形觀察，請寫下你的發現：

(1) 此函數圖形有何特徵？

(2) 每一個自變數(量) x 的值有多少個應變數(量) y 的值與之對應？

(3) 每一個應變數(量) y 的值有多少個自變數(量) x 的值與之對應？

步驟 4： 1.此函數圖形由兩條不含端點的射線以及一個點所組成。

2.每一個自變數(量) x 的值有 1 個應變數(量) y 的值與之對應。

3.每一個應變數(量) y 的值有 1 個或無限多個自變數(量) x 的值與之對應。

活動三： 高斯函數

高斯函數亦稱之為最大整數函數。其符號為 [　　] 。其運算規則為：[4.3]=4，[0]=0，[-2.6]=-3，[6]=6。

我們可以以這種方式呈現 $f(x)=[x]=a$ ，$a\le x<a+1$，a 為整數

1.高斯函數 $f(x)=[x]$，試求 $f(5.1)$ ＝ _________。

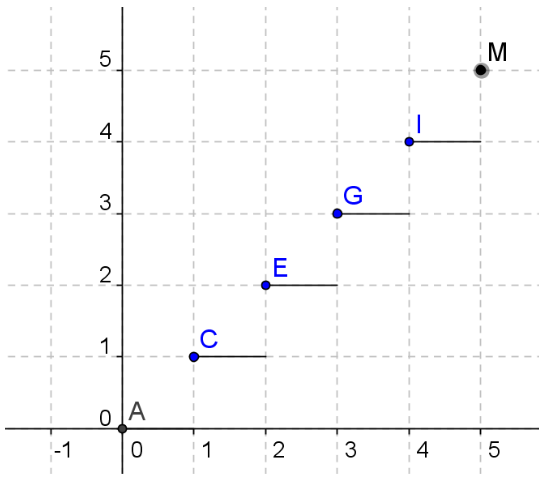
步驟5： 1.將 $x=5.1$ 代入， $f(5.1)=[5.1]=5$

2.試在直角座標平面畫出函數 $y=[x]$ 在 $0\le x\le 5$ 時的圖形。

步驟6：1.首先，我們嘗試在下表中填入適當數字：

x	0	…	1	…	2	…	3	…	4	…	5
f(x)	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5

2.接著，我們再將上表中的點描繪在坐標平面上：



教學活動參考解答：

活動一：

隨堂練習 1：1.將 t＝5 代入 $h=4.9\times t^2$ 得到 h＝600.25

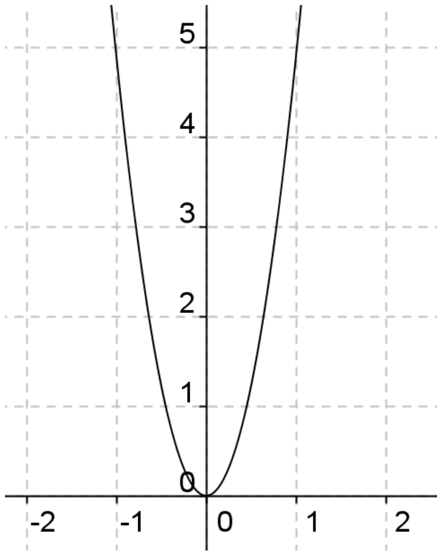
代表小石頭在 5 秒的時間落下 600.25 公尺。也就

是說，原先小石頭的高度為 600.25 公尺。

2.將小石頭落下的時間 t 當作自變數(量) x，落下的

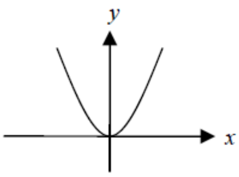
距離 h 當作應變數(量) y，因此，我們可以將

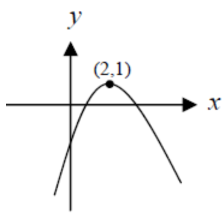
$h=4.9\times t^2$ 改寫成 $y=4.9\times x^2$，其圖形如下：

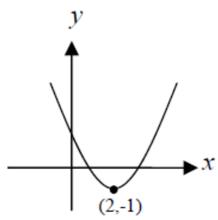


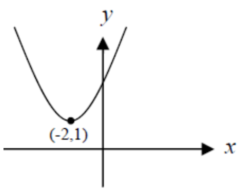
七、指定作業：

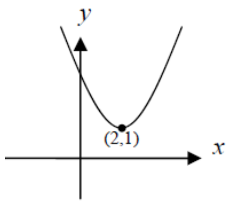
1.圖 1 為函數 $y=x^2$ 的圖形。那麼，下列選項中哪一個是函數 $y=(x-2)^2+1$ 的圖形？

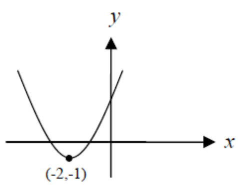
圖 1 

(1) 

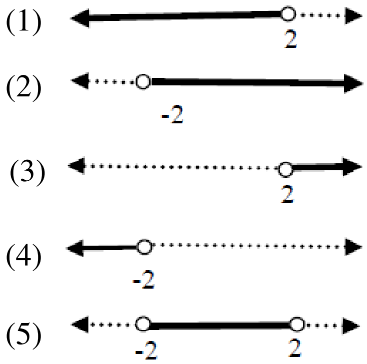
(2) 

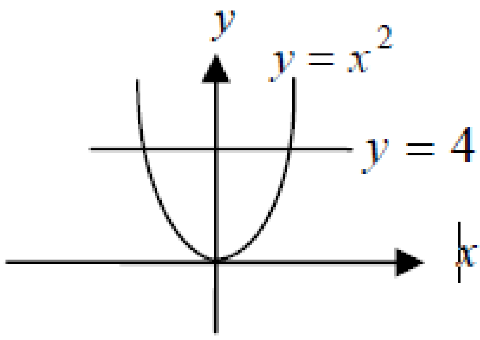
(3) 

(4) 

(5) 

2.請觀察下圖，下列 x 軸區間圖中，何者可以表示 $y=x^2<4$ 的解？





指定作業參考解答：

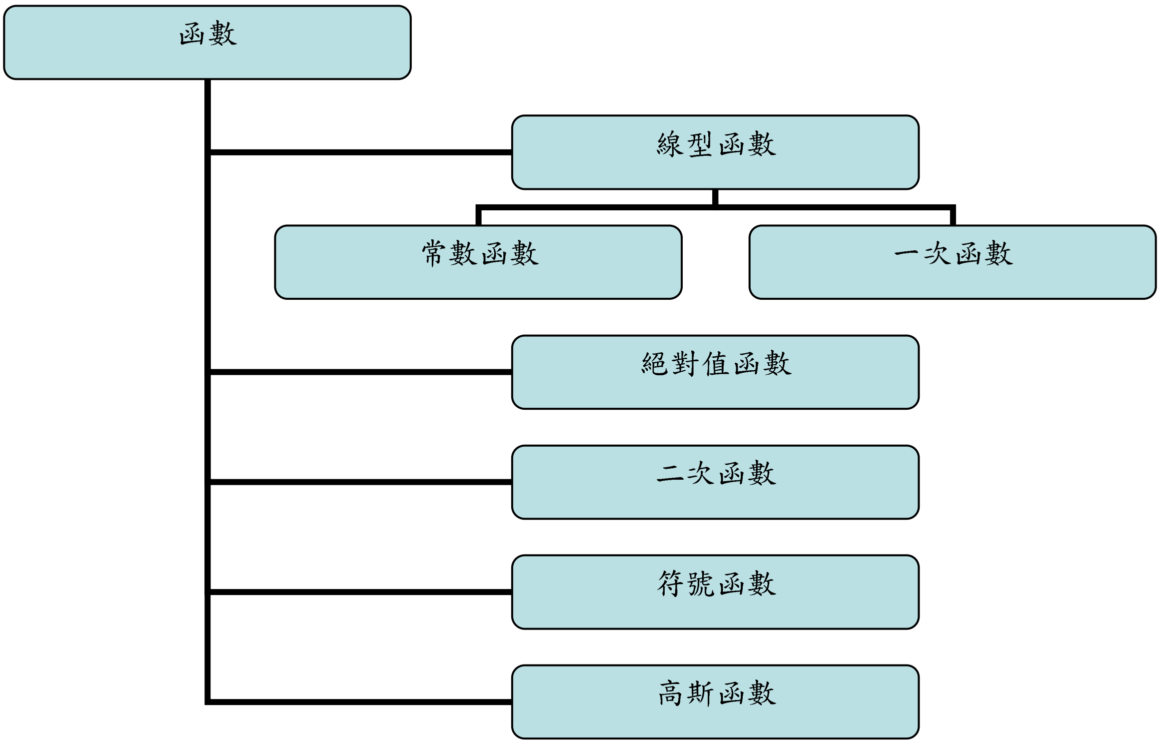
1. (4)。∵二次函數 $y=(x-2)^2+1$ 中 x^2 項係數為「正」，∴開口必向上。且圖形必通過(2, 1)，故選(4)。

2. (5)。∵ $y=x^2<4$ 。我們先觀察當 $y=4$ 時，所對應的 x 的數值為 2, -2。∴要滿足 $y=x^2<4$ 的條件，x 的範圍則需介於-2 與 2 之間，故選(5)。

八、教學活動注意事項：

1.本單元教學時間建議如下：各活動進行（含隨堂練習）：約 15~20 分鐘。

2.關於函數單元教學所介紹的函數概念圖如下：



在概念的安排上是從低次函數(線型函數)介紹至高次函數(二次函數)；從一般例(一般斜直線函數)介紹至特例(常數函數、絕對值函數、符號函數、高斯函數)。

3.本教材的對象為七年級國中學生。因此，並不強調函數中定義域與對應域的概念，二次函數也只希望學生能理解函數圖形之相關特徵(例如：拋物線、開口方向、開口大小、對稱、垂直方向的平移)，因此，建議教師無須強調學生必須能自行畫出二次函數圖形。

4.本單元還介紹了符號函數與高斯函數的基礎概念，原因在於日常生活中其實有許多類似此概念的實際案例(例如：搭計程車、水電費計價、電信費用...等)，希望學生能夠在沒有壓力的情形下認識這些函數的基本性質。

5. 在各活動教學時，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

6. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1.曹亮吉（2012）。函數。查詢日期：2012 年 09 月 22 日，檢自 http://episte.math.ntu.edu.tw/entries/en_function/index.html。

2.劉嘉琪（2008）。高中三年級學生對函數與方程式概念之研究—以高雄市某高中為例（未出版之碩士論文）。屏東市：國立屏東教育大學。

3.教育部（2008）。國民中小學九年一貫數學領域課程綱要。教育部，臺北市。

4.國中各版本第二冊數學課本。

主題 4−3：函數生活篇

一、授課對象：國中七年級下學期學生 **撰寫者：**丁斌悅

二、先備知識： 陳彥廷

(一) 能理解數量關係並進行解題。

(二) 能理解正比與反比之概念。

(三) 能認識函數基本概念。

三、教學目標：

(一) 能認識並瞭解生活中的「儲蓄」，天數與金額之間是一種函數關係。

(二) 能認識「無線上網」與「手機通話」的相關收費規定，並瞭解其中所蘊含的函數關係。

(三) 能認識「託運行李」的相關規定，並瞭解其中的函數關係。

(四) 能利用「線型函數」關係，自行將生日加密轉換成他人不易知道的數字。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

在日常生活中到處可見「線型函數」的影子，我們提出一些常見的例子，期待透過這些例子，一方面讓學生發現「線型函數」其實就隱含在你我的日常生活之中；另一方面也期望藉此提升學生對於數學學習上的興趣！

六、教學活動：

活動一：棉花糖理論與儲蓄

活動目標：能認識並瞭解生活中的「儲蓄」，天數與金額之間是一種函數關係。

活動流程：

1.**教學說明**：

美國史丹佛大學做過一個頗具代表性的實驗，這個實驗把小孩子單獨留在房間裡，給他們一人一塊棉花糖，讓他們選擇是要馬上吃掉棉花糖，還是等十五分鐘；如果願意等，就可以再多一塊棉花糖當獎賞。研究人員發現，能夠等待獎賞的小孩，長大以後，全都比那些馬上吃掉棉花糖的小孩成功。

這個「棉花糖理論」顯示：有的人成功、有的人失敗，成功與失敗的差別，並不光是努力工作的程度或是夠不夠聰明，還在於是否擁有「延遲享樂」的本事。仍在當學生的我們，最重要也最簡單的理財觀念就是儲蓄，學會「延遲享樂」，控制慾望，盡量把錢存起來，積少成多，將來就能成為一位小富翁或小富婆喔！

2.**教師提問**：

(1)天恩原本有 500 元，他要求自己從今天開始，每天固定存 20 元。則：

①請完成下表。

存錢天數（天）	0	5	10	15	20	…
總錢數（元）		600		800		…

②如果天恩存了 x 天之後，總共有 y 元，試寫出 x 與 y 的關係式。

(2)天惠原本有 200 元，從今天開始每天固定存 30 元。則：

①請完成下表。

存錢天數（天）	0	5	10	15	20	…
總錢數（元）		350		650		…

②如果天惠存了 x 天之後，總共有 y 元，寫出 x 與 y 的關係式。

(3)承(1)、(2)，若天恩和天惠從同一天開始存錢，則天惠存的錢在第幾天開始會超過天恩存的錢？

(4)天佑原有存款 1200 元，為了買自行車，每天存 20 元。經過 x 天之後，天佑的總存款為 y 元，則：

①y 是 x 的函數嗎？若是（我們記作 $y=f(x)$），試求：$y=f(x)=$？（以 x 表示）若不是，請說明原因。

②求 $f(10)$ 與 $f(40)$ 的值。

③天佑想要購買一輛價值 5000 元的自行車，則至少要存幾天，才有足夠的錢買這輛自行車？

活動二：移動網路

活動目標：能認識「無線上網」與「手機通話」的相關收費規定，

並瞭解其中所蘊含的函數關係。

活動流程：

1.**教學說明**：

e 世代的科技愈來愈先進，不僅將傳統電話帶出戶外，電腦也變成了現代人隨身攜帶的配件。除了有收發簡訊、傳送電子郵件等基本功能之外，還要能隨時隨地上網打卡、按個讚！

例如：由全球一動所建設的「臺北公眾區免費無線上網（Taipei Free）」，提供臺北市 12 區的行政中心、市立圖書館及各分館、…、等主要公共場所，4G 免費無線上網的服務，讓在臺北市內而且在其服務範圍內之數以百萬人次的民眾，可以不受侷限地享受移動上網的高便利性。

2.**教師提問**：

(1)台灣大姊大電信公司提供無限上網的服務，其收費標準如下：（一期為一個月）

(1) 基本費用：200 元（可使用 a 分鐘）
(2) 超過 a 分鐘：超過的部分，每分鐘收費 b 元。（不足 1 分鐘，以 1 分鐘計算）

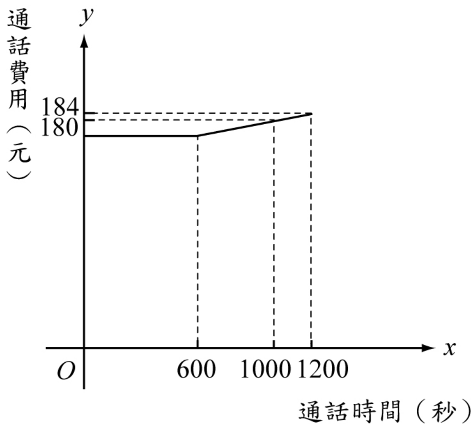
立威於九月份使用了 700 分鐘，費用為 250 元；十月份使

用了 680 分鐘，費用為 240 元。試求 a、b 之值。

(2)右下圖為台灣大姊大電信公司手機通話費的計算方式，通話時間在 600 秒以內只須繳基本費用；超過 600 秒的部分，其通話費用與通話時間呈一次函數 $f(x)=ax+b$ 的關係，其中 $f(x)$ 表示通話費用，x 表示通話時間。則：

①基本費用為多少元？

②天霖十一月份的通話費用為 220 元，則通話時間為多少秒？



(3)小華電信公司的手機通話費率提供 A、B、C 三種方案，如下表所示。試回答下列問題：

費率方案		A	B	C
費率	網內	0.06	0.04	0.05
（元／秒）	網外	0.085	0.095	0.09

①立康的手機費率為 A 方案，九月份的通話秒數為 9000 秒，費用為 660 元。則立康的手機網內與網外各使用了多少

秒？

②承①題，如果立康九月份的手機費率改用 C 方案，則比用 A 方案便宜還是昂貴？

③立雍的手機費率為 B 方案，十月份的通話秒數為 14000 秒，費用為 1000 元，則立雍的手機網內與網外各使用了多少秒？

④承③題，如果立雍十月份的手機費率改用 C 方案，則比用 B 方案便宜還是昂貴？

活動三：託運行李

活動目標：能認識「託運行李」的相關規定，並瞭解其中的函數關係。

活動流程：

1.**教學說明**：

不管是到國外工作、留學或旅行，都需要攜帶行李。搭乘飛機時，對於行李的攜帶方式，也有其相關的規定。

航空公司通常將旅客的行李分為：

(1)手提行李：根據各航空公司的規定而有所不同，通常是 1 件

(2)託運行李：分為計重制與計件制，大部分為計重制。每位旅客免費託運行李的重量依規定為 20～30 公斤，

超重的部分各航空公司會依照超重的收費標準收取費用。

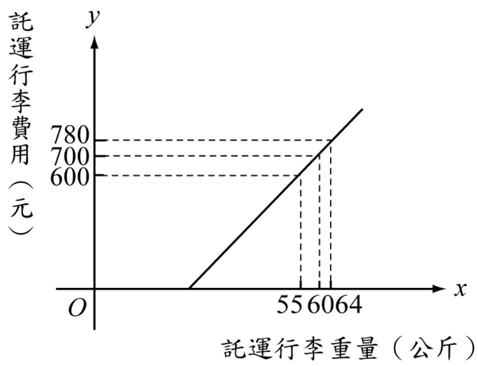
2.**教師提問**：

(1)雅妍搭乘華信航空公司的飛機前往香港出差。按照華信航空公司的規定，每位旅客最多可免費託運 20 公斤的行李，每超重 1 公斤，則加收機票價格的 1.5%。若雅妍的行李為 30 公斤，且支付了 1200 元的超重行李費用，則機票價格為多少元？

(2)如下頁附圖，美信航空公司託運行李重量與託運行李費用之間有如下關係：若託運行李重量為 55 公斤，則收取託運行李費用 600 元；若託運行李重量為 60 公斤，則收取託運行李費用 700 元。

①如果旅客的行李重量在 m 公斤以下時可免費託運，求 m 的值。

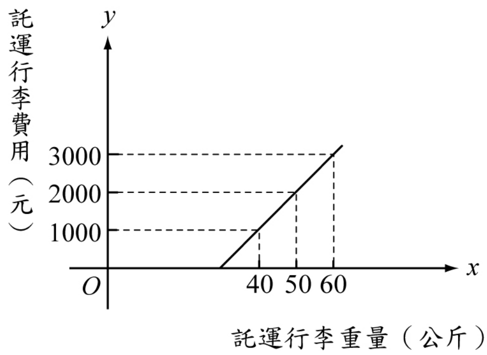
②美信航空公司託運行李重量與託運行李費用之間是否為函數關係？



(3)如附圖，已知<u>歐信航空公司</u>託運行李重量與託運行李費用為線型函數的關係。如果每位旅客的行李重量在 p 公斤以下，則可免費託運；超過的部分，每公斤加收 q 元。求：

①p、q 的值。

②<u>太希</u>搭乘<u>歐信航空公司</u>的飛機出國旅遊，託運 63 公斤的行李，須加收多少元？



活動四：密碼安全與簡易加密方式

活動目標：利用「線型函數」關係，自行將生日加密轉換成他人不易知道的數字。

活動流程：

1.**<u>教學說明</u>**：

現代人常常需要熟記許許多多的密碼，不論是電腦的開機密碼、手機的開機密碼、收發電子郵件的信箱密碼，以及提款卡密碼、銀行保險箱密碼、…、等等。若是使用自己的身分證號碼或是生日作為密碼，則恐將產生風險。因此若能夠將生日，透過一定的方式加以處理（加密），則可以大大地降低風險，萬一忘記密碼，也可以藉由自己加密的方式重新取得當初設定的密碼。

2.**教師提問**：

(1)家珍的生日為 2 月 14 日，她原本打算以「0214」來作為提款卡的密碼，但媽媽告訴她這樣子做太危險了，應該另外想一組自己知道、但別人想不到的號碼來作為密碼比較安全。家珍想起數學老師正在上線型函數單元，於是她便將生日（4 碼）透過線型函數 $y=f(x)=2x+14$ 來設計成為提款卡密碼（8 碼）：

生日（4 碼）	0	2	1	4
$y=f(x)=2x+14$	14	18	16	22

得一組新密碼：「____________（8 碼）」。

(2)家珍的弟弟家寶生日為 8 月 25 日，他聽從姊姊的建議，將生日（4 碼）透過線型函數 $y=f(x)=8x+25$ 來設計成為電子郵件的信箱密碼（8 碼）：

生日（4 碼）	0	8	2	5
$y=f(x)=8x+25$				

得一組新密碼：「____________（8 碼）」。

(3)承(2)，若家寶不想讓姐姐知道他的電子郵件信箱密碼，因此家寶改以線型函數 $y=f(x)=25x+8$，來設計成為電子郵件的信箱密碼（8 碼）：

生日（4 碼）	0	8	2	5
$y=f(x)=25x+8$				

得一組新密碼：「______________（9 碼）」。

(4)已知<u>家齊</u>將生日（4 碼）透過線型函數 $y=f(x)=25x+8$ 來設計得密碼為：「33083383」，則他的生日應為：「______月______日（4 碼）」。

$y=f(x)=25x+8$	33	08	33	83
生日（4 碼）				

(5)同學們，你也可以仿照<u>家珍</u>、<u>家寶</u>、<u>家齊</u>的作法，自行將你的生日（4 碼）透過一線型函數 $y=f(x)=$__________________，轉換成提款卡或其他任何你所需要的密碼：

生日（4 碼）				
$y=f(x)=$				

因此，你的密碼為：「______________（___碼）」。

教學活動參考解答：

活動一：

2.(1)①

存錢天數（天）	0	5	10	15	20	…
總錢數（元）	500	600	700	800	900	…

②$y=500+20x$

(2)①

存錢天數（天）	0	5	10	15	20	…
總錢數（元）	200	350	500	650	800	…

②$y=200+30x$

(3)設在第 x 天，天惠存的錢開始超過天恩存的錢

$$\begin{aligned} 200+30x &> 500+20x \\ 10x &> 300 \\ x &> 30 \end{aligned}$$

所以在第 31 天，天惠存的錢開始超過天恩存的錢。

(4)①是；$y=f(x)=1200+20x$

②$f(10)=1200+200=1400$

$f(40)=1200+800=2000$

③設至少要存 x 天，才有足夠的錢買自行車

$$\begin{aligned} 1200+20x &\geq 5000 \\ 20x &\geq 3800 \\ x &\geq 190 \end{aligned}$$

所以至少要存 190 天，才有足夠的錢買自行車。

活動二：

2.(1)依題意：$\begin{cases} 200+(700-a)\times b=250 \\ 200+(680-a)\times b=240 \end{cases}$，

可得$\begin{cases}(700-a)\times b=50\\(680-a)\times b=40\end{cases}$

兩式相除得$\dfrac{(700-a)}{(680-a)}=\dfrac{50}{40}=\dfrac{5}{4}$

$2800-4a=3400-5a$

解得$\begin{cases}a=600\\b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

(2)①將（1000 , 180）、（1200 , 184）代入$f(x)=ax+b$

可得$\begin{cases}180=1000a+b\\184=1200a+b\end{cases}$，

$200a=4$

解得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{50}\\b=160\end{cases}$

一次函數$f(x)=\dfrac{1}{50}x+160$

所以基本費用$f(600)=\dfrac{1}{50}\times600+160=172$（元）

②$f(x)=220$代入，

得$220=\dfrac{1}{50}x+160$

$\dfrac{1}{50}x=60$

所以$x=3000$（秒）

(3)①設立康網內使用 x 秒，網外使用 y 秒

依題意可列出二元一次聯立方程式：$\begin{cases} x+y=9000 \\ 0.06x+0.085y=660 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x+6y=54000 \\ 6x+8.5y=66000 \end{cases}$$

$$2.5y=12000$$

解得$\begin{cases} x=4200 \\ y=4800 \end{cases}$

所以<u>立康</u>網內使用 4200 秒，網外使用 4800 秒。

②(4200×0.05)+(4800×0.09)＝210+432＝642

因為 642＜660，所以改用 C 方案比用 A 方案便宜。

③設<u>立雍</u>網內使用 x 秒，網外使用 y 秒

依題意可列出二元一次聯立方程式：$\begin{cases} x+y=14000 \\ 0.04x+0.095y=1000 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x+4y=56000 \\ 4x+9.5y=100000 \end{cases}$$

$$5.5y=44000$$

解得$\begin{cases} x=6000 \\ y=8000 \end{cases}$

所以<u>立雍</u>網內使用 6000 秒，網外使用 8000 秒。

(4)(6000×0.05)+(8000×0.09)＝300+720＝1020

因為 1020＞1000，所以改用 C 方案比用 B 方案昂貴。

活動三：

2.(1)設機票價格為 x 元

因為行李超重 10 公斤，且支付 1200 元的超重行李費用

所以超重行李的部分為每公斤 $\dfrac{1200}{10}=120$（元）。

$x\cdot(1.5\%)=120$，得 $x=8000$，故機票價格為 8000 元。

(2)①②由附圖可知：託運行李重量與費用之間為線型函數關係

設託運行李重量為 x 公斤，費用為 $f(x)$ 元

則此線型函數為 $f(x)=ax+b$

以（55 , 600）、（60 , 700）代入 $f(x)=ax+b$

可得 $\begin{cases}600=55a+b\\700=60a+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=20\\b=-500\end{cases}$

∴線型函數為 $f(x)=20x-500$

今令旅客的行李重量為 m 公斤，可免費託運，

故費用 $f(m)=0$，則 $20m-500=0$，可得 $m=25$(公斤)。

(3)①設託運行李重量為 x 公斤，費用為 $f(x)$ 元

以（40 , 1000）、（50 , 2000）為例，代入 $f(x)=ax+b$

可得 $\begin{cases}1000=40a+b\\2000=50a+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=100\\b=-3000\end{cases}$

∴線型函數為 $f(x)=100x-3000$

今令重量 $x=p$(公斤)時，費用 $f(x)=0$(元)，

則 $100p-3000=0$，可得 $p=30$；

又重量超過 1 公斤(即 31 公斤)時，將 $x=31$ 代入

得加收金額 $q＝3100－3000＝100$(元)； 即：$\begin{cases} p=30 \\ q=100 \end{cases}$。

②須加收費用 $f\,(x)＝100x－3000＝100\times63－3000＝3300$(元)

活動四：

2.(1)新密碼：「 14181622 （8 碼）」。

(2)

生日（四碼）	0	8	2	5
$y＝f\,(x)\,＝8x+25$	25	89	41	65

新密碼：「 25894165 （8 碼）」。

(3)

生日（4 碼）	0	8	2	5
$y=f(x)=25x+8$	8	208	58	133

新密碼：「 820858133 （9 碼）」。

(4)生日：「 10 月 13 日（4 碼）」。

$y=f(x)=25x+8$	33	08	33	83
生日（4 碼）	1	0	1	3

(5)（略）

七、指定作業：

1.有一個嬰兒出生時體重是 3000 公克，出生後 10 週內很穩定

的每週增加 200 公克，設 x 表出生後的週數，y 表其體重（單位：公克），已知 y 與 x 為線性函數的關係，求 y 與 x 的關係式為何？

2.某次數學段考，全班考得很不理想，最高分為 50 分，最低分 20 分。因此，老師決定以一個一次函數來改變大家的分數，使得原先 20 分的同學變成 60 分，原先 50 分的同學變成 100 分。那麼，原先考 41 分的同學，其修正後的分數為多少？

指定作業參考解答：

1.10 週內增加 200×10＝2000（公克）＝2（公斤）。依題意，

x	0	10
y	3	3+2＝5

設 $y=f(x)=ax+b$，將（0 , 3）、（10 , 5）代入

可得 $\begin{cases}3=b\\5=10a+b\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{5}\\b=3\end{cases}$

$\therefore y=f(x)=\dfrac{1}{5}x+3$

2.設 x 表示原先的分數，y 表示修正後的分數

依題意可得 $y=f(x)=ax+b$，

將（20 , 60）、（50 , 100）代入

則$\begin{cases}60=20a+b\\100=50a+b\end{cases}$，我們可得$\begin{cases}a=\dfrac{4}{3}\\b=\dfrac{100}{3}\end{cases}$

$\therefore y=f(x)=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{100}{3}$

令$x=41$代入，可得$y=\dfrac{4}{3}\times 41+\dfrac{100}{3}=88$，

所以修正後的分數為 88(分)。

八、教學注意事項：

1. 各活動教學參考時間，活動一：約 15 分鐘，活動二～四：各約 20 分鐘，指定作業：約 15 分鐘。
2. 使用此教材時，請依順序進行教學，較可達最佳學習效果。
3. 在各活動的教學過程中，教師應多注重師生間的互動，例如可多提問（同一問題也可問兩位以上的學生）、多鼓勵學生發表不同的看法並適度建立學生的信心（答對時給予言語上的獎勵，答錯時予以適當安慰並另請其他同學作答，若再答錯則老師應加強解說。若有藉機調皮搗蛋者亦應適度制止）、多走動教學以瞭解學生的學習情形、留下適當的時間供學生思考或討論、…、等。
4. 教師可以依班級程度，讓學生思考並試著舉出日常生活中還

有哪些「線型函數」的例子；甚至也可以試著讓學生舉出日常生活中的「函數」例子！即使學生所舉出來的例子是錯的，也應該多予以安慰並鼓勵；若有其他同學因此而嘲笑，也應立即予以制止。

5.在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

6.在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 教育部（2008）。國民中小學九年一貫數學領域課程綱要。臺北市：教育部。

2. 國中各版本第二冊數學課本。

3. Joachim de Posada、Ellen Singer（2006）。先別急著吃棉花糖。臺北市：方智出版社。

主題 4－4：函數遊戲篇

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　**撰寫者：**丁斌悅

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　　陳彥廷

(一) 能理解指數律與科學記號。

(二) 能熟練等量公理與移項法則。

(三) 能理解二元一次方程式及其解的意義。

三、教學目標：

(一) 能認識函數。

(二) 能認識常數函數及一次函數。

四、教學時間：90 分鐘(兩節課)

五、教學說明：

本單元的教學活動，是希望學生能夠透過遊戲的方式，瞭解「函數的對應關係」以及熟悉「函數解」。從而更加認識「函數」，使「函數」在學生心中不再只是一個無意義的數學名詞與符號，而是有其意義且可理解的數學觀念；另一方面，我們也期望能夠藉助於一些遊戲，提升學生對於數學學習上的興趣！

六、教學活動：

活動一：（神奇的猜心術）

古時候，人類就會使用記號來表現數字，我們將它稱為「記數法」。然而，由於時代與國家的不同，所以呈現出來的結果也不

相同。在這裡，我們要來介紹的是「二進位」的進位法。二進位中，每往左邊移動一個位數，數值就變成了 2 倍，因此稱為二進位法。在二進位中，只會使用 0 和 1 兩個數字，是非常簡易的表現方式。以 2 的次方寫下的式子稱為進位的展開式。透過二進位的計算式子，二進位的數值$(1011)_2$會以十進位的數值$(11)_{10}$出現。表現二進位的方法很簡單，雖然式子的長度比十進位數列還要長，但由於簡單方便，因此現今的電腦全部都是採用二進位制。現在，我們要以十進位中的 1~15 為例，帶領各位同學來練習將十進位的數字轉化為二進位的數字：

1. 首先，請你依序完成下表中的數字填寫：

十進位數字	可寫成	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$	二進位表示
1	1	0	0	0	1	1
2	2	0	0	1	0	10
3	2+1	0	0	1	1	11
4	4	0	1	0	0	100
5	4+1	0	1	0	1	101
6	4+2	0	1	1	0	110
7	4+2+1	0	1	1	1	111
8	8	1	0	0	0	1000
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15	8+4+2+1	1	1	1	1	1111

【註解】：①函數(國七下各版本數學課本)：對於給定的一個 x 值，都恰有一個 y 值與它對應，這時我們就說「y 是 x 的函數」。

②像上述情形，**對於給定的一個十進位數字，都恰有一個二進位數字與它對應，這時我們就說「__________是__________的函數」**。

③事實上，我們可以將十進位的任何一個數對應至二進位的一個數，而且，這樣的對應都只會出現「**一(個十進位數字)**」對「**一(個二進位數字)**」的情形，這便是一種「**一對一的函數對應關係**」。

2. 從上表我們發現，每一個十進位的數都可以表示成以「1」和「0」所組成的二進位數。接下來，我們要利用二進位這樣的數值特性，將十進位 1~15 的數字安排至下列四張卡片中。而置放的規則如下：

(1)首先，我們將二進位表示的數字，統一從右邊開始算起，依序稱為第 1 位、第 2 位、第 3 位、…。以「十進位數字 6」為例，其「二進位表示的數字為 110」，它的第 2 位和第 3 位為 1，因此，我們就把「6」這個數字放在第 2 張卡片與第 3 張卡片中。

(2)接續，請以「●」完成下表製作：

十進位數字	二進位表示	置放入四張卡片			
		第 4 張	第 3 張	第 2 張	第 1 張
1	1				●
2	10			●	
3	11			●	●
4	100		●		
5	101		●		●
6	110		●	●	
7	111				
8	1000				
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					

(3)最後，我們依據上表的結果將「十進位 1~15 數字」放入下列圖卡中：

第一張卡

1	**3**	**5**	

第二張卡

2	**3**		

第三張卡

第四張卡

3. 當我們完成上面圖卡後，便可開始進行「神奇的猜心術」遊戲：

(1)首先，請一位同學或家人心中默想 1~15 的任何一個數字；

(2)接下來，請這位同學或家人依序觀察第一張卡~第四張卡，並說出他心中所想的數字曾出現在哪幾張；

(3)神奇的魔術師！你能猜出(算出)同學或家人心中所想的數字為何嗎？

1.表中數字填寫的答案如下：

十進位數字	可寫成	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$	二進位表示
1	1	0	0	0	1	1
2	2	0	0	1	0	10
3	2+1	0	0	1	1	11
4	4	0	1	0	0	100
5	4+1	0	1	0	1	101
6	4+2	0	1	1	0	110
7	4+2+1	0	1	1	1	111
8	8	1	0	0	0	1000
9	8+1	1	0	0	1	1001
10	8+2	1	0	1	0	1010
11	8+2+1	1	0	1	1	1011
12	8+4	1	1	0	0	1100
13	8+4+1	1	1	0	1	1101
14	8+4+2	1	1	1	0	1110
15	8+4+2+1	1	1	1	1	1111

【註解】：②像上述情形，**對於給定的一個十進位數字，都恰有一個二進位數字與它對應，這時我們就說「二進位數字是十進位數字的函數」**。

2.(2)以「●」完成下表製作：

十進位數字	二進位表示	置放入四張卡片			
		第 4 張	第 3 張	第 2 張	第 1 張
1	1				●
2	10			●	
3	11			●	●
4	100		●		
5	101		●		●
6	110		●	●	
7	111		●	●	●
8	1000	●			
9	1001	●			●
10	1010	●		●	
11	1011	●		●	●
12	1100	●	●		
13	1101	●	●		●
14	1110	●	●	●	
15	1111	●	●	●	●

2.(3)將「十進位 1~15 數字」放入下列圖卡中結果如下：

第一	**1**	**3**	**5**	**7**	**第二**	**2**	**3**	**6**	**7**
張卡	**9**	**11**	**13**	**15**	**張卡**	**10**	**11**	**14**	**15**

第三	**4**	**5**	**6**	**7**	**第四**	**8**	**9**	**10**	**11**
張卡	**12**	**13**	**14**	**15**	**張卡**	**12**	**13**	**14**	**15**

3.舉例來說，若同學說出他所想的數字曾出現在第 1, 2, 3 張。

那麼，我們即可推算出這個十進位數字的二進位表示法為「111」。接著，我們再進一步推算這個十進位數字即是

$1\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0=7$ 。

活動二：（填字遊戲）

凡是能化成 $y=ax+b$（a、b 為已知數）形式的函數，稱為「線型(性)函數」。若 $a\neq 0$，稱為「一次函數」。若(x_1，y_1)能滿足 $y=ax+b$，我們稱(x_1 ， y_1)為函數 $y=ax+b$ 的其中一解。

請同學試著將 0~9 數字（每個數字均須使用，且都只能使用一次）填入下列五個式子，使得下列每個式子均為正確：

(1) $y=9x+\square$　　($\square$ ，25)為其中一解。

(2) $y=-2x-\square$　　(－3，$\square$)為其中一解。

(3) $y=-3x-\square$　　(4，－2$\square$)為其中一解。

(4) $y=-\square x+1$　　(－3，1$\square$)為其中一解。

(5) $y=\square x-3$　　(－$\square$ ，－15)為其中一解。

解 欲順利解出本系列之線型函數問題，建議嘗試使用試誤(Trail and Error)方式依(1)→(5)→(4)→(2)→(3)之題號逐步試用數字進行：

1.從(1)的式子觀察，$25=9x+\square$。所以，可猜測 x 的值可能為_________。因為 x 若是 3 以上的數，那麼 $\square$ 中的數就為負數。

2.但是，x 的值只能為______。因為其餘的數都無法使 $\square$ 放入其他 0~9 的數字。因此，我們可確定(1)式中兩個 $\square$ 的數值。

3.接著，我們再觀察(5)式。$-15=\boxed{}x-3$，經過化簡後，我們得到$-12=\boxed{}x$。透過乘法的分析，我們可得

12=___×____=____×____。但是，∵在(1)式中，數字 2 已被使用，因此，我們就可確定(2)式中兩個$\boxed{}$的數值。

4.接下來，我們再觀察(4)式。$y=3\times\boxed{}+1$，其中，$10\le y\le 19$。而且，我們手中只剩下 0, 1, 5, 6, 8, 9 六個數字。∴我們猜測它可能的答案是 16=3×5+1 以及 19=3×6+1。

5.接著，我們再觀察(2)式。$y=6-\boxed{}$。從剩下的 0, 1, 5, 6, 8, 9 六個數字中，我們即可確認(2)的答案一定是$y=-2x-$____，而$x=$______。

6.因此，我們也可確認(4)式的答案。此時，我們手上只剩下數字 0, 8。我們將它們代入(3)式，發現合於所求。因此，我們即可得到下面的結果。

(1) $y=9x+\boxed{7}$　$(\boxed{2}$，25)為其中一解。

(2) $y=-2x-\boxed{1}$　$(-3$，$\boxed{5})$為其中一解。(1&5 可互換)

(3) $y=-3x-\boxed{8}$　$(4$，$-2\boxed{0})$為其中一解。

(4) $y=-\boxed{6}x+1$　$(-3$，$1\boxed{9})$為其中一解。

(5) $y=\boxed{4}x-3$　$(-\boxed{3}$，$-15)$為其中一解。(4&3 可互換)

七、指定作業：

1. 在活動一：(神奇的猜心術)中，若有一位同學說出他所想的數字曾出現在第 1, 3, 4 張。你能猜出(算出)他所想的數字為何嗎？

2. 請你仿照活動一，將十進位 1~31 的數字安排至下列五張卡片中：

(1)：

十進位數字	可寫成	$2^4=16$	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$	二進位表示
1	1	0	0	0	0	1	1
2	2	0	0	0	1	0	10
3	2+1	0	0	0	1	1	11
4	4	0	0	1	0	0	100
5	4+1	0	0	1	0	1	101
6	4+2	0	0	1	1	0	110
7	4+2+1	0	0	1	1	1	111
8	8	0	1	0	0	0	1000
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							

(2)：

十進位數字	二進位表示	置放入五張卡片				
		第 5 張	第 4 張	第 3 張	第 2 張	第 1 張
1	1					●
2	10				●	
3	11				●	●
4	100			●		
5	101			●		●
6	110			●	●	
7	111			●	●	●
8	1000		●			
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						
26						
27						
28						
29						
30						
31						

(3)：

第					**第**				
一					**二**				
張					**張**				
卡					**卡**				

第三張卡

第四張卡

第五張卡

3. 請你仿照 $\boxed{\text{活動二}}$，將 0~9 數字（每個數字均須使用，且都只能使用一次）填入下列五個式子，使得下列每個式子均為正確：

(1) $y=4x-\boxed{}$　　　$(\boxed{}, 25)$為其中一解。

(2) $y=-\boxed{}x+\boxed{}$　　　$(-4, 38)$為其中一解。

(3) $y=7x-\boxed{}$　　　$(5, 3\boxed{})$為其中一解。

(4) $y=-2x+\boxed{}$　　　$(7, -1\boxed{})$為其中一解。

(5) $y=8x+4$　　　$(\boxed{}, 3\boxed{})$為其中一解。

指定作業參考解答：

1. 若同學說出他所想的數字曾出現在第 1, 3, 4 張。那麼，我們即可推算出這個十進位數字的二進位表示法為「1101」。接著，我們再進一步推算這個十進位數字即是：

$1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=13$ 。

2. 仿照 活動一 ，將十進位 1~31 的數字安排至下列五張卡片中：

(1)：

十進位數字	可寫成	2^4=16	2^3=8	2^2=4	2^1=2	2^0=1	二進位表示
1	1	0	0	0	0	1	1
2	2	0	0	0	1	0	10
3	2+1	0	0	0	1	1	11
4	4	0	0	1	0	0	100
5	4+1	0	0	1	0	1	101
6	4+2	0	0	1	1	0	110
7	4+2+1	0	0	1	1	1	111
8	8	0	1	0	0	0	1000
9	8+1	0	1	0	0	1	1001
10	8+2	0	1	0	1	0	1010
11	8+2+1	0	1	0	1	1	1011
12	8+4	0	1	1	0	0	1100
13	8+4+1	0	1	1	0	1	1101
14	8+4+2	0	1	1	1	0	1110
15	8+4+2+1	0	1	1	1	1	1111
16	16	1	0	0	0	0	10000
17	16+1	1	0	0	0	1	10001
18	16+2	1	0	0	1	0	10010
19	16+2+1	1	0	0	1	1	10011
20	16+4	1	0	1	0	0	10100
21	16+4+1	1	0	1	0	1	10101
22	16+4+2	1	0	1	1	0	10110
23	16+4+2+1	1	0	1	1	1	10111
24	16+8	1	1	0	0	0	11000
25	16+8+1	1	1	0	0	1	11001
26	16+8+2	1	1	0	1	0	11010
27	16+8+2+1	1	1	0	1	1	11011
28	16+8+4	1	1	1	0	0	11100
29	16+8+4+1	1	1	1	0	1	11101
30	16+8+4+2	1	1	1	1	0	11110
31	16+8+4+2+1	1	1	1	1	1	11111

(2)：

十進位數字	二進位表示	置放入五張卡片				
		第 5 張	第 4 張	第 3 張	第 2 張	第 1 張
1	1					●
2	10				●	
3	11				●	●
4	100			●		
5	101			●		●
6	110			●	●	
7	111			●	●	●
8	1000		●			
9	1001		●			●
10	1010		●		●	
11	1011		●		●	●
12	1100		●	●		
13	1101		●	●		●
14	1110		●	●	●	
15	1111		●	●	●	●
16	10000	●				
17	10001	●				●
18	10010	●			●	
19	10011	●			●	●
20	10100	●		●		
21	10101	●		●		●
22	10110	●		●	●	
23	10111	●		●	●	●
24	11000	●	●			
25	11001	●	●			●
26	11010	●	●		●	
27	11011	●	●		●	●
28	11100	●	●	●		
29	11101	●	●	●		●
30	11110	●	●	●	●	
31	11111	●	●	●	●	●

(3)：

第	**1**	**3**	**5**	**7**	**第**	**2**	**3**	**6**	**7**
一	**9**	**11**	**13**	**15**	**二**	**10**	**11**	**14**	**15**
張	**17**	**19**	**21**	**23**	**張**	**18**	**19**	**22**	**23**
卡	**25**	**27**	**29**	**31**	**卡**	**26**	**27**	**30**	**31**

第	4	5	6	7	第	8	9	10	11
三	12	13	14	15	四	12	13	14	15
張	21	21	22	23	張	24	25	26	27
卡	28	29	30	31	卡	28	29	30	31

第	16	17	18	19
五	20	21	22	23
張	24	25	26	27
卡	28	29	30	31

3. 請你仿照 活動二 ，將 0~9 數字（每個數字均須使用，且都只能使用一次）填入下列五個式子，使得下列每個式子均為正確：

(1) $y=4x-\boxed{7}$ $(\boxed{8}，25)$為其中一解。

(2) $y=-\boxed{9}x+\boxed{2}$ $(-4，38)$為其中一解。

(3) $y=7x-\boxed{0}$ $(5，3\boxed{5})$為其中一解。(0&5 可互換)

(4) $y=-2x+\boxed{3}$ $(7，-1\boxed{1})$為其中一解。(3&1 可互換)

(5) $y=8x+4$ $(\boxed{4}，3\boxed{6})$為其中一解。

八、教學注意事項：

1. 各活動教學參考時間：活動一約 45 分鐘，活動二約 45 分鐘。
2. 使用此教材時，請依順序進行教學，較可達最佳學習效果。
3. 在各活動的教學過程中，教師應多注重師生間的互動，例如可多提問（同一問題也可問兩位以上的學生）、多鼓勵學生發表不同的看法並適度建立學生的信心（答對時給予言語上的獎勵，答錯時予以適當安慰並另請其他同學作答，若再答錯則老師應加強解說。若有藉機調皮搗蛋者亦應適度制止）、多走動教學以瞭解學生的學習情形、留下適當的時間供學生思考或討論等等。
4. 關於本教材的教學活動，主要是希望教師能在課餘時間，帶領學生從遊戲的過程中，深刻體會函數中「自變數(量) x 與應變數(量) y 間的關係」、函數的「對應關係」，以及熟悉「函數解」。
5. 若教師發現學生在活動一的解題歷程中有二進位的運算問題，教師可視時間另行加以指導，但不宜要求所有學生都能熟練，對於不熟稔的同學建議只要會使用卡片猜出同學心中所想的數字即可。
6. 在二進位的系統中，數值「10」不唸「ㄕˊ」，應唸「壹零」。教師在教學過程中應特別注意十進位的系統與二進位的系統

唸法上的差異，並應將其差異適時的教導學生；若有學生唸錯也應立即予以糾正。另外，十進位與二進位系統的寫法，例如：$(7)_{10}=(111)_2$，也可視班上的程度與上課的情形適度地予以補充給學生。

【註】：其中$()_{10}$的「$_{10}$」可以省略！

7. 本教材中之數字，若未特別指明，則皆為「十進位」系統之數字。
8. 在活動一中曾經提及「**一對一的函數對應關係**」。事實上，函數的對應關係不是只有「一對一」，還有「多對一」；教師在使用本教材時，不宜刻意強調「一對一」與「多對一」等名詞，只需讓學生瞭解函數的**對應**關係即可（對於**給定的一個 *x* 值**，都**恰有一個 *y* 值**與它對應，這時我們就說「*y* 是 *x* 的函數」。）
8. 本教材雖屬「遊戲篇」，但教師仍應於課程結束前，再次重述或強調本教材所想要呈現的精神：「**函數**」的「**對應關係**」。
9. 教師可以依班級程度，讓學生知道其實還有一些其他常用的進位系統，例如八進位、十六進位、…、等等；甚至如果有時間的話，教師可以進一步教授其內容，讓學生有一定程度的瞭解。
10. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
11. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的

獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 教育部(2008)。國民中小學九年一貫數學領域課程綱要。臺北市：教育部。

2. 國中各版本第二冊數學課本。

3.石珠淂、崔淳美、沈珍京(2012)。數學王：趣趣算術第一課。新北市：幼福文化事業。

主題 5－1：一元一次不等式

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　**撰寫者：**李政豐

二、先備知識：

(一) 能以不等式標示數的範圍或數線上任一線段的範圍。

(二) 能理解一元一次方程式及其解的意義,並能由具體情境中作一元一次方程式的列式。

(三) 能以等量公理與移項法則解一元一次方程式，並做驗算。

三、教學目標 (含核心概念或相關概念)：

(一) 能理解不等式的意義。

(二) 能由具體情境中列出簡單的一元一次不等式。

(三) 能解出一元一次不等式，並在數線上標示相關的線段。

(四) 能說明 $a \le x \le b$ 時 $y = cx + d$ 的範圍，並在數線上圖示。

(五) 能了解什麼是實數的三一律。

(六) 能了解：大於或等於、小於或等於、不大於、不小於的邏輯意義。

(七) 能了解生活情境中不等式產生的緣由。

(八) 能了解一元一次不等式四種類型 $ax > b$ 、 $ax < b$ 、 $ax \ge b$ 、 $ax \le b$ 的結構。

(九) 能瞭解不等式的等量公理(等量加、減、乘、除對不等式造成的影響)。

(十) 能理解：當不等式乘上一個負數為什麼會改變不等號的道理。

(十一) 學習解一次不等式的基本方法。

(十二) 能將一元一次不等式應用於日常生活當中。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

開始進行一次不等式教學活動設計之前,擬以三一律為基礎，說明≤、≥、＞、＜，四種不等號的邏輯意義，然後以代表性的是非題，觀察學生對四種不等號了解的程度，以確保學生對不等號判斷的能力。並加強學生對『不等式解』的認知，藉由等量公理，逐步引導學生求解一次不等式的技巧。尤其是『將不等式的雙邊乘上一個負數，不等號會顛倒』的性質，學生不易理解，需要更清楚的解釋方法。然後藉由生活上普遍應用的水費計算，讓同學們理解一次不等式，是多麼有用且重要的數學知識。

六、教學活動：

活動一：實數的三一律與四個不等號的邏輯意涵

1. 三一律：在實數線上的兩個數 a、b，則下列關係：

$a>b, a=b, a<b$ ，三者中恰有一個成立。

請您在下列的底線格子填上 <、=、 或>的符號

(1) $\frac{7}{2}$ ____ 3

(2) $\frac{5}{3}$ ____ 2

(3) $\frac{17}{5}$ ____ 3.4

2. $x \geq a$：表示 $x = a$ 或 $x > a$。其中一個成立，$x \geq a$ 即成立。

請您判斷下列式子的對錯(在式子後面空格填○或×)

(1) $8 \geq 8$ (　　)

(2) $9 \geq 5$ (　　)

(3) $6 \geq 7$ (　　)

3. $x \leq b$：表示 $x = b$ 或 $x < b$。其中一個成立，$x \leq b$ 即成立。

請您判斷下列式子的對錯(在式子後面空格填 O 或×)

(1) $15 \leq 12$ (　　)

(2) $17 \leq 17$ (　　)

(3) $16 \leq 17$ (　　)

4. x 不小於 a：

$x > a, x = a, x < a$ 三者中，若 $x < a$ 不成立，則 $x \geq a$ 成立

若甲的體重不小於乙，則下列哪些選項是可能成立的？

(1) 甲比乙重

(2) 乙比甲重

(3) 甲乙兩人一樣重

5. x 不大於 b：

$x>b, x=b, x<b$ 三者中，若 $x>b$ 不成立，則 $x\le b$ 成立

若甲的身高不大於乙，則下列哪些選項是可能成立的？

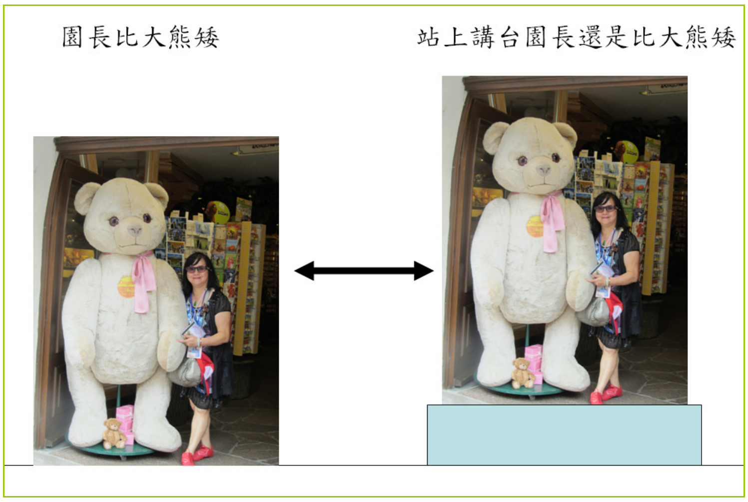
(1) 甲比乙高

(2) 乙比甲高

(3) 甲乙兩人一般高

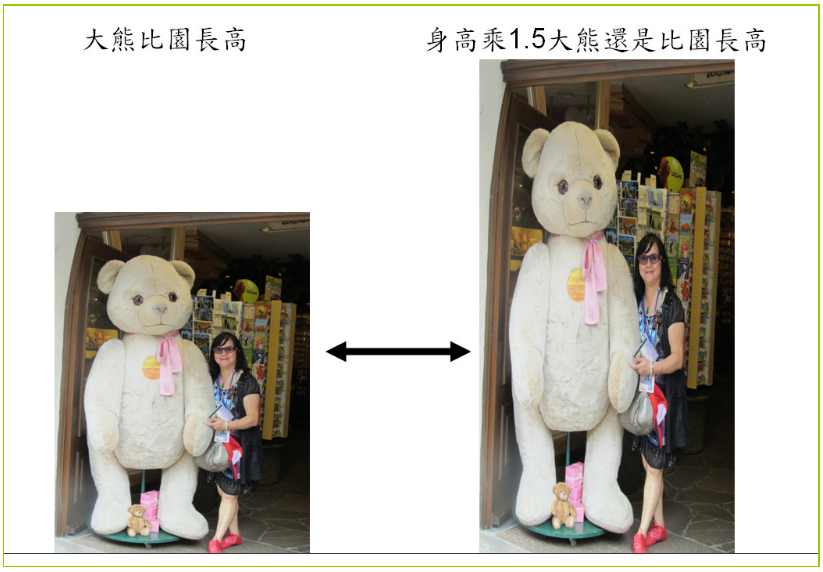
活動二：不等式的表示方法

圖式不等式的等量加法公理



$$b>a \Leftrightarrow b+s>a+s$$

圖式不等式的等量乘法公理(乘上正數)



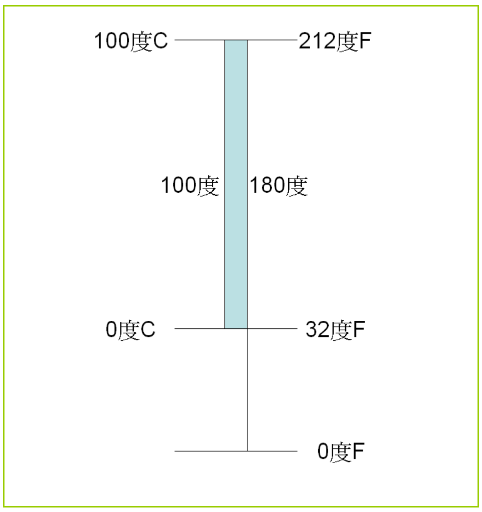
$$b > a \Leftrightarrow (1.5 \times b) > (1.5 \times a)$$

蘋果是很多人喜愛的水果，蘋果樹是一種喜歡低溫乾燥的溫帶果樹，要求冬無嚴寒，夏無酷暑。適宜的溫度範圍是年平均氣溫 9～14℃，冬季最低溫不低於-12℃，夏季最高月均溫不高於 20℃，才適合蘋果樹的成長。

攝氏(C)與華式(F)兩種溫度的轉換公式為：

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

將攝氏、華式兩種溫度由 0 度到 100 度刻度的對照表如下：



1.根據上面說明，若只將蘋果樹能忍耐的冬季最低溫度 -12℃(含-12 度)，即溫度 C 不小於-12，以攝氏溫度 C 表示其範圍的不等式為何？

2.若只將蘋果樹能忍耐的夏季最高溫度 20℃(含 20 度)，即溫度 C 不大於 20，以攝氏溫度 C 表示其範圍的不等式為何？

3.年平均氣溫的範圍 9～14℃(含 9 與 14 度)，以攝氏溫度 C 表示其範圍的不等式為何？

4.根據上面的說明，若將蘋果樹能忍耐的冬季最低溫度 -12℃(含-12 度)，即 $C \geq -12$，換算成華氏溫度 F 表示其範圍的不等式？

5.若將蘋果樹能忍耐的夏季最高溫度 20℃(含 20 度)，即 $C \leq 20$，換算成華氏溫度 F 表示其範圍的不等式？

6.年平均氣溫的範圍 9～14℃(含 9 度與 14 度)，換算成華氏溫度 F，即由 $9 \leq C \leq 14$ 換算，請列出 F 範圍的不等式？

活動三：不等式的等量乘法公理

1. 當不等式兩邊同乘正數，不等號不變。

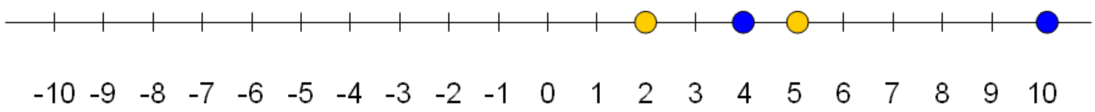
(1) $2 < 5 \Leftrightarrow (2\times2)<(2\times5)$

①在數線上，2 在 5 的_____ (填左邊或右邊)

把不等式兩邊同乘 2，當 2 乘上 2，得到它兩倍的數 4，當 5 乘上 2，得到它兩倍的數 10。

②此時 4 位於 10 的______ (填左邊或右邊)

③因此得到：4 ______ 10　(填＜，＞或＝)



(2)　$-2<5 \Leftrightarrow (-2\times2)$______$(5\times2)$　(填＜，＞或＝)

(3)　$-5<-2 \Leftrightarrow (-5\times2)$______$(-2\times2)$　(填＜，＞或＝)

2. 當不等式兩邊同乘負數，不等號改變。

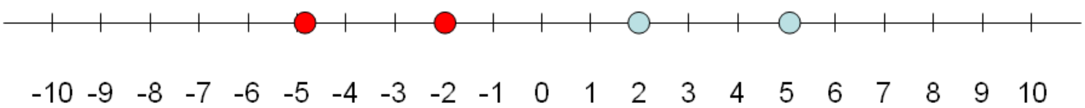
(1)　$2<5$　，將不等式兩邊同乘(-2)

① 在數線上，2 在 5 的________ (填左邊或右邊)

當不等式兩邊同乘-1，當 2 乘上(-1)，得到它的相反數-2，5 乘上(-1)，得到它的相反數-5

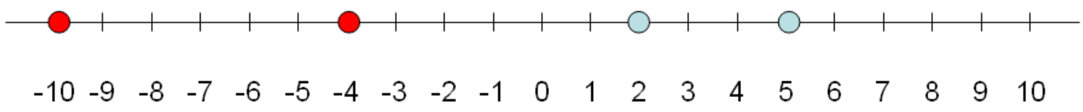
②此時(-2)位於(-5)的________ (填左邊或右邊)

③ 因此得到：(-2) ______ (-5)　(填＜，＞或＝)



④如果將 2＜5 的不等式兩邊同乘(-2)，則先同乘(-1)變號成相反數，即為(-2)_____(-5) (填＜，＞或＝)

⑤再放大兩倍，則得到(-4)_____(-10) (填＜，＞或＝)



（2）－2＜3 (當不等式兩邊同乘負數，不等號會顛倒)

①在數線上，-2 在 3 的_________ (填左邊或右邊)

當不等式兩邊同乘-2，我們將它分成兩個步驟：

第一步先同乘(-1)，

把-2 乘上(-1),得相反數 2，把 3 乘上(-1),得相反數-3

②此時 2 位於-3 的__________ (填左邊或右邊)

③因此得到 2 ______ -3 (填＜，＞或＝)

第二步再同乘 2

④得到 4 _______ -6 (填＜，＞或＝)

（3）-3＜-2 (當不等式兩邊同乘負數，不等號改變)

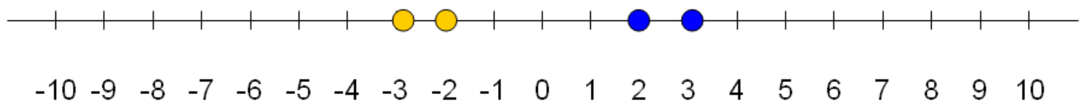
①在數線上，-3 在-2 的________ (填左邊或右邊)

將不等式兩邊同乘-1，當-3 乘上(-1)，得到它的

相反數 3，-2 乘上(-1)，得到它的相反數 2

②此時 3 位於 2 的________ (填左邊或右邊)

③因此得到：3 _________ 2 (填＜，＞或＝)



活動四：一次不等式在生活中的應用

台灣自來水公司 97.07.12 核定的用水費計算表

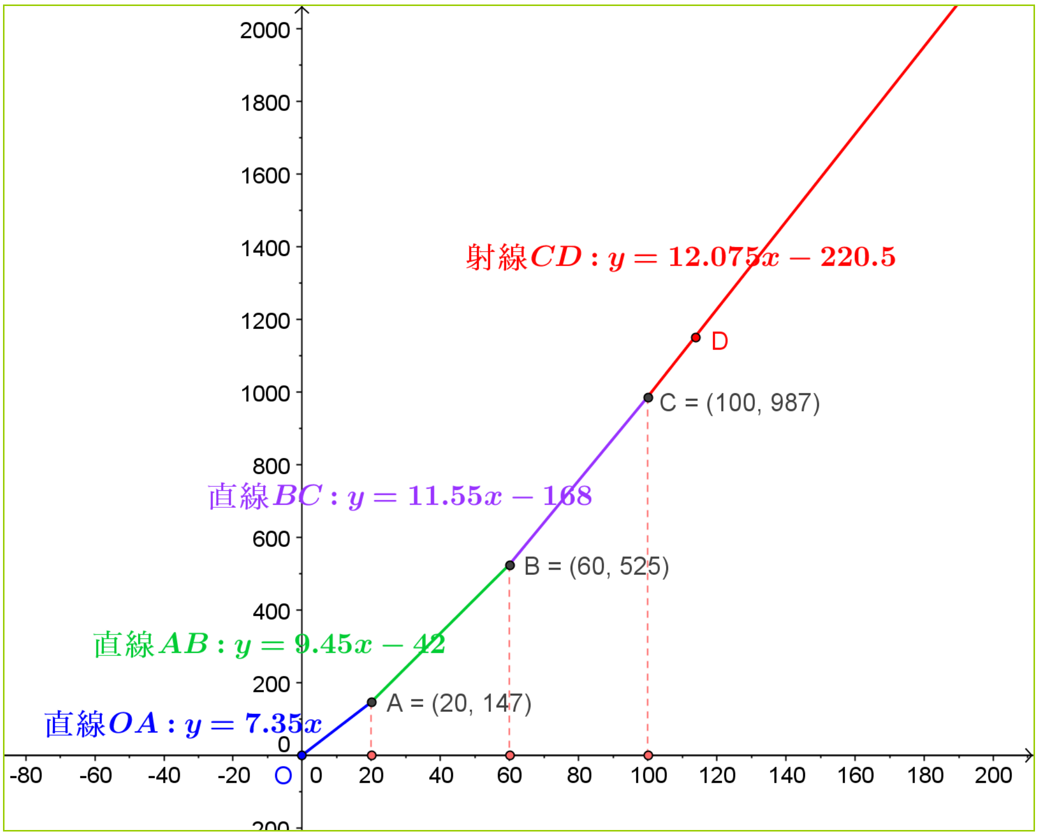
目前台灣自來水公司每兩個月收費一次(收取的費用包括清除處理費、水源保育與回饋費、基本費、用水費四個項目的總和)在此我們僅只討論其中一項：用水費的計算公式，以彰顯一次不等式應用在日常生活中的重要性。

台灣自來水公司為了因應全球水資源日益匱乏，善盡環境保護，節約用水之責任，訂定水費「分段累進計費」公式，亦即用水愈多單價愈高，以期達成節約用水之目的。

令兩個月的用水度數為 x (1 度水是 1 立方公尺的水量)，設用水費的函數為 $f(x)$，則有下列的函數關係：

1. $0 < x \le 20$，$f(x) = 7.35x$
2. $20 < x \le 60$，$f(x) = 9.45x - 42$
3. $60 < x \le 100$，$f(x) = 11.55x - 168$
4. $100 < x$，$f(x) = 12.075x - 220.5$

它的函數圖形如下：



(1)假設自來水公司在每月 1 日抄水錶，抄錶員在 101 年 6 月 1 日查到李先生的水錶度數是 1350 度，101 年 8 月 1 日再查到李先生的水錶度數是 1430 度，請問李先生在 101 年 6 月 1 日~101 年 8 月 1 日之間的用水費是多少錢？

(2)根據上圖，如果李先生兩個月的用水費 $f(x)$，$1470 \le f(x) \le 1953$，請問李先生兩個月的用水量 x 的範圍是多少？

活動五：一次不等式在計算成績的應用

某校數學科學期成績的計算方法是：第一次段考與第二次段考的平均佔 30%，平時成績佔 30%，第三次段考(期考)佔 40%。在期

考之前，學生小華已知自己的第一次段考成績是 40 分，第二次段考的成績是 20 分，老師給的平時成績是 50 分，則小華的期考成績 x 的範圍要多少(最大的範圍是 100 分)，他的學期成績才會及格。

1.列不等式的過程：

小華一、二次段考平均 $\frac{40+20}{2}=30$

段考平均佔 30%，$30\times0.3=9$

平時成績佔 30%，$50\times0.3=15$

期末考佔 40%，$0.4x$

由上面結果，列出不等式為何？

2.解不等式，得到期考成績 x 的範圍是多少？

活動六：絕對值與距離

絕對值是計算兩點間距離最方便的工具，距離是一個純量，是一個非負的數：

1.在數線上 $|8-6|=|6-8|=2$，都是代表坐標 8 與 6 的距離是 2。

2.$|x|=1$ 即是代表 $|x-0|=1$，說明坐標 x 與原點之間的距離是 1，此時 x 可能在原點的右邊一單位，也可能在原點的左邊一單位，因此 $x=1$ 或 $x=-1$ 都是對的。

3.$|x-8|\le 2$，是代表以 8 為中心，所有與 8 距離小於或等於 2 的點

所成的範圍，故$(8-2)\le x\le(8+2)$。

4.$|x-8|\ge 2$，是代表以 8 為中心，所有與 8 距離大於或等於 2 的點所成的範圍，故$x\ge(8+2)$或$x\le(8-2)$。

請您利用距離的概念，求出下列 8 個不等式 x 所在的範圍，將它表示成類似$a\le x\le b$的形式，並圖示不等式範圍。例如

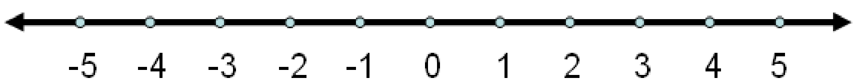
不等式$1\le x\le 7$ 的圖示為

(1) $|x|<3$

代表 x 與原點的距離比 3 小，故_____$<x<$_____。

有包含兩端點嗎？_______(填包含或不包含)。

請您在下圖中畫出解集合：

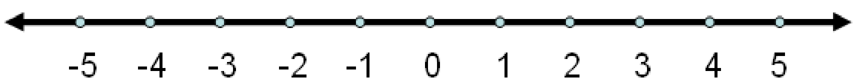


(2) $|x|\le 3$

代表 x 與原點的距離小於或等於 3，故____$\le x\le$____ 。

有包含兩端點嗎？_______(填包含或不包含)。

請您在下圖中畫出解的範圍：

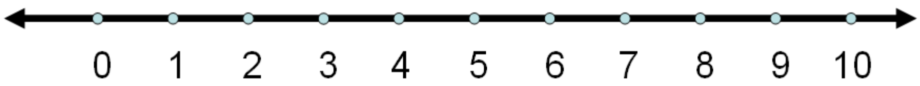


(3) $|x-5|<3$

代表以 5 為中心，x 與 5 的距離比 3 小，故$5-$___$<x<5+$___ 。

有包含兩端點嗎？_______(填包含或不包含)。

請您在下圖中畫出解的範圍：



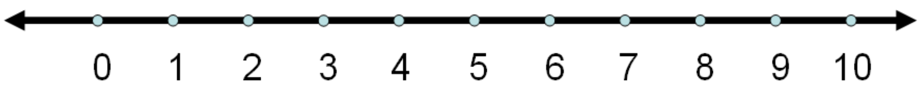
(4) $|x-5|\le 3$

代表以 5 為中心，x 與 5 的距離小於或等於 3(也稱不大於 3)，

故$5-$___$\le x\le 5+$___ 。

有包含兩端點嗎？_______(填包含或不包含)。

請您在下圖中畫出解集合：

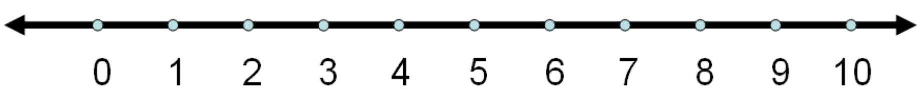


(5) $|3|>3\Leftrightarrow|x-0|>3$

代表 x 與 0 的距離比 3 大，故$x>$___ ，或$x<$___ 。

有包含兩端點嗎？_______(填包含或不包含)。

請您在下圖中畫出解的範圍：

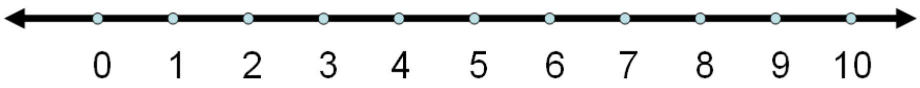


(6) $|x|\geq 3$

代表 x 與 0 的距離大於或等於 3，故 $x\geq$___ ，或 $x\leq$___ 。

有包含兩端點嗎？________(填包含或不包含)。

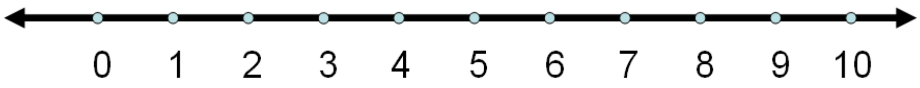
請您在下圖中畫出解集合：



(7) $|x-5|>3$

代表以 5 為中心，x 與 5 的距離比 3 大，故 $x>5+$___ 或 $x<5-$___ 。有包含兩端點嗎？_______(填包含或不包含)。

請您在下圖中畫出解集合：

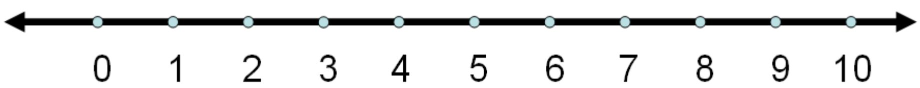


(8) $|x-5|\geq 3$

代表 x 與 5 的距離等於 3 或大於 3，故 $x\geq$___ ，或 $x\leq$___ 。

有包含兩端點嗎？_______(填包含或不包含)。

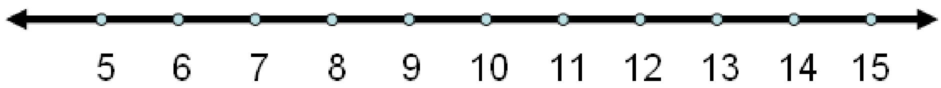
請您在下圖中畫出解的範圍：



活動七：聯立不等式的解

1. $2 \le |x-10| \le 4$

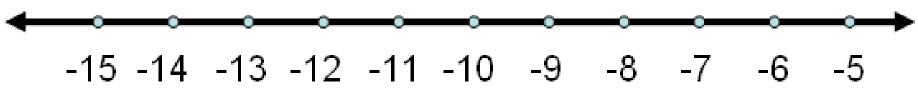
它是聯立不等式$\begin{cases} 2 \le |x-10| \\ |x-10| \le 4 \end{cases}$的解，即兩個不等式的交集(共同部分)，代表以 10 為中心，x與 10 的距離大於或等於_______且小於或等於______，故___$\le x \le 8$，或 $12 \le x \le$____，它有包含端點嗎______。請您在下圖中畫出解集合：



2.滿足條件 $3 \le |x+10| \le 5$的整數有多少個？

不等式$3 \le |x-(-10)| \le 5$代表以－10 為中心，x與－10 的距離大於或等於____且小於或等於____，故_____$\le x \le -5$，或

$-15 \le x \le$____，它包含端點嗎？______。這兩線段包含的整數共有_______個。請您在下圖中畫出解集合，再描出整數點。



3.不等式$-10 \le x \le 20$與$|x-a| \le b$的解完全相同，求整數a、b？

解的範圍$-10 \le x \le 20$可用閉區間$[-10,20]$表示，它包含兩端點，它的中點是_____，用距離的觀點來看，線段兩端點與中心的距離都是_____，故以絕對值表示為$|x-$___$| \le$___，即$a=$____，

b=_____。

4.不等式($5\le x\le 8$ 或 $12\le x\le 15$)與 $a\le|x-b|\le c$ 的解完全相同，求整數 a、b、c？

$5\le x\le 8$ 可用[5,8]表示，$12\le x\le 15$ 可用[12,15]表示，都包含兩端點。

閉區間[5,8]與[12,15]的長度都是 3，其對稱中心在數線上的點座標是____。內端點 8、12 與對稱中心的距離都是_____。外端點 5.15 與對稱中心的距離都是_____。

故($5\le x\le 8$ 或 $12\le x\le 15$)$\Leftrightarrow$ ___ $\le|$x $-$ ___$|\le$ ____

即 a=_____, b=_____, c=_____。

教學活動參考解答：

活動一：

1.(1) >，(2) <，(3) =。　2.(1)○，(2)○，(3) ✕。

3.(1)✕，(2)○，(3)○。　4. (1)(3)。　5.(2)(3)。

活動二：

1. C≥－12 或－12≤C>。　2. C≤20 或 20≥C。

3. 9≤C≤14 或 14≥C≥9。　4. F≥10.4 或 10.4≤F。

5. F≤68 或 68≥F。　6. 48.2≤F≤57.2 或 57.2≥F≥48.2。

活動三：

1.(1)①左邊，②左邊，③4＜10；(2) -4＜10；(3) -10＜-4。

2. (1)①左邊，②右邊，③ -2＞-5，④ -2＞-5，⑤ -4＞-10；

(2)①左邊，②右邊，③ 2＞-3，④ 4＞-6；

(3)①左邊，②右邊，③ 3＞2。

活動四：

(1) 756；

(2) $140 \le x \le 180, 1470 \le$ 水費 $f(x) \le 1953$，知道用水超過 100 度，水費函數為 $f(x) = 12.075x - 220.5$，由 $1470 = 12.075x - 220.5$，解得 x=140，由 $1953 = 12.075x - 220.5$，解得 x=180。

活動五：

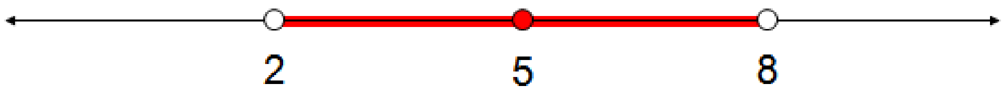
1. $\left(\frac{40+20}{2}\right) \times 0.3 + 50 \times 0.3 + 0.4x \ge 60$。　　2. $90 \le x \le 100$。

活動六：

4.(1) $|x| < 3$，代表 x 與原點的距離比 3 小，故 $-3 < x < 3$，不含兩端點。

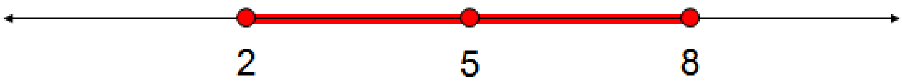
(2) $|x| \le 3$，代表 x 與原點的距離小於或等於 3，故 $-3 \le x \le 3$ 包含兩端點。

(3) $|x-5| < 3$，代表 x 與 5 的距離比 3 小，故 $5-3 < x < 5+3$，不含兩端點。



(4)$|x-5|\leq 3$，代表 x 與 5 的距離比 3 小或等於 3，

故 $(5-3)\leq x\leq(5+3)$ ，包含兩端點。

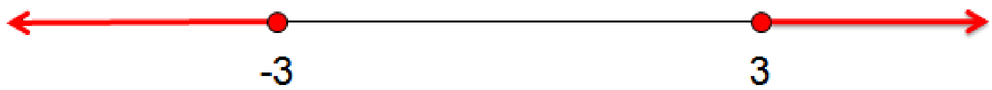


(5)$|x|>3 \Leftrightarrow |x-0|>3$ 代表 x 與 0 的距離比 3 大，故 $x>3$ ，

或 $x<-3$ ，但不包含兩端點。

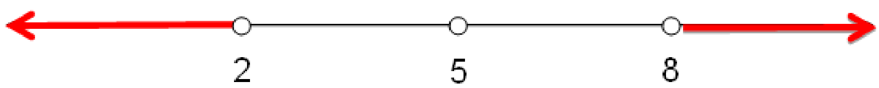
(6)$|x|\geq 3 \Leftrightarrow |x-0|\geq 3$ 代表 x 與 0 的距離等於 3 或比 3 大，

故 $x\geq 3$ ，或 $x\leq -3$ ，它包含兩端點。



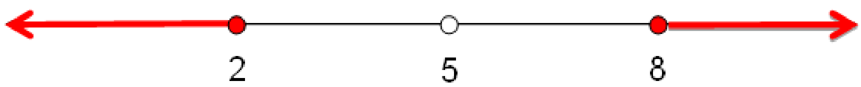
(7)$|x-5|>3$ 代表 x 與 5 的距離比 3 大，故 $x>8$ ，或 $x<2$ ，

但不包含兩端點。



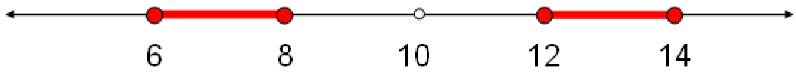
(8)$|x-5|\geq 3$ 代表 x 與 5 的距離等於 3 或大於 3，故 $x\geq 8$，或 $x\leq 2$，

它包含兩端點。

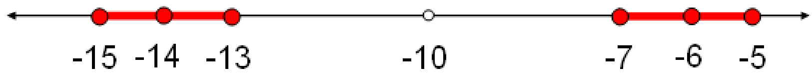


活動七：

1. 2，4，6，14，有，



2. 3，5，-7，-13，有，這兩個線段包含的整數共有 6 個。



3. 5，15，$|x-5|\leq 15$，a=5，b=15。

4. 10，2，5，$2\leq|x-10|\leq 5$，a=2，b=10，c=5。

八、教學注意事項：

1.各教學活動建議時間如下，活動一約 10 分鐘，活動二～四各約 15 分鐘，活動五～六各約 10 分鐘，活動七約 15 分鐘。

2.活動一：

(1)兩個已知數 a、b 比大小，若只有<、=、或>可選，則恰有一個符號是對的。

(2) $x\geq a$：需強調 $x=a$ 或 $x>a$，有一個成立即可。

(3) $x\leq b$：要強調 $x=b$ 或 $x<b$，有一個成立即可。

(4) x 不小於 a：需強調：「小於 a」不對，故 $x\geq a$。

(5) x 不大於 b：需強調：「大於 b」不對，故 $x\leq b$。

3.活動二：

(1) $F=\frac{9}{5}C+32$ 的華式攝氏換算公式，可以由圖示看出道理。

(2)水結冰到沸騰相差攝氏溫度 100 度，相差華氏溫度 180 度，

100:180=5:9，分數 $\frac{9}{5}$ 由此得來。

(3)水結冰溫度是攝氏溫度 0 度，也是華氏溫度 32 度。

$(F-32)=C\times\frac{9}{5}$, 由等量加法公理(同加 32), 得到 $F=\frac{9}{5}C+32$ 。

(4)把不等式的每一項同乘一個正數，不等號不會改變。

(5)把不等式的每一項同加一個數(正數、負數、或 0)，不等號也不會改變。

4.活動三：

(1)當不等式同乘正數 k，其對應的數線上的坐標就伸縮 k 倍，其大小關係不變，因此不等號不變。

(2)當不等式同乘 $-k$(k 是正數)，其對應的數線上坐標先變號成相反數，再伸縮 k 倍，其大小關係改變，因此不等號改變。

5.活動四：

(1)第(1)題的目的在讓學生懂得自來水公司的用水費如何計算，讓同學熟悉函數值求值的計算。

(2)第(2)題的目的在讓學生懂得當兩個用水費在同一個線段(或射線)內，如何解一次不等式，以求得用水量的範圍。

6.活動五：一元一次不等式的解法，常需要用到等量加法與等量乘法公理，如果能熟悉移項法則，解題速度會加快許多。

7.活動六：

(1)所述 8 個絕對值不等式，常根據絕對值內的正負性質，先去絕對值，變成兩個不等式求解，最後的解則取其聯集。

(2)用距離的概念解絕對值不等式，則是清楚易懂的直觀方法，有不錯的學習效果。

8.活動七：當我們看見類似$a \le |x-b| \le c$的不等式，有兩個不等號，就表示需要解兩個不等式，兩個不等號出現在同一個不等式，就代表要取兩個不等式解的交集，此時用距離的概念解不等式，會比不等式解的交集更直觀易懂。

9.在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

10.在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1.張幼賢等(2012)。國民中學數學第二冊。台南市：翰林出版社。

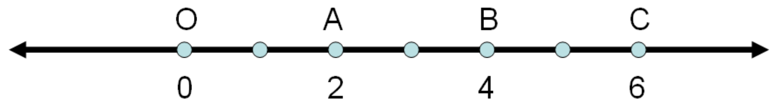
2.洪有情等(2012)。國民中學數學第二冊。新北市：康軒文教。

3.朱建正等(1999)。基礎數學統合下冊。台北市：國立編譯館。

十、附錄：

【一個最短距離的運輸問題】

在一條筆直的公路上，某公司新成立了三家超商 A、B、C，



其坐標分別是 O(0),A(2),B(4),C(6)，如果公司想在數線上建一座大倉庫 S，且每星期必須派卡車分別到三家超商補貨一次(即卡車必須載滿貨物到其中一家超商卸完所有貨物後再折返倉庫)，則倉庫 S 要建在哪裡會使得補貨卡車行駛的距離最短？

1.假設倉庫的坐標是 S(x)，由 S 到 A 補貨一次，卡車行駛的距離(含往返)用絕對值表示是________

2.卡車每星期到三家超商補貨行駛的距離用 x 的函數表示是

$f(x)=$________　。

3.當 $x \le 2$，去掉絕對值，$f(x)=$________　。

4.當 $2 \le x \le 4$，去掉絕對值，$f(x)=$________　。

5.當 $4 \le x \le 6$，去掉絕對值，$f(x)=$________　。

6.當 $x \ge 6$，去掉絕對值，$f(x)=$________　。

7.請畫出函數 $y=f(x)$ 的圖形(取 x=0,2,4,6,8 兩點連成一線)

8.請問倉庫 S 要建在哪裡會使得補貨的卡車行駛的距離會最短？

9.這個最短距離是多少？

隨堂練習 1：假設超商 C 的生意特別好，每星期要補三次貨，其他 A,B 只要補一次貨，那倉庫 S 要建在哪裡，會使得補貨的卡車行駛的距離會最短？

隨堂練習 2：假設再增設一家超商 D(8)，每星期各家超商均補一次貨，則倉庫 S(x)要建在哪裡，會使得補貨的卡車行駛的距離會最短？

隨堂練習 3：

(1)在前面第 8 題，當有三個超商坐標 2,4,6 時，最中間的 4 會使函數值最小。

(2)在隨堂練習 1 超商 C 要補三次貨時，三個超商坐標 2,4,6,6,6 最中間的 6 會使函數值最小。

(3)在隨堂練習 2 增加一個超商 D，四個超商坐標 2,4,6,8 最中間的 $4 \le x \le 6$ 會使函數值最小。

您是否能將這個現象歸納出：x 要取多少，會使得函數值為最小的結論？最小的函數值是多少？

結論：

1.未來當學生學過統計的中位數時，他會很容易的聯想到，$f(x)=2|x-2|+2|x-4|+2|x-6|=2(|x-2|+|x-2|+|x-6|)$，函數最小值的 x 就是發生在 2,4,6 三數的中位數(排序後最中間的數)。

2.當 $f(x)=2(|x-2|+|x-4|+3|x-6|)$，我們可看成近似函數

$g(x)=2(|x-2|+|x-4|+|x-6|+|x-6.001|+|x-6.002|)$，再取

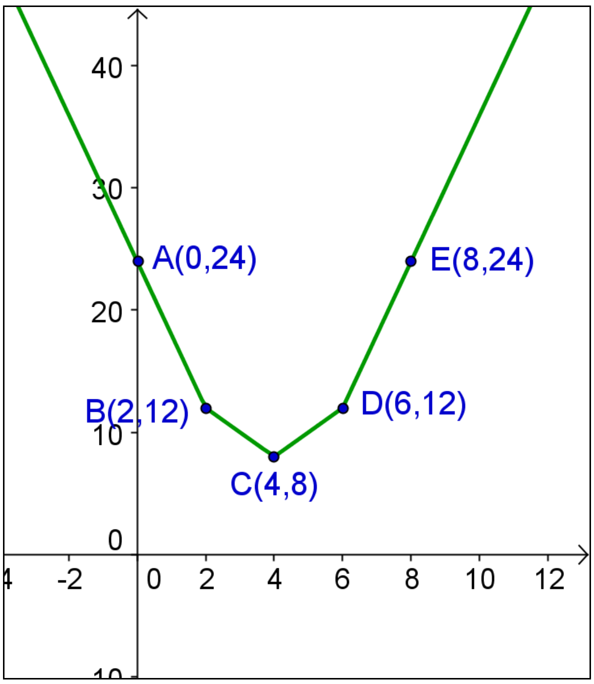
2,4,6,6.001,6.002 六個數的中位數 6。

附錄參考解答：

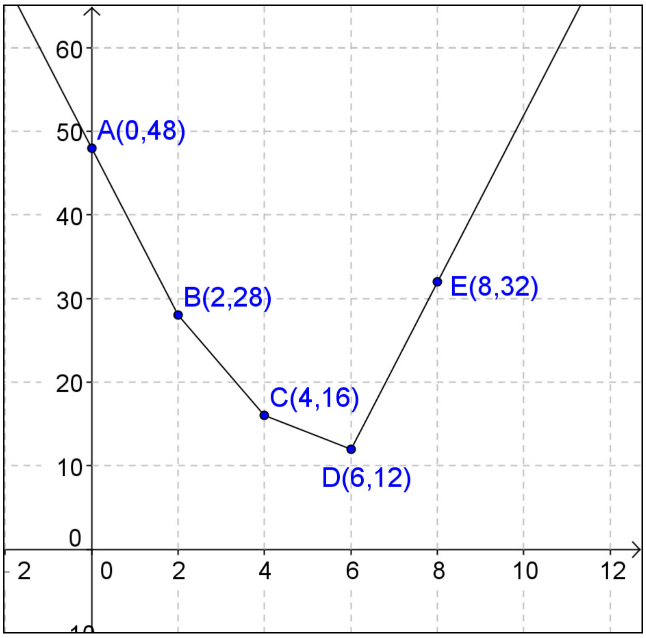
1. $2|x-2|$。 2. $2|x-2|+2|x-4|+2|x-6|$。 3. $-6x+24$。 4. $-2x+16$。

5. $2x$。 6. $6x-24$。 8. $x=4$。 9. 8。

7.

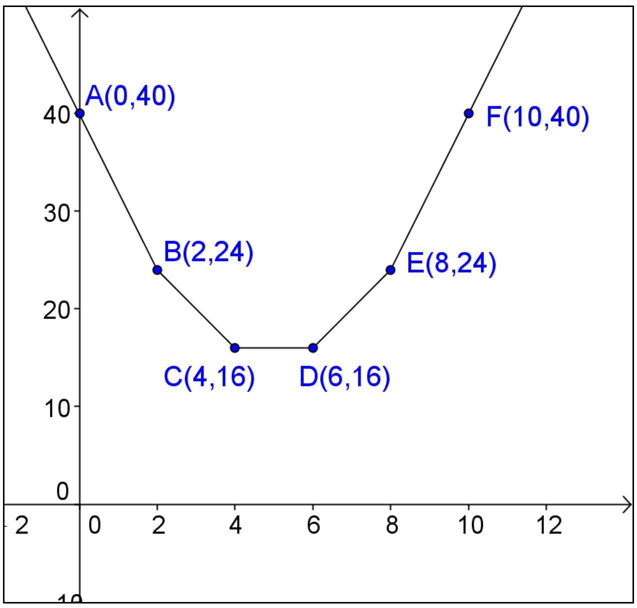


隨堂練習 1：



$x=6$

隨堂練習 2：



$4\leq x\leq 6$

隨堂練習 3：

當有奇數個坐標時(補貨三次要算 3 個坐標)，最中間那個數會使函數值最小，當有偶數個坐標時，介於最中間兩坐標之間的任意數，

都會使使函數值最小。

主題 5－2：二元一次不等式

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　**撰寫者**：李政豐

二、先備知識：

(一) 能理解二元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次方程式。

(二) 能理解二元一次聯立方程式及其解的意義，並能作二元一次聯立方程式的列式。

(三) 能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。

(四) 能理解二元一次方程式解以直線上的點座標表示的幾何意義。

(五) 能理解不等式的意義。

(六) 能解出一元一次不等式，並在數線上標示相關的線段。

(七) 能瞭解：大於或等於、小於或等於、不大於、不小於的意涵。

(八) 能瞭解生活情境中不等式產生的緣由。

(九) 能瞭解不等式的等量公理(等量加、減、乘、除對不等式造成的影響)。

三、教學目標 ：

(一) 能說明 $a \le x \le b$ 時 $y = cx + d$ 的範圍，並在數線上圖示。

(二) 能瞭解二元一次不等式四種類型 $ax + by + c > 0$ 、$ax + by + c < 0$ 、$ax + by + c \ge 0$ 、$ax + by + c \le 0$ 的結構。

(三) 能瞭解並圖示二元一次不等式的解。

(四) 能瞭解聯立二元一次不等式的圖解。

(五) 能將一次不等式應用於日常生活當中(含一元一次及二元一次不等式)。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

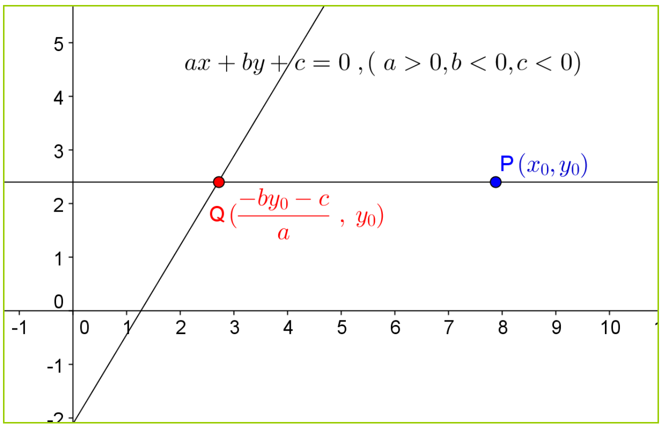
五、教學說明：

在一元一次不等式之後，進而適時利用圖解的方式，引進二元一次不等式的四個類型 $ax+by+c\leq 0$，$ax+by+c\geq 0$，$ax+by+c>0$，$ax+by+c<0$。讓學生了解『什麼是二元一次不等式的解』，將一次不等式的概念由一度空間的數線提升到二度空間的平面，為以後高中的直線方程式及線性規劃的學習做基礎。

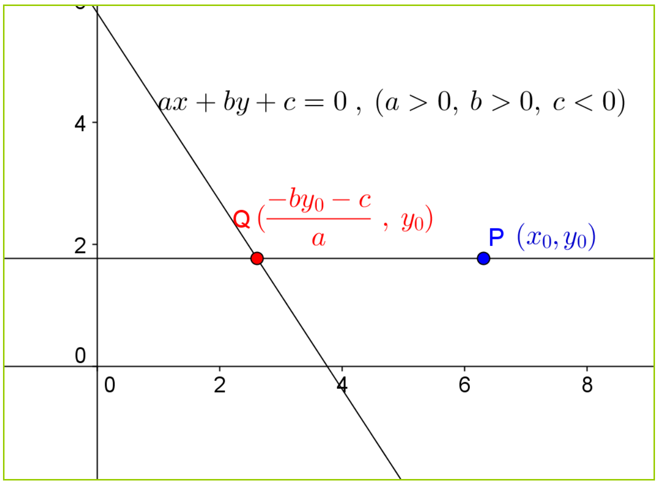
六、教學活動：

教學活動說明：二元一次不等式解的判別

1. 不失一般性可設 x 的係數為正，然後作左右判定。



圖(一)



圖(二)

如上面圖(一)、圖(二)直角坐標系的直線 $ax+by+c=0$ $(a>0)$右邊有一個點 $P(x_0,y_0)$，過 P 作 x 軸的平行線交直線於$Q\left(\dfrac{-by_0-c}{a}\ ,\ y_0\right)$，

因為 P 在 Q 的右邊，故得到 $x_0>\dfrac{-by_0-c}{a}$ ，

兩邊同乘 a，得到

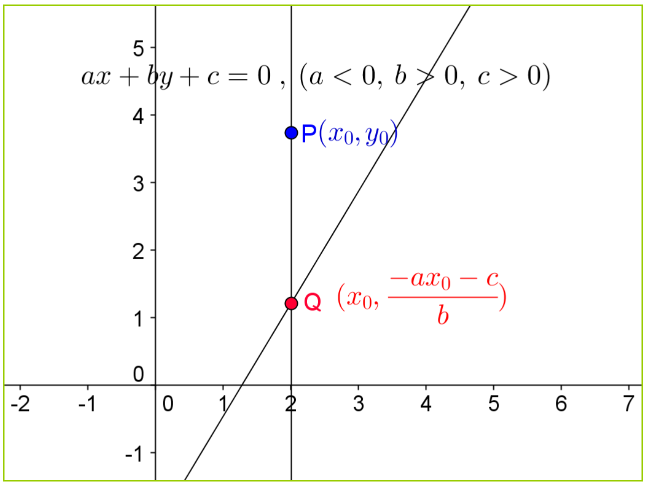
$ax_0>-by_0-c$ ，亦即 $ax_0+by_0+c\ >0$

(請問上面的證明哪裡用到 $a>0$ 的條件？)

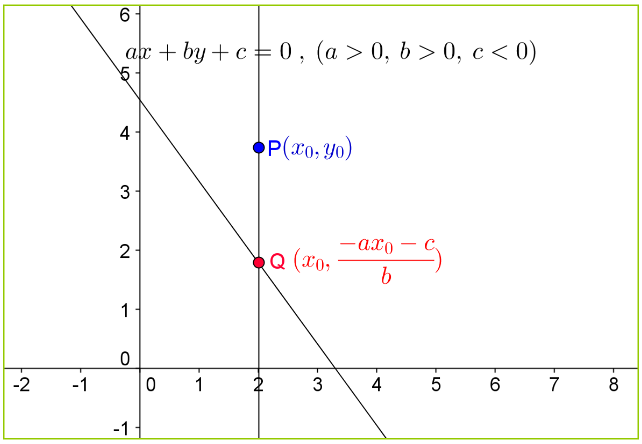
也就是說：當直線 $ax+by+c=0$ $(a>0)$，將右邊的點 $P(x_0,y_0)$代入直線，會得到二元一次不等式 $ax_0+by_0+c>0$ 。

同理可得證：當直線 $ax+by+c=0$ $(a>0)$，將左邊的點 $P(x_0,y_0)$代入直線，會得到二元一次不等式 $ax_0+by_0+c<0$ 。

2. 不失一般性可設 y 的係數為正，然後作上下判定。



圖(三)



圖(四)

如上面圖(三)、圖(四)，直角坐標系的直線 $ax+by+c=0 \quad (b>0)$

上方有一個點 $P(x_0,y_0)$，過 P 作 x 軸的垂直線交直線於 $Q\left(x_0 , \dfrac{-ax_0-c}{b}\right)$，

因為 P 在 Q 的上方，故得到 $y_0 > \dfrac{-ax_0-c}{b}$ ，

兩邊同乘 b，得到

$by_0 > -ax_0 - c$ ，亦即 $ax_0 + by_0 + c > 0$

(請問上面的證明哪裡用到 $b>0$ 的條件？)

也就是說：當直線 $ax+by+c=0$ $(b>0)$，將上方的點 $P(x_0,y_0)$代入直線，會得到二元一次不等式的值 $ax_0+by_0+c>0$ 。

同理可證：當直線 $ax+by+c=0$ $(b>0)$，將下方的點 $P(x_0,y_0)$代入直線，會得到二元一次不等式的值 $ax_0+by_0+c<0$ 。

我們可以將這個現象整理後，得出下列四種結論：

(1)將點 $P(x_0,y_0)$代入直線，會得到二元一次不等式 $ax_0+by_0+c>0$ $(a>0)$，則點 $P(x_0,y_0)$在直線 $ax+by+c=0$ 的右邊。

(2)將點 $P(x_0,y_0)$代入直線，會得到二元一次不等式 $ax_0+by_0+c<0$ $(a>0)$，則點 $P(x_0,y_0)$在直線 $ax+by+c=0$ 的左邊。

(3)將點 $P(x_0,y_0)$代入直線，會得到二元一次不等式 $ax_0+by_0+c>0$ $(b>0)$，則點 $P(x_0,y_0)$在直線 $ax+by+c=0$ 的上方。

(4)將點 $P(x_0,y_0)$代入直線，會得到二元一次不等式 $ax_0+by_0+c<0$ $(b>0)$，則點 $P(x_0,y_0)$在直線 $ax+by+c=0$ 的下方。

活動一：

坐標平面有一條直線 $3x-y-6=0$，及 13 個點 A(4,4)、B(2,2)、C(5,4)、D(2,3)、E(3,4)、F(5,1)、G(3,5)、H(11，1)、I(3,6)、J(11,4)、K(12,4)、L(4,7)、M(8,7)。

將點坐標代入 $3x-y-6$，有的出現正數，代表點在直線的右邊。有的出現負數，代表點在直線的左邊。

1. 這 13 個點坐標分別代入 $3x$-y-6 的值是多少？
2. 將這些點坐標代入 $3x$-y-6 的值是正數的點，在直角坐標平面上描點後依字母順序用折線連接，最後一個再連到第一個，請問這個圖形像什麼？

(如果右邊的點有 B、E、H，則要連 BE、EH、HB 三個線段。)

結論：

1. $a>0$，P(x_0,y_0)代入直線 $ax+by+c=0$ ，

   得到 $ax_0+by_0+c>0 \Leftrightarrow$ 則點 P 在直線的右邊

   得到 $ax_0+by_0+c<0 \Leftrightarrow$ 則點 P 在直線的左邊

   如果 x 係數是負的，則先乘上(-1)讓係數及不等號改變，再行判定。

2. b>0，P(x_0,y_0)代入直線 $ax+by+c=0$ ，

   得到 $ax_0+by_0+c>0 \Leftrightarrow$ 則點 P 在直線的上方

   得到 $ax_0+by_0+c<0 \Leftrightarrow$ 則點 P 在直線的下方

   如果 y 係數是負的，則先乘上(-1)讓係數及不等號改變，再行判定。

隨堂練習 1：不等式的繪圖

若 $ax+by+c>0$ 、 $ax+by+c<0$ ，它不含直線上的點，要畫虛線。

$ax+by+c\geq 0$ 、 $ax+by+c\leq 0$ ，它包含直線上的點，要畫實線。

1.請畫出不等式的圖形$3x+4y-12\geq 0$

(1)直線與 x 軸的交點坐標是______

(2)直線與 y 軸的交點坐標是______

(3)連接兩交點成一直線，則不等式的解在直線的_____邊

(4)有沒有包含直線上的點_______

(5)繪圖

2.請畫出不等式的圖形$3x+2y-6>0$

(1)直線與 x 軸的交點坐標是______

(2)直線與 y 軸的交點坐標是______

(3)連接兩交點成一直線，則不等式的解在直線的____邊

(4)有沒有包含直線上的點_______

(5)繪圖

3.請畫出不等式的圖形$3x-4y-12\leq 0$

(1)直線與 x 軸的交點坐標是______

(2)直線與 y 軸的交點坐標是______

(3)連接兩交點成一直線，則不等式的解在直線的____邊

(4)有沒有包含直線上的點______

(5)繪圖

4.請畫出不等式的圖形$3x-2y-6<0$

(1)直線與 x 軸的交點坐標是______

(2)直線與 y 軸的交點坐標是______

(3)連接兩交點成一直線，則不等式的解在直線的____邊

(4)有沒有包含直線上的點_____

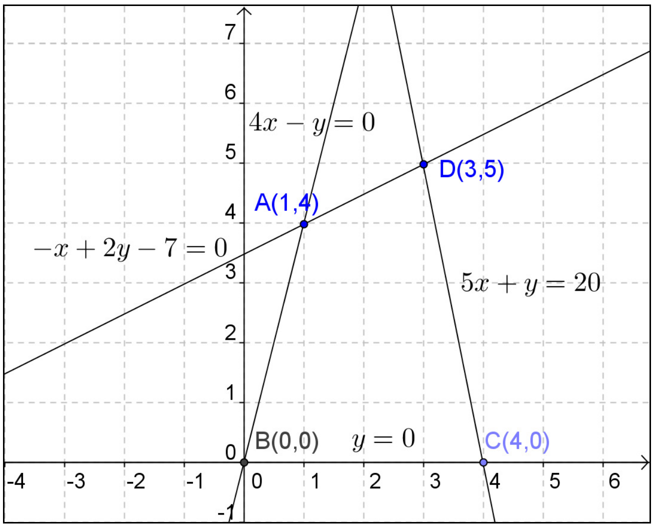
(5)繪圖

活動二：二元一次聯立不等式解的格子點

有一個大都市，整個城市都是棋盤形的街道，每一行街道或每一列街道的間隔都是一單位，兩條街道的交點(格子點)就是十字路口，每個十字路口都必須裝一組設監視器，中華里是這個都市的一個里，中華里的面積是由四個二元一次不等式所限制的範圍：$4x-y>0$，$-x+2y-7<0$，$5x+y-20<0$，$y>0$。則中華里所有十字路口，共需要裝置多少組監視器？

(請注意：如果我們是作左右判斷，$-x+2y-7<0$必需乘上(-1)化成$x-2y+7>0$，再作判斷)

步驟 1：首先我們必須先畫出四條直線$4x-y=0$，$-x+2y-7=0$，$5x+y-20=0$，$y=0$。如下圖所示。



步驟 2：由四個不等式的交集(共同部分)，確定中華里的面積範圍。

(1) $4x-y>0$，在直線 $4x-y=0$ 的_____邊。

(2) $-x+2y-7<0 \Leftrightarrow x-2y+7>0$ 在直線 $x-2y+7=0$ 的____邊。

(3) $5x+y-20<0$ 在直線 $5x+y-20=0$ 的_____邊。

(4) $y>0$ 在直線 $y=0$ 的_____方。

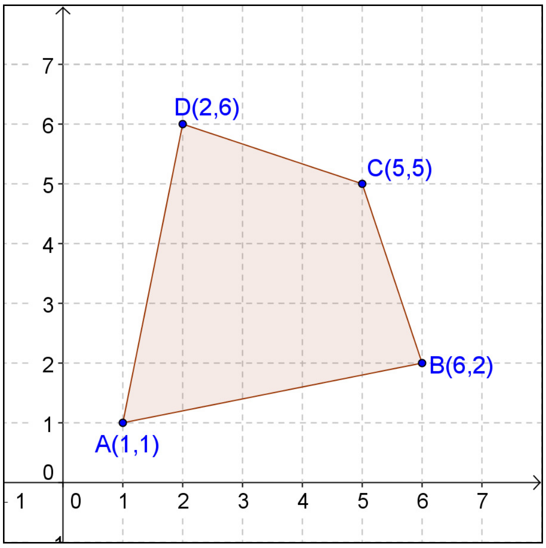
步驟 3：在中華里的區域面積內畫出格子點。

步驟 4：排除邊界上的格子點。

步驟 5：區域面積內共有____個格子點，需要裝置監視器。

活動三：

請你將下列四邊形的區域內部含邊界用四個不等式的交集表示出來。

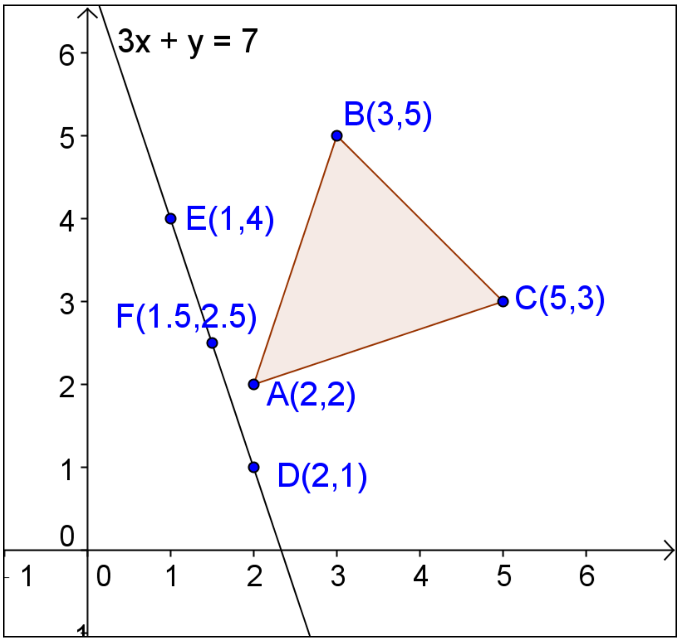


1. 直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式為______，因為四邊形在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的上方，所以關於直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的不等式是______
2. 直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式為______，因為四邊形在直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的左方，所以關於直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的不等式是______
3. 直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 的方程式為______，因為四邊形在直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 的下方，所以關於直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 的不等式是______
4. 直線 $\overleftrightarrow{DA}$ 的方程式為______，因為四邊形在直線 $\overleftrightarrow{DA}$ 的右方，所以關於直線 $\overleftrightarrow{DA}$ 的不等式是______

活動四：

二元一次方程式 $3x+y=k$，當 k 在變動時，是一系列的平行直線。在坐標平面上，對某個特定的實數 k，直線 $3x+y=k$ 上面有無限多個點，每個點 (x,y) 代入 $3x+y$ 的值都一樣是 k。如果區域 R 是以 A(2,2)、B(3,5)、C(5,3)為三頂點所成的三角形區域(含三角形

內部及邊界)。則



1. 如果直線 $3x+y=k$ 通過原點 O(0,0)，則 $k=$______

2. 如果直線 $3x+y=k$ 通過 D(2,1)，則 $k=$______

3. 如果直線 $3x+y=k$ 通過 E(1,4)，則 $k=$______

4. 如果直線 $3x+y=k$ 通過 $F(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$，則 $k=$______

5. 由上面我們可以得到 D,E,F 三點都在哪一條直線上______

6. 在三角形區域 R，若直線 $3x+y=k$ 通過 A(2,2)，則 $k=$____

7. 在三角形區域 R，滿足直線方程式 $3x+y=8$ 的點有多少個_____

8. 若直線 $3x+y=k$ 通過 B(3,5)，則 $k=$_____

9. 在三角形區域 R，滿足直線方程式 $3x+y=14$ 的點有多少個____

10. 若直線 $3x+y=k$ 通過 C(5,3)，則 $k=$______

11. 在三角形區域 R，滿足直線方程式 $3x+y=18$ 的點有多少個____

12.根據上面的體驗，所有三角形區域 R 上面的點(x,y)代入直線 $3x+y=k$，k 的最大值是多少______

13.直線 $3x+y=k$，x 的係數為正，當直線愈往____邊平移，k 值愈大。(填左邊或右邊)

14.所有三角形區域 R 上面的點(x,y)代入直線 $3x+y=k$，k 的最小值是多少______

15.直線 $3x+y=k$，x 的係數為正，當直線愈往____邊平移，k 值愈小。(填左邊或右邊)

由此可知：在三角形區域 R，$3x+y=k$ 有最大值或最小值的點都發生在區域 R 的邊界或頂點。

教學活動參考解答：

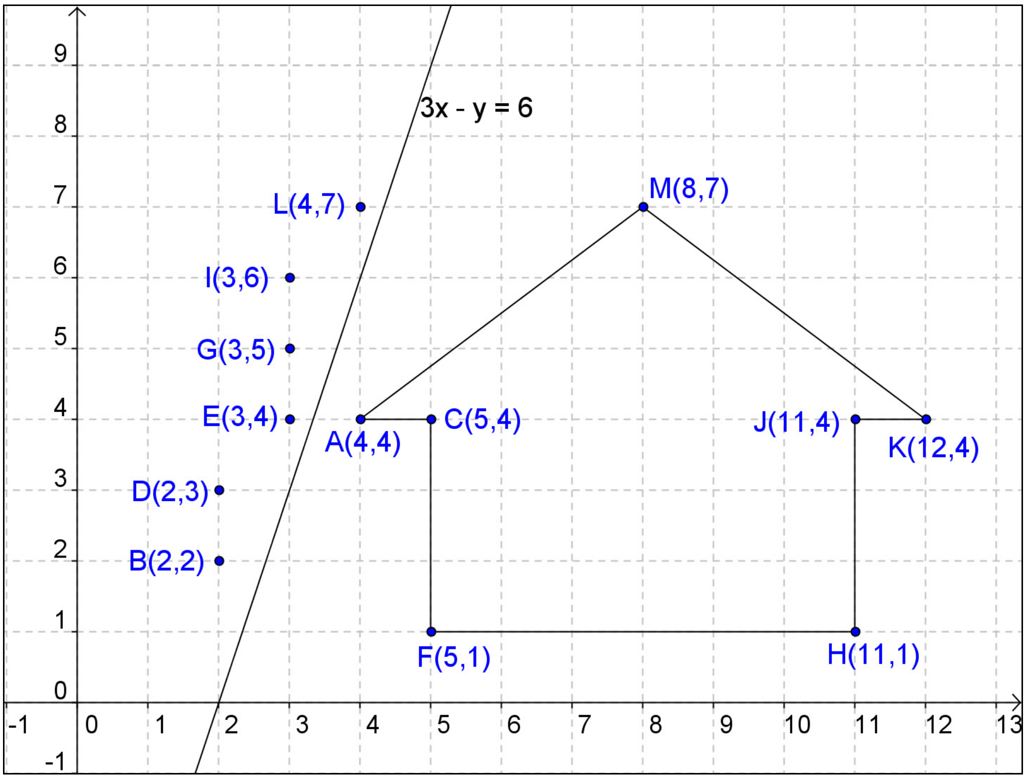
活動一：

1.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
2	-2	5	-3	-1	8	-2	26	-3	23	26	-1	11

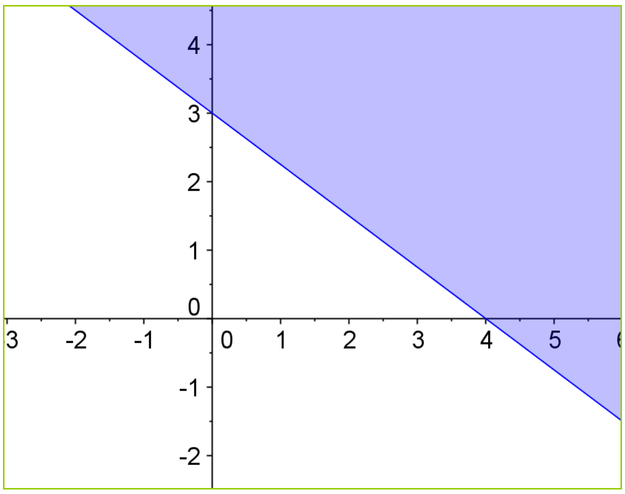
代入的值是正數的點有 A、C、F、H、J、K、M

2. 連接起來像房子。

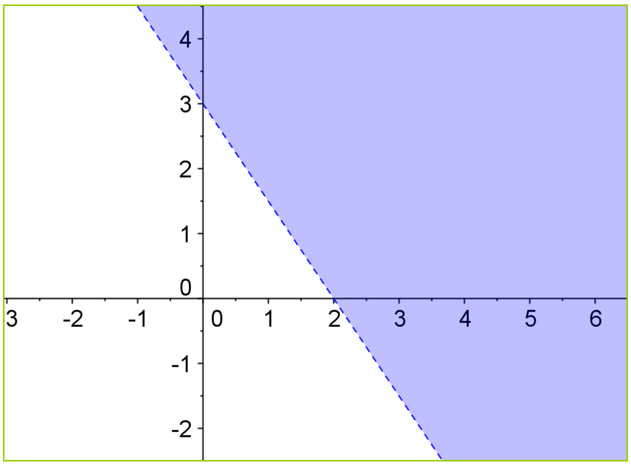


隨堂練習 1：

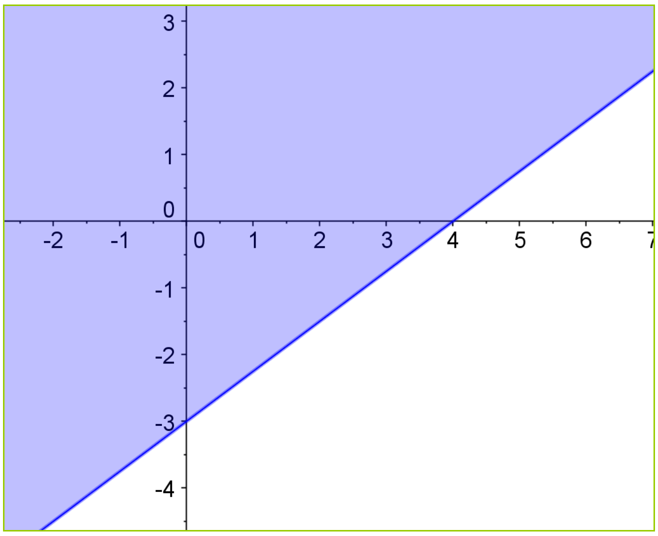
1. (1) (4,0)， (2) (0,3)， (3)右邊(或上方)， (4)有， (5)繪圖：



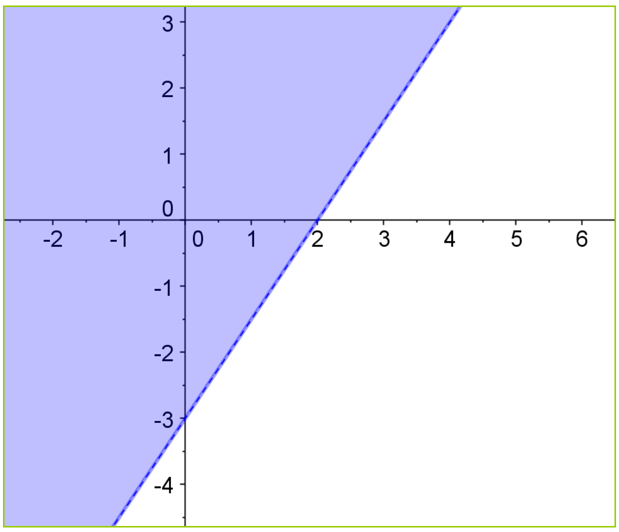
2. (1) (2,0)， (2) (0,3)， (3)右邊(或上方)， (4)沒有， (5)繪圖：



3.(1) (4,0)，　(2) (0,-3)，　(3)左邊(或上方)，　(4)有，　(5)繪圖：



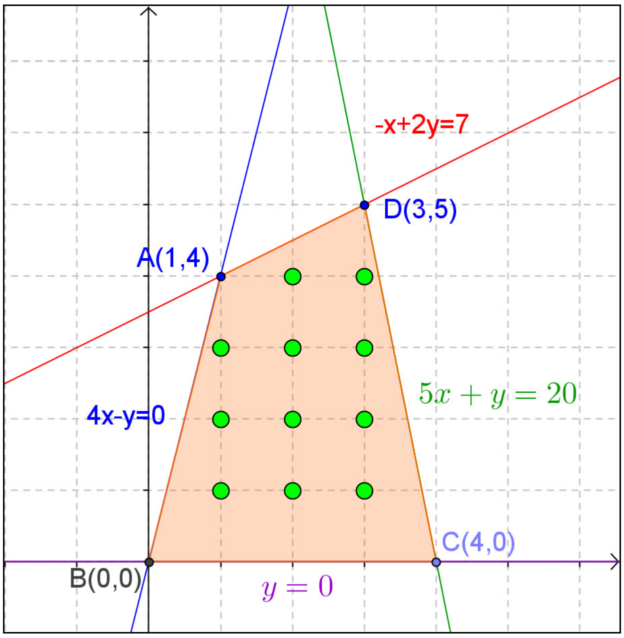
4.(1) (2,0)，　(2)(0,-3)，　(3)左邊(或上方)，　(4)沒有，　(5)繪圖：



活動二：

步驟 2：(1)右，　(2)右，　(3)左，　(4)上。

步驟 3～5：區域面積內共有 11 個格子點，需要裝置 11 組監視器。



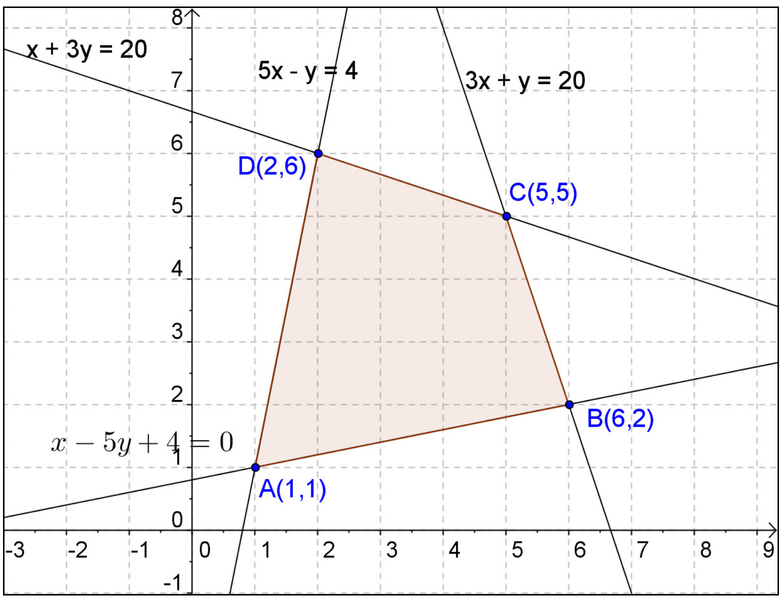
活動三：

1. $-x+5y-4=0$ 或 $x-5y+4=0$，$-x+5y-4\geq 0$ 或 $x-5y+4\leq 0$。

2. $3x+y-20=0$，$3x+y-20\leq 0$。

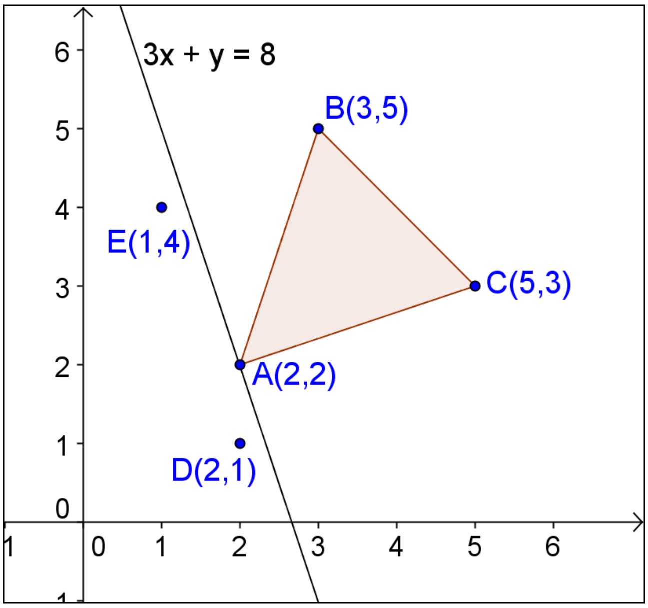
3. $x+3y-20=0$，$x+3y-20\leq 0$。

4. $5x-y-4=0$，$5x-y-4\geq 0$。

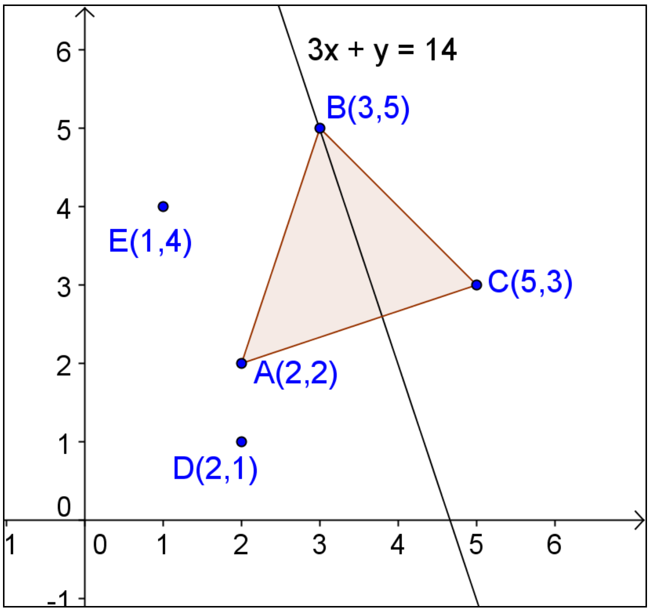


活動四：

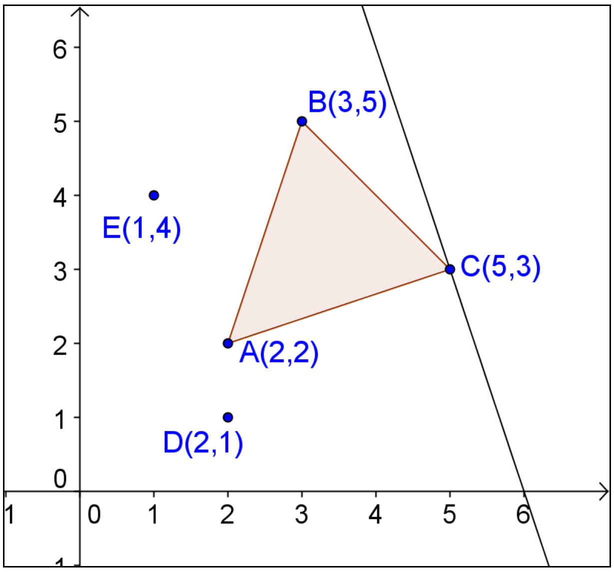
1. 0，　2. 7，　3. 7，　4. 7，　5. $3x+y=7$，　6. 8，　7. 1 個



8. 14，　9. 無限多



10. 18，　11. 1 個



12. 18， 13.右邊， 14. 8， 15.左邊。

八、教學注意事項：

1.各教學活動建議時間如下，引起動機及教學活動說明：約 25 分鐘，活動一：約 15 分鐘，活動二：約 10 分鐘，活動三：約 15 分鐘，活動四：約 25 分鐘。

2.活動一：

(1)讓同學將 13 個點都代入不等式，求二元一次多項函數值的目的，是期望學生能體會然後建立下列關連性：

當點代入 $3x$-y-6 得到正數 ⇔ 點在直線的右邊

當點代入 $3x$-y-6 得到負數 ⇔ 點在直線的左邊

(2)右邊的點按照英文字母順序連起來，目的是增加同學學習不等式的趣味性。為了避免學生直接用直線右邊的點去連

成房子，於是我們要求每個點的函數值都必須算出來。

(3)活動一隨堂練習的目的在讓同學熟悉線性不等式的繪圖，應提醒同學：>、<沒包含直線，≥、≤有包含直線，兩者的區別。

3.活動二：

(1) $-x+2y-7<0$，乘上(-1)，變成 $x-2y+7>0$，必需常常提醒同學，避免錯誤。

(2)聯立不等式解的意義，尤其是半平面交集的求法，需要重複的練習。

(3)不等號≤、≥必須含邊界直線，<、>則不含邊界直線，需要不斷的提醒學生。

4.活動三：

(1)直線的左右判定或上下判定，擇一即可，兩者都用則擔心學生會混淆。

(2)要不斷提醒學生，當 $a>0$ 時，直線右邊(含直線)的半平面用 $ax+by+c\geq 0$ 表示，直線左邊(含直線)的半平面，用 $ax+by+c\leq 0$ 表示。

5.活動四：

(1)要讓同學了解，對某個固定的 k，直線 $3x+y=k$ 上，有無限多個點，而將每一個點 P 的坐標 (x,y)，代入直線，k 值都相

同。

(2)直線 $3x+y=k$ 與三角形區域 R 相交所成的線段，也可能有無限多個點，每一個點 Q 的坐標，代入直線，k 值也都相同。

(3)要跟學生強調，當 x 的係數為正時，愈往右邊的點，代入 $3x+y$ 的值愈大。愈往左邊的點，代入 $3x+y$ 的值愈小。

(4)三角形區域 R 的點，代入 $3x+y$，產生極大值與極小值的點，都是發生在三角形區域 R 的邊界或頂點。

6.在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

7.在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1.李虎雄、陳昭地等(2102)。普通高級中學數學 3。新北市：康熹文化。

2.許志農、黃森山等(2102)。普通高級中學數學 3。新北市：龍騰文化。

主題 5－3 多邊形的面積公式

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　**撰寫者：**李政豐

二、先備知識：

(一) 能理解二元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次方程式。

(二) 能理解二元一次聯立方程式及其解的意義，並能作二元一次聯立方程式的列式。

(三) 能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。

(四) 能理解二元一次不等式解(半平面)的幾何意義。

(五) 能理解二元一次不等式聯立解的圖形與幾何意義。

(六) 瞭解二階行列式的性質與計算。

(七) 瞭解兩平行直線斜率相等的概念。

三、教學目標 (含核心概念或相關概念)：

(一) 能說明將點代入不等式 $ax+by+c>0$、$ax+by+c\geq 0$、$ax+by+c<0$、$ax+by+c\leq 0$，觀察是否滿足不等式解的幾何意義，並能在平面上圖示它。

(二) 能了解二元一次不等式的四種類型 $ax+by+c>0$、$ax+by+c<0$、$ax+by+c\geq 0$、$ax+by+c\leq 0$ 範圍的判定。

(三) 能瞭解不等式的等量公理(等量加、減、乘、除)對不等式造成的影響。

(四) 能根據半平面的圖形建立對應的二元一次不等式。

(五) 能理解聯立二元一次不等式的圖解。

(六) 能理解利用三頂點坐標計算三角形面積的公式。

(七) 能理解右手定則與有向面積。

(八) 能利用二階行列式計算面積。

(九) 能利用三角形面積公式計算多邊形面積。

四、教學時間：90 分鐘(二節課)

五、教學說明：

本節的主要目的，在適時利用圖解的方式，在已知各頂點坐標的條件下，按下列步驟，逐步導出多邊形面積的計算公式：

(一) 一頂點是原點的三角形面積的計算法

(二) 給定任意三頂點的坐標，計算三角形面積。

(三) 將多邊形分割成數個三角形，利用多邊形的頂點坐標，計算多邊形面積的方法。

六、教學活動：

活動一：

地政事務所的測量員，如何用求積儀在地籍圖上量得建地面積？求積儀是一個先進的工具，我們想要了解測量員利用求積儀在地籍圖上測得建地面積的數學方法。

求積儀使用的步驟：開機⇒定原點⇒定第二點⇒定第三點

⇒定第四點………⇒回到原點⇒測量面積

求積儀的原理正是測量師公式或稱驗船師公式或鞋帶公式，測量師公式是在 1986 年由北肯塔基州立大學的 Bart Braden 教授所發表。

活動說明：三角形面積的計算(其中一頂點為原點，另兩點在第一象限)

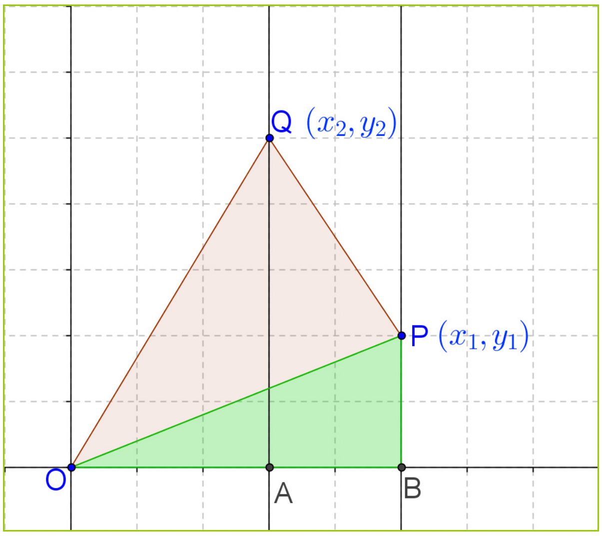


圖 1

如圖 1：直角坐標平面上，P、Q 都是第一象限的點，O 是原點，OPQ 是以逆時針方向配置(右手定則，右手伸出來虎口的方向)，則：

(ΔOPQ 面積)= (ΔOAQ 面積)＋(梯形 ABPQ 面積)－(ΔOBP 面積)

(ΔOPQ 面積)=$\frac{1}{2}x_2 \cdot y_2$ ＋ $\frac{1}{2}(y_1+y_2)\cdot(x_1-x_2)$ － $\frac{1}{2}x_1 \cdot y_1$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$$

為了方便記憶這個交叉相乘相減的計算公式，我們用行列式表示

$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = (x_1y_2-x_2y_1)$ (左上乘右下減掉右上乘左下)

於是三角形 OPQ 面積表示成行列式為 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ 的絕對值。

定理(一)：如果 O(0,0)，P(x_1,y_1)，Q(x_2,y_2)是依照逆時針方向配置(右手定則，右手伸出來虎口的方向)，則交叉相乘$(x_1y_2-x_2y_1)$的值是正

的，亦即$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}>0$。

解說:如圖 2 所示

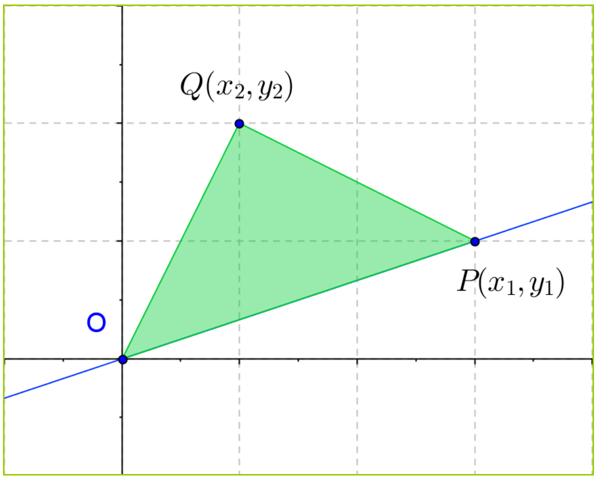


圖 2

直線$\overleftrightarrow{OP}$的方程式是 $y=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot x$

(設 $y=ax+b$ 由兩點$(0,0),(x_1,y_1)$代入算得)

化簡得到 $y_1x-x_1y=0$，其中$\mathrm{P}(x_1,y_1)$是第一象限的點坐標，

$y_1>0$，即 x 的係數為正。此時，由右手定則

$\mathrm{Q}(x_2,y_2)$在直線$\overleftrightarrow{OP}$的左邊，因為 O,P,Q 是依照逆時針方向

故$\mathrm{Q}(x_2,y_2)$代入直線$\overleftrightarrow{OP}$： $y_1x-x_1y=0$會得到負數，亦即

$y_1x_2-x_1y_2<0$。於是得到$x_1y_2-x_2y_1>0$，即$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}>0$。

但是$\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix}=(x_2y_1-x_1y_2)=-(x_1y_2-x_2y_1)=-\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$，即依照行列式展開的規則，兩行對調或兩列對調，其值變號。

例 1：如圖 3，已知 O(0,0)、P(3,1)、Q(1,2)，則

(1) ΔOAQ 面積=________

(2) 梯形QABP 面積=________

(3) ΔOBP 面積=________

(4) ΔOPQ 面積=________

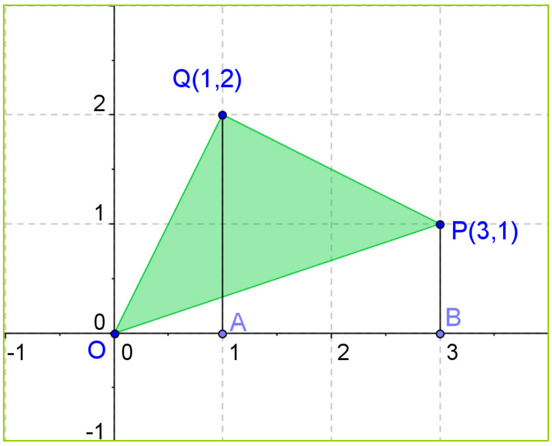


圖 3

如圖 4 所示：

(5)若直接由行列式$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$的絕對值

計算 ΔOPQ 面積=_______

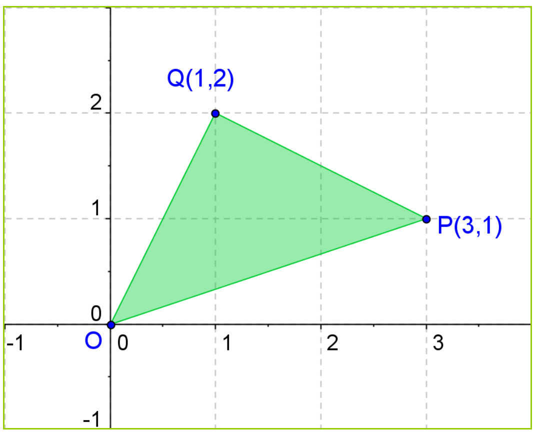


圖 4

例 2：平行四邊形 OPRQ 面積：

如圖 5　O(0,0)、P(3,1)、R(4,3)、Q(1,2) 則

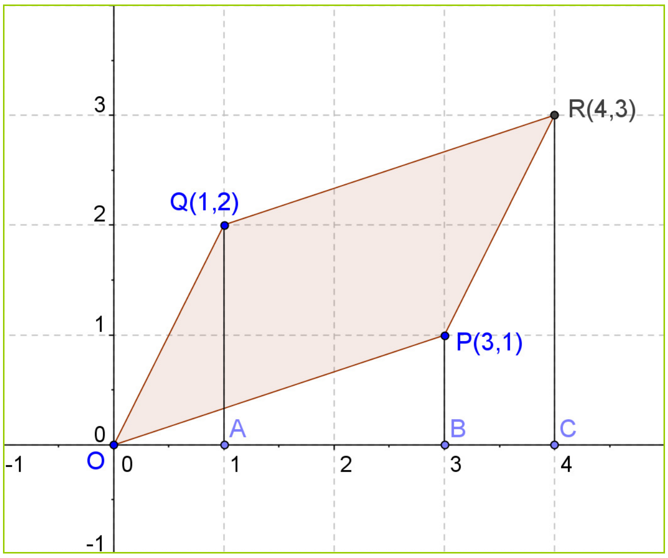


圖 5

(1)直線 OP 的斜率是________

(2)直線 PR 的斜率是________

(3)直線 RQ 的斜率是________

(4)直線 QO 的斜率是________

(5)觀察上述四個斜率，則 OPRQ 是那一種四邊形?__________

(6) ΔOAQ 面積=________

(7) 梯形QACR 面積=________

(8) ΔOBP 面積=________

(9) 梯形PBCR 面積=________

(10)四邊形 OPRQ 面積=ΔOAQ 面積+梯形QACR 面積

－ΔOBP 面積－梯形PBCR 面積=____________

(11)如圖 6，令 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直接由行列式

$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$的絕對值，計算平行四邊形 OPRQ 面積=______

或比較圖(四)、圖(五)知：平行四邊形 OPRQ 面積為 ΔOPQ

面積的兩倍，因此可得$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$的答案。

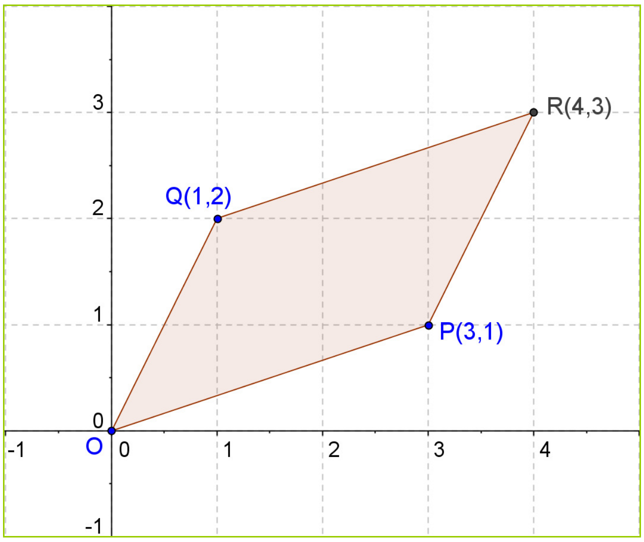


圖 6

活動二：

活動說明：三角形面積的計算(第一象限內的任意三頂點)

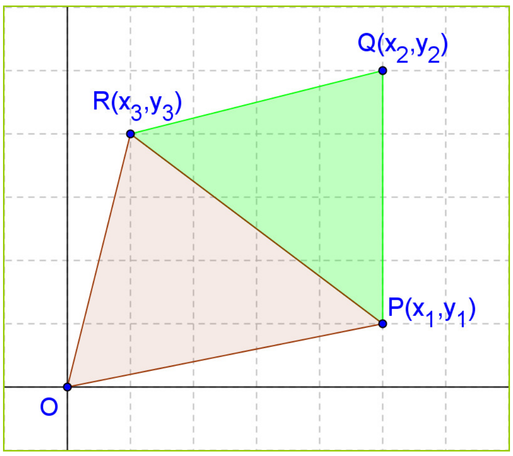


圖 7

如果 P、Q、R 是依逆時針方向的順序，則

(ΔPQR 面積)= (ΔOPQ 面積)＋(ΔOQR 面積)－(ΔOPR 面積)

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}$$

由行列式的性質：兩行對調，其值變號。$\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}$

故(ΔPQR 面積)= $\left\{ \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right\}$ 的絕對值。

也可用下列公式表示，俗稱為測量師公式(surveyor’s formula)。

$$\text{三角形面積} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \text{的絕對值}$$

例 3： ΔPQR 面積如圖 8 已知三角形 PQR 的三頂點 P(6,2)、Q(5,6)、R(1,4)。

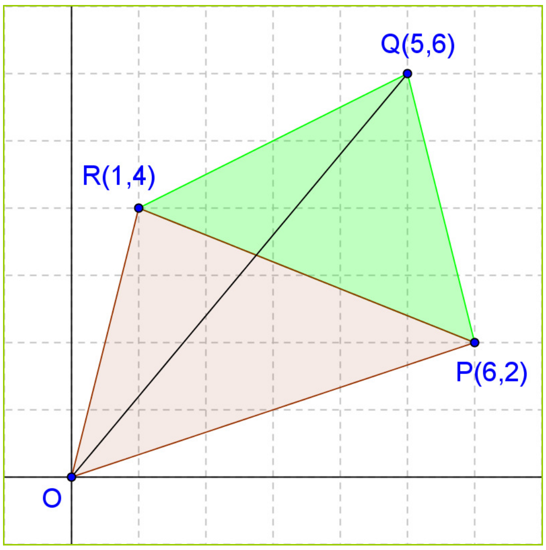


圖 8

(1)用行列式$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$的絕對值計算 ΔOPQ 面積=________

(2)用行列式$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$的絕對值計算 ΔOQR 面積=________

(3)用行列式$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}$的絕對值計算 ΔOPR 面積=_________

(4) ΔPQR 面積=ΔOPQ 面積+ΔOQR 面積－ΔOPR 面積=_______

(5)如果把ΔPQR 面積直接用公式計算

$$\text{三角形面積} = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{array}\right| \text{的絕對值}$$

=_________　　(必須按照逆時針方向)

活動三：

活動說明：四邊形面積的計算(第一象限內的任意四頂點)

如果四頂點不完全是在第一象限，可以將整個四邊形平移到第一象限來計算，其面積不變。

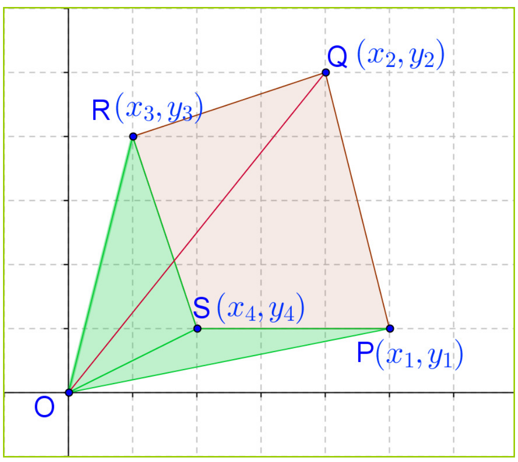


圖 9

如果 P、Q、R、S 是依逆時針方向的順序，則四邊形 PQRS 面積

=(ΔOPQ 面積)＋(ΔOQR 面積)－(ΔOSR 面積)－(ΔOPS 面積)

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_4 & x_3 \\ y_4 & y_3 \end{vmatrix}-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$ (兩行對調其值變號)

綜合上式，可以用測量師公式來表示。

$$\text{四邊形面積}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_1 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & y_1 \end{vmatrix}\text{的絕對值}$$

例 4： 四邊形 PQRS 的面積，已知 P(5,1)、Q(4,5)、R(1,4)、S(2,1)。

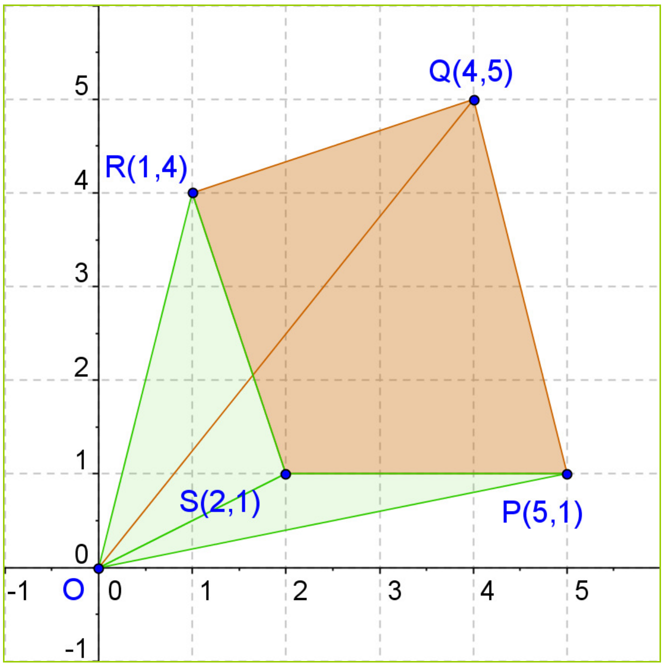


圖 10

(1)用行列式 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ 的絕對值計算 ΔOPQ 面積=________

(2)用行列式$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$的絕對值計算 ΔOQR 面積=________

(3)用行列式$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_4 \\ y_3 & y_4 \end{vmatrix}$的絕對值計算 ΔOSR 面積=________

(4)用行列式$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_4 & x_1 \\ y_4 & y_1 \end{vmatrix}$的絕對值計算 ΔOPS 面積=________

(5)四邊形 PQRS 面積

=ΔOPQ 面積+ΔOQR 面積－ΔOSR 面積－ΔOPS 面積=______

(6)把四邊形 PQRS 面積按逆時針方向運用公式計算=________

$$\text{四邊形面積} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_1 \\ & \times & & \times & & \times & & \times & \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & y_1 \end{vmatrix}\text{的絕對值}$$

活動四：

活動說明：多邊形面積的計算(多邊形的頂點在任意象限)

例 5：圖 11 是一個平行四邊形，A(-3,-2)，B(3,-3)，C(3,3)，D(-3,4)。

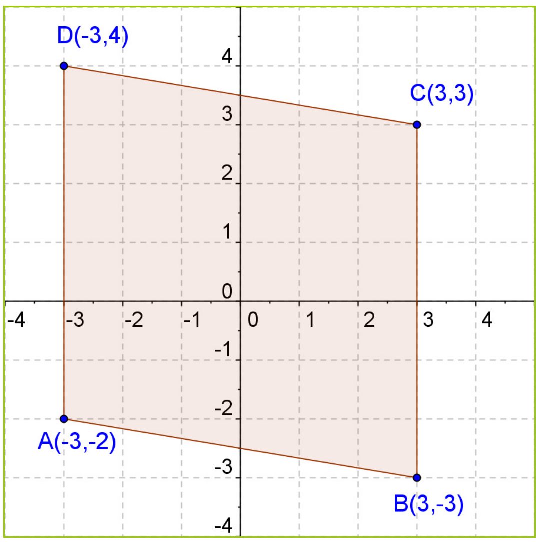


圖 11

(1)如果直接用(底×高)計算平行四邊形面積=__________

(2)如果把四邊形面積按逆時針方向直接用公式計算=________

$$\text{四邊形面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{array}\right|\text{的絕對值}$$

(任一點當起始點均可，按逆時針方向，且起始點要重覆一次)。

教學活動參考解答：

活動一：

例 1：(1) ΔOAQ 面積=1，(2) 梯形QABP 面積=3，(3) ΔOBP 面積=$\frac{3}{2}$，

(4) ΔOPQ 面積=$\frac{5}{2}$，(5)由$\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right|$計算 ΔOPQ 面積=$\frac{5}{2}$。

例 2：(1) $\frac{1}{3}$， (2) 2， (3) $\frac{1}{3}$， (4) 2， (5)平行四邊形，

(6) 1， (7) $\frac{15}{2}$， (8) $\frac{3}{2}$， (9) 2， (10) 5， (11) 5。

活動二：

例 3：(1) 13， (2) 7， (3) 11， (4) 9， (5) 9。

活動三：

例 4：(1) $\frac{21}{2}$， (2) $\frac{11}{2}$， (3) $\frac{7}{2}$， (4) $\frac{3}{2}$， (5) 11，(6) 11 。

$$\text{四邊形面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right|\text{的絕對值}=11$$

活動四：例 5：(1) 6×6=36，　(2)　36。

$$\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccccc} -3 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right| \text{的絕對值} = 36$$

八、教學注意事項：

1.各教學活動建議時間如下，活動一約 30 分鐘，活動二約 25 分鐘，活動三約 25 分鐘，活動四約 10 分鐘。

2.活動一：

(1)二元一次聯立不等式的圖形有可能是凸多邊形區域，它的可行解區域面積即可用到測量師公式來計算，由於只用到端點坐標的計算，對七年級學生，是可以接受的題材。

(2)如果三頂點以逆時針方向配置，則行列式值(有向面積)為正，如果三頂點以順時針方向配置，則行列式值(有向面積)為負，這個右手定則，未來學物理的時候會常使用到，在教學說明中有加以詳細證明，可儘早讓學生了解熟悉。

(3)有向面積的概念，在高中學習向量與行列式(學向量外積)時才會出現，在目前國一階段不宜過度教授或強調。

(4)測量師公式計算多邊形面積，與多邊形所在的象限無關。

3.活動二：

(1) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1)$ (左上乘右下減掉右上乘左下)，於

是三角形 OPQ 面積表示成行列式為$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$的絕對值。上面這段敘述讓它自然呈現，就像三角形面積=$\frac{1}{2}(\text{底})\cdot(\text{高})$，它只是一個公式。我們的目標，並不是要教授二階行列式的所有觀念與性質，不必擔心國一學生的學習會有困難。

(2)行列式的性質：兩行對調，其值變號。$\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}$，這個性質在導出測量師公式時會用到，由展開式$(x_1y_2 - x_2y_1)$（左上乘右下減掉右上乘左下)來說明即可，不需對行列式的性質過度解讀。

4.活動三：

(1)平面上四點 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$、$\mathrm{Q}(x_2, y_2)$、$\mathrm{R}(x_3, y_3)$、$\mathrm{S}(x_4, y_4)$是依逆時針方向的順序配置的四個點，則四邊形 PQRS 面積可以用測量師公式表示。它只是把四個行列式合併在一起。

$$\text{四邊形面積} = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{matrix}\right| \text{的絕對值}$$

要讓學生了解這個合併的結構，把第一個點坐標再重複放在最後一行，依逆時針順序排列，相鄰兩行的行列式值，逆時針為正，順時針為負，它的計算有規則，但不會困難。

(2)測量師公式計算面積，對非凸多邊形仍然成立。

(3)用測量師公式計算面積，不論多邊形的頂點在任意象限，公式仍然成立，証明請參見「教學參考資料」。

5.活動四：這個活動安排了同學們熟悉的平行四邊形，很容易的就能把面積算出來，目的是讓學生體驗：當四邊形頂點在任意象限時，測量師公式，仍然可以將面積算出，並且(a)、(b)兩種算法的答案，可以印證測量師公式演算法則的正確性。尤其當四邊形是任意四邊形，頂點在任意象限時，測量師公式更可以發揮它的重要性。

6.在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

7.在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1.李虎雄、陳昭地等(2012)。普通高級中學數學 3(p. 190)。新北市：康熹文化。

2.游森棚、林延輯等(2012)。普通高級中學數學 3(p.208)。台南市：翰林出版。

3.The Surveyor's area furmula，Bart Braden（1986）.The College Mathematics Journal, Vol 17, Number 4, (pp. 326–337).

4. 將三角形三頂點坐標作平移其面積不變

將三角形ABC的三頂點 $A(a,b)$ $B(c,d)$ $C(s,t)$，平移 (h,k) 到三角形 DEF，$D(a+h,b+k)$，$E(c+h,d+k)$，$F(s+h,t+k)$。

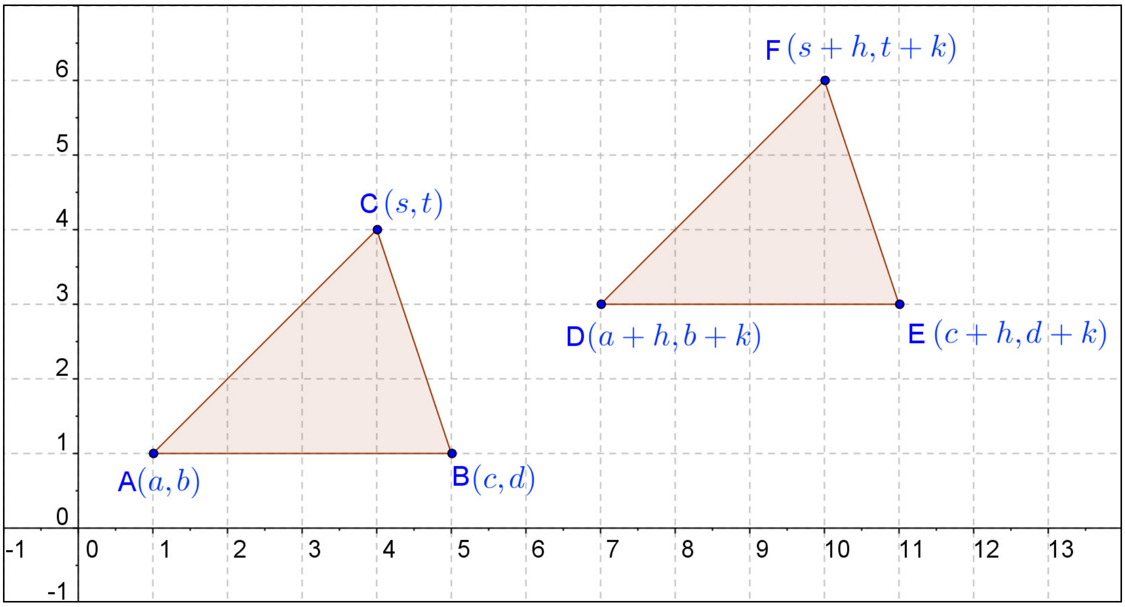


圖12

原來三角形ABC的面積，由測量師公式

$$\text{三角形面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccccccc} a & & c & & s & & a \\ & \times & & \times & & \times & \\ b & & d & & t & & b \end{array}\right| \text{的絕對值}$$

$$=\frac{1}{2}[(ad-bc)+(ct-ds)+(sb-at)]$$

平移之後的三角形 DEF 的面積

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccccccc} a+h & & c+h & & s+h & & a+h \\ & \times & & \times & & \times & \\ b+k & & d+k & & t+k & & b+k \end{array}\right| \text{的絕對值}$$

$$=\frac{1}{2}[(a+h)(d+k)-(c+h)(b+k)+(c+h)(t+k)-(s+h)(d+k)$$
$$+(s+h)(b+k)-(a+h)(t+k)]$$

$$=\frac{1}{2}[(ad+ak+dh+hk)-(bc+ck+bh+hk)+(ct+ck+ht+hk)$$
$$-(ds+ks+dh+hk)+(bs+ks+bh+hk)-(at+ak+ht+hk)]$$

經由展開消去化簡之後=$\frac{1}{2}[(ad-bc)+(ct-ds)+(bs-at)]$

由此證得三角形平移前後，兩者面積相同。

國民中學數學教材原型Ｂ冊 / 陳昭地　主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院，2013.12

1.數學教育
2.中小學教育
3.教材與教法

國民中學數學教材原型Ｂ冊
主 編 者：陳昭地
作　　者：丁斌悅　李政憲　李政豐　陳彥廷　傅淑婷　蘇進發
（依姓氏筆畫順序排列）
發 行 人：柯華葳
出 版 者：國家教育研究院
編 審 者：數學領域教材原型研發編輯委員會
主任委員：陳昭地
副主任委員：謝　堅
委　　員：丁斌悅　吳欣悅　李政憲　李政豐　周筱亭　房昔梅
張東輝　曹博盛　陳彥廷　傅淑婷　黃幸美　詹婉華
魏慶雲　蘇進發
（依姓氏筆畫順序排列）
編輯小組：丁斌悅　李政憲　李政豐　陳昭地　陳彥廷　曹博盛
傅淑婷　蘇進發
（依姓氏筆畫順序排列）
編輯助理：張淑娟、蔡敏沖
出版年月：102 年 12 月
版　　次：初版
電子全文可至國家教育研究院網站 *http: //www.naer.edu.tw* 免費取用

非賣品

本書經雙向匿名審查通過