國民中學數學教材原型A冊

陳昭地教授 主編

國家教育研究院 出版

國民中學數學領域教材原型 A 冊

國家教育研究院 編印

國民中學數學教材原型A冊

目 次

第三章 代數（一）

序

數學不僅是科學的基礎，數學教育更是關乎國家公民素養和人才素質的重要因素之一。國家教育研究院推動課程與教學研究及研發適性適量適時之教材工作，進行中小學各學習領域（學科）教材研發、編輯與試用，並建置教科書資源資料庫。本數學領域教材原型研發手冊即是針對中學生與小學生所設計之教學輔助教材，期能落實課程綱要能力指標與教材細目之課程與教學之實踐，提供教師或教科書編輯者可依循或指引之教科書編輯素材，活化數學教材的內涵，並引領未來十二年國民基本教育數學教學之方向。

此計畫研發初期，本人時任國家教育研究院院長，當時曾召開會議徵詢國內數學專家學者之意見，幾經遴選承蒙陳昭地教授願意在國立臺灣師範大學教職退休後，因為對數學教育的使命感，而接下此研發編輯之重任。陳教授學經歷豐富，不但在教學及專業領域上的研究，受到學術界的肯定及重視，表現傑出，對啟蒙青年學子有滿滿的熱情，對數學教育貢獻不遺餘力，在他的號召之下，旋即組織優秀的學者專家教授與教學卓越的中小學教師等成立編輯委員會，前後歷經三年，完成本系列的教材原型作品。

本書研發編撰適合國中、小數學能力之題材，這些題材與教師未來的數學教學密切相關，並可藉此增長學生數學的學習能力，內容相當豐富，盼讀者以輕鬆愉快的心情欣賞閱讀數學的相關方法與應用，經由與日常生活相關的例題，透過循序漸進的演練，以培養學生自我學習的興趣與信心，期待能為數學教師提供便捷的教學資源。

教育部國民及學前教育署 署長
吳清山 謹識
2013 年 12 月

序

政府為回應立法院與民意的需求，於民國 92 年起責成本院組成委員會編撰九年一貫數學領域國中、小部編本教科書，經審定後上市供書，以平抑教科書價格，同時引領民間出版商改善教科書的品質。部編本教科書在完成教材示範編撰與制衡教科書市場之階段性任務後，轉型發展教材原型，本書即為教材原型的研發成果之一。

本書分為中學與小學，中學部分配合國中以上之數學教師的數學專業素養，編輯延伸性與原創性的題材，包含未來與國民教育第十年數學銜接息息相關的重要內容，提供教師編選相關教材之用，或提供教科書編輯者及民間出版業研發教師手冊及相關教材。小學部分：配合教師需求，著重於國小階段之數、計算、量與實測、幾何等相關教材教法。本套教材編撰之目的，在於能引發教師教學之共鳴，進而沿用於教學，故於其取材方向及內容，依中、小學之特性而有些許差異。

本書係由課程及教學研究中心數學教材原型研發編輯委員會陳昭地教授、鍾靜教授、謝堅教授、張東輝教授、曹博盛教授、黃幸美教授、陳彥廷教授、周筱亭研究員、李政豐教師、蘇進發教師、傅淑婷教師、李政憲教師、丁斌悅教師、莊國彰教師、魏慶雲教師、房昔梅教師、詹婉華教師、吳欣悅教師、胡蕙芬教師等，前後共計三年的辛勤投入，內容極具意義與參考價值，對落實數學教育，應該頗有助益。茲值付梓之前，特為之序，並致最高謝意。

國家教育研究院課程及教學研究中心主任

范信賢　謹識

2013 年 12 月

編輯大意

一、本研究成品為國家教育研究院數學領域教材原型研發編輯計畫第一年(民 100 年)國民中學部分的成果。

二、本研究成品共計 22 單元主題，配合符合先備知識之國中七年級以上學生提供 34 節教學節數之教材。

三、各教材主題以符合國民中學七年級學生的能力為取材對象，旨於銜接國小數學教材、數學應備知識、探尋數學規律、培養解題能力與正確學習態度，並提高數學學習的興趣為主要目標。

四、各單元主題教學活動及指定作業部分可直接下載應用；教學注意事項，教學參考資料或延伸性的題材主要提供教學者備用。

五、本教材單元雖經研發團隊審慎研發編輯而成，惟疏漏之處仍在所難免，使用者針對個案可直接或間接以最適當的方式調整。

六、本冊各章雖已選擇部分題材試教，做為修改本教材之依據，仍免有不週之處，敬請賜教。

七、適逢再版之際，配合 102 年 5 月 A 冊初版辦理推廣研討會的經驗，修訂部分內容，惟疏漏之處在所難免，使用者針對教材可直接或間接以最適當的方式調整。

主題1－1：尋找神秘的英文字（一）

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者：**陳昭地

二、先備知識：

（一）能理解正整數加、減直式計算。

（二）能理解九九乘法。

（三）能理解正整數乘、除直式計算。

三、教學目標：

理解簡易正整數四則運算的規則，及其應用到解密碼算術題的基本能力。

四、教學時間：45 分鐘(一節課)

五、教學說明：

以下共有八個算式（1）～（8），各算式中的每個英文字母代表一個阿拉伯數字（0, 1, 2, …, 8, 9）相同的字母代表同一個數字，不同的字母代表不同的數字，主題中要尋找的神秘的英文字就是依序由代表 0, 1, 2, …, 8, 9 十個字母所拼成的英文字。

數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
字母										

（1）

$$\begin{array}{r} A\ M \\ +\ O\ N \\ \hline I\ N \end{array}$$

（2）

$$\begin{array}{r} A\ L \\ \times\ O\ M \\ \hline A\ L\ M \end{array}$$

（3）

D＋D＝D×D

（4）

$$\begin{array}{r} E \\ A\,\overline{)\,D\ O} \\ D\ O \\ \hline M \end{array}$$

（5）

$$\begin{array}{r} A\ N\ D \\ -\ O\ D\ D \\ \hline R\ A\ M \end{array}$$

（6）

$$\begin{array}{r} L\ E\ N\ D \\ +\ A\ N\ D \\ \hline T\ O\ I\ L \end{array}$$

（7）

$$\begin{array}{r} D\ O\ N\ E \\ +\ A\ T\ O\ M \\ \hline N\ A\ M\ E \end{array}$$

（8）

$$\begin{array}{r} R\ A\ T \\ -\ N\ O \\ \hline T\ I\ L \end{array}$$

六、教學活動：

活動一：由（1）中的算式，盯住個位數 M＋N＝N，或由（4）中 DO－DO＝M，所以字母 M 代表的數字為 ______。

活動二：由（2）中的算式，盯住乘積的結果 ALM 及被乘數 AL 的關係，再由活動一中所得的字母 M 代表的數字，可得字母 O 代表的數字為 ______。

活動三：由（3）中的算式，回憶九九乘法表及（4）中算式 DO 為二位數，可得字母 D 代表的數字為 ______。

活動四：由活動三所得字母 D 代表的數字，盯住算式（6）中的個位數 D＋D＝L，可得字母 L 所代表的數字為 ______。

活動五：由（4）式中的算式可知 DO＝A×E＋M 及已知字母 M、D、O 各代表的數字，可得 A×E 的結果為 ______，而得 A＋E 的結果為 ______。

活動六：由（6）中的算式，盯住千位數及活動四所得字母Ｌ所代表的數字，可得字母Ｔ代表的數字為 ______。

活動七：由（8）中的算式，盯住百位數及已得字母Ｔ所代表的數字，可得字母Ｒ所代表的數字為 ______。

活動八：由活動五所得Ａ＋Ｅ，A×E所代表的數及由（5）式中的算式盯住百位數並已知字母Ｏ，Ｒ所代表的數字，得字母Ａ所代表的數字為 ______，再由Ａ＋Ｅ的結果可得字母Ｅ所代表的數字為 ______。

活動九：由（1）中算式，盯住十位數Ａ、Ｏ、Ｉ並已知字母Ｏ、Ａ所代表的數字，可得字母Ｉ所代表的數字為______。

活動十：由已知字母Ｅ、Ｍ所代表的數字，盯住（7）式中的算式，其十位數Ｎ、Ｏ、Ｍ的關係，可知字母Ｎ所代表的數字為 ______。

等一下！暫時不要停下筆，繼續核驗答案：各字母所代表的數字正確無誤嗎？ _________（完全正確在空格中打勾，否則再檢查一遍）

一一將字母所代表的數字代入各算式都符合每一個算式嗎？

是 _______ 不是 _________ （打勾）

（再訂正）

結論：結合以上各活動與核驗答案，依序代表 0, 1, 2, …, 8, 9 的英文字母為______________________________

換句話說，神秘的英文字為__________________________。

中文意思為__________________________（可查英文字典）。

教學活動參考解答：

活動一：0，活動二：1，活動三：2，活動四：4，活動五：21，10，活動六：5，活動七：6，活動八：7，3，活動九：8，活動十：9。

結論：M、O、D、E、L、T、R、A、I、N；MODELTRAIN，模型火車。

七、指定作業：

說明：以下共有五個算式（1）～（5），各算式中的每個英文字母代表一個阿拉伯數字（0, 1, 2, …, 8, 9）相同的字母代表同一個數字，不同的字母代表不同的數字，主題中要尋找的神秘的英文字就是依序由代表 0, 1, 2, …, 8, 9 十個字母所拼成的英文字。

（1）

$$\begin{array}{r} I\ T \\ +\ I\ S \\ \hline O\ H\ O \end{array}$$

（2）

$$\begin{array}{r} T\ R\ I\ O \\ +\ I\ T \\ \hline T\ O\ S\ S \end{array}$$

（5）

$$\begin{array}{rl} & C\ O\ T \\ K & \overline{)S\ E\ T} \\ & S \\ \hline & \ \ E \\ & \ \ K \\ \hline & \ \ O\ T \\ & \ \ O\ T \\ \hline & \ \ \ \ \ R \end{array}$$

（3）

$$\begin{array}{r} S\ O \\ +\ O\ H \\ \hline H\ I \end{array}$$

（4）

$$\begin{array}{r} C\ O\ R\ E \\ +\ S\ P\ O\ T \\ \hline P\ R\ O\ P \end{array}$$

英文字：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

中文意思：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿(可查英文字典)。

指定作業參考解答：

數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
字母	R	O	C	K	E	T	S	H	I	P

英文字：ROCKETSHIP

中文意思：太空船（可查字典）

解法：1°由（1）式百位數應為1，故字母O代表1；

再由（1）式中個數S＋T＝11，故S＋T代表11；

2°由（5）式中餘數應為0，故字母R代表0；

3°由（2）式中個位數S＝T＋1，故S＝6，T＝5；

4°由（3）式及（2）式的S＝6，知H＜9，故I＝H＋1，

H＝S＋1，於是H＝7，I＝8；

5°由（5）式及 S＝6，OT＝15，T＝5，故 K＝3，於是

C＝2；

6°再由（5）式，E－K＝1，故 E＝4；

7°最後由（4）式 P＝E＋T＝4＋5＝9。

八、教學注意事項：

1. 指導說明讀題的時間約 4～5 分鐘。

2. 各活動約分配約 3～4 分鐘。

3. 算式（4）可改成（4）’：DO＝A×E＋M

4. 算式（5）可改成（5）’：

$$\begin{array}{r} R\ A\ M \\ +\ O\ D\ D \\ \hline A\ N\ D \end{array}$$

5. 算式（8）可改成（8）’：

$$\begin{array}{r} T\ I\ L \\ +\ \ N\ O \\ \hline R\ A\ T \end{array}$$

6. （4）’（5）’（8）’三個算式可僅作部分的代換。

7. 各活動間可互換次序只要循序漸進，逐步找出各英文字母所代表的數字即可。找出的結果沒用到的式子仍須檢驗完全正確。

8. 各主題活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

9. 在各活動進行時，可隨機指定學生口頭回答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其它同學作答，再答錯老師應加強

解說。另相關教材若要改版為學習單供學生上課使用，應在題目之後多留空白，以供學生計算寫答使用。

九、教學參考資料：

有關密碼算術問題起源於20世紀英國數學家Berwick之引進7個7的除法密碼算術題（見註P.11）（可能還有比Berwick更早幾年的人）；在一個問題中，用英文字母代表阿拉伯數字（0,1,2,…,8,9），不同的字母代表不同的數字，求出問題算式中的字母所代表的數字，在我們這篇主題尋找神秘的英文字中，剛好由十個不同的英文字母組成，要求出各個字母所代表的數字，神秘的英文字是依序由代表0,1,2,…,8,9組成的英文字：MODELTRAIN（火車模型或模型火車），其找法有一定的程序，試圖由其各個算式或其間的關係，由直接觀察容易決定的字母先後破解出來，中間需要用到簡易的四則運算規則，循序漸進處理，活動的次序有些可以對調而不會影響最後的答案。

假設本主題僅要求一個算式AM＋ON＝IN，則除了A＝7，M＝0，O＝1，N＝9之70＋19＝89一組解外，還有一些其它的解：70＋16＝86，20＋17＝37，…，但其中M一定是0，同樣地，其他的算式各個也都是多於一個以上的解。而同時滿足這八個算式的解恰有一組。

在下面各題中，可能有多於一解，也可能只有一組解，或許沒有解，千變萬化，教四則運算時，適時引入可以增進基本四則運算能力，增添數學學習的興趣。例如：

（1） 就有多解：

$$\begin{array}{r} O\ N\ E \\ +\ O\ N\ E \\ \hline T\ W\ O \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ 8\ 1 \\ +\ 2\ 8\ 1 \\ \hline 5\ 6\ 2 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 4\ 3\ 2 \\ +\ 4\ 3\ 2 \\ \hline 8\ 6\ 4 \end{array}, \cdots,$$

字母 O 一定是不為 0 的偶數 2 或 4。

（2）

$$\begin{array}{r} O\ N\ E \\ +\ \quad T\ W\ O \\ \hline T\ H\ R\ E\ E \end{array}$$

一定是沒有解(其理由是兩個二位數相加，頂多是三位數，不可能為四位數！)

（3） 也有多解：

$$\begin{array}{r} T\ W\ O \\ +\ T\ W\ O \\ \hline F\ O\ U\ R \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ 6\ 5 \\ +\ 7\ 6\ 5 \\ \hline 1\ 5\ 3\ 0 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 8\ 4\ 6 \\ +\ 8\ 4\ 6 \\ \hline 1\ 7\ 9\ 2 \end{array}, \cdots,$$

其中 F 一定是 1，字母 R 可以為 0 的偶數。

（4） 也有多解：

$$\begin{array}{r} O\ N\ E \\ +\ F\ O\ U\ R \\ \hline F\ I\ V\ E \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\ 6\ 2 \\ +\ 7\ 4\ 3\ 0 \\ \hline 7\ 8\ 9\ 2 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 4\ 2\ 6 \\ +\ 9\ 4\ 3\ 0 \\ \hline 9\ 8\ 5\ 6 \end{array}, \cdots,$$

其中 R 一定是 0。

也有多解：

$$\begin{array}{r} \mathrm{THREE} \\ +\ \mathrm{FOUR} \\ \hline \mathrm{SEVEN} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 79244 \\ +\ 5102 \\ \hline 84346 \end{array}，\begin{array}{r} 75244 \\ +\ 9102 \\ \hline 84346 \end{array}，\cdots，$$

其中S一定等於T+1。

（6）　　　　　也有多解：

$$\begin{array}{r} \mathrm{FOUR} \\ +\ \mathrm{FIVE} \\ \hline \mathrm{NINE} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1970 \\ +\ 1465 \\ \hline 3435 \end{array}，\begin{array}{r} 1970 \\ +\ 1462 \\ \hline 3432 \end{array}，\cdots，$$

其中R一定等於0。

（7）　　　　　也有多解：

$$\begin{array}{r} \mathrm{FOUR} \\ +\ \mathrm{FOUR} \\ \hline \mathrm{EIGHT} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8532 \\ +\ 8532 \\ \hline 17064 \end{array}，\begin{array}{r} 8352 \\ +\ 8352 \\ \hline 16704 \end{array}，\cdots，$$

其中E一定是1，T一定是偶數。

（8）　　　　　也有多解：

$$\begin{array}{r} \mathrm{FIVE} \\ +\ \mathrm{FIVE} \\ \hline \mathrm{STEM} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1475 \\ +\ 1475 \\ \hline 2950 \end{array}，\begin{array}{r} 4675 \\ +\ 4675 \\ \hline 9350 \end{array}，\cdots。$$

（9）　　　　　也有多解：

$$\begin{array}{r} \mathrm{WRONG} \\ +\ \mathrm{WRONG} \\ \hline \mathrm{RIGHT} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24153 \\ +\ 24153 \\ \hline 48306 \end{array}，\begin{array}{r} 49306 \\ +\ 49306 \\ \hline 98612 \end{array}，\cdots，$$

其中T一定是偶數。

（10）

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ +\ D\ E\ F \\ \hline G\ H\ I \end{array}$$

也有多解：

$$\begin{array}{r} 1\ 7\ 3 \\ +\ 2\ 9\ 5 \\ \hline 4\ 6\ 8 \end{array}，\begin{array}{r} 2\ 8\ 9 \\ +\ 4\ 6\ 1 \\ \hline 7\ 5\ 0 \end{array}，\cdots。$$

……等等，欲知更進步的密碼算術題可參考下列資料：

1. Steven G. Krantz(1997).Techniques of Problem Solving,Providence,RI：American Mathematical Society.
2. Seymour, D. et al. (1975). Aftermath Vol I－Vol IV. Leeds,UK:Creative.

主題1－2：尋找神秘的英文字（二）

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者：**陳昭地

二、先備知識：

（一）已學七年級國中上學期尋找神秘的英文字（一）。

（二）能熟練整數加減的直式計算。

（三）能熟練較大位數的乘除直式計算。

（四）能知道數學在促進人類文化發展上的具體例子。

三、教學目標：

強化正整數四則運算概念及應用到解密碼算術題的能力。

四、教學時間：45 分鐘（一節課）

五、教學說明：

以下共有六個算式（1）～（6），各算式中的每個英文字母代表一個阿拉伯數字（0, 1, 2, …, 8, 9）相同的字母代表同一個數字，不同的字母代表不同的數字，主題中要尋找的神秘的英文字就依序由代表 0, 1, 2, …, 8, 9 十個字母所拼成的英文字。

數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
字母										

（1）

```
      O R
×     O R
─────────
    O F F
```

（2）

```
      O O
×     O O
─────────
    O R O
```

（3）

```
    O N O
+     O N
─────────
    O F F
```

（4）

```
   F A C E
+      N O
──────────
   F A N S
```

（5）

```
   A R E A
－ L A K E
──────────
     A C E
```

（6）

```
    R O L L
   ────────
F ) E A R N
    E
   ────────
      A
      F
     ──────
      R R
      R C
     ──────
        R N
        R C
       ────
          N
```

六、教學活動：

活動一：由（1）中的算式，盯住個位數三個字母O，又字母O不能代表0，可知字母O所代表的數字一定為 ______； 又R×R所代表的數與字母F代表的個位數字相同，所以只要再知道R就可以確定F所代表的數字了！

活動二：由（2）式中的算式及活動一所得字母O所代表的數字，所以字母R所代表的數字為 ______，於是（1）式中字母F所代表的數字為 ______。

活動三：由（6）式中的除法算式，已知字母F、R所代表的數字，

盯住 E＝F×R，所以 E 所代表的數字為 _____；再盯住 RN－RC＝N，於是 C 所代表的數字為 _____。

活動四：由（3）式中的算式，已知字母 O、F 所代表的數字，盯住個位數 O、N、F，可知字母 N 所代表的數字為 _____。

活動五：由（4）式中的算式，已知字母 E、O 所代表的數字，盯住個位數 E、O、S，可知 S 所代表的數字為 _____。

活動六：由（5）式中的算式，已知字母 E 所代表的數字，盯住個位數字 A、E、E，可知 A－E 與 E 有相同的個位數字，於是字母 A 所代表的數字為 _____，再盯住千位數 A、L，故知字母 L 所代表的數字為 _____，最後盯位十位數 E、K、C，已知字母 E、C 所代表的數字及個位數相減的過程，從十位數 E 中借 1，因此字母 K 所代表的數字為 _____。

等一下！暫時不要停下筆，繼續核驗答案：各字母所代表的數字正確無誤嗎？ ________（完全正確在空格中打勾，否則再檢查一遍）一一將字母所代表的數字代入各算式都符合每一個算式嗎？

是 ______ 不是 ________ （打勾）

↕

（再訂正）

※結論：結合以上各活動及核驗答案，依序代表 0, 1, 2, …, 8, 9 的英文字母為____

換句話說，神秘的英文字為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

其中文意思為＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（可查英文字典)。

教學活動參考解答：

活動一：1，活動二：2、4，活動三：8、0，活動四：3，活動五：9，活動六：6、5、7。

結論：C、O、R、N、F、L、A、K、E、S；CORNFLAKES；玉蜀黍片。

七、指定作業：

1. 在上面的主題中，若除了原來六個算式外，再增列三個式：

（7）
$$\begin{array}{rccc} & & A & R \\ \times & & O & C \\ \hline & A & R & C \end{array}$$

（8）
$$\begin{array}{rcc} & & E \\ \hline K) & L & A \\ & L & A \\ \hline & & 0 \end{array}$$

（9）
$$\begin{array}{rcccc} & F & A & R & E \\ - & F & O & O & L \\ \hline & & L & O & N \end{array}$$

那麼原神秘的英文字是否仍然一樣？為什麼？

2. 假設神秘的英文字母滿足下列四個算式：

（1）
$$\begin{array}{rccc} & L & O & N \\ \hline T) & T & I & P \\ & T & & \\ \hline & & I & \\ & & S & \\ \hline & & O & P \\ & & O & P \\ \hline & & & C \end{array}$$

（2）
$$\begin{array}{rcccc} & & S & I & N \\ \hline H) & O & P & E & N \\ & O & H & & \\ \hline & & T & E & \\ & & T & O & \\ \hline & & & T & N \\ & & & T & S \\ \hline & & & & T \end{array}$$

（3）
$$\begin{array}{rccc} & & I & S \\ \hline H) & T & H & E \\ & T & O & \\ \hline & & O & E \\ & & O & H \\ \hline & & & L \end{array}$$

（4） $TEN-ONE=SH$

那麼神秘的英文字為 ________________________________。

中文意思為 ____________________________(可查英文字典)。

指定作業參考解答：

1. 用原代表各字母的數字一一代入（7）、（8）、（9）三式仍然成立，故答案不變。

2.

數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
字母	C	L	O	T	H	E	S	P	I	N

英文字： CLOTHES PIN 。

中文意思： 服飾針 （可查英文字典)。

◎解法：

1° 由(1)式除法餘數 $C=OP-OP=0$，字母 C 代表 0，再由除法第一步知 $T\times L=T$，而 $T\neq 0$，故 $L=1$，即字母 L 代表 1；

2° 將(4)改寫成

$$\begin{array}{r} T\ E\ N \\ -\ O\ N\ E \\ \hline S\ H \end{array}$$

，由百位數 T，O 可知

$T=O+1$

3° 由(3)式 $H-O=O$，所以 $H=O+O$，$O\neq 0$，1，於是 H 為 4、6、8 中的偶數。另由 $I\times H=TO$，若 $H=4$，則 $O=2$、$T=3$、

$I\times4=32$，於是 $I=8$；若 $H=6$，則 $O=3$、$T=4$，再由 $S\times H=OH$ 得 $S=6$（不合）；若 $H=8$，則 $O=4$、$T=5$、$S=6$ 然由（2）的餘數 T 知 $M=S+T=11>9$(不合)；綜合起來，得 $H=4$、$O=2$、$T=3$、$I=8$、$S=6$、$N=9$；

4° 再由（2）式 $P-H=T$、$E-O=T$ 所以 $P=H+T=7$、$E=O+T=5$；

5° 將 $C=0$、$L=1$、$O=2$、$T=3$、$H=4$、$E=5$、$S=6$、$P=7$、$I=8$、$N=9$，一一代入檢視各算式運算均符合，得其惟一解。

八、教學注意事項：

1. 指導說明讀題時間約 3 分鐘。
2. 各活動分配時間約 5～6 分鐘。
3. 下結論時間約 5 分鐘。
4. 作業算式(4)可改成 ONE＋SH＝TEN。
5. 各活動間可能互換次序，只要循序漸近逐步找出各英文字母所代表的數字即可。
6. 作業二，即便再增列一式(5)NINE－TEN＝NETS 仍然得到相同的解。

7. 各主題活動間，教師宜巡堂走動，加強瞭解學生學習情形。

8. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

下面提供進一步的密碼算術題：

（1）AB×CDE＝FGHI 也有多解：63×154＝9702，54×168＝9072，…。

（嘗試錯誤法）

（2）　　也有多解：

$$\begin{array}{r} I\ S \\ +\quad I\ S \\ \hline A\ R\ E \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\ 2 \\ +\quad 5\ 2 \\ \hline 1\ 0\ 4 \end{array},\ \begin{array}{r} 7\ 3 \\ +\quad 7\ 3 \\ \hline 1\ 4\ 6 \end{array},\ \cdots,$$

A 一定是 1，E 一定是偶數。

（3）　　也有多解：

$$\begin{array}{r} I\ S \\ +\quad A\ M \\ \hline A\ R\ E \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\ 7 \\ +\quad 1\ 6 \\ \hline 1\ 0\ 3 \end{array},\ \begin{array}{r} 8\ 6 \\ +\quad 1\ 7 \\ \hline 1\ 0\ 3 \end{array},\ \cdots,$$

A 一定是 1。

（4）　　也有多解：

$$\begin{array}{r} Y\ O\ U \\ +\ M\ O\ R\ E \\ \hline T\ H\ E\ Y \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ 8\ 4 \\ +\ 1\ 8\ 5\ 3 \\ \hline 2\ 6\ 3\ 7 \end{array},\ \begin{array}{r} 3\ 6\ 2 \\ +\ 8\ 6\ 5\ 1 \\ \hline 9\ 0\ 1\ 3 \end{array},\ \cdots,$$

其中 T 一定等於 M＋1。

(5)　　　　　　　　也有多解：

$$\begin{array}{r} A\ Y\ E \\ +\ A\ Y\ E \\ \hline Y\ E\ S \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\ 7\ 5 \\ +\ 3\ 7\ 5 \\ \hline 7\ 5\ 0 \end{array},\quad \begin{array}{r} 3\ 7\ 4 \\ +\ 3\ 7\ 4 \\ \hline 7\ 4\ 8 \end{array},\ \cdots,$$

其中 S 一定為偶數。

(6)　　　　　　　　也有多解(有一定的難度)：

$$\begin{array}{r} S\ E\ V\ E\ N \\ +\ E\ I\ G\ H\ T \\ \hline T\ W\ E\ L\ V\ E \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\ 5\ 2\ 5\ 4 \\ +\ 5\ 0\ 6\ 7\ 1 \\ \hline 1\ 3\ 5\ 9\ 2\ 5 \end{array},\quad \begin{array}{r} 6\ 3\ 7\ 3\ 2 \\ +\ 3\ 9\ 8\ 4\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 3\ 5\ 7\ 3 \end{array}$$

，…，其中 T 一定是 1。

(7) $ATOM=(A+TO+M)^2$恰有兩組解：

$6724=(82)^2=(6+72+4)^2$，$1296=(36)^2=(1+29+6)^2$

(8)$AYE+AYE+AYE+AYE=YES+YES+YES$(Alan Wanyne 密碼算術題)

恰有一解：

$$\begin{array}{r} 5\ 7\ 6 \\ 5\ 7\ 6 \\ 5\ 7\ 6 \\ +\ 5\ 7\ 6 \\ \hline 2\ 3\ 0\ 4 \end{array},\quad \begin{array}{r} 7\ 6\ 8 \\ 7\ 6\ 8 \\ +\ 7\ 6\ 8 \\ \hline 2\ 3\ 0\ 4 \end{array}$$

(先由 E 與 S 的關係入手，逐一檢查)

參考主題 1－7：密碼算術(一)

（9）NUDE＋NOT＋RUDE＋NOR＝CRUDE(R.J. Lancaster 密碼算術題)

先由左式的 RUDE 與右式的 CRUDE 相消，

化成如下的問題：

NUDE＋NOT＋NOR＝10000（C＝1）

可知有許多解：

8350＋824＋826＝10000；

8251＋873＋876＝10000；(N 一定是 8)

8213＋890＋897＝10000。

（10）　恰有一解(有難度)：

$$\begin{array}{r} D\ O\ N\ A\ L\ D \\ +\ G\ E\ R\ A\ L\ D \\ \hline R\ O\ B\ E\ R\ T \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\ 2\ 6\ 4\ 8\ 5 \\ +\ 1\ 9\ 7\ 4\ 8\ 5 \\ \hline 7\ 2\ 3\ 9\ 7\ 0 \end{array}$$

……等等，欲知更進步的密碼算術題可參考：

Steven G. Krantz(1997). Techniques of Problem Solving, pp.201~221,Providence,RI：American Mathematical Society.

主題1－3：相反數與絕對值

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者：**李政憲

二、先備知識：

能將整數、分數、小數標記在數線上。

三、教學目標：

認識相反數與絕對值。

（一）瞭解相反數與絕對值的意義，並能作簡單的計算。

（二）說明相反數的意義與引入原因：

1. 強調與原點距離相同的異號數。

2. $-(-a)=a$ 與 0 的相反數說明。

（三）說明絕對值的意義：

1. 說明絕對值表示該數與原點的距離。

2. 比較負數與正數絕對值的計算方式與其值的大小。

3. 絕對值與相反數的關係。

（四）利用絕對值意義作簡單的大小比較與計算：

由$|a|$求 a，並找出絕對值小於或等於 a 的所有整數。

四、教學時間：90 分鐘（二節課）

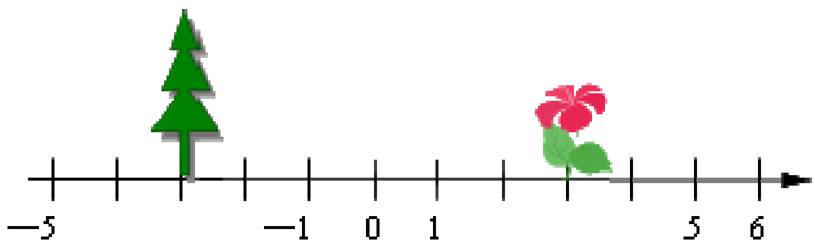
五、教學說明：

透過相反數的介紹，引入絕對值的概念，進一步討論其意義並進行運算。

六、教學活動：

活動一：(相反數的概念)

透過數線繪製相反數，觀察兩點的位置關係。



如上圖，大樹與小花(或以甲、乙兩點表示)在數線上所在的位置為何？兩點的坐標有何關係？

※觀察後得到的結論：

1. 如：3 的相反數為－3，－3 的相反數為 3，我們稱這兩個數<u>**互為**</u>相反數；亦即：

   3 與－3 互為相反數

   －4 與 4 互為相反數

   $-\frac{1}{2}$與$\frac{1}{2}$互為相反數

   1.2 與－1.2 互為相反數

   $-3\frac{1}{5}$與$3\frac{1}{5}$互為相反數

   $\frac{20}{7}$與$-\frac{20}{7}$互為相反數

2. 當兩數互為相反數時，代表以原點為基準，兩數所代表的點在數線上與原點的距離相同，左右方向相反；例如以上的 3 與－3，與原點的距離相同(均為 3)，方向相反(一左一右)。

活動二：（相反數的舉例與說明）

說明：請同學舉出相反數的例子，並說明在數線上的相關位置（可不限制為整數）。

例如：24 與－24 在數線上是以原點為基準，與原點距離均為 24 個單位長且方向相反的兩個點；

想想看：請問 3 的相反數除了－3 以外，還有其他的數嗎？

活動三：（相反數的練習）

例 1：求出以下各數的相反數：

（1）5.1　（2）－4　（3）－12.3　（4）$4\frac{2}{3}$

隨堂練習 1：求出以下各數的相反數：

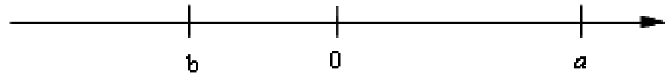
（1）－13.7　（2）27　（3）$11\frac{2}{5}$　（4）－51

活動四：（相反數的符號化簡）

※延伸思考Ⅰ：

①「正數的相反數即加上負號，負數的相反數即去掉負號」的結論是對的嗎？

② 觀察下圖，請問 a 與 b 的相反數分別為何？請在數線標示出其答案。



③ 根據上圖的答案，請問$-a$的相反數為何？

所以$-(-a)=$？

a是正數還是負數會影響其答案嗎？

請問$-(-5)=$？ $-(-2\frac{2}{5})=$？

④ 0的相反數為何？

活動五：(絕對值的符號)

說明：由活動一～四，可以得到數線上互為相反數的兩點，與原點的距離相同、方向相反；而在數學上要計算某數與原點距離時，可透過絕對值符號｜ ｜的使用來計算其值；

例如：$|5|=5$，代表5與原點的距離為5；$|-3\frac{1}{2}|=3\frac{1}{2}$，代表$-3\frac{1}{2}$與原點的距離為$3\frac{1}{2}$。而絕對值符號｜ ｜與＋、－、×、÷等符號一樣，也等同於一種數學運算符號，其運算後的結果恆正。

活動六：(絕對值的計算與相反數的比較)

例2：(1)計算以下各算式的結果：

① $|-7|$ ② $|13\frac{1}{7}|$ ③ $|-3.5|$

(2)計算以下各算式的結果：

① $|3.2-1|$ ② $|11-50|$ ③ $|11|-50$

隨堂練習 2：計算以下各數的絕對值，並比較其絕對值的大小：

（1）9.3　（2）-7　（3）$-\frac{20}{3}$

例 3：（1）分別計算 5 的相反數與絕對值；

（2）分別計算－5 的相反數與絕對值。

隨堂練習 3：觀察以上例 3 的答案，請問：

（1）正數的相反數與絕對值有何關係？並舉例說明。

（2）負數的相反數與絕對值有何關係？並舉例說明。

活動七：（絕對值基本應用）

在瞭解絕對值的概念與運算方式後，接下來將針對絕對值的意義，作相關例題的應用：

例 4：分別計算 2011 與－2011 的絕對值

隨堂練習 4：

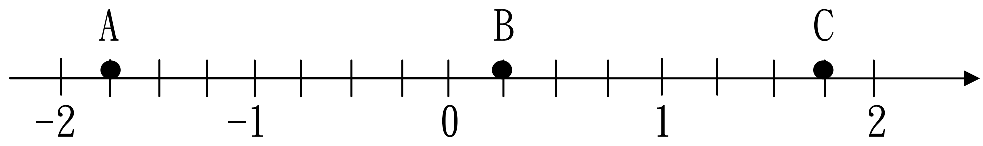
（1）分別計算 3.5 與－3.5 的絕對值

（2）根據例 3 與①題中的答案，請問當兩數互為相反數時，兩數的絕對值有何關係？

例 5：若 $|a| = 3\frac{2}{5}$，則 a 可能的值有哪些？

隨堂練習 5：如下圖所示，若 A、B、C 三點的坐標分別為 a、b、c，分別求出下列各式的值。

（1）$|a|$　（2）$|c-b|$　（3）$|a+c|$



例 6：若 a 為整數，且 $|a|<3\frac{2}{5}$，則 a 可能的值有哪些？

隨堂練習 6：若 a 為整數，又 $|a|>2$ 且 $|a|<8$，寫出所有可能的 a 值，並以數線表示所有 a 可能的點所代表的數。

活動八：（絕對值綜合練習）

※延伸思考 II：

請回答下列問題：

1. 絕對值小於或等於 10 的整數共有幾個？這些整數的和為多少？
2. 絕對值小於或等於 24 的整數共有幾個？這些整數的和為多少？
3. 若 b 為正整數，則絕對值小於或等於 b 的整數共有幾個？（以 b 表示）

※結論：

1. 相反數：當以原點為基準，兩數在數線上與原點的距離相同，左右方向相反時，則此兩數稱為相反數；例如：3 與－3 互為相反數。

2. 絕對值：計算某數與原點的距離時，可透過絕對值符號｜　｜的使用計算其值；例如：｜5｜＝5，｜－5｜＝5。

3. 正數的絕對值為其本身，負數的絕對值為去除負號之後的值(即為其相反數)。

教學活動參考解答：

活動二：

如 3.5 與－3.5 互為相反數，且在數線上與原點的距離均為 3.5 個單位長（一左一右)。想想看解答：沒有其他的數。

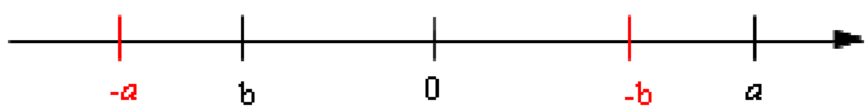
活動三：

例 1：(1) －5.1，(2) 4，(3) 12.3，(4) $-4\frac{2}{3}$。

隨堂練習 1：(1) 13.7，(2) －27，(3) $-11\frac{2}{5}$，(4) 51。

活動四：

①是。　　②$-a$ 與 $-b$，圖示如下：



③$-a$ 的相反數為 a，$-(-a)=a$，不影響其答案，$-(-5)=5$，$-(-2\frac{2}{5})=2\frac{2}{5}$。　　④0 的相反數＝0。

活動六：

例 2：(1) ①7，②$13\frac{1}{7}$，③3.5；(2)①2.2，②39，③－39。

隨堂練習 2：(1) $|9.3|=9.3$，(2) $|-7|=7$，

(3) $\left|-\frac{20}{3}\right|=\frac{20}{3}$，故 $|9.3|>|-7|>\left|-\frac{20}{3}\right|$

◎註：此處需要求學生將其值計算後加上絕對值運算符號，避免書寫出「$-\frac{20}{3}=\frac{20}{3}$」的結果。

例 3：(1) 5 的相反數為-5，$|5|=5$；

(2) -5 的相反數為 5，$|-5|=5$。

隨堂練習 3：

①正數的相反數與絕對值互為相反數，例如：3 的相反數-3與 $|3|=3$ 互為相反數。

②負數的相反數與絕對值相同，例如：-3 的相反數 3 與 $|-3|=3$ 相同。

活動七：

例 4：$|2011|=2011$，$|-2011|=2011$。

隨堂練習 4：①$|3.5|=3.5$，$|-3.5|=3.5$。

②當兩數互為相反數時，兩數的絕對值相同。

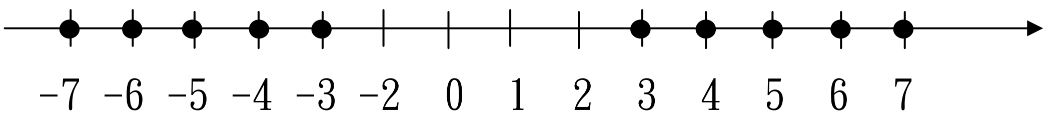
例 5：因 $|a|$ 代表的是與原點距離$3\frac{2}{5}$的點所代表的數，故 a 的值為$3\frac{2}{5}$或$-3\frac{2}{5}$。

隨堂練習 5：① $|a|=\left|-1\frac{3}{4}\right|=1\frac{3}{4}$，② $\left|1\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right|=1\frac{2}{4}=1\frac{1}{2}$，

③ $|a+c|=\left|-1\frac{3}{4}+1\frac{3}{4}\right|=|0|=0$。

例 6：因｜a｜＜$3\frac{2}{5}$代表的是與原點距離小於$3\frac{2}{5}$的點所代表的數，而比$3\frac{2}{5}$小的正整數有 0, 1, 2, 3；故 a 可能的值為－3, －2, －1, 0, 1, 2, 3 共 7 個答案。

隨堂練習 6：比 2 大比 8 小的正整數計 3, 4, 5, 6, 7 共 5 個數，故 a 可能的值有－3, －4, －5, －6, －7, 3, 4, 5, 6, 7 共 10 個數，繪製於數線如下：



活動八：①21 個，其和為 0，②49 個，其和為 0，③2×b＋1 個。

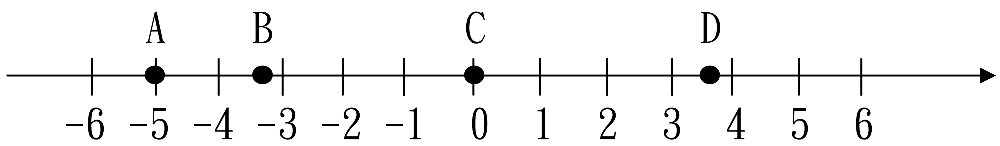
七、指定作業：

1. 計算後說明下列各數的相反數與絕對值：

（1）－3　（2）5.2＋2.5　（3）3－10

2. 若一個數的相反數與絕對值相同，則這個數可能是哪些數？

3. 如圖所示，數線上 A、B、C、D 各點所表示的數分別為 a、b、c、d，試比較 a、b、c、d 各數絕對值的大小：



4. 若 a、b 為正整數，且絕對值小於 a 的整數有 13 個，絕對值小於 b 的整數有 21 個，求－｜a＋b｜之值。

指定作業參考解答：

1.（1）相反數＝3，絕對值＝3，(2）相反數＝－7.7，
絕對值＝7.7，(3）相反數＝7，絕對值＝7。

2. 0 或負數（與絕對值的定義不同，可提醒學生注意。）

3. ｜a｜>｜d｜>｜b｜>｜c｜（此題應確認學生讀題與絕對值的概念是否清楚，其中 b、d 兩點絕對值的大小比較，主要是強調絕對值比大小未必需要實際計算出值的大小，也為了接下來兩點距離的概念作準備）。

4. a＝7，b＝11（注意有些學生的答案會寫成 a＝6，b＝10，主要是<與≤兩種符號與概念的混淆，教師再加以說明提醒即可)，故－｜7＋11｜＝－18（絕對值的運算雖非負，但加上負號後仍為負數)。

八、教學注意事項：

1. 本主題的教學內容，主要是參考各版本第一冊課本，以及個人教學經驗設計而成，資訊融入非必要，直接於黑板上討論作答亦可。

2. 各活動教學參考時間，指導說明讀題時間每題約 1 分鐘，活動一～活動六各約 5～7 分鐘，活動七、八約 10～15 分鐘，隨

堂練習約 2～3 分鐘，結論時間：5 分鐘，指定作業(含提示與檢討)：15 分鐘。

3. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
4. 在各活動進行時，可隨機指定學生口頭回答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其它同學作答，再答錯老師應加強解說。另相關教材若要改版為學習單供學生上課使用，應在題目之後多留空白，以供學生計算寫答使用。
5. 活動一進行時，教師可說明相反數的引入，是為了接下來要介紹的絕對值概念預作鋪陳。另外活動一的物件(大樹與小花)若要更改為其餘物件時，應避免使用有方向性的物件(如人或動物)，才不致造成學生相對位置觀念(如前後或左右)的混淆。
6. 教師應特別加強解說，相反數與絕對值以及整數加減的關係。
7. 活動二的目的是為了確認學生均能了解相反數的意義，並能判斷其他同學答案是否正確；進一步再說明 a 與 $-a$ 互為相反數的概念。在強調相反數以原點為基準在數線上的意義，並強調其存在的唯一性後，便能為接下來 $-(-a)=a$ 作接軌。
8. 活動四教學建議：

　　此處①的題目設計，主要為了將來要介紹絕對值的代數

意義預作鋪陳，當學生的概念與運算尚未熟捻前，教師不宜特別強調。

至於②的題目設計，配合圖形的觀察與教師的說明，透過 a 的相反數為 $-a$（不論 a 的正負）的規定與說明，可推出 $-a$ 的相反數有二：$-(-a)$與 a，加上活動三強調相反數的唯一性，便可導出 $-(-a)=a$ 的結論，並進行第③題的練習。進一步於第④題透過 0 與原點的距離為 0（不分左右），說明 0 的相反數＝0（也為接下來｜0｜＝0 的結果預作鋪陳）；另外 $-(-a)=a$ 將與第三章「式子的運算」的概念：「$(-1)\times(-a)=a$」再作比較。

此外相反數的介紹，將作為下一節「整數的加減」的基本工具，務必確實要求學生了解與熟練。

9. 活動六的安排，主要是承接之前相反數的概念，比較正、負數相反數與絕對值運算結果的差異性，進一步應用於接下來活動的設計。

10. 隨堂練習 5 的目的在觀察正分數的減法及正負數的抵消與絕對值的關係，教師不必特別強調絕對值與兩點距離的關係，待「整數的減法」學完後再適時引入即可。

11. 活動八教學建議：

（1）此活動主要將例題 4 的概念作進一步應用，若學生前面的練習較不熟悉，此處可先不練習，待後續相關運算較為熟練後，教師再行加強。

（2）此處三個小題主要在討論絕對值小於 a（a>0）的整數的對稱性，進一步作數的大小比較，並讓學生有同值異號的正負數互相抵消的概念。

（3）關於｜a｜＝－a（a＜0）的討論，此處不宜直接與學生討論，避免與「絕對值計算的結果恆為非負數」的結論造成混淆；教師可待學生的未知數概念較清楚後，再與學生進行討論。

（4）至於兩點距離的討論(如：｜x－3｜＝1，則 x 的值為何？)，宜在下一章節「整數的加減計算」或第三章「解一元一次方程式」學習完畢後，再進行補充與加強。

（5）若學生反應良好，可與學生進一步討論問題：「若絕對值小於或等於 a 的整數共有 b 個，其中 a、b 為正整數，則 a、b 兩數有何限制？」

12. 透過相反數的引入，一方面為接下來要學習的絕對值作搭配，另一方面也為下一章節「整數的加減」作鋪路。

13. 絕對值的非負性質在數學的後續學習是極為重要的，可從不同兩個角度（幾何與代數，詳見底下參考資料：2.絕對值教學目標）進行切入教學，然而為避免學生產生混淆，在教學中，應只強調一種定義（一般建議由幾何意義先學起，如本節內容安排方式），另一種定義宜由學生自行觀察，或待學生相關概念與練習較為上手，再由老師進行補充（代數意義：一個正數的絕對值是它本身；一個負數的絕對值是它的相反數；零的相反數是零）；主要因為利用幾何方式解釋絕對值大小與零的絕對值都較為直觀。至於「非負數」名詞的引入，也期待在學生的觀察理解後，由教師的歸納適當提出。

九、教學參考資料：

1. 99 學年度國中各版本第一冊數學課本。

2. 七年級數學教案。絕對值：(檢索日期：2013/12/27)

http://ja.3edu.net/sx12/Lesson_67330.html

主題1－4：整數的加法

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者**：蘇進發

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　陳昭地

（一）能區別性質符號與運算符號。

（二）能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值，並在數線上做大小比較與加的操作。

三、教學目標：

（一）瞭解整數與數線的關係。

（二）瞭解同號數相加的意義。

（三）瞭解異號數相加的意義。

（四）理解加法交換律與加法結合律的性質。

（五）熟練整數加法運算。

四、教學時間：90 分鐘（二節課）

五、教學說明：

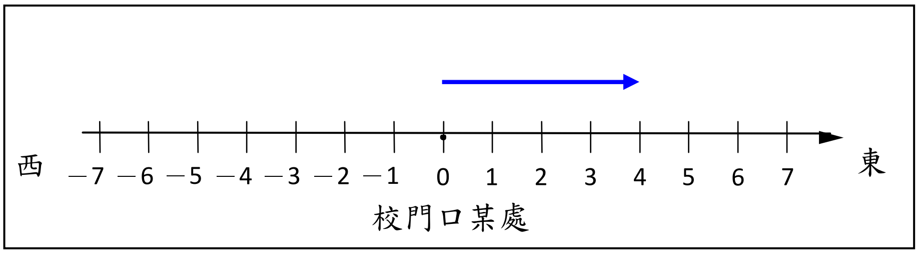
教學設計以貼近學生生活情境，結合數線幫助學生發現與瞭解整數加法運算規則，再透過加法交換律與加法結合律，簡化整數加法計算，進而達到熟練整數加法。教學設計中，並透過幻方遊戲，利用整數加法運算，培養學生數學思考推理能力，進而提升數學學習興趣。

六、教學活動：

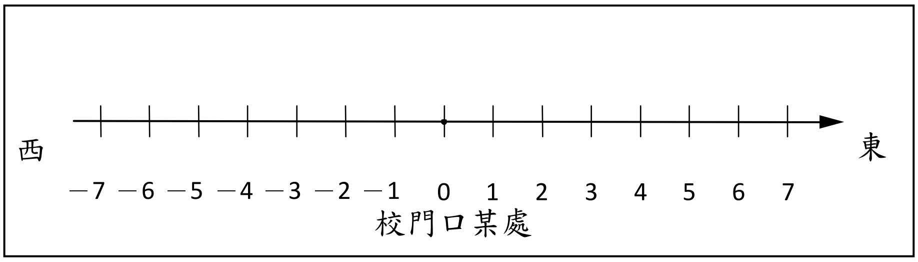
活動一：(整數與數線)

今以校門口某處為數線原點，向東(向右)為正向。

若<u>小明</u>從原點向東走 4 公尺，記作 ＋4 公尺，並圖示如下：



則<u>小英</u>從原點向西走 6 公尺，記作______公尺，請圖示於數線上。

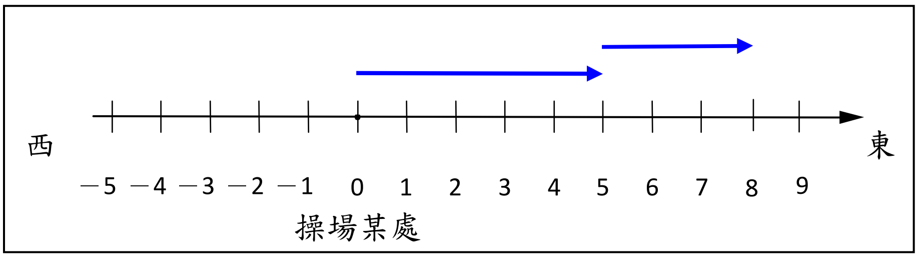


活動二：(同號數相加)

今以操場某處為數線原點，向東(向右)為正向。

1. 若<u>小華</u>從原點向東走 5 公尺，記作 ______ 公尺，再往東走 3 公尺，記作 ______ 公尺，則<u>小華</u>總共向東走了 ______ 公尺，記作 ______ 公尺。

   今將過程圖示如下：



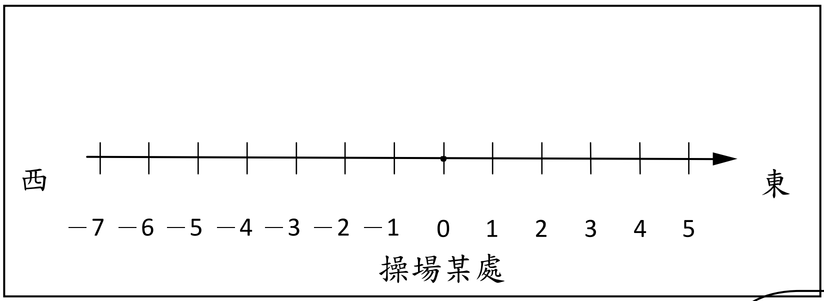
亦將過程以算式表示如下：

(__＋5__)＋(____)＝_____。

我們習慣將正號省略，表示為 (__5__)＋(____)＝_____。

2. 若小杰從原點向西走 3 公尺，記作 _____ 公尺，再往西走 2 公尺，記作 _____ 公尺，則小杰總共向西走了 _____ 公尺，記作 _____ 公尺。

請將過程圖示在數線上：



請將過程以算式表示於下：

(__−3__)＋(____)＝_____。

同號數相加
計算結果的**正負**與原來符號一樣

結論：若 a、b 為兩正整數，則(＋a)＋(＋b)＝__＋(a＋b)__

(−a)＋(−b)＝________

3. 計算下列各式的值：

(1) (−18)＋(−25)＝−(___＋25)＝_____

(2) (−33)＋(−57)＝−(___＋___)＝_____

(3) (−121)＋(−49)＝________

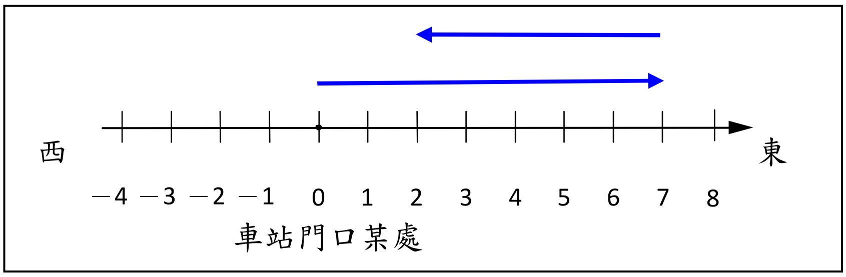
(4) (−231)＋(−546)＝________

活動三：(異號數相加)

今以車站門口某處為數線原點，向東(向右)為正向。

1. 若小寶從原點向東走 7 公尺，記作 ______ 公尺，再向西走 5 公尺，記作 ______ 公尺，則小寶最後停留的位置，是從原點向 ______ (填入東或西)走了 ______ 公尺，記作 ______ 公尺。

今將過程圖示如下：

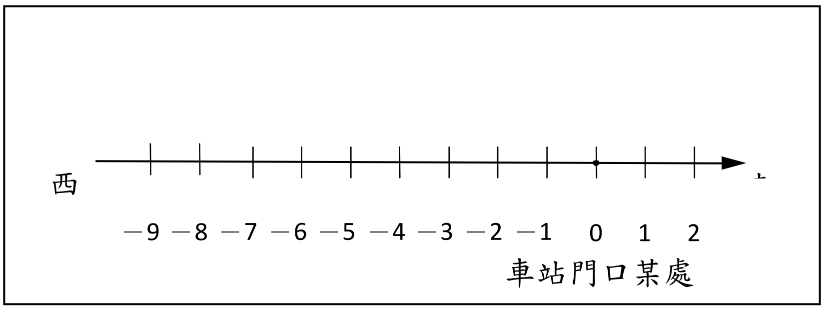


亦將過程以算式表示如下：

(+7)＋(____)＝＋(7－___)＝_____ 。

2. 若小萱從原點向西走 8 公尺，記作 ______ 公尺，再向東走 5 公尺，記作 ______ 公尺，則小萱最後停留的位置，是從原點向 ______ (填入東或西)走了 ______ 公尺，記作 ______ 公尺。

請將過程圖示在數線上：

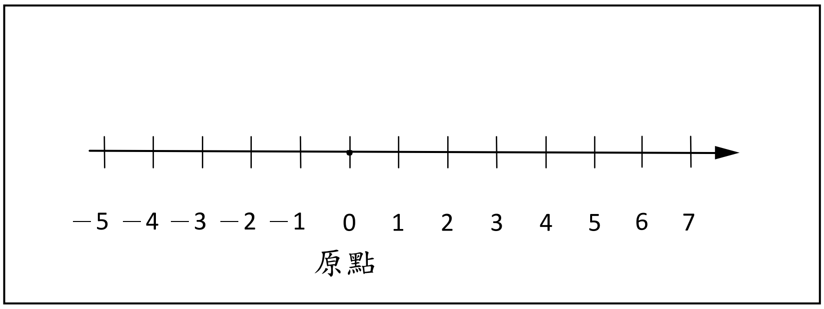


請將過程以算式表示於下：

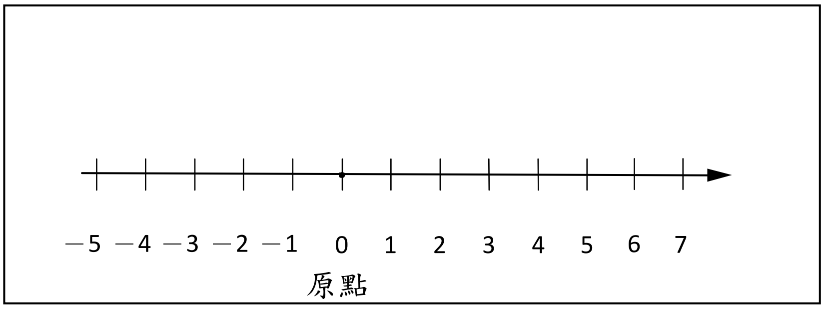
(－8)＋(____)＝－(8－___)＝_____ 。

3. 在數線上圖解下列各式：

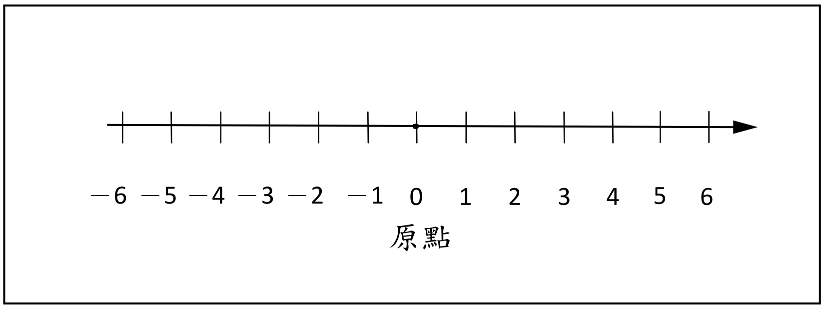
（1）6＋(－4)＝＋(6－___)＝_______



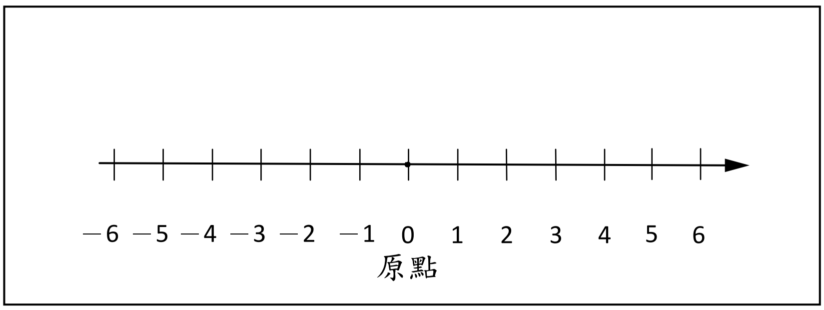
（2）(－4)＋6＝＋(6－___)＝_______



（3）2＋(－5)＝－(5－___)＝_______



（4）(－5)＋2＝－(5－___)＝_______



結論：

已知 a、b 為正整數，

(1)若 $a>b$，則 $a+(-b)=+(a-b)=a-b$

$(-b)+a=+(a-b)=a-b$

異號數相加
正數線段比較**大**
計算結果為**正數**

(2)若 $a<b$，則 $a+(-b)=-(b-a)$

$(-b)+a=-(b-a)$

異號數相加
正數線段比較**小**
計算結果為**負數**

4. 計算下列各式的值：

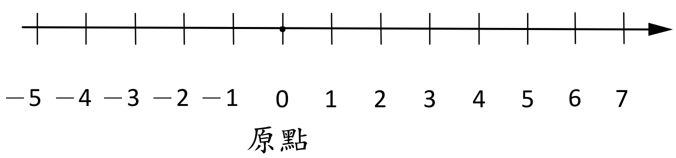
(1) $(-8)+15=+(\_\_\_\_-\_\_\_\_)=\_\_\_\_\_\_$

(2) $(43)+(-57)=-(\_\_\_\_-\_\_\_\_)=\_\_\_\_\_\_$

(3) $(-125)+67=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_\_\_$

(4) $287+(-153)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_=\_\_\_\_\_\_\_\_$

5. 在數線上圖解 $6+(-6)$。



由上列情形知：

$6+(-6)=\_\_\_\_\_\_\_\_$

結論：

當兩數互為相反數時，其和為________

6. 已知 a 為整數，試比較 $3+a$ 與 3 的大小關係。

加一個數後會**變大**嗎？

考慮將 a 分成正整數、0、負整數 3 種情形

（1）若 a 是正整數，則 $3+a$ ____ 3 （填入＞、＝或＜）

（2）若 a 是 0，則 $3+a$ ____ 3 （填入＞、＝或＜）

（3）若 a 是負整數，則 $3+a$ ____ 3 （填入＞、＝或＜）

由（1）、（2）、（3）的結果，請說明 $3+a$ 與 3 的大小關係。

____

活動四：（加法交換律與加法結合律）

1. 計算下列兩式子的結果，並比較它們的大小關係。

（1） $(-8)+(-12)=$______

（2） $(-12)+(-8)=$______

計算的結果得，

（1）式的值_____（2）式的值（填入＞、＝或＜）

2. 計算下列兩式子的結果，並比較它們的大小關係。

（1） $(-18)+27=$______

（2） $27+(-18)=$______

計算的結果得，

（1）式的值_____（2）式的值 （填入＞、＝或＜）

結論：

已知 a、b 為整數，則 $a+$b_____b$+a$ （填入＞、＝或＜）

3.計算下列兩式子的結果，並比較他們的大小關係。

（1）[(－6)＋9]＋(－4)＝(____)＋(－4)＝______

（2）(－6)＋[9＋(－4)]＝(－6)＋(____)＝______

計算的結果得，(1）式的值_____（2）式的值（填入＞、＝或＜）

4.計算下列兩式子的結果，並比較他們的大小關係。

（1）[(－12)＋(－7)]＋8＝(____)＋8＝______

（2）(－12)＋[(－7)＋8]＝(－12)＋(____)＝______

計算的結果得，(1）式的值_____（2）式的值 （填入＞、＝或＜）

結論：

已知 a、b、c 為整數，則(a＋b)＋c_____a＋(b＋c)

（填入＞、＝或＜）

5.計算下列各式

(1) 2367＋469＋(－2300)

＝2367＋(______)＋469

＝(______)＋469

＝_______

(2) [(－9374)＋17589]＋(－17589)

＝(－9374)＋(______)

＝_______

活動五：（熟練整數加法）

1.計算下列各式

（1）87＋(－37)＋(－23)

＝(____)＋(－23)

＝________

你有不同解法嗎？請算於右邊

（1）87＋(－37)＋(－23)

＝

（2）(－64)＋85＋(－39)＋26

＝(____)＋(－39)＋26

＝(____)＋26

＝________

你有不同解法嗎？請算於右邊

(2)(－64)＋85＋(－39)＋26

＝

（3）41＋(－73)＋(－58)＋129＋(－97)

＝(41＋129)＋[(－73)＋(____)＋(____)]

＝170＋(_____)

＝______

你有不同解法嗎？

請算於右邊

(3) 41＋(－73)＋(－58)＋129＋(－97)

＝

2.計算下列各式

（1） (－234)＋672＋(－766)＋528

＝(－234)＋(______)＋672＋528

＝(______)＋1200

＝______

（2）[3145＋(－2879)]＋2880

＝3145＋(______)

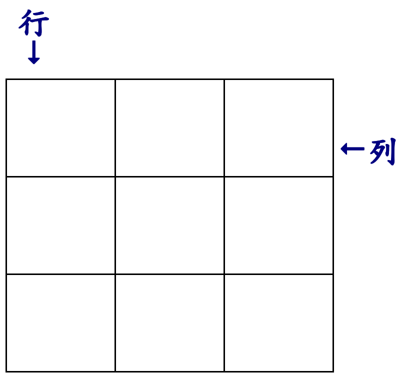
＝______

（3）(－871)＋7632＋(－1129)＋(－632)

＝

活動六：(幻方)

把數字－4、－3、－2、－1、0、1、2、3、4 等 9 個數字填入 3x3 的方陣中，且每格只能填入一個數字，並使每一行、每一列與對角線的數字和都一樣，或許你會問：「有可能嗎？」，拾起你的好奇心，玩看看吧！



1. 請說明下列 3×3 的方陣中，所填的數字，是否符合題目要求嗎？

－1	0	1
3	－4	－3
－2	4	2

說明：

2. 若將 9 個數字填入方陣中，則 9 個數字的總和為_____；又因為方陣有三行，所以每一行的數字和為______，即每一行或每一列或對角線的數字和為_______

3. 因為方陣中的角落格子有 4 個(**A**、**C**、**I**、**G**)，靠邊的中間格子也有 4 個(**B**、**F**、**H**、**D**)，只有正中央格子（**E**）單獨一個，與其它位置不同，所以我們從格子（**E**），開始填起。

A	B	C
D	*E*	F
G	H	I

（1）請問格子（**E**）可以填入正數嗎？

①若格子（**E**）填入正數（1 或 2 或 3），因為每一行或每一列或對角線的數字和為_____，則 4 是否有位置可填？______（填入是或否）

②若格子（**E**）填入正數 4，則剩餘的正數（1 或 2 或 3），是否有位置可填？______（填入是或否）

因此知道，格子（**E**）_______填入正數。（填入可以或不可以）

（2）再問格子(**E**)可以填入負數嗎？

①若格子（**E**）填入負數（－1 或－2 或－3），因為每一行或每一列或對角線的數字和為_____，則－4 是否有位置可填________（填入是或否）

②若格子（**E**）填入負數－4，則剩餘的負數（－1 或－2 或－3），是否有位置可填？______（填入是或否）

因此知道，格子(**E**)_______填入負數。(填入可以或不可以)

所以格子(**E**)應該填入________。

4. 接著考慮從最大的數 4(亦可從最小的數－4)開始討論。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

（1）請問 4 可以填入角落格子(**A**、**C**、**I**、**G**)的位置嗎？

不妨將 4 填入格子（**A**）中，因為對角線的總和為______，所以格子（**I**）必填入______。接著，剩下的正數 3、2、1，不能填入格子 **B**、**C**、**D**、**G**，否則會使行或列的和大於_____，所以只能填入格子____或____，但要將 3 個數填入 2 個格子中是無法做到的，故 4 不可以填入格子（**A**）的位置，同理，也不能填入格子____、____或____的位置。

（2）請問 4 可以填入靠邊中間的格子（**B**、**F**、**H**、**D**）的位置嗎？

不妨將 4 填入格子（**D**）中，因為每行的總和為______，所以格子（**F**）必填入______。接著，格子 **A**、**G**，只能填入__或______，若 **A** 填入較大的數，則所得方陣為…

若 **G** 填入較大的數，則所得方陣為…

很高興你已經找到 2 組答案，剩下 6 組我們將當作練習。

教學活動參考解答：

活動一：－6，圖形略。

活動二：1. ＋5，＋3，8，＋8，＋3，＋8，3，8。

2. －3，－2，5，－5，圖形略，－2，－5，－(a＋b)。

3. 18，－43，33，57，－90，－170，－777。

活動三：1. ＋7，－5，東，2，＋2，－5，5，2。

2. －8，＋5，西，3，－3，圖形略，＋5，5，－3。

3.（1） 4，2，圖形略。　　（2）4，2，圖形略。

（3）2，－3，圖形略。　（4）2，－3，圖形略。

4.（1）15，8，7。　　　　（2）57，43，－14。

（3）－(125－67)，－58。（4）＋(287－153)，134。

5. 圖形略，0，0。

6. ＞，＝，＜，(加正數會變大，加 0 則不變，加負數會變小)。

活動四：1.－20，－20，＝。

2. 9，9，＝，＝。

3. 3，－1，5，－1，＝。

4. －19，－11，1，－11，＝，＝。

5.（1）－2300，67，536。（2）0，－9374。

活動五：1.（1）50，27，略。（2）21，－18，8，略。

（3）－58，－97，－228，－58，略。

2.（1）－766，－1000，200。（2）1，3146。（3）5000。

活動六：1.因為第一列為(－1)＋0＋1＝0 與第二列為 3＋(－4)＋(－3)＝－4 不相等，所以不合題目要求。（學生只要計算列的和或行的和或對角線的和中的兩個值不相等即可。）

2. 0，0（＝0÷3），0。

3.(1)0，否，否，不可以。(2)0，否，否，不可以，0。

4.(1)0，－4，0，F，H，C，I，G。(2) 0，－4，－1 或－3。

－1	－2	3
4	0	－4
－3	2	1

－3	2	1
4	0	－4
－1	－2	3

七、指定作業：

1.計算下列各式

（1）(－65)＋35

（2）(－223)＋(－317)

（3）34＋(－18)＋(－32)

（4）(－83)＋(－61)＋(－28)＋(－35)

（5）(－326)＋743＋(－574)＋125

2.計算下列各式

（1）(－23895)＋7651＋(23898)

（2） [349＋(－1472)]＋(－349)

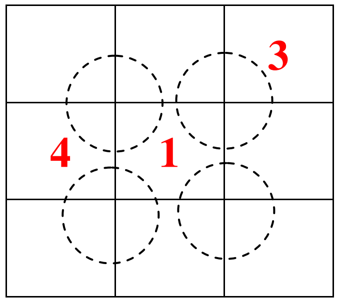
（3）[(－2731)＋547]＋[(－269)＋453]

（4）729＋(－385)＋471＋(－652) ＋(－463)

（5）36＋(－23)＋(－27)＋(－75)＋14＋275

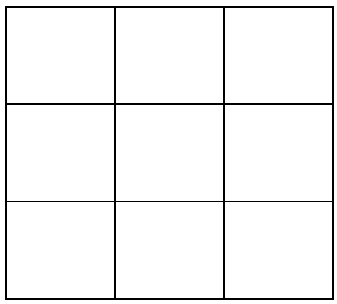
3. 延續活動六的 4－(2)，求出剩下 6 組的 3x3 方陣。

4. 請將數字－4、－3、－2、－1、0、1、2、3、4 等 9 個數字填入 3x3 的方陣中，使右上四格、左上四格、右下四格、左下四格的數字和皆為 1，若已將 **4、1、3** 填入 3x3 的方陣中，則剩餘的數字應填入 3x3 方陣的何處？



5. 遊戲題：(兩人一組)

甲 、乙兩人依照雙方約定，洗牌後分給兩人，其中一人拿 4 張牌，另一人拿 5 張牌，牌的內容為－4、－3、－2、－1、0、1、2、3、4，由拿 5 張牌的人先開始，請每次將 1 張牌置於右圖的方格中，只要有一方先連成一直線，包含兩條對角線，且總分為 0 時，即獲勝，此時連成一直線的牌可以是甲的或乙的。



指定作業參考解答：

1. (1) －30。 (2) －540。 (3) －16。
   (4) －207。 (5) －32。

2. (1) 7654。 (2) －1472。 (3) －2000。
   (4) －300。 (5) 200。

3.

－3	4	－1
2	0	－2
1	－4	3

－1	4	－3
－2	0	2
3	－4	1

1	2	－3
－4	0	4
3	－2	－1

3	－2	－1
－4	0	4
1	2	－3

3	－4	1
－2	0	2
－1	4	－3

1	－4	3
2	0	－2
－3	4	－1

4.

A	B	**3**
4	**1**	F
G	H	I

因為左上 4 格的和為 1，所以 A、B 只能填－4、0 或 0、－4 或－3、－1 或－1、－3 等 4 種情形，再考慮 F 及 G、H 的關係，最後只剩下 A、B 依序為－3、－1 時，可得出正確答案為：

－3	－1	3
4	1	－2
－4	0	2

5. 略。

八、教學注意事項：

1.各活動教學參考時間：

（1）活動一與活動二共用約 15 分，活動三與活動四共用約 30 分。

（2）活動五約用 25 分，活動六約用 20 分。

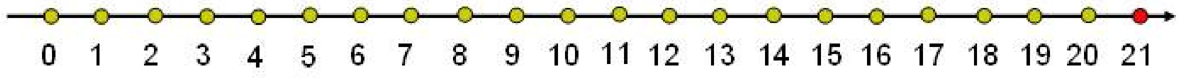
2.使用此教材時，請依順序進行學習或教學，學生可達最佳學習效果。

3.此單元開始的學生學習動機，教師可以參考如下：

首先說明數線在生活上的應用，如捷運、高速公路的里程數等，再利用數線上的搶 13 遊戲(或搶 21 遊戲)，引起學生的學習興趣，進而說明本單元也是透過數線來教導整數的加法。

【搶 21 遊戲】：

兩人從數線上的 0 開始，累加數到 21，可以數 1 個數、2 個數或 3 個數，但不可數 4 個數以上(含 4 個數)，誰數到 21，誰就贏了。



4.教學過程中，應注重師生互動，如向東（向右）為正向，期待學生說出向西（向左）為負向等。也儘可能讓學生回答，建立學生的信心。

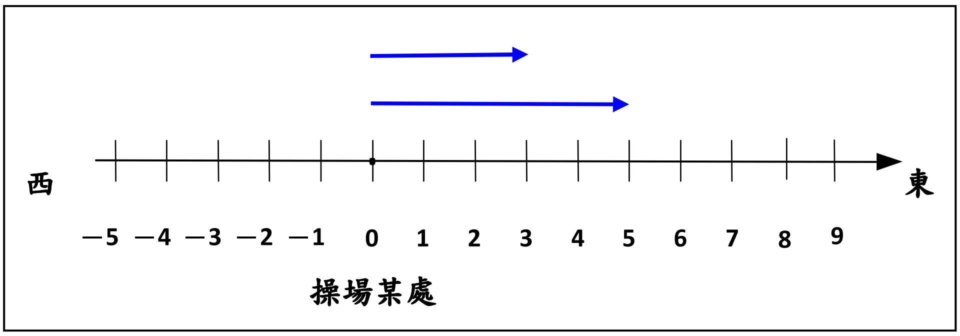
5. 活動三的數線圖解，學生是否有先觀察到「線段長度大的減去線段長度小的」，再確認最後結果的正負。

6. 活動三的教學中，有關異號數相加的引導過程，教師可藉由抵消的概念進行教學，增進學生的理解情形，但也應留意教學敘述的口語，如線段長度大的減去線段長度小的，其計算結果與線段長度大的性質符號一樣。

7. 活動三的例題5，6＋(－6)＝0，若學生表示為＋0或－0時，則要求學生表示為0，不要有正、負符號。

8. 活動二與活動三的教學中，教師藉由生活情境例子，將過程以圖形表示出來，學生可透過圖形訊息的紀錄，瞭解整數加法的意義，此時教師應留意學生的圖示學習，避免產生下列錯誤模式。

例如：(＋5)＋(＋3)＝？



教師教學過程中，應告知學生從原點往東走5單位，再強調「接著」再往東3單位，最後在原點東方8單位的位置。

9. 對於活動三中的例 6,「加一個數後此數會變大嗎？」,若學生學習有不明瞭之處，教師可透過特殊化來進行教學，此處則可，加一些數字來觀察，例如：

加 1、加 2、加 3、…，其結果為何？

加 0，其結果又如何？

加－1、加－2、加－3、…，其結果又為何？

引導學生觀察此問題。

10. 活動四進行之前，教師可以引用一些例子，例如：

(－569)＋746＋570 說明教師為何要教「加法交換律」與「加法結合律」？且教師在教學過程中，亦可藉由小學的舊經驗，複習哪些運算符號(＋、－、×、÷)，可以進行交換律或結合律？

參考設計題目如下：

已知⊗表示＋、－、×、÷中的一個運算符號，若 4⊗2＝2⊗4 成立，則下列哪些敘述是正確的？

(A)⊗表示＋ (B)⊗表示－ (C)⊗表示 × (D)⊗表示 ÷ 。

11. 此單元的教學過中，有負數出現時，教師皆加上括號，避免學生在學習過程中，產生另外的錯誤形式，等待學生概念較清楚或運算能力較佳時，教師再設計可以省略負數括號的題目，但也應小心學生是否掉入迷思的概念中。

例如：－7＋3 學生容易做錯為－10，

但(－7)＋3＝4，則較不容易做錯。

12. 活動五的前 2 題，是由左而右進行加法運算教學，第 3 題則由正負數分類後進行加法運算教學，期待同學有不同的解法，例如「好計算的數字」先行合併計算等。也常請同學上台演示，並給與鼓勵與讚賞。

13. 教學過程中，重點要強化，加強學生的吸收度，例如，活動小結論，無妨請學生重複讀一次，增加學生的印象。

14. 生活中的一些加法情境，教師應說明清楚，以免學生產生學習上的誤解，例如：30°C＋40°C＝70°C，有些學生會解讀為「30°C 的水＋40°C 的水＝70°C 的水」，教師們應該小心引導。

15. 活動六的幻方教學活動中，教師可以為學生介紹幻方。幻方又稱為魔方陣或縱橫圖，是由一組排放在正方形中的整數所組成，其每行、每列與每條對角線上的數之和均相等。通常幻方由從 1 到 N^2 的連續整數來組成，其中 N 為正方形的行或列的數目，故 N 階幻方有 N 行 N 列，且所填入的數為從 1 到 N^2。

16. 活動六的幻方教學活動中，教師在引導學生思考與推理過程中，應等待學生的反應，不可過於急躁，須隨時留意教學速度是否適中。

九、教學參考資料：

1. 教育部編著（2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部。

2. 國中各版本第一冊數學課本。

3. 夫蘭納里著。葉偉文譯(2010)。數學小魔女（pp. 18-26)。臺北市：天下文化。

4. 黃敏晃著(2006)。讓我們來玩數學吧（pp. 28-39)。臺北市：小天下。

5. 在活動六的幻方問題中，教師可在學生學會代數式後，請學生利用代數方法，求出格子 E 的值。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

解：由 $A+E+I=0\cdots(1)$

$B+E+H=0\cdots(2)$

$C+E+G=0\cdots(3)$

$F+E+D=0\cdots(4)$

得 (1) + (2) + (3) + (4)：

$A+E+I+B+E+H+C+E+G+F+E+D=0$

$A+B+C+D+E+F+G+H+I+3\times E=0$

$0+3\times E=0$， $E=0$ 。

6. 在活動六的幻方問題中，教師可延伸討論下列問題：

（1）若 3×3 方陣經過旋轉後，數字相關位置相同視為同類，請問此 8 組可分成哪幾類？

（2）若 3×3 方陣再經過翻轉後相同視為同類，請問此 8 組可分成哪幾類？

參考解答：

（1）

－1	－2	3
4	0	－4
－3	2	1

－3	2	1
4	0	－4
－1	－2	3

（2）

－1	－2	3
4	0	－4
－3	2	1

7. 在活動六的幻方問題中，亦可將活動改成『使每一行、每一列的數字和相同（即對角線和可以相同，也可以不同）』，請學生回去思考一下，有多少組 3×3 方陣？

參考解答：（旋轉與翻轉後，相同者算同一種。）

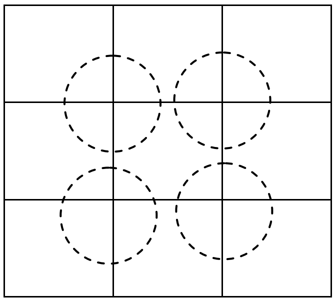
－1	－2	3
4	0	－4
－3	2	1

4	0	－4
－1	－2	3
－3	2	1

－3	1	2
4	－4	0
－1	3	－2

8. 指定作業 4 的問題延伸（僅供教師參考）：

若將數字－4、－3、－2、－1、0、1、2、3、4 等 9 個數字填入 3x3 的方陣中，使右上四格、左上四格、右下四格、左下四格的數字和皆為整數 X，則其中 X 的範圍為



－4≦X≦4。

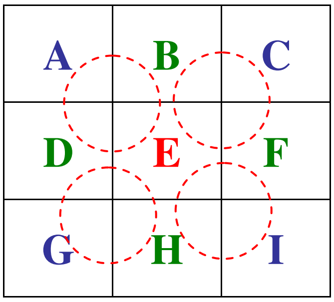
說明：

由 A＋B＋D＋E＝X⋯（1）

B＋C＋E＋F＝X⋯（2）

D＋E＋G＋H＝X⋯（3）

E＋F＋H＋I＝X⋯（4）



得（1）＋（2）＋（3）＋（4）：

A＋B＋D＋E＋B＋C＋E＋F＋D＋E＋G＋H＋E＋F＋H＋I＝4X

（A＋B＋C＋D＋E＋F＋G＋H＋I）＋B＋D＋F＋H＋3E＝4X

0＋B＋D＋F＋H＋3E＝4X

① 若取 E＝4，B＋D＋F＋H＝3＋2＋1＋0＝6

則 4X 有最大值 18

4X≦18

X≦4.5

X≦4(X 為整數)

②若取 E＝－4，B＋D＋F＋H＝(－3)＋(－2)＋(－1)＋0＝－6

則 4X 有最小值－18

－18≦4X

－4.5≦X

－4≦X （X 為整數）　　　故 x 的範圍為 －4≦X≦4。

X 範圍中之一組 3×3 方陣的參考解答：(答案不只一組)

X＝－4			X＝－3			X＝－2		
4	－1	2	1	3	－1	2	3	0
－4	－3	－2	－4	－3	－2	－4	－3	－2
3	0	1	4	0	2	1	4	－1

X＝－1			X＝0			X＝1		
3	－1	1	－3	0	－2	－3	2	－4
0	－3	2	4	－1	3	3	－1	4
－2	4	－4	1	－4	2	1	－2	0

X＝2			X＝3			X＝4		
－1	4	－2	－4	4	－1	－3	0	－1
－4	3	－3	0	3	－3	4	3	2
1	2	0	－2	2	1	－4	1	－2

(欲求所有解，可從討論 E 值與 B＋D＋F＋H 值的整數值而得。)

9.指定作業 5 的變化：

此題亦可改成，牌的內容為－12、－11、…11、12 等 25 個整數，由拿 13 張牌的人先開始，請每次將 1 張牌置於 5×5 的方格中，只要有一方先連成一直線且總分為 0，即獲勝，此

時連成一直線的牌可以是甲的或乙的。

主題1—5：整數的乘除運算

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者：**李政豐

二、先備知識：

（一）能熟練整數乘除的直式計算。

（二）能認識負數、相反數、絕對值的意義。

（三）能認識負數，並能以「正、負」表徵生活中性質相反的量。

（四）能用符號算式紀錄生活情境中的數學問題。

三、教學目標：

（一）能熟練正負數的運算規則。

（二）能熟練整數的四則混合運算，並解決相關的問題。

（三）藉由應用實例與演練，使學生能理解整數乘除運算之性質，並能靈活運用於日常生活之中。

四、教學時間：90分鐘（二節課）

五、教學說明：

我們想要以生活中的實例引進整數乘除與四則運算的規則，主要的目的，是讓學生熟練這個運算規則，一旦面臨計算時能做立即而有效的正確判定，但也保留讓學生主動理解與簡化應用的空間，並不需要將每件生活情境中的數與量都要如此生硬的套入

四則運算規則。能夠理解運算規則的一種情境即可，當學生熟練了這種規則，其他的情境都可以此類推，不假思索，就可朗朗上口，依照過去建構的概念，處理未來面臨的各種情境中數量計算的應用問題。

六、教學活動：

範例：台灣中部某個多功能水庫兼具灌溉、民生用水、觀光、防洪等功能；這個水庫的性質與結構如下：

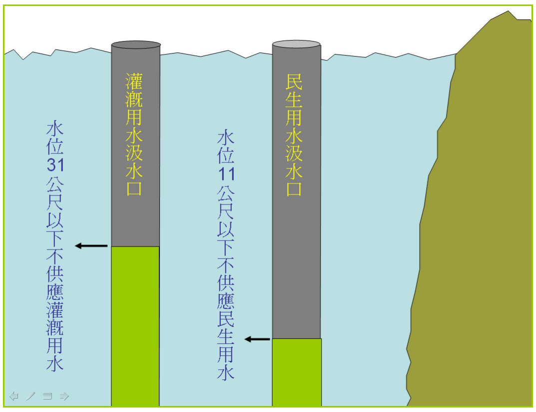
(1) 最大的蓄水位是 61 公尺(庫底到溢洪閘門頂端的高度差)。水庫內有灌溉用水汲水口，當水位是 31 公尺以下，考慮民生用水優先，就會停止灌溉用水。

(2) 另設置一個民生用水汲水口，當水位低於 11 公尺，水質渾濁無法飲用，就會停止民生用水。

(3) 當春夏雨季來臨,若水位平均每日上升 40 公分，記為＋40 公分/日，當秋冬旱季來臨，且民生、灌溉都要供水時，若水位平均每日下降 50 公分，記為－50 公分/日。如果只有供應民生用水，此時水位平均每日下降 20 公分，記為－20 公分/日。

(4) 若以計算當天的日期為基準，規定 3 天後記為＋3 日，4 天前記為－4 日。

（5）長度換算：1 公尺＝100 公分。



活動一：整數乘法　(＋40)x(＋20)＝＋800

例 1：當春夏雨季來臨,若水位平均每日上升 40 公分，則 20 天後

水位與現在相比，是增(或減)多少？

上升 40 公分記為＋40，20 天後，記為＋20

一天上升(＋40)x(＋1)＝＋40，二天上升(＋40)x(＋2)＝＋80

20 天上升(＋40)x(＋20)＝＋800，水位增加(高)8 公尺。

我們得到『正數乘正數得到正數』的規則。

活動二：整數乘法　(＋40)x(－20)＝－800

例 2：當春夏雨季來臨,若水位平均每日上升 40 公分，則 20 天前，

水位與現在相比，是增(或減)多少？

上升 40 公分記為＋40，20 天前記為－20

(＋40)x(－20)＝－800，水位比現在減少(低)8 公尺。

我們得到『正數乘負數得到負數』的規則。

活動三：整數乘法(－50)×(＋10)＝－500

例 3：當秋冬旱季來臨，民生、灌溉都要供水時，若水位平均每日下降 50 公分，則 10 天後，水位與現在相比，是增(或減)多少？

下降 50 公分記為－50，10 天後，記為＋10

(－50)×(＋10)＝－500，水位比現在減少（低）5 公尺。

我們得到『負數乘正數得到負數』的規則。

活動四：整數乘法(－50)×(－10)＝＋500

例 4：當秋冬旱季來臨，民生、灌溉都要供水時，若水位平均每日下降 50 公分，則 10 天前的水位與現在相比，是增(或減)多少？

下降 50 公分記為－50，10 天前，記為－10。

(－50)×(－10)＝＋500，水位比現在增加(高)5 公尺。

我們得到『負數乘負數得到正數』的規則。

活動五：整數除法(＋1000)÷(＋40)＝(＋25)

例 5：當春夏雨季來臨,若水位平均每日上升 40 公分，則需要多少天後，水位會增加 10 公尺？

上升 40 公分記為＋40，增加 10 公尺，記為＋1000

(＋1000)÷(＋40)＝＋25，需要 25 天後。

我們得到『正數除以正數得到正數』的規則。

活動六：整數除法(＋1000)÷(－50)＝(－20)

例 6：當秋冬旱季來臨，民生、灌溉都要供水時，若水位平均每日

下降 50 公分,則在幾天前(或後),水位是比現在高 10 公尺？

下降 50 公分記為－50，高 10 公尺，記為＋1000

(＋1000)÷(－50)＝－20，在 20 天前。

我們得到『正數除以負數得到負數』的規則。

活動七：整數除法(－1000)÷(＋40)＝(－25)

例 7：當春夏雨季來臨,若目前的水位平均每日上升 40 公分，則在

什麼時候的水位，比現在減少 10 公尺？

上升 40 公分記為＋40，減少 10 公尺，記為－1000。

(－1000)÷(＋40)＝－25，在 25 天前。

我們得到『負數除以正數得到負數』的規則。

活動八：整數除法(－1000)÷(－50)＝(＋20)

例 8：當秋冬旱季來臨，民生、灌溉都要供水時，若水位平均每日下降 50 公分,則在幾天前(或後),水位比現在減少 10 公尺？

下降 50 公分記為－50，減少 10 公尺，記為－1000

(－1000)÷(－50)＝＋20。

亦即 20 天後水位比現在少 10 公尺。

我們得到『負數除以負數得到正數』的規則。

活動九：整數減法 (＋200)－(－80)＝(＋280)

例 9:若目前的水位平均每日都上升 40 公分,則五天之後的水位，比兩天前的水位高多少公分？

五天後的水位比目前高，記作(＋40)×(＋5)＝＋200

兩天前的水位比目前低，記作(＋40)×(－2)＝－80

(＋200)－(－80)＝(＋280)

我們得到『正數減掉負數等於正數加上正數』的另一個表徵。

活動十：情境命題與估算（甲）

例 10：農田水利會水庫管理局用水管理規則是：當水位是 31 公尺以下，考慮民生用水優先，就會停止灌溉用水。當水位低

於 11 公尺，水質差無法飲用，就只好停止民生用水。在秋冬旱季，當民生、灌溉都要供水時，水位平均每日下降 50 公分,如果僅供應民生用水時,水位平均每日下降 20 公分。現在水庫的水位是 51 公尺，如果往後一直都是天旱無雨，則灌溉用水只能供應多少天？民生用水總共能供應多少天？

整數四則運算的應用(3100－5100)÷(-50)＝＋40(天)，灌溉用水只能供應 40 天。

(1100－3100)÷(－20)＝＋100(天)，在停止供應灌溉用水之後，民生用水還能再供應 100 天，故民生用水總共能供應 140 天。

活動十一：情境命題與估算（乙）

例 11：水庫最高的蓄水位是 61 公尺。超過 61 公尺水庫會有結構上的危險，當春天梅雨季來臨,若水位平均每日上升 40 公分，現在的水位是 55 公尺，則幾天之後就必需打開閘門放水？

整數四則運算的應用(6100－5500)÷(＋40)＝＋15（天）

活動十二：情境命題與估算（丙）

例 12：當颱風來臨山區雨水迅速往水庫匯集，管理局為了防洪的目的，擔心洪水來臨時宣洩不及，超量洩洪又會危及下游居民的生命財產安全，而且若蓄水超過 61 公尺，水庫又會有結構上的危險，於是管理局規定：當中央氣象局發布豪雨或颱風天，水庫水位比滿水位少 5 公尺，就需要預先放水，達成防洪的目標。

某次颱風來臨，水位急速上升，平均每小時上升 1 公尺，若當時水庫的水位是 50 公尺，則幾小時後就必需預先放水？

整數四則運算的應用$[(61-5)-50]\div(+1)=+6$（小時）

即 6 小時後就必須預先放水。

結論：

1. 藉由日常生活與社會情境所衍生應用問題的經驗，我們得到了許多數字的運算規則，能夠熟練並歸納這些運算規則，才能進一步解決正負數混合的四則運算，這就是整個生活中數學的重心。熟悉四則運算的特性，是往後學習代數列式與符號運算的基礎，也是國一學生連結往上學習的工具。

2. 我們希望在國中階段不宜把正負號太嚴格的區分成性質符號、運算符號，以免造成學習困擾。

例如：-5＝0-5，左邊的負號，有的老師將它規定為性質符號，右邊的減號，則規定為運算符號，事實上『-5＝0-5』是一個常見的算式，如果太嚴格區分，恐怕會增加學生學習的困擾。

因此『正乘正得正』、『正乘負得負』、『負乘正得負』、『負乘負得正』的規則，對所有的正負號都適用，而不必理會它是性質符號或運算符號，這樣的處理方式是比較方便的做法。

3. 對任意整數 a,b,c

$$a\times b = b\times a$$

$$a+b = b+a$$

$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c$$

$$(b+c)\times a = b\times a + c\times a$$

有關整數乘法交換律、整數加法交換律，乘法對加法的分配律，讓它自然呈現就好，例如要說明$(3+5)\times a$：$(3+5)$個 a，等於 3 個 a 加 5 個 a，總共 8 個 a。不需要刻意向學生提示這個名稱。

然後，當 $b\neq 0$ 時，可將除法用乘法取代 $a\div b = a\times\frac{1}{b}$，可將減法用加法取代 $a-b=a+(-b)$，則相關的衍生問題，也就迎刃而解。

隨堂練習：

範例 1：整數四則運算的例子：

（1）$120\div[48-(-9)\times(-4)]$

（2）$(-30)+12\times[(-8)+11]$

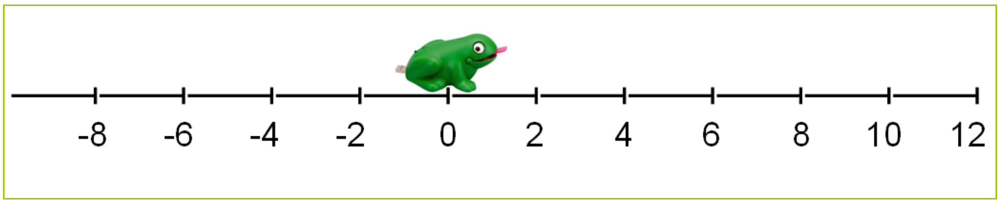
（3）$[18\times(3-5)-7]\div|(-5)\times(-10)-7|$

（4）$28\div\{[96\div(-12)+(-2)\times3]\}$

（5）$42\div(-3)+(-12)\times5+67$

（6）$\{(-36)\div[99\div(-11)-3]\}+7\times15$

範例 2：



在公分為單位的數線，往右為正，往左為負，數線上有一隻機器青蛙，每秒跳一次，距離都是 2 公分，它的習慣是：當向右跳 2 次之後就要向左跳一次，如果青蛙目前在原點，開始想要往右跳。

（1）請問當第 1 秒結束時，它的位置坐標為何？

（2）請問當第 2 秒結束時，它的位置坐標為何？

（3）請問當第 3 秒結束時，它的位置坐標為何？

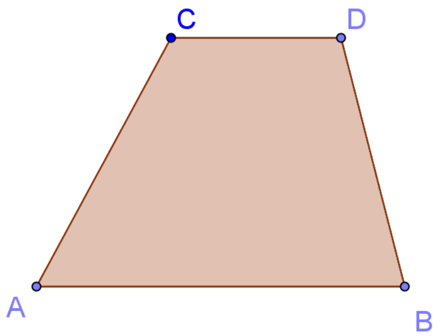
（4）請問當第 4 秒結束時，它的位置坐標為何？

（5）請問當第 20 秒結束時，它的位置坐標為何？

（6）請問當第 21 秒結束時，它的位置坐標為何？

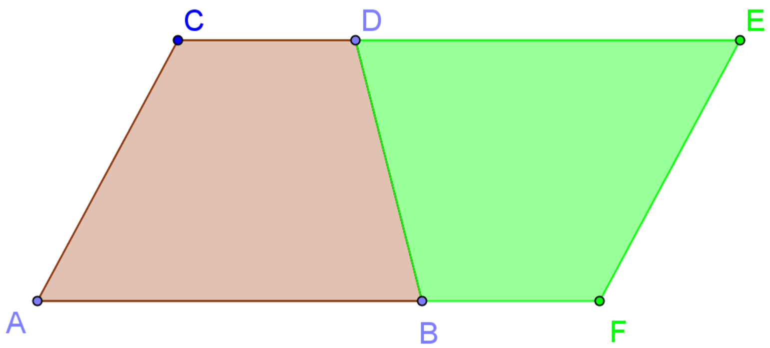
（7）當青蛙第一次到達＋44 的位置坐標時，它最快花了幾秒鐘？

範例 3：梯形面積＝(上底＋下底) × 高 ÷ 2



如果我們把咖啡色梯形再複製一個(綠色)，上下翻轉，合併起來變成一個平行四邊形，合併的平行四邊形

面積＝(上底＋下底)×高，它是梯形面積的兩倍



（1）梯形的上底 5 公分，下底 10 公分，高 6 公分，請問梯形

面積是多少平方公分？

(2) 上底 5 公分，下底 10 公分，高 6 公分的梯形，它的形狀是唯一的嗎？

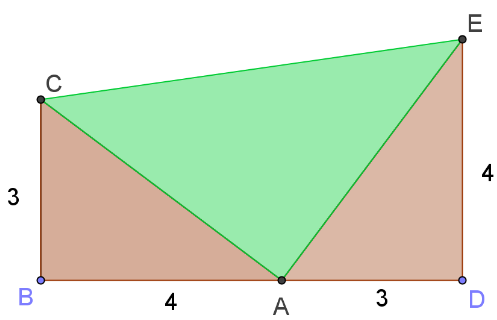
(3) 如果我們想做一個面積 60 平方公分的梯形，已知下底是 12 公分，高 6 公分，請問上底是多少公分？

(4) 上底 6 公分下底 14 公分的梯形，如果面積是 90 平方公分，請問高為多少？

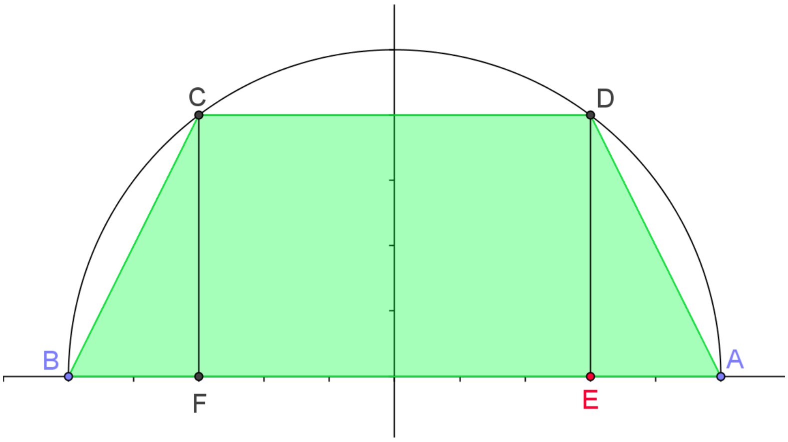
(5) 如下圖 ΔABC 是直角三角形，如果 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，$\angle B$ 是直角，把 ΔABC 複製一個，以直角頂 B 為中心點，逆時針轉 90 度，再向右平移 7 單位使三角形的左邊頂點放置於 A 點，就變成 ΔEDA，連接 EDBC 是一個梯形。則梯形 EDBC 的面積是多少？

等腰直角三角形 ΔACE 的面積是多少？

等腰直角三角形 ΔACE，腰 $\overline{AC}$ 的長度為何？



（6）如下圖，沿用（5）的結論：3, 4, 5 是一個直角三角形的短股、長股與斜邊。現在有一個等腰梯形，上底 6 公分，下底 10 公分，恰好能內接在一個以下底為直徑的半圓內，請問這個等腰梯形的面積是多少平方公分？



範例 4：為響應全民儲蓄運動，李先生在民國 101 年起每單月（1、3、5 月…）月初，存入小豬撲滿 5000 元，每雙月（2、4、6 月…）月初，由撲滿拿出 3000 元花用，則李先生的小豬撲滿在民國 102 年年底總共有多少錢？

隨堂練習參考解答：

隨堂練習參考解答：

範例 1：（1）10，（2）6，（3）－1，（4）－2，（5）－7，（6）150。

範例 2：（1）＋2，（2）＋4，（3）＋2，（4）＋4，

（5）＋16:如果我們將『3 秒鐘往右前進兩公尺(＋2＋2－2)的距離』當成一個類型，則 20 秒有 6

個類型多兩秒，因此機器青蛙往右前進的坐標為

$6\times2+2+2=+16$。

（6）＋14：第 21 秒是往回走 2 公尺，因此坐標為＋14。

（7）62 秒：＋40 可以是恰好 20 個類型，即 60 秒，第一

次到＋44 是 20 個類型加 2 秒，即 $20\times3+2=62$ 秒。

範例 3：（1）45 平方公分，（2）不是，（3）上底 8 公分，

（4）高為 9 公分，

（5)則梯形 $EDBC$ 面積是 24.5，等腰直角三角形 ΔACE 面

積是 12.5 [將梯形面積扣除兩個直角三角形面積

$24.5-2(3\times4\div2)=12.5$]

腰 $\overline{AC}$ 的長度是 5 （$2\times12.5=25$, 25 是 5 的平方）

（6）32 平方公分(因為 CD 的一半長是 3，圓的半徑是 5，

所以等腰梯形的高是 4，面積為 $(10+6)\div2\times4=32$

範例 4：$5000\times12+(-3000)\times12=24000$（元）

七、指定作業：

1. 媽媽到超市買東西，超市的民生用品的標價如下：130 抽的平版衛生紙每包 15 元，生力麵每包 12 元，兩公升裝的鮮奶每罐 150 元，土雞蛋每盒 90 元。如果每星期家裏必須消費衛生紙 2 包，生力麵 8 包，兩公升裝的鮮奶 2 罐，土雞蛋一盒。請問媽媽一個星期花在超市購買這些民生用品的費用需要多少錢？

2. 中山高速公路（國道一號）公里數的計算，是將高速公路由北到南看成一條數線，把起點基隆港當數線的原點，高雄旗津是它最南端的終點。往南為正，以當地與起點的距離(公里數)當成它的正向坐標，K代表公里，例如：

基隆港（0 K）、汐止（10K）、圓山（23K）、林口（41K）、竹北(91K)、西螺(230K)、新營(288K)、岡山(347K)、小港(373K)。

(其中收費站旁黑色字體為里程數)

(http://www.cpmah.org.tw/2003/c92b049/www/now2.htm)

王先生家住林口（41K），想要到岡山（347K）出差，準備開車往返，王先生汽車的相關資訊如下：

（a）每公升汽油可跑 15 公里。

（b）目前每公升汽油售價 30 元。

（c）王先生的汽車油箱總共可裝 40 公升汽油。

（d）出發前王先生汽車油箱已經加滿汽油。

請回答下列問題：

（1）王先生自林口開車到岡山出差，往返一次，共開車開了多少公里的路程？

（2）王先生的小汽車，一次加滿油可以跑多少公里？

（3）王先生出差的路途中需要再加油嗎？

（4）王先生這次出差要花多少油錢？

（5）王先生開汽車，平均一公里要花多少油錢？

3. 甲乙丙三人合夥投資一筆生意，甲出資本 200 萬元，乙出資本 300 萬元，丙出資本 500 萬元。買賣交易完成後，結算獲利 400 萬元，如果每個人在買賣交易的貢獻相當，只憑所出資本的多寡做比例分配，則每個人可分得獲利盈餘多少錢？

4. 計算$(-36)\div(-3)+(-4)\times6+|(-6)\times3+6|$之值。

指定作業參考解答：

1. $15\times2+12\times8+150\times2+90=516$(元)

2. （1）612 公里，（2）600 公里，（3）需要，

（4）$612 \div 15 \times 30 = 1224$，（5）$30 \div 15 = 2$ 或 $1224 \div 612 = 2$

3. 甲可分得 400 萬×[(200)÷(200＋300＋500)]＝80 萬

乙可分得 400 萬×[(300)÷(200＋300＋500)]＝120 萬

丙可分得 400 萬×[(500)÷(200＋300＋500)]＝200 萬

4. $(-36) \div (-3) + (-4) \times 6 + |(-6) \times 3 + 6| = 12 - 24 + 12 = 0$

八、教學注意事項：

1. 本節的核心概念在藉由『水庫水位升降』與『時間先後』的例子，建構整數四則運算規則，使它能運用在其他的生活情境當中。
2. 指導說明讀題的時間約 10 分鐘。
3. 藉由水庫的水位，說明整數四則運算正負號的處理規則，建立學生對整數四則運算的概念，熟記規則，並能琅琅上口。所需時間約 30 分鐘。
4. 隨堂練習每題約 10 分鐘，3 題共 30 分鐘。
5. 結論時間：10 分鐘。
6. 指定作業（含提示） 1、2、3 題每題約 10 分鐘，共 30 分鐘。
7. 應特別加強解說整數四則運算規則的成因，以強化同學計算

思考的正確方法。

8. 隨堂練習範例 1 在培養同學做整數乘除的運算能力。

9. 隨堂練習範例 2 在教同學如何找尋計算的規則。

10. 隨堂練習範例 3 則是藉由梯形面積的計算導出（5）特殊直角三角形的邊長 3,4,5。再由此導出（6）特殊條件內接於半圓的等腰梯形面積。

11. 指定作業問題 1 在訓練同學對在日常生活中，對數字計算的能力。

12. 指定作業問題 2 在藉由中山高速公路的各交流道的公里數，汽車每公升汽油行駛的公里數，汽油費用，王先生出差的距離等，將整數的四則運算融入日常生活當中。

13. 指定作業問題 3 在藉由整數的四則運算，讓學生了解投資盈餘分配的比例原則。

14. 附錄參考例題一，在訓練同學由認識買賣股票中，學習整數四則運算如何應用在投資理財的經濟生活當中。

15. 附錄參考例題二，在讓同學由了解數字起源當中，學習分析解題路徑的能力。

16. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

17. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上

的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 阿拉伯數字的參考網站。取自 http://arabicnumerals.tripod.com/
2. 中山高的公里數地圖。取自：

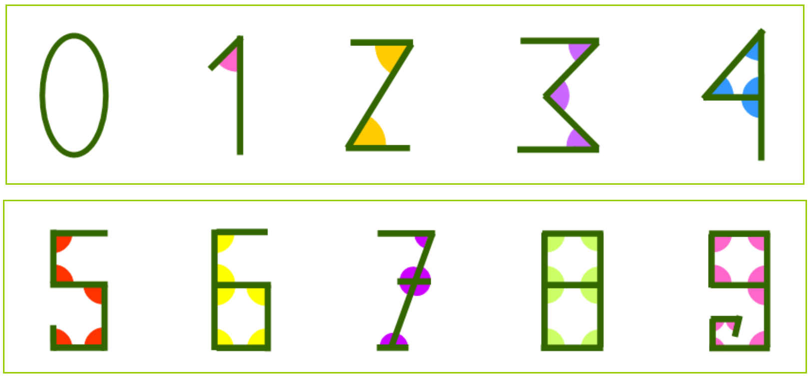
   http://www.cpmah.org.tw/2003/c92b049/www/now2.htm
3. 洪萬生、林倉億、蘇惠玉、蘇俊鴻等著(2005)。數之起源，中國數學史開章＜筭(念算)數書＞第 58 頁。臺北市：台灣商務印書館。

十、提供教師參考的相關例題：(請老師斟酌取捨)

例題 1：買股票時需付券商手續費，賣股票時需付券商手續費及政府證券交易稅。李先生的證券存摺有儲金 500000 元（買股票的錢由這裏扣，賣股票的錢也在這裡存)，今天李先生買了 20 張甲銀行的股票每張 23000 元，每張股票還要付 32 元的手續費給券商。當天也賣了 10 張乙電腦公司的股票每張 15000 元，每張股票還要支付 21 元的手續費及 45 元的證券交易稅，過了一段時候，甲銀行的股票每張配發股利 3000 元，當股利發放且買股票的錢扣款、賣股票

的錢入帳之後，請問李先生證券存摺的餘額是多少錢？

例題 2：下面是古代的印度阿拉伯數字



說明：古代的阿拉伯數字有很多種類：泰米爾式、天城體、東阿拉伯、印度式、歐洲式等。

印度阿拉伯數字，是以角的個數來定這個數字的大小，目前我們使用的阿拉伯數字則是流傳到歐洲，經過修改後所演化的字體。

問題：請問如果一個正整數由阿拉伯數字中的非 0 數字所組成，而且是由大而小的順序排列(可以一樣大)，已知這個自然數總共有六個角(例如 411 共有 6 個角)，請問滿足這種條件的正整數有幾種？

教師參考的相關例題解答：

例題 1：

$500000-20\times(23000+32)+10\times(15000-21-45)+20\times3000=248700$

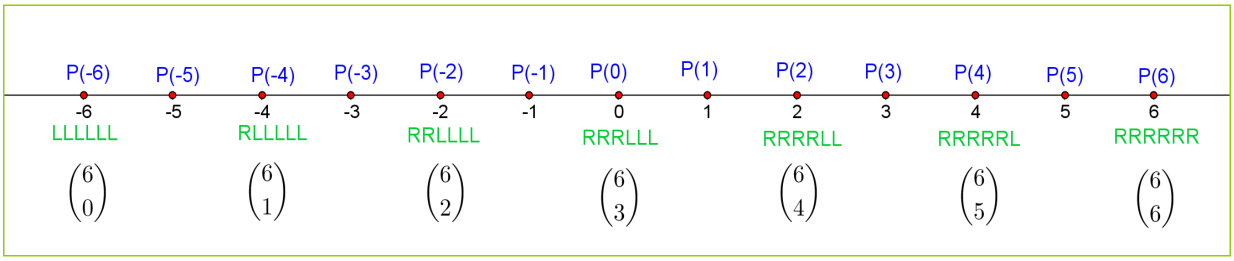
例題 2：

6，51，42，411，33，321，3111，222，2211，21111，111111，共有 11 種。

十一、附錄：

範例 2 的進一步探討（提供老師參考）

（甲）如下圖，有一隻青蛙，由數線上的原點 0 開始出發，每秒鐘隨機往左邊跳或右邊跳（往左或往右的機率都是 $\frac{1}{2}$）每次跳的距離都是 1 公尺。則 6 秒鐘後，這隻青蛙，落在各點的機率是多少？



R 代表往右跳，L 代表往左跳，連續跳 6 秒鐘，這個樣本空間有 $2^6=64$ 個樣本點，每個樣本點發生的機率是 $\frac{1}{64}$，P（i）代表落在坐標 i 的機率，例如落在坐標 2 的機率 P（2），是由 *RRRRLL* 的不盡相異物排列數所決定，六秒當中必須恰有往右跳四次，且往左跳兩次，才能到達坐標 2，它的不盡相異物排列數，就是機率的分子。

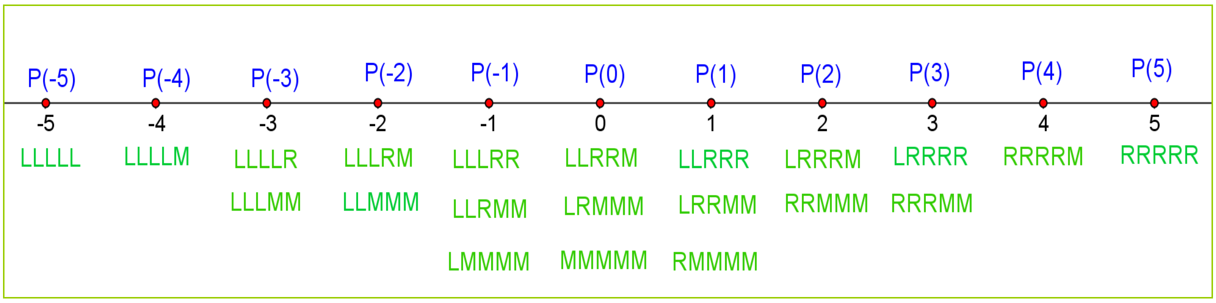
$P(2)=\dfrac{\frac{6!}{4!2!}}{2^6}=\dfrac{15}{64}$，它也可以用二項式定理的展開來計算。

$$P(-6)=\frac{C_0^6}{2^6}=\frac{1}{64}，P(-4)=\frac{C_1^6}{2^6}=\frac{6}{64}，P(-2)=\frac{C_2^6}{2^6}=\frac{15}{64}，$$

$$P(0)=\frac{C_3^6}{2^6}=\frac{20}{64}，P(2)=\frac{C_4^6}{2^6}=\frac{15}{64}，P(4)=\frac{C_5^6}{2^6}=\frac{6}{64}，P(6)=\frac{C_6^6}{2^6}=\frac{1}{64}$$

其一般化公式是 $P(i)=\begin{cases}0 & \text{若}\ i\ \text{是奇數}\\ \dfrac{C_k^6}{2^6} & \text{若}\ i\ \text{是偶數,其中}\ k=\dfrac{6+i}{2}\end{cases}$

(乙) 如下圖，有一隻青蛙，由數線上的原點 O 開始出發，每秒鐘隨機往左邊跳，右邊跳，或原地休息一秒（往左、往右或原地休息的機率都是$\frac{1}{3}$）每次跳的距離都是 1 公尺。則 5 秒鐘後，這隻青蛙，落在各點的機率是多少？



設 R 代表往右跳，L 代表往左跳，M 代表原地休息，連續 5 秒鐘，這個樣本空間有 3^5=243 個樣本點，每個樣本點發生

的機率是$\frac{1}{243}$，$P(i)$代表落在坐標 i 的機率。

例如落在坐標 2 的機率 $P(2)$，是由 *LRRRM* 或 *RRMMM* 的不盡相異物排列數所決定，它可以用多項式定理的展開來計算。

5 秒當中必須恰有往右跳 2 次且休息 3 次。或 5 秒當中必須恰有往右跳 3 次往左跳 1 次且休息 1 次。才能到達坐標 2，兩種情況的不盡相異物排列數的和$\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{3!1!1!}=30$，就是機率的分子。故

$\boldsymbol{P}(-5)=\frac{1}{243}$，$\boldsymbol{P}(-4)=\frac{5}{243}$，$\boldsymbol{P}(-3)=\frac{15}{243}$，$\boldsymbol{P}(-2)=\frac{30}{243}$，$\boldsymbol{P}(-1)=\frac{45}{243}$，$\boldsymbol{P}(0)=\frac{51}{243}$，$\boldsymbol{P}(1)=\frac{45}{243}$，$\boldsymbol{P}(2)=\frac{30}{243}$，$\boldsymbol{P}(3)=\frac{15}{243}$，$\boldsymbol{P}(4)=\frac{5}{243}$，$\boldsymbol{P}(5)=\frac{1}{243}$。

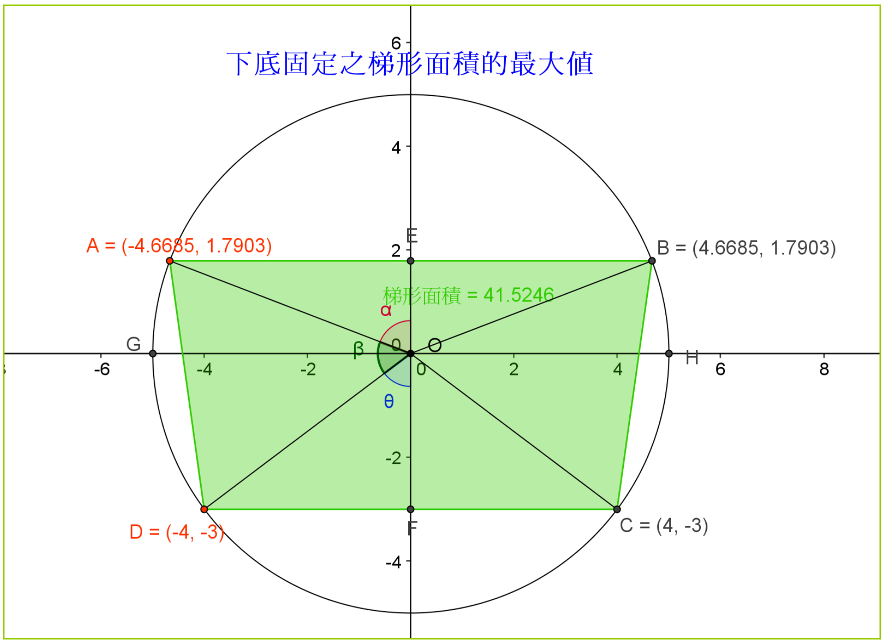
其一般化公式是：五秒當中，往左跳 l 次，往右跳 r 次，休息 m 次，則$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{i})=\sum\limits_{\substack{r+m+l=5\\ r-l=i}}\left(\frac{5!}{\boldsymbol{r}!\boldsymbol{m}!\boldsymbol{l}!}\right)/(3^5)$，其中 r,m,l 是非負整數。

範例 3 的進一步證明：(提供老師參考)

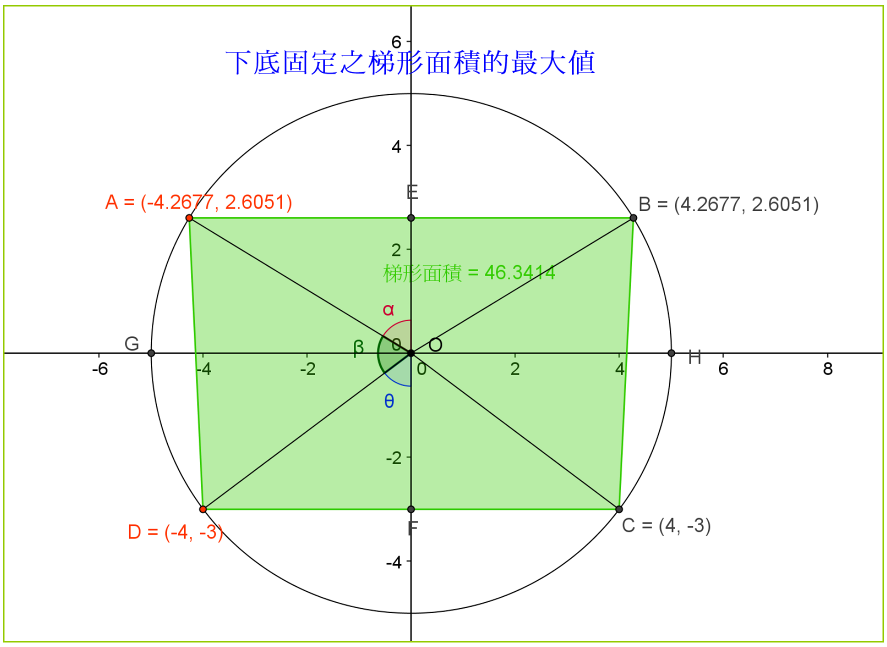
固定一底邊之圓內接梯形之最大面積

觀察下列四個圖形：圖(一)~圖(四)，四個梯形的一個底邊均為 8，內接於圓 $x^2+y^2=25$，由於梯形上、下底平行，截等弧，

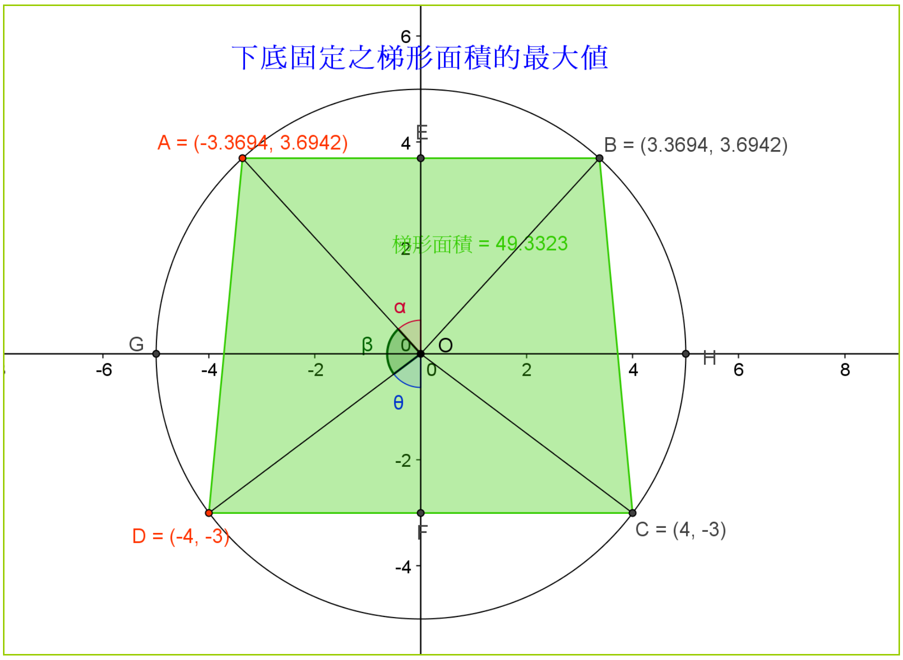
所以都是等腰梯形，我們由 Geogebra 圓內接梯形面積的度量，發現以圖(三)的面積最大。



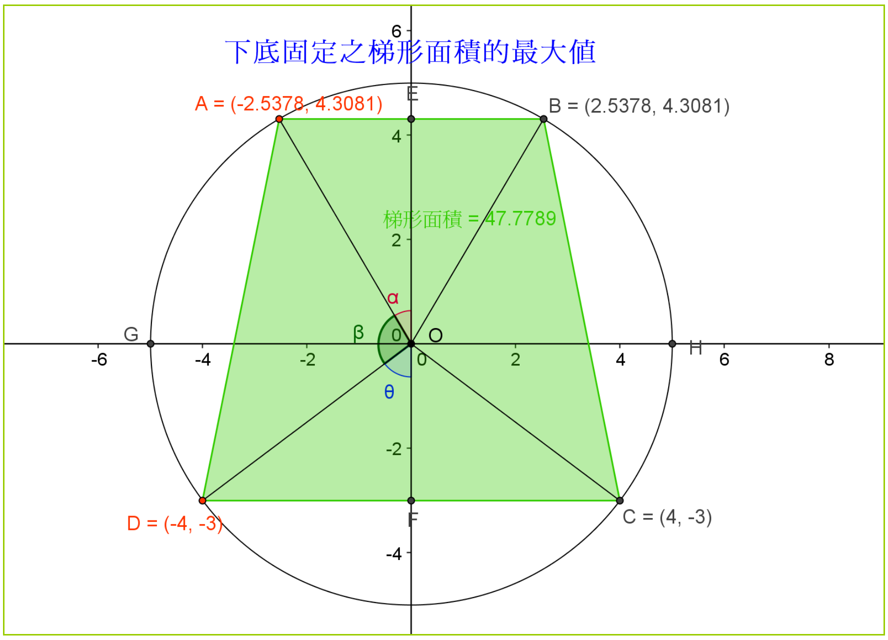
圖(一)　梯形面積＝41.5246



圖(二)　梯形面積＝46.3414



圖(三)　梯形面積＝49.3323



圖(四)　梯形面積＝47.7789

我們先回到梯形面積的計算;令$\angle EOA=\alpha$,$\angle AOD=\beta$, $\angle DOF=\theta$,

$$\theta=\cos^{-1}(\frac{3}{5}) \text{ , } \sin\theta=\frac{4}{5} \text{ , } \cos\theta=\frac{3}{5} \text{ , } \alpha+\beta=180^\circ-\theta \text{ 。}$$

梯形面積$=\Delta AOB+\Delta BOC+\Delta COD+\Delta DOA$,令外接圓的半徑為 r

$$=\frac{1}{2}r^2\sin(2\alpha)+\frac{1}{2}r^2\sin(\beta)+12+\frac{1}{2}r^2\sin(\beta)$$

$$=12+\frac{1}{2}r^2(\sin(2\alpha)+2\sin(\beta))$$

$$=12+\frac{1}{2}r^2[\sin(2\alpha)+2\sin((180^\circ-\theta)-\alpha)] \text{ (由差角公式)}$$

$$=12+\frac{1}{2}r^2[\sin(2\alpha)+2\sin(180^\circ-\theta)\cos\alpha-2\cos(180^\circ-\theta)\sin\alpha]$$

$$=12+\frac{1}{2}r^2[\sin(2\alpha)+2\sin\theta\cos\alpha+2\cos\theta\sin\alpha] \text{ (由換角公式)}$$

$$=12+r^2[\frac{1}{2}\sin(2\alpha)+\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha] \text{ (由和角公式)}$$

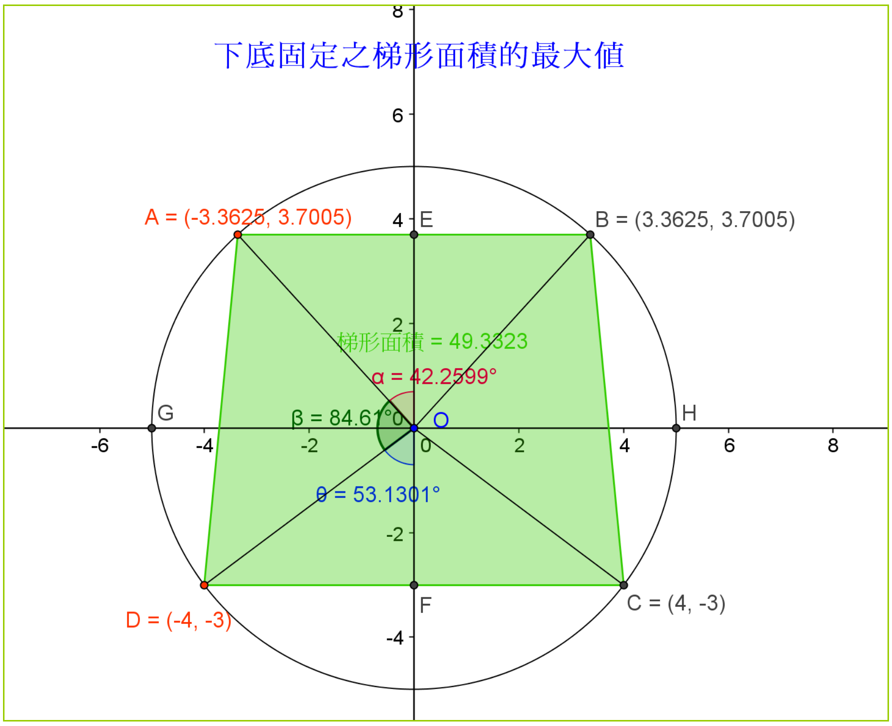
$$=12+r^2[\frac{1}{2}\sin(2\alpha)+\sin(\theta+\alpha)]$$

取 $f(\alpha)=\frac{1}{2}\sin(2\alpha)+\sin(\theta+\alpha)$,令 $f'(\alpha)=\cos(2\alpha)+\cos(\theta+\alpha)=0$

$$\Rightarrow \cos(\theta+\alpha)=-\cos(2\alpha)\Rightarrow\cos(\theta+\alpha)=\cos(180^\circ-2\alpha)\Rightarrow(\theta+\alpha)=180^\circ-2\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{180^\circ-\theta}{3}$$

$$\theta=\cos^{-1}(\frac{3}{5})\doteq 53.13010235^\circ\Rightarrow\alpha=\frac{180^\circ-\theta}{3}\doteq 42.28996588^\circ$$



將 $\theta \doteq 53.13010235^\circ$ ，$\alpha \doteq 42.28996588^\circ$ ，$r = 5$ 代入

$$梯形面積 = 12 + r^2[\frac{1}{2}\sin(2\alpha) + \sin(\theta + \alpha)]$$

得到梯形面積的最大值 $\doteq 49.3323353$ 。

主題1—6：科學記號

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者：**丁斌悅

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　陳彥廷

（一）能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數（含四捨五入法），並做加、減、乘、除之估算。

（二）能認識長度、重量、面積等單位間的關係，並做相關計算。

三、教學目標：

（一）瞭解科學記號的使用可將複雜的數化成較簡單易記的數。

（二）能理解指數為非負整數的次方，並能運用到算式中。

（三）能理解同底數的相乘或相除的指數律（$10^m\times 10^n=10^{m+n}$）。

（四）能用科學記號表示法表達很大的數或很小的數(取近似值，再用10的次方形式表達)。

（五）能將任意數以科學記號的方式呈現並比較數的大小。

四、教學時間：90分鐘（二節課）

五、教學說明：

人類認識周遭的環境，總是從周遭身邊的事物開始。從小學的一位數、二位數、三位數；學生所學習的度量單位(例如：公里、公尺、公分、毫米、公噸、公斤、公克)，都與生活息息相關。但

是，隨著年齡增長，學生開始接觸「地球有多老」、「宇宙有多大」、「原子有多小」此類的問題，而要解釋這些現象，便顯示當前常用的位值或單位似乎無法涵蓋其範圍。因此，本單元的教學活動，將從這些生活周遭的議題出發，透過「數學史」與「科學史」的發展介紹以及實例的演練，培養學生對物理、化學和生物等重要資訊數據的敏感度，讓學生體會科學記號使用的必要性及方便性，並引導學生認識科學記號表示法的規則，使其能夠運用科學記號來表示極大或極小的數，進而瞭解如何利用科學記號作數的大小比較，與數的乘除運算。

六、教學活動：

活動一：（認識國際單位制度）

1875 年，有 17 個國家在法國巴黎集會，簽訂國際「米制」公約，同時並訂立長度及質量的原器標準，並成立國際度量衡局(The International Bureau of Weights and Measures, BIPM)，成為提供世界各國計量標準的所在地。1954 年，國際度量衡大會（Conférence générale des poids et mesures, CGPM）依據公尺（m）-公斤（kg）-秒（s）-安培（A）單位，制定一致的長度、質量、時間、電流單位系統，同時採用克耳文(K)作為溫度單位：採用燭光（cd）作為光強度單位。然而，現今科技不斷發展，國

際間貿易往來亦日益頻繁，因此，國際度量衡大會（CGPM）推行世界各國採用國際單位制（International System of Unit, 縮寫 SI, 中文簡稱公制）,希望能讓世界各國在計量單位的表達與使用上能達成一致性。

下表，是國際間使用之度量衡單位的倍數、分數之名稱、定義及代號。由於有些倍數極大或極小，因此，為了數字使用的簡潔性，我們可從下面的式子進行觀察：

$$10 = 10^1$$
$$100 = 10 \times 10 = 10^2$$
$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$$
$$10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$$
$$100000000 = 10^8$$
$$1000000000000 = 10^{12}$$

因此，我們發現 10^m（$m \geqq 1$）表示 $\underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{m\text{個}10}$ 的乘積。

接下來，我們再從下面的式子進行觀察：

$0.1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^{1}} = 10^{-1}$,讀作十的負一次方 。

$0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^{2}} = 10^{-2}$,讀作十的負二次方 。

$0.001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^{3}} = 10^{-3}$,讀作十的負三次方 。

$0.0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^{4}} = 10^{-4}$,讀作十的負四次方 。

$0.00000001 = 10^{-8}$,讀作十的負八次方 。

$0.00000000\ 0001 = 10^{-12}$,讀作十的負十二次方 。

因此,我們發現10^{-n}表示 1 是在小數點後第 n 位。也就是

$$0.\overbrace{00\cdots\cdots1}^{n\text{位}} = \frac{1}{1\underbrace{0\cdots\cdots0}_{n\text{個}0}} = \frac{1}{10^{n}} = 10^{-n}$$

1. 請您以「10^{m}」的形式完成下表中空格的填寫:

倍數(分數)名稱	代號	數　　　值	科學記號
佑(yotta)	Y	1,000,000,000,000,000,000,000,000	10^{24}
皆(zetta)	Z	1,000,000,000,000,000,000,000	10^{21}
艾(exa)	E	1,000,000,000,000,000,000	
拍(peta)	P	1,000,000,000,000,000	
兆(tera)	T	1,000,000,000,000	
吉(giga)	G	1,000,000,000	

倍數(分數)名稱	代號	數　　　　值	科學記號
百萬(mega)	M	1,000,000	
千(kilo)	k	1,000	
百(hecto)	h	100	
十(deka)	da	10	10^{1}
分(deci)	d	0.1	10^{-1}
厘(centi)	c	0.01	
毫(milli)	m	0.001	
微(micro)	μ	0.000 001	
奈(nano)	n	0.000 000 001	
皮(pico)	p	0.000 000 000 001	
飛(femto)	f	0.000 000 000 000 001	
阿(atto)	a	0.000 000 000 000 000 001	
介(zepto)	z	0.000 000 000 000 000 000 001	
攸(yocto)	y	0.000 000 000 000 000 000 000 001	

註：1 微毫米＝$10^{-6}\times 10^{-3}$ 米＝10^{-9} 米＝1 奈米

結論：

1. 從上面的例子中，我們可以觀察出10^n代表$\overbrace{100\cdots\cdots0}^{n個0}$，也就是1後面有$n$個0；$10^{-n}$代表$0.\overbrace{00\cdots\cdots01}^{n位}$，也就是1在小數點後第$n$位。

2. 目前，人類科學技術的精細度已有許多突破與發展，奈米(nanometer)科技即是當前流行的議題與趨勢。究竟什麼是奈米？簡單來說，奈米是長度的單位，1奈米是十億分之一米。若將地球縮小成直徑為一公尺的圓球，則原先一顆1公分的珍珠等比例縮小後的尺寸即約為1奈米。今天，我們所談的奈米科技，則是指那些根據一毫微米至一百毫微米尺寸大小的物質之特性所衍生的創新科技。那麼，1奈米＝________米(以10^n表示)

活動二：(科學記號表示方法)

由於自然界存在許多很大或很小的數(例如：宇宙有多大？地球有多老？原子有多小？…)，而這些數字都遠超過常用的位值或單位所涵蓋的範圍。科學家為了要將這些很大的數或是很小的數簡化並表示出來，因此發明了科學記號表示法。

$a\times10^n$，即是科學記號表示法。其中，而a則是限定在1與

10 之間(但不能為 10)的任意數：n 為任意「整數」。舉例來說，

1230000000 是一個很大的數，我們發現 $\overbrace{1230000000}^{9\text{位}}$，因此，我們可以將 1230000000 寫成 $1.23\times\overbrace{1000000000}^{9\text{個}0}$，也可寫成

______________。那麼，999900000 用科學記號表示應該是

______________。

活動三：（以科學記號表示很大的數）

在中國，天文學是最古老的自然科學之一，也曾有過輝煌的成就。古代關於天文的觀測，絕大部分與季節、氣候、曆法或天象的預警有關。而真正天文學的發展，主要是自希臘文明以後，才使用科學的方法，來研究天體的現象與運動。

我們所處的地球，是太陽系中的一顆行星。截至目前為止，科學家發現太陽系中有八個行星，它們都繞著太陽做週期性的運行。下表，是太陽系各行星與太陽距離的資料，請將這些距離的數據以科學記號的方式寫出來：

太陽系行星	發現年代	與太陽的距離	
		距離（百萬公里）	科學記號(公里)（以四捨五入化簡至小數以下第二位）
地球		149.59789	
水星	公元前三世紀以前已為中東蘇美人所發現	57.909175	
金星	自有歷史記載以來即為人類所發現	108.20893	
火星	史前觀星家已知有此行星	227.93664	
木星	人類自古以來已知	778.41202	
土星	伽利略在 1610 年首度觀察到它的土星環	1426.7254	
天王星	1690 年由英國天文學家法蘭斯提德首次發現並做成記錄	2870.9722	
海王星	由伽利略於 1616 年 12 月 28 日首度發現	4498.2529	

然而，我們所處的太陽系，只是銀河系中的一部分。銀河系的範圍相較於太陽系來說，就更大、更廣了。天文學家在介紹銀河系星球或星系間的距離，都是用「光年」作為長度單位。「1 光年」是指光在真空中，前進一年的距離，約九兆四千六百億公里，請您用科學記號來表示 1 光年等於＿＿＿＿＿＿公里。而我們所處的太陽系是在銀河系的一漩渦臂(獵戶臂)上，距銀河系中心約 2.5 萬光年，也就是＿＿＿＿＿＿公里(請用科學記號表示)。

此外，太陽也是最接近地球的一顆恆星。從天文學的角度來看，太陽只是一顆並不起眼的恆星，與宇宙間繁如恆河之沙的其他恆星比較，太陽的質量、發光能力、表面溫度與生命週期大致都處於中間地帶，而年齡也恰處於中年，算是一顆典型的恆星。而太陽的核心層可說是太陽的「核子反應爐」，也就是太陽能源產生的區域，其溫度約為攝氏155萬度，也就是攝氏＿＿＿＿＿＿度(請用科學記號表示)。太陽的活動(例如：大氣湍流、風暴與各種爆發現象，如物質噴射、爆發性的γ射線、X射線、紫外線與無線輻射)都是相當壯觀的景象，而且都在很短的時間內就直接或間接地影響地球的大氣、氣象、地磁…等，深切影響人類生活，甚至導至文明興衰。

活動四：(以科學記號表示很大的數)

由於網際網路的發達，我們的生活已幾乎無法脫離網路。而在網路搜尋系統中，Google扮演重要的角色。其實，Google一詞是由英文字裡的「googol」而來。googol是指10的100次方，也就是1後面加100個0，換句話說，1 googol = 1×10^{100}，那麼，1 googol是＿＿＿＿位數呢？這可說是個天文數字。而Google將這個代表天文數字的詞稍加修改，即代表想征服網際網路無窮無盡

資料的雄心壯志，也用來誇炫Google漫遊器軟體能夠組織整理龐大的資訊數量。

活動五：(以科學記號表示很小的數)

除了很大的數需要使用科學記號表示法來呈現數字外，生活中，也會出現一些很小的數(例如：奈米、市售飲料中的咖啡因ppm…等)。

1.「ppm」是一種濃度計算的單位。最常見的是飲料中常見的含量。應用在容量上，1 ppm是指1000公升(kl)的溶液中，含有1毫升(ml)的某物質。換句話說，1 ppm 即是一百萬分之一，若以科學記號表示，則是__________。那麼，請問18 ppm的科學記號表示方式是____________。

2.微公克等於1/1000000公克，以科學記號表示1微公克是______。

活動六：(利用科學記號作數的乘法)

1.求下列各式的值，並用10的次方來表示結果：

(1)$10^5 \times 10^3$ ＝____×____(以數表示)＝____(以數表示)＝____

(2)$10^3 \times 10^5$ ＝____×____(以數表示)＝____(以數表示)＝____

2. 求下列各式的值，並用 10 的次方來表示結果：

（1）$10^{5}\times10^{-3}$ ＝_____×_____（以數表示）

＝______（以數表示）＝______（以 10 的次方表示）

（2）$10^{-3}\times10^{5}$ ＝_____×_____（以數表示）

＝______（以數表示）＝_____（以 10 的次方表示）

3. 求下列各式的值，並用 10 的次方來表示結果：

（1）$10^{-5}\times10^{-3}$ ＝________×_________（以數表示）

＝_______（以數表示）＝____（以 10 的次方表示）

（2）$10^{-3}\times10^{-5}$ ＝________×_________（以數表示）

＝_______（以數表示）＝____（以 10 的次方表示）

由上面例子的運算，我們發現：$10^{m}\times10^{n}=10^{m+n}$

活動七：（利用科學記號作數的除法）

求下列各式的值，並用 10 的次方來表示結果：

（1）$10^{5}\div10^{3}$ ＝_________÷_______（以數表示）

＝_________×__________（以數表示）

＝_________（以數表示）＝______

（2）$10^{-5}\div10^{3}$ ＝_________÷__________（以數表示）

＝_________×__________（以數表示）

＝_________（以數表示）＝______

（3）$10^5 \div 10^{-3}$ ＝＿＿＿＿＿＿÷＿＿＿＿＿＿（以數表示）

＝＿＿＿＿＿＿×＿＿＿＿＿＿（以數表示）

＝＿＿＿＿＿（以數表示）＝＿＿＿＿

（4）$10^{-3} \div 10^{-5}$ ＝＿＿＿＿＿＿÷＿＿＿＿＿＿（以數表示）

＝＿＿＿＿＿＿×＿＿＿＿＿＿（以數表示）

＝＿＿＿＿＿（以數表示）＝＿＿＿＿

由上面例子的運算，我們發現：$10^m \div 10^n = 10^{m-n}$

活動八：（利用科學記號作數的比較）

科學記號表示法也能讓我們在比較很大的數或很小的數之間的大小感到方便。例如：

1. 9.99×10^5 ＝999000 與 1×10^6＝1000000，因為 9.99×10^5 是 6 位數，1×10^6 是 7 位數，所以 $1\times10^6 > 9.99\times10^5$；
2. 而 9.99×10^5 ＝999000 與 9.98×10^5＝998000，因為 999000 ＞998000，所以 $9.99\times10^5 > 9.98\times10^5$。

上述都是在比較很大的數，我們再舉一個比較很小的數為例：因為 9.99×10^{-5} ＝0.0000999，9.99×10^{-6} ＝0.00000999，且 0.0000999＞0.00000999，所以 $9.99\times10^{-5} > 9.99\times10^{-6}$。

由上面的例子我們發現，要比較兩個數 $a\times10^m$ 與 $b\times10^n$（其中 $1\leqq a, b < 10$）的大小，可以依下面的步驟完成：

1. 首先比較指數 m 與 n 的大小：若 $m > n$，則 $a\times10^m > b\times10^n$

2. 若指數 m 與 n 相同，再比較 a 與 b，若 $a > b$，

則 $a\times10^m > b\times10^m$

接著，試比較下列各數的大小：

（1）4.1×10^4 □ 4.0×10^5

（2）14×10^{99} □ 3.0×10^{100}

（3）1.1×10^{-6} □ 9.9×10^{-7}

（4）2.0×10^{-4} □ 4.2×10^{-2}

活動九：（利用科學記號作數的加減）

求下列各式的值，並用科學記號表示法來表示結果：

（1）$2\times10^8+5.4\times10^7$

$=2\times10^8 + \_\_\_\_\_\times10^8=(2+\_\_\_\_\_)\times10^8=\_\_\_\_\_\times10^8$

$=\_\_\_\_\times10^7+5.4\times10^7=(\_\_\_+5.4)\times10^7=\_\_\_\_\times10^7$

$=\_\_\_\_\times10^8$

（2）$2\times10^8-5.4\times10^7$

$=2\times10^8-\_\_\_\_\_\times10^8=(2-\_\_\_\_\_)\times10^8=\_\_\_\_\_\times10^8$

$=\_\_\_\_\times10^7-5.4\times10^7=(\_\_\_-5.4)\times10^7=\_\_\_\_\times10^7$

$=\_\_\_\_\times10^8$

（3）$2\times10^{-2}+5.4\times10^{-3}$

$=2\times10^{-2}+$ _____ $\times10^{-2}=(2+$ _____ $)\times10^{-2}=$ _____ $\times10^{-2}$

$=$ ____ $\times10^{-3}+5.4\times10^{-3}=($ ___ $+5.4)\times10^{-3}=$ ____ $\times10^{-3}$

$=$ ____ $\times10^{-2}$

（4）$4\times10^{-2}-8\times10^{-3}$

$=4\times10^{-2}-$ _____ $\times10^{-2}=(4-$ _____ $)\times10^{-2}=$ _____ $\times10^{-2}$

$=$ ____ $\times10^{-3}-8\times10^{-3}=($ ____ $-8)\times10^{-3}=$ ____ $\times10^{-3}=$ ____ $\times10^{-2}$

結論：我們發現，要作兩個$a\times10^{m}$與$b\times10^{n}$的加減運算時，以指數大的($m>n$)作為基準(將$b\times10^{n}$化為$c\times10^{m}$的形式)進行運算時，其步驟較為簡單。

教學活動參考解答：

活動一：

1.

倍數(分數)名稱	代號	數　　　　值	科學記號
佑(yotta)	Y	1,000,000,000,000,000,000,000,000	10^{24}
皆(zetta)	Z	1,000,000,000,000,000,000,000	10^{21}
艾(exa)	E	1,000,000,000,000,000,000	10^{18}
拍(peta)	P	1,000,000,000,000,000	10^{15}
兆(tera)	T	1,000,000,000,000	10^{12}

倍數(分數)名稱	代號	數值	科學記號
吉(giga)	G	1,000,000,000	10^{9}
百萬(mega)	M	1,000,000	10^{6}
千(kilo)	k	1,000	10^{3}
百(hecto)	h	100	10^{2}
十(deka)	da	10	10^{1}
分(deci)	d	0.1	10^{-1}
厘(centi)	c	0.01	10^{-2}
毫(milli)	m	0.001	10^{-3}
微(micro)	μ	0.000 001	10^{-6}
奈(nano)	n	0.000 000 001	10^{-9}
皮(pico)	p	0.000 000 000 001	10^{-12}
飛(femto)	f	0.000 000 000 000 001	10^{-15}
阿(atto)	a	0.000 000 000 000 000 001	10^{-18}
介(zepto)	z	0.000 000 000 000 000 000 001	10^{-21}
攸(yocto)	y	0.000 000 000 000 000 000 000 001	10^{-24}

2. 10^{-9}

活動二：23×10^{9}，9.99×10^{8}。

活動三：

太陽系行星	發現年代	與太陽的距離	
		距離(百萬公里)	科學記號(公里)
水星	公元前三世紀以前已為中東蘇美人所發現	57.909175	5.79×10^{8}
金星	自有歷史記載以來即為人類所發現	108.20893	1.08×10^{9}
地球		149.59789	1.50×10^{9}
火星	史前觀星家已知有此行星	227.93664	2.28×10^{9}
木星	人類自古以來已知	778.41202	7.78×10^{9}
土星	伽利略在 1610 年首度觀察到它的土星環	1426.7254	1.43×10^{10}
天王星	1690 年由英國天文學家法蘭斯提德首次發現並做成記錄	2870.9722	2.87×10^{10}
海王星	由伽利略於 1616 年 12 月 28 日首度發現	4498.2529	4.50×10^{10}

9.46×10^{12}；2.365×10^{17}；1.55×10^{6}。

活動四：101。

活動五：1. 1×10^{-6}；1.8×10^{-5}。2. 1×10^{-6}。

活動六：

1.（1）100000，1000，100000000，10^{8}；

（2）1000，100000，100000000，10^{8}。

2.（1）100000，$\frac{1}{1000}$，100，10^{2}；

（2）$\frac{1}{1000}$，100000，100，10^{2}。

3.（1）$\frac{1}{100000}$，$\frac{1}{1000}$，$\frac{1}{100000000}$，10^{-8}；

（2）$\frac{1}{1000}$，$\frac{1}{100000}$，$\frac{1}{100000000}$，10^{-8}。

活動七：

（1）100000，1000，100000，$\frac{1}{1000}$，100，10^{2}；

（2）$\frac{1}{100000}$，1000，$\frac{1}{100000}$，$\frac{1}{1000}$，$\frac{1}{100000000}$，10^{-8}；

（3）100000，$\frac{1}{1000}$，100000，1000，100000000，10^{8}；

（4）$\frac{1}{1000}$，$\frac{1}{100000}$，$\frac{1}{1000}$，100000，100，10^{2}。

活動八：＜，＜，＞， ＜。

活動九：

（1）0.54，0.54，2.54，20，20，25.4，2.54；

（2）0.54，0.54，1.46，20，20，14.6，1.46；

（3）0.54，0.54，2.54，20，20，25.4，2.54；

（4）0.8，0.8，3.2，40，40，32，3.2。

七、指定作業：

1.求下列各式中的 n 值：

（1）$4.835 \times 10^{n}=48,350,000$　　（2）$65,194=n \times 10^{4}$

（3）$3 \times 10^{5}=n$　（4）130 million（百萬）＝n（以科學記號表示）

2.請以科學記號表示下列各數：

（1）0.000064×10^{-8}　（2）313×10^{-5}　（3）453.201×10^{-10}

3.若美國對於書的銷售稅金為其售價的 5%，那麼今天你買一本售價為 2.495 美金的書，則你需付的銷售稅金為多少？（請以科學記號表示）

4.科學家愛因斯坦所發現的著名物理學公式 $E=mc^{2}$，是一種闡述能量(E)與質量(m)間相互關係的理論。其中，公式中的 c 是物理學中代表光速的常數，$c=3.0 \times 10^{8}$。若 $m=2.5 \times 10^{4}$，則 E＝？（請以科學記號表示）

5.地球是太陽系中唯一表面含有液態水的行星，因為地球正好處在足夠溫暖，能存在液態水的軌道邊緣，離開適當的溫室效應，地球上的水將都會凍結為冰。而水覆蓋了地球表面 71%的面積，約有 4.8×10^{19} 立方英呎的水，其中每 1 立方英呎的水約含有 9.47×10^{26} 個水分子，則地球上大約有幾個水分

子？(請以科學記號表示)

6. 人類血液中含有紅血球與白血球。其中，紅血球約有 2.5×10^{13} 個，是白血球的500倍，那麼人類血液中的白血球約有幾個？（請以科學記號表示）

7. 請將下列各數由小到大排列：

（1）16×10^{9}，2.3×10^{12}，0.064×10^{11}；

（2）234×10^{-10}，3.9×10^{-8}，0.139×10^{-7}；

（3）68×10^{5}，423×10^{3}，2.886×10^{5}。

指定作業參考解答：

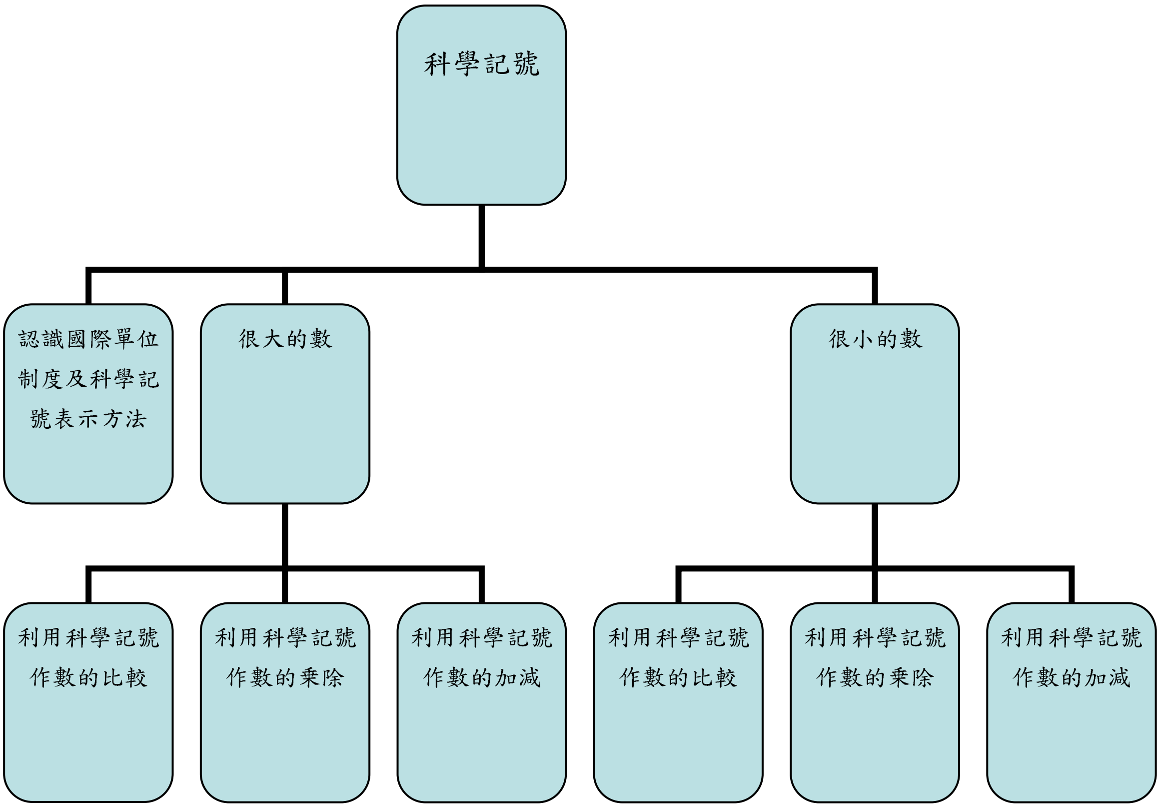
1. （1）7，（2）6.5194，（3）300000，（4）1.3×10^{9}。
2. （1）6.4×10^{-3}，（2）3.13×10^{-3}，（3）4.53201×10^{-8}。
3. 1.2475×10^{-1}。
4. 2.25×10^{21}。
5. 4.5456×10^{46}。
6. 5×10^{10}。
7. （1）$0.064\times10^{11}<1.6\times10^{9}<2.3\times10^{12}$；

（2）$0.139\times10^{-7}<234\times10^{-10}<3.9\times10^{-8}$；

（3）$2.886\times10^{5}<423\times10^{3}<68\times10^{5}$。

八、教學注意事項：

1. 本單元所鋪陳的教學活動所涵蓋的概念如下圖所示：



2. 學習與使用科學記號作乘除運算有其必要性，但是關於科學記號的加減運算屬補充教材，建議教師依學生的學習狀況而決定涉入程度。

3. 本單元需讓學生熟練指數律的規則。至於除法指數律($10^m \div 10^n = 10^{m-n}$)在教科書中並沒有出現，但這並不表示它不重要，建議教師可多運用實例讓學生練習。

九、教學參考資料：

1. 國家教育研究院籌備處(2010)。國民中學第一冊數學課本、

習作。新北市：國家教育研究院籌備處。

2.國家教育研究院籌備處(2010)。國民中學第一冊數學教師手冊。新北市：國家教育研究院籌備處。

3.Prentice Hall Mathematics (2009). Pre-Algebra.

4.http://mag.udn.com/mag/dc/storypage.jsp?f_MAIN_ID=3&f_SUB_ID=19&f_ART _ID=6440

5.http://www.phys.ncku.edu.tw/~astrolab/e_book/ 檢索日期：2011/11/10

主題 1－7：密碼算術（一）

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者：**李政豐

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　陳昭地

（一）能熟練整數加、減的直式計算。

（二）能熟練較大位數的乘除直式計算。

（三）能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。

（四）能熟練數的運算規則。

三、教學目標：

（一）瞭解正整數加法運算，應用到解簡易加法密碼算術題的方法。

（二）認識密碼算術題 AYE＋AYE＋AYE＝YES＋YES 恰有兩組解：AYE＝470、YES＝705；AYE＝352、YES＝528。

（三）知道密碼算術題：

AYE＋AYE＋AYE＋AYE＝YES＋YES＋YES

有惟一解：AYE＝576、YES＝768。

四、教學時間：65 分鐘(一節半)

五、教學說明：

下面密碼算術題中，每一個英文字母都代表一個阿拉伯數字

(0,1,2,…,8,9),相同的字母代表相同的數字,不同的字母代表不同的數字,請找出各字母所代表的數字:

AYE+AYE+AYE=YES+YES

六、教學活動:

活動一:首先,將原題改寫成直式,以利觀察比較:

$$\begin{array}{cccc} & A & Y & E \\ \oplus & A & Y & E \\ & A & Y & E \\ \hline\hline & Y & E & S \\ \oplus & Y & E & S \end{array}$$

,並先研究另一個更簡化的問題:

$$\begin{array}{cccc} & A & Y & E \\ + & A & Y & E \\ \hline & Y & E & S \end{array} \quad (*)$$

如果能設法解出(*)的簡化問題,或許有助於原題的瞭解,進一步解決原問題。

活動二:觀察(*)中個位數的部分,由加法知 S 與 E+E=2×E 是偶數,故 S 必須是偶數且可發現 S 與 E 的關係,可列舉出 S 對應於 E 的所有可能情形如下表:

S	0	2	4	6	8
E	5	1,6	2,7	3,8	4,9

活動三:當 S=0、E=5,(*)式變成:

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptsize 1} & \\ & A & Y & 5 \\ + & A & Y & 5 \\ \hline & Y & 5 & 0 \end{array} \quad (**)$$

比較(**)式的十位數，並注意到 5＋5＝10 進 1 到十位數上方的位置，知 2×Y＋1 的個位數就等於 5，所以 2×Y 的個位數是 4，此時代表 Y 的數字為 ______或 ______。

活動四：當 S＝0、E＝5、Y＝2 時(*)式變成：

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1 \\ A\ 2\ 5 \\ +\ A\ 2\ 5 \\ \hline 2\ 5\ 0 \end{array} \quad (***)$$

故得代表 A 的數字為 ______。

由上知 A＝1、Y＝2、E＝5、S＝0 得算式(*)的一解：

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 5 \\ +\ 1\ 2\ 5 \\ \hline 2\ 5\ 0 \end{array}$$

活動五：仿活動四，當 S＝0、E＝5、Y＝7 時，(*)式變成：

$$\begin{array}{r} A\ 7\ 5 \\ +\ A\ 7\ 5 \\ \hline 5\ 0 \end{array} \text{，得 } A=3\text{，} \begin{array}{r} 3\ 7\ 5 \\ +\ 3\ 7\ 5 \\ \hline 7\ 5 \end{array}$$

即 A＝3、Y＝7、E＝5、S＝0 為算式(*)的另一解。

活動六：當 S＝2、E＝1 時，(*)式變成：

$$\begin{array}{r} A\ Y\ 1 \\ +\ A\ Y\ 1 \\ \hline Y\ 1\ 2 \end{array}$$

比較上方的十位數，2×Y 的個位數等於 ______；但 2×Y 是偶數，因此沒有這樣的 Y，故 S＝2、E＝1 沒能得到算式(*)的另外解。

活動七：從活動二～活動六，我們得到特殊情況(*)式的一些解，那麼我們得回到原題看看特殊情況的解題策略可不可用來解原題：

$$
\begin{array}{cccc}
 & A & Y & E \\
\oplus & A & Y & E \\
 & A & Y & E \\
\hline\hline
 & Y & E & S \\
\oplus & Y & E & S
\end{array}
$$

(☆)，我們可以如法泡製來解原題！

活動八：觀察(☆)式的個位數：得 3×E 與 2×S 有相同的個位數，因 2×S 是偶數，所以 E 一定是偶數，E 與 S 的關係可列表如下：

E	0	2	4	6	8
S	5	3, 8	1, 6	4, 9	2, 7

逐一列舉，如：

(1)E＝0、S＝5(☆)式變成：

$$
\begin{array}{cccc}
 & A & Y & 0 \\
\oplus & A & Y & 0 \\
 & A & Y & 0 \\
\hline\hline
 & Y & 0 & 5 \\
\oplus & Y & 0 & 5
\end{array}
$$

，比較上、下的十位數，發現 3×Y 的個位數必定是 ______，所以 Y＝7 即，

$$
\begin{array}{cccc}
 & \overset{2}{A} & 7 & 0 \\
\oplus & A & 7 & 0 \\
 & A & 7 & 0 \\
\hline\hline
 & 7 & 0 & 5 \\
\oplus & 7 & 0 & 5
\end{array}
$$

上方十位數相加進 2，下方不進位，比較百位數，知 3×A＋2 的個位數必定等 4，即 3×A 的個位數是 2，得 A＝4，檢查：

$$\begin{array}{cccc} & 4 & 7 & 0 \\ & 4 & 7 & 0 \\ + & 4 & 7 & 0 \\ \hline 1 & 4 & 1 & 0 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{cccc} & 7 & 0 & 5 \\ + & 7 & 0 & 5 \\ \hline 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

於是得到 A＝ ______、Y＝ ______、E＝ ______、S＝ ______，為原題的一組解。

(2)E＝2、S＝8(☆)式變成：

$$\begin{array}{cccc} & A & Y & 2 \\ \oplus & A & Y & 2 \\ & A & Y & 2 \\ \hline\hline & Y & 2 & 8 \\ \oplus & Y & 2 & 8 \end{array} \quad ,$$

仿上面的方法可發現 Y＝5、A＝3 滿足：

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 5 & 2 \\ & 3 & 5 & 2 \\ + & 3 & 5 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 6 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{cccc} & 5 & 2 & 8 \\ + & 5 & 2 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 6 \end{array}$$

於是得到 A＝ ______、Y＝ ______、E＝ ______、S＝ ______ 為其另一組解。

其它的情況，再一一檢視，都不能得到(☆)的解，例如：

(3)E＝8、S＝7(☆)式變成：

$$\begin{array}{rccc} & A & Y & 8 \\ \oplus & A & Y & 8 \\ & A & Y & 8 \\ \hline\hline & Y & 8 & 7 \\ \oplus & Y & 8 & 7 \end{array}$$

觀察上方的個位數和為 24，下方為 14，進位後比較上、下方的十位數，得 3×Y＋2 的個位數為 8＋8＋1＝17 的個位數 7，即 3×Y＋2 的個位數必定是 7，所以 3×Y 的個位數是 ______，得 Y 是 ______，(☆)式變成：

$$\begin{array}{rccc} & A & 5 & 8 \\ \oplus & A & 5 & 8 \\ & A & 5 & 8 \\ \hline\hline & 5 & 8 & 7 \\ \oplus & 5 & 8 & 7 \end{array}$$

比較百位數，可以發現沒能找到 A 代表的數字！

換言之，E＝8、S＝7 不是原題的解。

結論：原密碼算術題恰有兩組解：

A＝ ______、Y＝ ______、E＝ ______、S＝ ______；或

A＝ ______、Y＝ ______、E＝ ______、S＝ ______；

470＋470＋470＝705＋705；或

352＋352＋352＝528＋528。

隨堂練習：仿活動八之 (3)，說明 E＝2、S＝3 不是原題的解。

教學活動參考解答：

活動三：2、7。活動四：1 。活動六：1。

活動八：(1) 4、7、0、5。(2) 3、5、2、8。(3) 5、5。

隨堂練習參考解答：由 E＝2、S＝3 得：

$$\begin{array}{cccc} & A & Y & 2 \\ \oplus & A & Y & 2 \\ & A & Y & 2 \\ \hline\hline & Y & 2 & 3 \\ \oplus & Y & 2 & 3 \end{array}$$

，知 3×Y 的個位數是 4

，所以 Y＝8 得：

$$\begin{array}{cccc} & A & 8 & 2 \\ \oplus & A & 8 & 2 \\ & A & 8 & 2 \\ \hline\hline & 8 & 2 & 3 \\ \oplus & 8 & 2 & 3 \end{array}$$

，知 3×A＋2 是 16，無此 A。

七、指定作業：

說明：下面密碼算術題中，每一個英文字母都代表一個阿拉伯數字(0, 1, 2, ⋯, 8, 9)，相同的字母代表相同的數字，不同的字母代表不同的數字，請找出各字母所代表的數字。

一、試求下列密碼算術題的解：

AYE＋AYE＋AYE＋AYE＝YES＋YES＋YES

二、試說明下列密碼算術題無解：

AYE＋AYE＋AYE＋AYE＋AYE＝YES＋YES＋YES

指定作業參考解答：

一、

$$\begin{array}{ccccc} & A & Y & E \\ & A & Y & E \\ \oplus & A & Y & E \\ & A & Y & E \\ \hline\hline & Y & E & S \\ \oplus & Y & E & S \\ & Y & E & S \end{array}$$

，比較上、下個位數相加知 4×E 與 3×S 有相同的個位數，所以 S 一定是偶數，其對應的 E 值如下表：

S	0	2	4	6	8
E	5	4,9	3,8	2,7	1,6

對 S、E 一一列舉僅得 S＝8、E＝6 產生 Y＝7、A＝5 的惟一解：

$$\begin{array}{ccccc} & & 5 & 7 & 6 \\ & & 5 & 7 & 6 \\ & & 5 & 7 & 6 \\ + & & 5 & 7 & 6 \\ \hline & 2 & 3 & 0 & 4 \end{array} , \quad \begin{array}{ccccc} & & 7 & 6 & 8 \\ & & 7 & 6 & 8 \\ + & & 7 & 6 & 8 \\ \hline & 2 & 3 & 0 & 4 \end{array}$$

二、 比較 5×E 與 3×S 有相同的個位數，故(E,S)所有可能為(1,5)、(3,5)、(7,5)、(9,5)、(2,0)、(4,0)、(6,0)、(8,0)八種情形，一一列舉都不符合原算式，故本題沒有解。

八、教學注意事項：

1. 指導說明讀題的時間約 2 分鐘。
2. 活動一～活動七各約 4～5 分鐘；活動八約 8~10 分鐘。

3. 隨堂練習約 8 分鐘。
4. 結論時間約 8 分鐘。
5. 指定作業(含提示)約 10 分鐘。
6. 本主題中的英文 AYE 也是 YES 的意思。
7. 本主題的解題策略是依玻利亞：怎樣解題的解題模式來設計，將問題簡化而簡化題的解法策略可用來解原題，甚至可以解作業一中的 Alan Wayne 密碼算術題。
8. 應特別加強解說，加法進位影響比較相對應和的個位數之關係。
9. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
10. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

有關密碼算術問題起源於 20 世紀英國數學家 Berwick 之引進 7 個 7 的除法密碼算術題(可能還有比 Berwick 更早幾年的人);在一個問題中，用英文字母代表阿拉伯數字(0,1,2,…,8,9)，不同的字母代表不同的數字，求出問題算式中的字母所代表的數字。

在下面各題中，可能有多於一解，也可能只有一組解，或許

沒有解，千變萬化，教四則運算時，適時引入可以增進基本四則運算能力，增添數學學習的興趣。

例如：

(1) 就有多解：

$$\begin{array}{r} O\ N\ E \\ +\ O\ N\ E \\ \hline T\ W\ O \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ 8\ 1 \\ +\ 2\ 8\ 1 \\ \hline 5\ 6\ 2 \end{array},\ \begin{array}{r} 4\ 3\ 2 \\ +\ 4\ 3\ 2 \\ \hline 8\ 6\ 4 \end{array},\cdots,$$

字母O一定是不為0的偶數2或4。

(2)

$$\begin{array}{r} O\ N\ E \\ +\quad T\ W\ O \\ \hline T\ H\ R\ E\ E \end{array}$$

一定是沒有解(其理由是兩個二位數相加，頂多是三位數，不可能為四位數！)

(3) 也有多解：

$$\begin{array}{r} T\ W\ O \\ +\quad T\ W\ O \\ \hline F\ O\ U\ R \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ 6\ 5 \\ +\quad 7\ 6\ 5 \\ \hline 1\ 5\ 3\ 0 \end{array},\ \begin{array}{r} 8\ 4\ 6 \\ +\quad 8\ 4\ 6 \\ \hline 1\ 7\ 9\ 2 \end{array},\cdots,$$

其中F一定是1，字母R可以為0的偶數。

(4) 也有多解：

$$\begin{array}{r} O\ N\ E \\ +\ F\ O\ U\ R \\ \hline F\ I\ V\ E \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\ 6\ 2 \\ +\ 7\ 4\ 3\ 0 \\ \hline 7\ 8\ 9\ 2 \end{array},\ \begin{array}{r} 4\ 2\ 6 \\ +\ 9\ 4\ 3\ 0 \\ \hline 9\ 8\ 5\ 6 \end{array},\cdots,$$

其中R一定是0。

（5）　　　　　也有多解：

$$\begin{array}{r} \mathrm{T\ H\ R\ E\ E} \\ +\quad \mathrm{F\ O\ U\ R} \\ \hline \mathrm{S\ E\ V\ E\ N} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ 9\ 2\ 4\ 4 \\ +\quad 5\ 1\ 0\ 2 \\ \hline 8\ 4\ 3\ 4\ 6 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 7\ 5\ 2\ 4\ 4 \\ +\quad 9\ 1\ 0\ 2 \\ \hline 8\ 4\ 3\ 4\ 6 \end{array}, \cdots,$$

其中S一定等於T+1。

（6）　　　　　也有多解：

$$\begin{array}{r} \mathrm{F\ O\ U\ R} \\ +\ \mathrm{F\ I\ V\ E} \\ \hline \mathrm{N\ I\ N\ E} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 9\ 7\ 0 \\ +\ 1\ 4\ 6\ 5 \\ \hline 3\ 4\ 3\ 5 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 1\ 9\ 7\ 0 \\ +\ 1\ 4\ 6\ 2 \\ \hline 3\ 4\ 3\ 2 \end{array}, \cdots,$$

其中R一定等於0。

（7）　　　　　也有多解：

$$\begin{array}{r} \mathrm{F\ O\ U\ R} \\ +\quad \mathrm{F\ O\ U\ R} \\ \hline \mathrm{E\ I\ G\ H\ T} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\ 5\ 3\ 2 \\ +\quad 8\ 5\ 3\ 2 \\ \hline 1\ 7\ 0\ 6\ 4 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 8\ 3\ 5\ 2 \\ +\quad 8\ 3\ 5\ 2 \\ \hline 1\ 6\ 7\ 0\ 4 \end{array}, \cdots,$$

其中E一定是1，T一定是偶數。

（8）　　　　　也有多解：

$$\begin{array}{r} \mathrm{F\ I\ V\ E} \\ +\ \mathrm{F\ I\ V\ E} \\ \hline \mathrm{S\ T\ E\ M} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 4\ 7\ 5 \\ +\ 1\ 4\ 7\ 5 \\ \hline 2\ 9\ 5\ 0 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 4\ 6\ 7\ 5 \\ +\ 4\ 6\ 7\ 5 \\ \hline 9\ 3\ 5\ 0 \end{array}, \cdots。$$

（9）　　　　　也有多解：

$$\begin{array}{r} \mathrm{W\ R\ O\ N\ G} \\ +\ \mathrm{W\ R\ O\ N\ G} \\ \hline \mathrm{R\ I\ G\ H\ T} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ 4\ 1\ 5\ 3 \\ +\ 2\ 4\ 1\ 5\ 3 \\ \hline 4\ 8\ 3\ 0\ 6 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 4\ 9\ 3\ 0\ 6 \\ +\ 4\ 9\ 3\ 0\ 6 \\ \hline 9\ 8\ 6\ 1\ 2 \end{array}, \cdots,$$

其中T一定是偶數。

（10） 也有多解：

$$\begin{array}{r} A\ B\ C \\ +\ D\ E\ F \\ \hline G\ H\ I \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 7\ 3 \\ +\ 2\ 9\ 5 \\ \hline 4\ 6\ 8 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 2\ 8\ 9 \\ +\ 4\ 6\ 1 \\ \hline 7\ 5\ 0 \end{array}, \cdots$$

（11）AB×CDE＝FGHI 也有多解：63×154＝9702，54×168＝9072，…。

（嘗試錯誤法）

（12） 也有多解：

$$\begin{array}{r} I\ S \\ +\ \ I\ S \\ \hline A\ R\ E \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\ 2 \\ +\ \ 5\ 2 \\ \hline 1\ 0\ 4 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 7\ 3 \\ +\ \ 7\ 3 \\ \hline 1\ 4\ 6 \end{array}, \cdots,$$

A 一定是 1，E 一定是偶數。

（13） 也有多解：

$$\begin{array}{r} I\ S \\ +\ \ A\ M \\ \hline A\ R\ E \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\ 7 \\ +\ \ 1\ 6 \\ \hline 1\ 0\ 3 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 8\ 6 \\ +\ \ 1\ 7 \\ \hline 1\ 0\ 3 \end{array}, \cdots,$$ A 一定是 1。

（14） 也有多解：

$$\begin{array}{r} Y\ O\ U \\ +\ M\ O\ R\ E \\ \hline T\ H\ E\ Y \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ 8\ 4 \\ +\ 1\ 8\ 5\ 3 \\ \hline 2\ 6\ 3\ 7 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 3\ 6\ 2 \\ +\ 8\ 6\ 5\ 1 \\ \hline 9\ 0\ 1\ 3 \end{array}, \cdots,$$

其中 T 一定等於 M＋1。

（15） 也有多解(有一定的難度)：

$$\begin{array}{r} S\ E\ V\ E\ N \\ +\ \ E\ I\ G\ H\ T \\ \hline T\ W\ E\ L\ V\ E \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8\ 5\ 2\ 5\ 4 \\ +\ \ 5\ 0\ 6\ 7\ 1 \\ \hline 1\ 3\ 5\ 9\ 2\ 5 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 6\ 3\ 7\ 3\ 2 \\ +\ \ 3\ 9\ 8\ 4\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 3\ 5\ 7\ 3 \end{array}$$

，…，其中 T 一定是 1。

（16）

NUDE＋NOT＋RUDE＋NOR＝CRUDE(R.J. Lancaster 密碼算術題)

先由左式的 RUDE 與右式的 CRUDE 相消，

化成如下的問題：

NUDE＋NOT＋NOR＝10000 （C＝1）

可知有許多解：

8350＋824＋826＝10000；

8251＋873＋876＝10000； （N 一定是 8）

8213＋890＋897＝10000。

（17） 恰有一解(有難度)：

$$\begin{array}{cccccc} & D & O & N & A & L & D \\ + & G & E & R & A & L & D \\ \hline & R & O & B & E & R & T \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & 5 & 2 & 6 & 4 & 8 & 5 \\ + & 1 & 9 & 7 & 4 & 8 & 5 \\ \hline & 7 & 2 & 3 & 9 & 7 & 0 \end{array}$$

（18） 惟一解：

$$\begin{array}{cccccc} & & L & E & T & S \\ + & & W & A & V & E \\ \hline & L & A & T & E & R \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & 1 & 5 & 6 & 7 \\ + & & 9 & 0 & 8 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 6 & 5 & 2 \end{array}$$

（19） 惟一解：

$$\begin{array}{cccccc} & & S & E & N & D \\ + & & M & O & R & E \\ \hline & M & O & N & E & Y \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & 9 & 5 & 6 & 7 \\ + & & 1 & 0 & 8 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 6 & 5 & 2 \end{array}$$

(20)　　　　　　　　　　　　　惟一解：

```
          A B C                 2 8 6
×         B A C      ×          8 2 6
-----------------    -----------------
        * * * *             1 7 1 6
        * * A               5 7 2
      * * * B           2 2 8 8
-----------------    -----------------
      * * * * * *       2 3 6 2 3 6
```

(21)　　　　　　　　　　　　　惟一解：

```
                * 5 3                        8 ⑤ ③
* * 9 )6 * 8 * * *       7 4 ⑨ )⑥ 3 ⑧ 8 9 7
       * * * 2                   5 9 9 ②
       -----------               -----------
         * 9 * *                   3 ⑨ 6 9
         * * 4 *                   3 7 ④ 5
         ---------                 ---------
           * * 4 *                   2 2 ④ 7
           * * * *                   2 2 4 7
           -------                   -------
                 0                         ⓪
```

……等等，欲知更進步的密碼算術題可參考

Steven G. Krantz(1997).Techniques of Problem Solving, pp.201-221,Providence,RI：American Mathematical Society

※註：Berwick 7 個 7 的除法密碼算術題

```
                        * * 7 * *
             -----------------------
* * * * 7 * ) * * 7 * * * * * * *
              * * * * * *
              -------------------
              * * * * * 7 *
              * * * * * * *
              -------------------
                  * 7 * * * *
                  * 7 * * * *
                  ---------------
                  * * * * * * *
                  * * * * 7 * *
                  ---------------
                      * * * * * *
                      * * * * * *
                      -----------
                                0
```

上面各行中的「*」都代表一個數字，不同位置的「*」號可能代表相同的數字，也可能代表不同的數字，每個數中最左邊的「*」號一定不為 0，本題有相當的難度；參見上列 Krantz 的書 P.208~P.214，Berwick 7 個 7 的密碼算術題參考答案：(恰有一解)

```
                        5 8 ⑦ 8 1
             -----------------------
1 2 5 4 ⑦ 3 ) 7 3 ⑦ 5 4 2 8 4 1 3
              6 2 7 3 6 5
              -------------------
              1 1 0 1 7 ⑦ 8
              1 0 0 3 7 8 4
              -------------------
                  9 ⑦ 9 9 4 4
                  8 ⑦ 8 3 1 1
                  ---------------
                  1 0 1 6 3 3 1
                  1 0 0 3 ⑦ 8 4
                  ---------------
                      1 2 5 4 7 3
                      1 2 5 4 7 3
                      -----------
                                0
```

主題1－8：密碼算術（二）

一、授課對象：國中七年級上學期末學生　　**撰寫者：**李政豐

或國中七年級下學期初學生　　陳昭地

二、先備知識：

（一）已學過密碼算術（一）者。

（二）能熟練整數加、減的直式計算。

（三）能熟練較大位數的乘除直式計算。

（四）能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。

（五）能熟練數的運算規則。

（六）能知道數學在促進人類文化發展上的具體例子。

（七）能分解複雜的問題為一系列的子題。

三、教學目標：

（一)瞭解正整數乘法運算,應用到解乘法密碼算術題的方法。

（二）知道惟有 $625^2=390625$，$376^2=141376$ 兩個六位平方數，其末三位數字與原底數相同。

（三）知道惟有 $9376^2=87909376$ 的八位平方數，其末四位數字與原底數 9376 相同。

四、教學時間：45 分鐘（一節課）

五、教學說明：

下面密碼算術題中，每一個英文字母都代表一個阿拉伯數字（0, 1, 2, …, 8, 9），相同的字母代表相同的數字，不同的字母代表不同的數字；另外，每一個「*」號也都表一個數字，不同位置的「*」號可代表相同的數字，而且每個算式中之各行最左邊的字母或「*」不可為 0，請找出各字母所代表的數字：

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & & & & T & O & M \\
\times & & & & T & O & M \\
\hline
 & & & * & * & * & * \\
 & & * & * & * & * & \\
 & * & * & * & * & & \\
\hline
 & * & * & * & T & O & M
\end{array}
$$

六、教學活動：

活動一：首先，將各「*」依序字小寫英文字母 a, b, …, m, n, o 各 15 個取代，以便求解，這些小寫英文字母雖用不同的字母取代，但可以代表同一數字，惟每行最左邊的字母 a、e、i、m 不能代表 0。

$$
\begin{array}{rcccccc l}
 & & & & T & O & M & \cdots\cdots\cdots \text{第 1 行} \\
\times & & & & T & O & M & \cdots\cdots\cdots \text{第 2 行} \\
\hline
 & & & a & b & c & d & \cdots\cdots\cdots \text{第 3 行} \\
 & & e & f & g & h & & \cdots\cdots\cdots \text{第 4 行} \\
 & i & j & k & l & & & \cdots\cdots\cdots \text{第 5 行} \\
\hline
 & m & n & o & T & O & M & \cdots\cdots\cdots \text{第 6 行}
\end{array}
$$

顯然由

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times\quad 5 \\ \hline 25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ \times\quad 25 \\ \hline 625 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 625 \\ \times\quad 625 \\ \hline 309625 \end{array}$$

可知 T＝ ＿＿＿、O＝ ＿＿＿、M＝ ＿＿＿為其一解，我們想知道還有沒有其它的解呢？如何下手？

活動二：如果把原題特殊化，來看看下面的問題：

$$\begin{array}{r} M \\ \times\quad M \\ \hline *\ M \end{array} \cdots\cdots\cdots（☆）$$

那麼這個問題就是 M×M 的個位數等於 M 的問題，由 M≠0，及九九乘法表知 M 有兩解 ＿＿＿或 ＿＿＿(M＝1 時,*＝0，所以 1 不是它的解)。

活動三：進一步看稍為複雜但比原題還要簡化的問題：

$$\begin{array}{r} O\ M \\ \times\quad O\ M \\ \hline *\ *\ * \\ *\ *\ *\ \ \\ \hline *\ *\ O\ M \end{array} \cdots\cdots（☆☆）$$

根據每行最右邊的字母 M，M×M 的個位數就是第 2 行中的 M 正下方「*」與 M，由活動一得 M＝ ＿＿＿或 ＿＿＿，於是問題（☆☆）可以寫成：

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 2 \quad \\ O\ 5 \\ \times \quad O\ 5 \\ \hline *\ *\ 5 \\ *\ *\ *\ \ \\ \hline *\ *\ O\ 5 \end{array} \quad 或 \quad \begin{array}{r} \scriptstyle 3 \quad \\ O\ 6 \\ \times \quad O\ 6 \\ \hline *\ *\ 6 \\ *\ *\ *\ \ \\ \hline *\ *\ O\ 6 \end{array}$$

活動四：上面左邊的算式，怎樣可以求得字母O所代表的數字呢？

盯住各行的十位數O、O、*、*、O，依直式乘法規則第2行O的正下方「*」是代表5×O＋2的個位數，底下第5行O的正上方「*」則代表O×5＝5×O的個位數，它們的和（5×O＋2）＋（5×O）的個位數就是O，也就是10×O＋2的個位數是O，即字母O代表數字

2，代入檢查：

$$\begin{array}{r} 2\ 5 \\ \times \quad 2\ 5 \\ \hline 1\ 2\ 5 \\ 5\ 0\ \ \\ \hline 6\ 2\ 5 \end{array}$$

依照規則第4行數字5的左方*≠0，故O＝2、M＝5不是（☆☆）的一組解，但它仍然可以提供解原題的好資訊。

活動五：活動三中的右式（最上方的3為6×6＝36進位數3）：

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 3 \quad \\ O\ 6 \\ \times \quad O\ 6 \\ \hline *\ *\ 6 \\ *\ *\ *\ \ \\ \hline *\ *\ O\ 6 \end{array}$$

如法泡製（6×O＋3）＋（O×6）＝12×O＋3 的個位數就是 O，

故 11×O＋3 的個位數為 O，所以字母 O 代表 7 而：

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & & 7 & 6 \\
\times & & & 7 & 6 \\
\hline
 & & 4 & 5 & 6 \\
 & 5 & 3 & 2 & \\
\hline
 & 5 & 7 & 7 & 6
\end{array}
$$

即得 O＝ _____、M＝ _____為（☆☆）式的解，至於各

「*」所代表的數字，即為算式中對應位置的數字。

活動六：回到原來密碼算術題：

由上面兩個活動可以得到下面兩個算式：

$$
\begin{array}{ccccccccl}
 & & & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & & \\
 & & & & & T & 2 & 5 & \cdots\cdots\cdots \text{第 1 行} \\
\times & & & & & T & 2 & 5 & \cdots\cdots\cdots \text{第 2 行} \\
\hline
 & & & & a & b & 2 & 5 & \cdots\cdots\cdots \text{第 3 行} \\
 & & & e & f & 5 & 0 & & \cdots\cdots\cdots \text{第 4 行} \\
 & & i & j & k & l & & & \cdots\cdots\cdots \text{第 5 行} \\
\hline
 & & m & n & o & T & 2 & 5 & \cdots\cdots\cdots \text{第 6 行}
\end{array}
$$

或

$$
\begin{array}{ccccccccl}
 & & & & & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 3} & & \\
 & & & & & T & 7 & 6 & \cdots\cdots\cdots \text{第 1 行} \\
\times & & & & & T & 7 & 6 & \cdots\cdots\cdots \text{第 2 行} \\
\hline
 & & & & a & b & 5 & 6 & \cdots\cdots\cdots \text{第 3 行} \\
 & & & e & f & 3 & 2 & & \cdots\cdots\cdots \text{第 4 行} \\
 & & i & j & k & l & & & \cdots\cdots\cdots \text{第 5 行} \\
\hline
 & & m & n & o & T & 7 & 6 & \cdots\cdots\cdots \text{第 6 行}
\end{array}
$$

最上方標示的 1、2、4、3 依序表示乘法過程中進位數。

活動七： 盯住活動六第 1 個算式各行中的百位數：

b 代表 $5\times T+1$ 的個位數，1 代表 $T\times 5=5\times T$ 的個位數，所以（$5\times T+1$）$+5+$（$5\times T$）$=10\times T+6$ 的個位數就是 T，即 $9\times T+6$ 的個位數為 0，得代表 T 的數字為 _____，

檢查：

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & & 6 & 2 & 5 \\
\times & & & & 6 & 2 & 5 \\
\hline
 & & & 3 & 1 & 2 & 5 \\
 & & 1 & 2 & 5 & 0 & \\
 & 3 & 7 & 5 & 0 & & \\
\hline
 & 3 & 9 & 0 & 6 & 2 & 5
\end{array}
$$

，符合原密碼算術題。

故 T= _____、O= _____、M= _____為其一解，至於各「*」所代表的數字，如上算式中各對應位置（如 $a=3$、e=1、i=3、m=3 等等）。

活動八： 同理，盯住活動六中第 2 個算式各行的百位數，b 代表 $6\times T+4$ 的個位數，1 代表 $T\times 6=6\times T$ 的個位數，所以（$6\times T+4$）$+3+$（$6\times T$）$=12\times T+7$ 的個位數就是 T，即 $11\times T+7$ 的個位數為 0，得代表 T 的數字為 _____。

檢查：

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & & 3 & 7 & 6 \\
\times & & & & 3 & 7 & 6 \\
\hline
 & & & 2 & 2 & 5 & 6 \\
 & & & 6 & 3 & 2 & \\
 & 1 & 1 & 2 & 8 & & \\
\hline
 & 1 & 4 & 1 & 3 & 7 & 6
\end{array}
$$

，符合原密碼算術題，

故 T＝ _____、O＝ _____、M＝ _____為其另一解，至於各「*」所代表的數字，如上算式中各對應位置（如 a ＝2、e＝2、i＝1、m＝1 等等）。

隨堂練習：用電算器檢驗活動五、七、八各個解的算式是否正確？

教學活動參考解答：

活動一：6、2、5，活動二：5、6，活動三：5、6，活動五：7、6，活動七：6、2、5，活動八：3；3、6、7，結論：6、2、5；3、7、6。

隨堂練習參考解答：（略）

結論：原密碼算術題恰有兩組解：

T＝ _____、O＝ _____、M＝ _____；或者

T＝ _____、O＝ _____、M＝ _____；

$$\begin{array}{r} 6\ 2\ 5 \\ \times \qquad 6\ 2\ 5 \\ \hline 3\ 1\ 2\ 5 \\ 1\ 2\ 5\ 0\ \ \ \\ 3\ 7\ 5\ 0\ \ \ \ \ \ \\ \hline 3\ 9\ 0\ 6\ 2\ 5 \end{array} \text{；或者} \begin{array}{r} 3\ 7\ 6 \\ \times \qquad 3\ 7\ 6 \\ \hline 2\ 2\ 5\ 6 \\ 2\ 6\ 3\ 2\ \ \ \\ 1\ 1\ 2\ 8\ \ \ \ \ \ \\ \hline 1\ 4\ 1\ 3\ 7\ 6 \end{array}$$

代入檢驗符合所求。這就是原密碼算術題的兩組解，至於各「*」所代表的數字，即為算式中對應位置的數字。

七、指定作業：

說明：下面密碼算術題中，每一個英文字母都代表一個阿拉伯數字（0,1,2,…,8,9），相同的字母代表相同的數字，不同的字母代表不同的數字；另外，每一個「*」號也都表一個數字，不同位置的「*」號可代表相同的數字，而且每個算式中之各行最左邊的字母或「*」號不可為 0，請找出各字母所代表的數字。

一、

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & & & & & A & T & O & M \\
\times & & & & & A & T & O & M \\
\hline
 & & & & * & * & * & * & * \\
 & & & * & * & * & * & * & \\
 & & * & * & * & * & * & & \\
 & * & * & * & * & * & & & \\
\hline
 & * & * & * & * & A & T & O & M
\end{array}
$$

二、由主題活動結論的兩組解 625、376，用電算器一一檢驗能否得到上題的解？

三、求解下列密碼算術題：

（1）$AM=(A+M)^2$

（2）$HE*=(HE-*)^2$

四、用電算器求解下列密碼算術題：

（1）$ATOM=(A+TO+M)^2$

（2）$A*BD=(A*+D)^2$

指定作業參考解答：

利用主題活動中解得 TOM＝625 或 TOM＝376 下手列出：

一、

					A	6	2	5
×					A	6	2	5
				＊	＊	1	2	5
			＊	＊	2	5	0	
		＊	＊	＊	5	0		
	＊	＊	＊	＊	＊			
	＊	＊	＊	＊	A	6	2	5

第 2 行 A 正下方「＊」是 5×A＋3 的個位數，第 7 行 A 正上方的「＊」是 5×A 的個位數，得（5×A＋3）＋2＋5＋（5×A）＝10×A＋10 的個位數 0 就是代表 A（不合）。

					A	3	7	6
×					A	3	7	6
				＊	＊	2	5	6
			＊	＊	6	3	2	
		＊	＊	＊	2	8		
	＊	＊	＊	＊	＊			
	＊	＊	＊	＊	A	3	7	6

第 2 行 A 正下方「＊」是 6×A＋2 的個位數，第 7 行 A 正上方的「＊」是 6×A 的個位數，而 2＋3＋8＝13 進 1，所以（6×A＋2）＋6＋2＋（6×A）＋1＝12×A＋11 的個位數就是 A，所以 11×A＋1 的個位數為 0，故得 A＝9，經檢查符合所求。

故本題的惟一答案：A＝9、T＝3、O＝7、M＝6

					9	3	7	6
×					9	3	7	6
				5	6	2	5	6
			6	5	6	3	2	
		2	8	1	2	8		
	8	4	3	8	4			
	8	7	9	0	9	3	7	6

至於各「＊」所代表的數字，如上算式中各對應位置。

二、由主題活動得 625^2＝390625，376^2＝141376 兩組解；用電算器按 1625^2，3625^2，…，9625^2；1376^2，2376^2，…，9376^2 僅得出 9376^2 末四位數仍然是 9376，故僅有 9376 為上題的解。

三、(1) AM 為二位平方數，$(A+M)^2<100$ 故 $A+M<10$，

即 $A+M\leq 9$，AM 可能情形為：16、25、36、81 等四種，其中僅有 A＝8、M＝1 符合 $A\neq M$ 且 AM ＝$(A+M)^2$ [若未列出 $A+M\leq 9$，則 AM 可能情形為 16、25、36、49、64、81 六種，其中也僅有 A＝8、M＝1 符合 $A\neq M$ 且 AM＝$(A+M)^2$]。

(2) HE*為三位平方數且 HE－*≤31 故 HE*≤409，所以 HE*可能情形為：100、121、144、169、196、256、289、324、361 等九種情形，其中僅有 100 ＝$(10-0)^2$、121 ＝$(12-1)^2$ 符合 HE*＝$(HE-*)^2$。

四、(1) 按電算器知：$99^2\geq ATOM\geq 32^2$ 依序按出 32^2、33^2、…、99^2 等 68 個平方數，一一檢視這 68 個平方數，其中$(36)^2$＝1296＝$(1+29+6)^2$、$(82)^2$＝(6724＝$6+72+4)^2$ 兩組符合 ATOM＝$(A+TO+M)^2$。

(2) $A*+D\geq 32\Rightarrow A*\geq 23\Rightarrow A*BD\geq 2300\Rightarrow A*BD\geq 48^2$ 依序按出 48^2、49^2、…、98^2、99^2 等 52 個平方數，一一檢視這 52 個平方數$(94)^2$＝8836＝$(88+6)^2$、$(95)^2$＝9025

$=(90+5)^2$、$(99)^2=9801=(98+1)^2$三組符合 A*BD $=(A^*+D)^2$。

八、教學注意事項：

1. 各活動教學參考時間，指導說明讀題的時間約 2 分鐘，活動一約 3 分鐘，活動二約 1～2 分鐘，活動三、四、五各約 3～4 分鐘，活動六、七、八結論各約 4～5 分鐘，隨堂練習 1～2 分鐘。

3. 指定作業（含提示及向學生宣佈可用電算器找 A)：3 分鐘。

4. 本主題及其作業可適當利用電算器融入數學教學的良好示範。

5. 十位平方數之末五位數與原五位數底數都不相等，例如：

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
 & & & & & & S & T & O & R & M \\
\times & & & & & & S & T & O & R & M \\
\hline
 & & & & & * & * & * & * & * & * \\
 & & & & * & * & * & * & * & * & \\
 & & & * & * & * & * & * & * & & \\
 & & * & * & * & * & * & * & & & \\
 & * & * & * & * & * & * & & & & \\
\hline
 & * & * & * & * & * & S & T & O & R & M
\end{array}
$$

是無解的密碼算術題。

理由：以電算器按 19376^2，29376^2，49376^2，…，89376^2 所得九位或十位的平方數的末五位數與原底數都不相等。

6. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

7. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 參見主題密碼算術（一）中之教學參考資料內容。
2. 下面提供一個與音樂發聲練習連結的密碼算術題（求出下列三個算式中代表各英文字母的數字）。

$$\begin{array}{rcc} & D & O \\ + & R & E \\ \hline & M & I \end{array}，\qquad \begin{array}{rcc} & F & A \\ + & S & I \\ \hline & L & A \end{array}，\qquad \begin{array}{rccc} & & R & E \\ & & S & I \\ + & & L & A \\ \hline & S & O & L \end{array}$$

參考答案：

$$\begin{array}{rcc} & 3 & 4 \\ + & 5 & 6 \\ \hline & 9 & 0 \end{array}，\qquad \begin{array}{rcc} & 7 & 2 \\ + & 1 & 0 \\ \hline & 8 & 2 \end{array}，\qquad \begin{array}{rccc} & & 5 & 6 \\ & & 1 & 0 \\ + & & 8 & 2 \\ \hline & 1 & 4 & 8 \end{array}$$

解法：

1°由中間的算式，盯住個位數 A＋I＝A，所以 I 一定代表 0。

2°由最右式總和的百位數 S，是由 3 個數字相加進位得出，故 S＝1 或 2。

3°若 S＝2，則由 R＋2＋L 19，必使 E＋0＋A＝10＋L，所以 O＝0，此與 I＝0 已被取走不合，故 S≠2 而 S 必然為 1。

4°由最左式，盯住個位數及已知 I＝0，故 O＋E＝10，即(E,O)＝(8,2)、(2,8)、(6,4)、(4,6)、(7,3)、(3,7)。

5°由中間的算式，盯住十位數及已知 S＝1，於是 L＝F＋1，再由 F≠0，故知 L 3。

6°若 L＝3，則 F＝2 且由最右式的個位數 E＋A＝13，另由 E＋O＝10、E≠0；故 E≠5，所以(E,A)可能為(8,5)、(7,6)、(6,7)、(9,4)、(4,9)。

但 E＝8 時，得 O＝2 不合，因 F＝2；E＝7 時，得 O＝3、A＝6、R＋1＋1＋3＝13，所以 R＝8 由最左式的十位數及 D 2 知 R＜8，故 E＝7 亦不合；E＝6 時。得 O＝4、A＝7、R＋1＋1＋3＝14，所以 R＝9 亦不合；

E＝9 時，得 O＝1 不合，因 S＝1 已被取走；

E＝4 時，得 O＝6、A＝9、R＋1＋3＝16，再得 R＝12 不合，綜合以上知 L 4。

7°同理，討論 L＝4、5、6、7 均不合。

8°由前知 L 8，當 L＝8 時，則 F＝7 且由最右式的個位數 E＋A＝8、E≠5、E≠1，所以(E,A)可能為(6,2)、(2,6)、(3,5)；當 E＝2 時，A＝6、O＝8 不合(同 L＝8)；當 E＝3 時，A＝5、O＝7，由最右式 A＋E＋I＝8 不進位，R＋1＋8＝17，所以得 R＝8(不合)；而當 E＝6 時，A＝2、O＝4，且由最右式

的個位數為 A+E+I=8 不進位，其十位數之總和為 R+1+8=14，得 R=5。

9°最後由最左式的個位數和為 10，進 1 到十位數，所以 D+R+1=M、M D+6；現在僅剩下 3、9 兩數字尚未被取走，故 D=3、M=9。

10°結論得出

數字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
字母	I	S	A	D	O	R	E	F	L	M

$$\begin{array}{r} 34 \\ +\ 56 \\ \hline 90 \end{array}\ ,\qquad \begin{array}{r} 72 \\ +\ 10 \\ \hline 82 \end{array}\ ,\qquad \begin{array}{r} 56 \\ 10 \\ +\ 82 \\ \hline 148 \end{array}$$

3. 試解下列的除法密碼算術題：

$$\begin{array}{ccc|cccccc} & & & & & & * & 5 & 3 \\ \cline{4-9} * & * & 9 & 6 & * & 8 & * & * & * \\ & & & * & * & * & 2 & & \\ \cline{4-9} & & & & * & 9 & * & * & \\ & & & & * & * & 4 & * & \\ \cline{4-9} & & & & & * & * & 4 & * \\ & & & & & * & * & * & * \\ \cline{6-9} & & & & & & & & 0 \end{array}$$

解法：

1°首先，將各「*」重新命名為 a，b，c，…，u，v，w 使得解題過程較易進行。

```
            a  5  3   ………第 1 行
b  c  9 )6  d  8  e  f  g   ………第 2 行
         h  i  j  2         ………第 3 行
         ----------------
            k  9  l  m      ………第 4 行
            n  o  4  p      ………第 5 行
         ----------------
               q  r  4  s   ………第 6 行
               t  u  v  w   ………第 7 行
               ----------
                        0
```

2°盯住第 7 行，3×（bc9）得到此行依乘法過程知 w＝7（3×9＝27）進 2 到上一位，所以 c 必須為 4 使 3×（bc7）下一步驟的過程產生 4 即 v＝4，且由 w＝7 得 s＝7，g＝7。

3°盯住第 5 行，5×(bc9)得到此行，知 p＝5，且由 m－5＝4 知 m＝9 故第 2 行中的 f＝m＝9；於是我們得到如下的算式：

```
            a  5  3   ………第 1 行
b  4  9 )6  d  8  e  9  7   ………第 2 行
         h  i  j  2         ………第 3 行
         ----------------
            k  9  l  9      ………第 4 行
            n  o  4  5      ………第 5 行
         ----------------
               q  r  4  7   ………第 6 行
               t  u  4  7   ………第 7 行
               ----------
                        0
```

4°盯住第 3 行中最右邊的 2，它是第 1 行中 a×9 的個位數，由九九乘法表知 a＝8，於是 j＝9 而得到如下的算式：

					8	5	3	………第 1 行
b	4	9)	6	d	8	e	9	7	………第 2 行
			h	i	9	2			………第 3 行
				k	9	l	9		………第 4 行
				n	o	4	5		………第 5 行
					q	r	4	7	………第 6 行
					t	u	4	7	………第 7 行
								0	

5°由上面第 1、2 行的首位數知 h＝5 或 6；如果 h＝6，則 b＝8 使得 hi92＝6792 而 no45＝4245 此時算式變成：

					8	5	3	………第 1 行
8	4	9)	6	d	8	e	9	7	………第 2 行
			6	7	9	2			………第 3 行
				k	9	l	9		………第 4 行
				4	2	4	5		………第 5 行
					q	r	4	7	………第 6 行
					t	u	4	7	………第 7 行
								0	

6°盯住第 4、5 兩行之首位 k、4，此時 k＝4，而由第 2、3 行中的 d、7 得 d＝2，被除數小於 6792 此為不合，故 5°第 2 行的首位不應為 6，故 b≠8；第三行首位 h 應為 5 而 b＝7，因此正確的算式應如下：

$$\begin{array}{cccccccccc l}
 & & & & & & & 8 & 5 & 3 & \cdots\cdots\text{第 1 行}\\ \cline{5-10}
7 & 4 & 9 & \big) & 6 & d & 8 & e & 9 & 7 & \cdots\cdots\text{第 2 行}\\
 & & & & 5 & 9 & 9 & 2 & & & \cdots\cdots\text{第 3 行}\\ \cline{5-10}
 & & & & & k & 9 & 1 & 9 & & \cdots\cdots\text{第 4 行}\\
 & & & & & 3 & 7 & 4 & 5 & & \cdots\cdots\text{第 5 行}\\ \cline{5-10}
 & & & & & & q & r & 4 & 7 & \cdots\cdots\text{第 6 行}\\
 & & & & & & 2 & 2 & 4 & 7 & \cdots\cdots\text{第 7 行}\\ \cline{7-10}
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

因此由第 6、7 兩行，得 q＝2、r＝2，進而由第 4、5 兩行得 k＝3，最後由第 1、2 行得 d＝3、e＝3。

7° 換言之，本題的被除數為 638897，除數為 749，商為 853；於是其中所有的「*」號所代表的數字完完全全可以求出來！

主題2－1：因數與倍數

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　**撰寫者：**曹博盛

二、先備知識：

（一）能理解矩形和正方形的面積公式。

（二）能熟練整數乘除的直式運算與橫式的表示。

（三）能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解

（質數<20，質因數< 20，被分解數< 100）。

三、教學目標：

（一）能理解質數的意義，並認識100以內的質數。

（二）能理解因數、倍數。

（三） 能觀察有次序的數列，並理解其規律性。

（四） 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。

（五） 能尊重他人解決數學問題的多元想法。

四、教學時間：約90分鐘（二節課）

五、教學說明：

1. 透過正方形磁磚(或紙卡)操作拼湊活動去理解質數的幾何表徵，並且能與文字表徵作連結。由觀察$n\times n$的整數表(其中n是滿足$6\le n\le 10$的整數)，去認識100以內的質數，並察覺

表中數字的規律性。

2. 透過數字表格的觀察，培養學生讀表能以有系統性的觀察，尋找數學規律性的能力。

3. 在尋找規律的活動中，會與同組的同學討論或辯論，透過這些溝通活動，培養學生尊重與欣賞別人的優點與容忍別人缺點的態度。

六、教學活動：

活動一：

活動目標：

1. 能理解質數的意義，及此概念的幾何表徵與文字表徵。

2. 培養學生讀表的觀察能力。

3. 能藉由觀察有次序的數列，發現這些數字之間的各類規律性，為未來學習等差數列奠定基礎。

活動流程：

步驟 1：教師事先將學生分組，每組人數是 3~4 人，每組都分發 100 塊正方形的磁磚或以邊長 1 公分的正方形紙卡代替。每位學生一張 A4 大小的紙張當紀錄紙(格式如下圖)。

（1）教師請每位學生利用 1 塊磁磚排出一個矩形的圖案，然

後將所排列的圖案畫在紀錄紙上。

（2）請每位學生將每個圖形的面積求法寫出來。

（3）請每位學生利用面積的等式，將面積的因數個數紀錄在紀錄紙上。

磁磚個數	排列出的圖形樣式	圖形個數	因數個數
1			
2			
3			
4			
…			

步驟 2：教師請每位學生使用 2 塊磁磚，排出一個矩形，並將它記錄起來，然後統計最多能排出幾種不同的圖形，再寫出磁磚個數的因數個數，然後全班進行紀錄結果的討論。

在此處可能有學生排出下列兩種圖形（見圖 1），此時教師應打斷全班的操作與紀錄，在黑板上畫出這兩種圖形，並提出約定：如果將一個圖形旋轉之後，會與另一個圖形一模一樣，那麼這兩個圖形將視為同一個圖形。

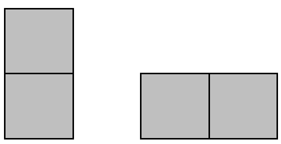


圖 1

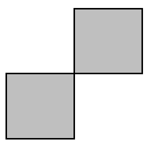


圖 2

針對圖 2 的圖形，教師宜重新修正剛才提出的工作要求：所排出的圖形中，小正方形之間一定要邊對邊完全連接在一起，換句話說，在圖 2 中，該圖形的邊並沒有完全連接在一起，只有頂點連接在一起，所以不是矩形。

步驟 3：教師請每位學生使用 3 塊磁磚，排出一個矩形，並將它記錄起來，然後統計最多能排出幾種不同的圖形，再寫出磁磚個數的因數個數，然後全班進行紀錄結果的討論。

此處若有學生排出下列圖 3 與圖 4 兩類圖形，此時教師應打斷全班的操作與紀錄，與學生討論圖 3 與圖 4 中的四個圖形是否合乎要求？(都不是矩形，所以不合乎要求。)

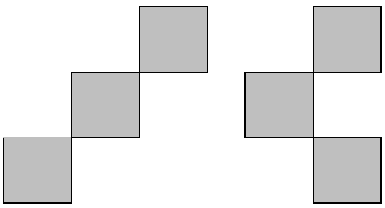


圖 3

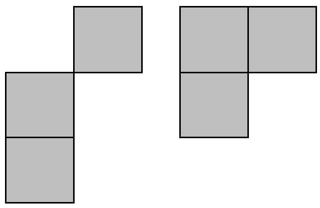


圖 4

步驟 4～12：教師請學生仿照步驟 3，依序分別使用 4~12 塊磁磚去排出矩形，並將排出的圖形樣式記錄起來。再統計看看最多能排出幾種不同的矩形，並寫出因數的個數，然後全班進行紀錄結果的討論。

步驟 13：經過前面的 12 個步驟之後，A4 的紀錄表就初步完成，

如圖 5。然後要學生觀察這表中的一些數字，有沒有發現甚麼規律或特殊的地方？

(1) 請學生觀察紀錄表(如圖 5)中，「磁磚個數」那一行的數有甚麼特點？

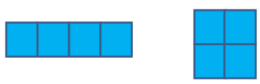
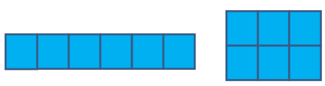
(2) 請學生觀察紀錄表(如圖 5)中，「圖形個數」那一行的數有甚麼特點？

「磁磚個數」與其對應的「圖形個數」有甚麼關係？

(3) 請學生觀察紀錄表(如圖 5)中，「因數個數」那一行的數有甚麼特點？

(4)「因數個數」與其對應的「圖形個數」有甚麼關係？

「因數個數」與其對應的「磁磚個數」有甚麼關係？

磁磚個數	排列出的圖形樣式	圖形個數	因數個數
1		1	1
2		1	2
3		1	2
4		2	3
5		1	2
6		2	4

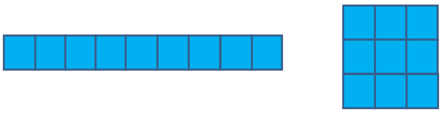
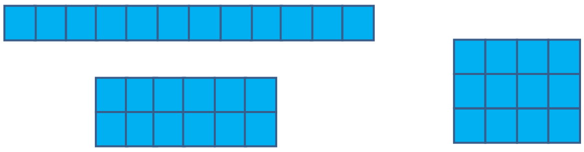
磁磚個數	排列出的圖形樣式	圖形個數	因數個數
7		1	2
8		2	4
9		2	3
10		2	4
11		1	2
12		3	6

圖 5

步驟 14：將步驟 13 所獲得的規律，再以磁磚操作的方式，驗證當磁磚塊數是超過 12 以上的數時，是否與所得的規律一致。

活動二：

活動目標：

1. 培養學生讀表的觀察能力。
2. 能觀察有次序的數列，並理解其規律性，為學習等差數列奠定基礎。

活動流程：

教師事先將學生分組，每組人數是 3~4 人，每組都分發 5 張方格紙，並在方格紙上的格子內，分別裁出 6×6、7×7、8×8、9×9、10×10 的正方形，並從 1 開始，依序在格子內填入正整數，如表 1、表 2、表 3、表 4、表 5。

步驟 1：（1）請學生觀察表 1 中，數字排列的方式有些甚麼樣的規律（建議學生可以一列一列看，然後比較列與列之間的關係；接著可以改成一行一行看，然後比較行與行之間的關係；再來讓學生自己試試其他的觀察方式，如斜著看），請學生將他所觀察到的規律紀錄下來。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

表 1

（2）各組內先一起討論每位組員所發現的規律，然後綜合起來，即為該組所得到的規律。

（3）請各組派人上台發表各組所發現的規律性，並回答其他各組學生的問題。

（4）教師將學生所發表的規律性做一講評與總結。

步驟 2：（1）請學生觀察表 2 中，數字排列的方式有些甚麼樣的規律，請學生將它紀錄下來。

（2）各組內先一起討論每位組員所發現的規律，然後綜合起來，即為該組所得到的規律。

（3）請各組派人上台發表各組所發現的規律性，並回答其他各組學生的問題。

（4）教師將學生所發表的規律性做一講評與總結。

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

表 2

步驟 3：(1) 請學生觀察表 3 中，數字排列的方式有些甚麼樣的規律，請學生將它紀錄下來。

(2) 各組內先一起討論每位組員所發現的規律，然後綜合起來，即為該組所得到的規律。

(3) 請各組派人上台發表各組所發現的規律性，並回答其他各組學生的問題。

(4) 教師將學生所發表的規律性做一講評與總結。

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

表 3

步驟4：

（1）請學生觀察表4中，數字排列的方式有些甚麼樣的規律，請學生將它紀錄下來。

（2）各組內先一起討論每位組員所發現的規律，然後綜合起來，即為該組所得到的規律。

（3）請各組派人上台發表各組所發現的規律性，並回答其他各組學生的問題。

（4）教師將學生所發表的規律性做一講評與總結。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

表4

步驟 5：(1) 請學生觀察表 5 中，數字排列的方式有些甚麼樣的規律，請學生將它紀錄下來。

(2) 各組內先一起討論每位組員所發現的規律，然後綜合起來，即為該組所得到的規律。

(3) 請各組派人上台發表各組所發現的規律性，並回答其他各組學生的問題。

(4) 教師將學生所發表的規律性做一講評與總結。

(5) 將步驟 1～5 中，所得出的總結，做出更一般性的結論。最後提醒學生保留表 5，在下一個活動中會用到。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

表 5

活動三：

活動目標：

1.介紹質數埃拉托賽尼篩法。

2.培養學生溝通的能力。

活動流程：

教師也是事先將學生分組，每組人數是 3~4 人，每人都分發一張方格紙或 A4 白紙，讓學生自行繪製並裁出 10×10 的方格紙。

步驟 1：（1）請學生先將表 5 最左邊第一格中的 1 刪去。

(2)請學生將表 5 中的 2 圈起來，再將 2 的倍數統統刪去。

(3)請學生將表 5 中的 3 圈起來，再將 3 的倍數統統刪去。

(4)請學生將表 5 中的 5 圈起來，再將 5 的倍數統統刪去。

(5)請學生將表 5 中的 7 圈起來，再將 7 的倍數統統刪去。

（6）請學生圈出表上尚未被刪去的數 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97。

當學生將步驟（1）～（6）完成之後，表 5 會變成表 6。

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

表 6

步驟 2：請學生觀察表 6，經過 5 分鐘之後

(1) 問學生在表 6 中，數字排列的方式有些甚麼樣的規律？(例如圈起來的數有甚麼特點？被刪掉的數有甚麼特點)請學生將它紀錄下來。

(2) 請學生先自行檢驗該規律是否成立。

(3) 各組內一起討論每位組員所發現的規律，然後綜合起來，即為該組所得到的規律。

(4) 請各組派人上台發表各組所發現的規律性，並回答其他各組學生的問題。

(5) 教師將學生所發表的規律性做一講評與總結。

七、指定作業：

1. 請問 100 以內共有多少個質數？最小的是哪一個數？最大的是哪一個數？
2. 模仿活動三的步驟，對表 7 依次刪除 2, 3, 5, 7, 11, 13 的倍數後，再圈選未刪除的數 101, …, 199。利用所得的表格回答下列個小題。

（1）找出 101 到 200 的正整數中，哪些是質數？

（2）100~200 共有多少個質數？最小的是哪一個數？最大的是哪一個數？

（3）檢驗在活動三中，所獲得規律性是否仍舊成立？

（4）綜合觀察與分析表 6 與圈刪後的表 7，是否有新規律？

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

表 7

3.填充題

（1）在 1, 2, 4, 7, 9, 13, 21, 37, 53, 65, 77, 97, 121, 167, 189 各數中，有哪些是質數？

答：________________________

（2）在□中填入一個可能的阿拉伯數字，使得下列各數分別成為一個質數。

① 15□　　答：________

② 1□3　　答：________

（3）比 80 小的正整數中，有哪些數與 $\frac{1}{12}$ 相乘之後，會變成一個質數？　　答：________________

指定作業參考解答：

1.25 個，2，97。

2.（1）101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199。

（2）21 個，101，199。

（3）有些規律仍舊成立，例如第 4, 第 6, 第 8, 第 10 行都不是質數；有些規律需要做修改，例如第 2, 第 5 行全部都不是質數。

有些規律不同，例如由表 6 中得知 1~100 中共有 25 個質數，由表 7 中得知 101~200 中共有 21 個質數。

（4）有，例如質數的數量似乎減少。(希望學生會自動再造更多的如表 6、表 7 的表格，去檢驗猜測的規律性是否合理，進而猜測質數的密度會越來越小，甚至會開始考慮「所有自然數中，到底有多少個質數？」這樣的問題。至於質數有無限多個的引入與證明，教師可以視學生程度考慮是否補充。)

3. （1）2，7，13，37，53，97，167。

（2）① 1，7 。② 0，1，6，7，9。

（3） 24，36，60。

八、教學注意事項：

1. 本主題各項教學活動時間：活動一約 30 分鐘，活動二約 30 分鐘，活動三約 20 分鐘，檢討指定作業約 10 分鐘。如果僅由學生自學探索，所需時間可能不只 90 分鐘。
2. 本主題的學習活動主要都是採取由學生自行探索規律，特別是有表格時，學生如去觀察、歸納資料有何規律性，感受發現與創造的喜悅。對於學生初步所得的較粗造或甚至於錯誤的結

論，能先給與包容，然後經過同學之間以及師生之間的討論、修正，以逐步達到精緻化，這些歷程都需要時間，不可能一步登天。

3. 老師採取引導的方式進行。同儕之間的討論、溝通、觀摩、辯論是常見的學習行為，老師的角色是（1）在學生遇到瓶頸時，提供必要的提示；(2)在學生離題時，適時給予學生引導；（3）在學生討論中過於吵鬧，影響到同學學習活動時，維持教室常規等協助活動。因此主要的學習責任是由學生承擔。活動一，學生須先分組，每組的人數以 3~4 人為一組。

①分發給每組的學具是 100 塊正方形的磁磚，也可以改用邊長 1 公分的正方形紙卡或者其他類似用具。另外在這個活動中，計算機(calculator)也是一個很合適的輔助學具。

②本活動中，學生的觀察焦點，一開始是單一磁磚個數對應能排成幾種不同的圖形樣式。此處可以與小學介紹矩形面積的概念連結，引出例如：

1 ＝ 1 × 1，所以 1 只有 <u>1 個因數</u>，就是 1 自己。

2 ＝ 1 × 2，所以 1, 2 都是 2 的因數，由此可得知 2 有 <u>2 個因數</u>。

3 = 1 × 3，所以 1, 3 都是 3 的因數，由此可得知 3 有 2 個因數。

4 = 1 × 4 = 2 × 2，所以 1, 2, 4 都是 4 的因數，由此可得知 4 有 3 個因數。

③步驟 1~12 都是針對每個數作個別討論，一直到步驟 13 才針對「磁磚個數」這一群數(1~12)，與「圖形個數」、「因數個數」這兩群數之間有甚麼關係，作觀察與探索。

④在步驟 13 的討論中，目的是要引入質數與合數的名稱。此外，可以引入討論為什麼定義質數時，將 1 排除掉。

4. 在活動一中，學生由實際操作與觀察歸納將發現「質數只有兩個相異的因數，合數則至少會有三個相異的因數，而 1 卻只有一個因數，與質數或合數的情況都不相同」。此外由於 1 的任何次方都是 1，若將 1 也當成質數，那麼「一個正整數的標準分解式就不唯一」，這會造成後面學習的困擾--明顯違反算術基本定理：每一個大於 1 的整數都可以唯一地分解成質數的乘積。

5. 若時間足夠，在活動一中，為加強學生思考的訓練，老師還可以問學生以下的問題：

（1）當磁磚個數是多少的時候，會使得所排列出圖形個數是奇數個？為什麼？

（2）當磁磚個數是多少的時候，會使得所排列出圖形個數是偶數個？為什麼？

（3）當磁磚個數是多少的時候，會使得所排列出圖形個數最少？為什麼？若不考慮磁磚個數是 1 的情況，對於本小題，你的答案是否相同？

6. 活動一步驟 13 的參考答案：

（1）磁磚個數那一行的數字是 1 到 12 的正整數。

（2）圖形個數那一行的數字有 6 個 1，5 個 2，1 個 3。

磁磚個數越來越多，與其對應的圖形個數似乎也越來越大，雖然有例外。

（3）因數個數那一行的數字有 1 個 1，5 個 2，2 個 3，3 個 4，1 個 6。

（4）因數個數隨著對應的磁磚個數增加，也有增加的趨勢。

除了 1 塊磚的特例以外，當圖形個數是 1 的時候，因數個數都是 2，

7. 步驟 14 可以輔導學生針對步驟 13 所得的結論，逐條檢驗，

若有不適用的結論，應嘗試去修改，得到一些適用範圍較廣的結論。

8. 活動二，要成為各組所得的規律，組員一定要先說服同組中的其他組員，經過同組所有組員的認可之後，才記錄成該組所獲得的規律。最後在步驟 5 作一般性的結論，老師視時間的多寡，可以由老師示範，如何綜合前面步驟 1~5 所做的各步驟的總結得到一般性的結論，或者是由老師指導學生做進行最後的分析歸納結論。

9. 活動三，

（1）在步驟 2 學生觀察數字排列的方式有些甚麼樣的規律，一定要涵蓋下列幾個問題：在表 6 中，

a. 正整數 1 為什麼要刪去？

b. 被圈起來的數有什麼特性？

c. 有哪幾行的數全部被刪去？為什麼？

d. 如果一列一列去看，每列最多有幾個數被圈起來？為什麼？

（2）活動三的觀察表 6 的方式，可以看成活動二活動的延伸。學生應該會逐行或逐列觀察單一一行或一列中的數

字有何特性，同時也應該觀察兩行或兩列之間的數字有何關係？

(3) 學生可能察覺到質數 5 是等於質數 2 與質數 3 的和；質數 7 是等於質數 2 與質數 5 的和；11 雖然無法寫成前面的兩個質數和，但只要容許重複使用，11 可以寫成兩個 2 與一個 7 的和；…。在學生做的例子夠多之後，老師可以問學生嘗試不用這個很特別的質數 2—唯一的一個偶數質數，而反過來嘗試拆解偶數，這就會延伸到有名的歌德巴赫猜測(Goldbach Conjecture)：是不是每個大於 5 的偶數，都可以表示成兩個奇質數的和？

10. 希望藉由從表 6 猜測質數的個數活動，到指定作業第 2 題的表 7，學生對於質數個數的猜測會延伸到（1）猜測所有自然數中質數的個數是有限到無限？（2）質數個數的出現密度（即質數個數定理，見教學參考資料 6。）

11. 在各活動間教師應行間巡視，以加強了解學生學習情形。

12. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時應給予語言的獎勵；答錯時可鼓勵並給予提示，或另請其他同學作答。若再答錯，老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 趙文敏(1981)。數論淺談。臺北市：書銘。

2. Dudley, U. (1978). Elementary Number Theory. Mineola, NY: Dover Publiication.

3. Long, C, T. (1965). Elementary Introduction to Number Theory. Boston: Heath.

4. Ireland, K. & Rosen, M. (2010). A Classical Introduction to Modern Number Theory (2nd ed.). New York: Springer-Verlag.

5. Silverman, J. H. (2006). A Friendly Introduction to Number Theory (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall.

6. 由於質數的分布不規則，因此數學家轉而探討函數$\pi(x)$的性質，$\pi(x)$是指小於 x 的質數個數，它有一個很好的性質：質數個數定理(The Prime Number Theorem) 當 x 很大的時候，小於 x 的質數個數非常接近$\dfrac{x}{\ln x}$。換句話說，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}}=1$ 。符號 $ln(x)$稱為以 $e(=2.718288188\ldots\ldots)$為底的自然對數。下表比較了$\pi(x)$與$\dfrac{x}{\ln x}$的一些值：

x	10	10^2	10^3	10^4	10^6	10^9
$\pi(x)$	4	25	168	1229	78498	50847534
$\dfrac{x}{\ln x}$	4.34	21.71	144.76	1085.74	72382.41	48254942.43
$\dfrac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$	0.921	1.151	1.161	1.132	1.084	1.054

主題 2—2：巧尋質因數（一）

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者**：李政憲
曹博盛
陳昭地

二、先備知識：

（一）熟悉九九乘法表。

（二）知道 2、5 的倍數之特徵。

（三）知道 3 的倍數之特徵。

（四）知道 0 是任意非 0 整數的倍數。

（五）已具有因數與倍數的基本概念。

三、教學目標：

（一）知道如何判定能被 2 或 5 整除的規則。

（二）知道判定能被 3 整除的規則。

（三）知道判定能被 4、25 或 9 整除的規則。

（四）知道如何用消倍法判定能被 3 或 9 整除的正整數。

（五）知道用截尾法判定能被 7 整除的規則。

四、教學時間：65 分鐘（一節半）

五、教學說明：

在正整數中除了 1 以外，質數 2、3、5 或 7 都是關鍵數字，在瞭解因數與倍數之基本概念後，就可利用一節半的時間來回憶或強化判定它們的倍數規則。

六、教學活動：

子題：2 或 5 的倍數

活動一：查看九九乘法表中，有關 2 或 5 的倍數

$2\times1=2$	$4\times1=4$	$6\times1=6$	$8\times1=8$	$5\times1=5$
$2\times2=4$	$4\times2=8$	$6\times2=12$	$8\times2=16$	$5\times2=10$
$2\times3=6$	$4\times3=12$	$6\times3=18$	$8\times3=24$	$5\times3=15$
$2\times4=8$	$4\times4=16$	$6\times4=24$	$8\times4=32$	$5\times4=20$
$2\times5=10$	$4\times5=20$	$6\times5=30$	$8\times5=40$	$5\times5=25$
$2\times6=12$	$4\times6=24$	$6\times6=36$	$8\times6=48$	$5\times6=30$
$2\times7=14$	$4\times7=28$	$6\times7=42$	$8\times7=56$	$5\times7=35$
$2\times8=16$	$4\times8=32$	$6\times8=48$	$8\times8=64$	$5\times8=40$
$2\times9=18$	$4\times9=36$	$6\times9=54$	$8\times9=72$	$5\times9=45$

步驟 1：查看上面的四欄中有 2 的倍數，可以發現九九乘法表 2 的倍數之個位數字一定是 ______________；而最後一欄中 5 的倍數之個位數字一定是 _____，這些規律對一般的正整數成立嗎？ 是◯，不是◯ （◯內打勾）

步驟 2：在 792，835，356，3890，743 五個數中，

2 的倍數有 _____________；

5 的倍數有 _____________；

2 的倍數又是 5 的倍數 _____________。

步驟 3：從上面活動一的乘法表 4 或 8 的倍數中，單看個位數字 0，2，4，6，8 無法判定一個正整數是否為 4 的倍數或 8 的倍數。

1～100 之間有多少個 4 的倍數？ ______

1～100 之間有多少個 8 的倍數？ ______

100 是不是 4 的倍數？ 是○，不是○ （○內打勾）

100 是不是 8 的倍數？ 是○，不是○ （○內打勾）

步驟 4：在 104，112，124，136，142，248 六數中

4 的倍數有 ______

8 的倍數有 ______

如果只看各數的末兩位數：4，12，24，36，42，48 哪些是 4 的倍數？______

你有什麼發現？ ______

步驟 5：在 125，150，175，200，255，365，555 七數中

25 的倍數有 ______

如果只看各數的末兩位數：25，50，75，00，65，55 哪些是 25 的倍數？______

100 是不是 25 的倍數？是○，不是○ （○內打勾）

你有什麼發現？______

步驟 6：（小結論）

（1）個位數 0，2，4，6 或 8 的正整數，一定是 2 的倍數；反之亦然。

（2）個位數 0 或 5 的正整數，一定是 5 的倍數；反之亦然。

（3）末兩位可以被 4 整除的正整數，一定是 4 的倍數；反之亦然。

（4）末兩位可以被 25 整除的正整數，一定是 25 的倍數；反之亦然。

隨堂練習 1：判定下列各數能否被 2，4，5 或 25 整除？

（1）792　（2）820　（3）825　（4）855　（5）910

子題：3 或 9 的倍數

活動二：查看九九乘法表，有關 3 或 9 的倍數：

$3\times1=3$	$6\times1=6$	$9\times1=9$
$3\times2=6$	$6\times2=12$	$9\times2=18$
$3\times3=9$	$6\times3=18$	$9\times3=27$
$3\times4=12$	$6\times4=24$	$9\times4=36$
$3\times5=15$	$6\times5=30$	$9\times5=45$
$3\times6=18$	$6\times6=36$	$9\times6=54$
$3\times7=21$	$6\times7=42$	$9\times7=63$
$3\times8=24$	$6\times8=48$	$9\times8=72$
$3\times9=27$	$6\times9=54$	$9\times9=81$

步驟 7：活動二的表中乘積結果都是 100 以內的一位數或兩位數的正整數，盯住它們的數字和恆為 ______________；它們都是 3 的倍數；單看最右表 9 的倍數，它們的數字和都是 _____，也是 9 的倍數。

利用正整數的各位數字和能否被 3 或 9 整除可以判定它們本身是否為 3 或 9 的倍數。

步驟 8：計算下面各式的結果是否符合上面的規則：

（1）3×122　（2）3×205　（3）9×122　（4）9×205

步驟 9：透過各位數字和是否為 3 或 9 的倍數可用來判定正整數是否可整除 3 或 9，利用這樣的規則，判定下列各數能否被 3 或 9 整除？

（1）129　（2）258　（3）743　（4）693　（5）792

（6）3567　（7）12369　（8）93456

步驟 10：在判斷某個正整數能否被 3 整除，當這個數位數較多或數字較複雜時，把它各位上的數字相加，判斷的速度稍慢，且易生錯；有沒有更快捷簡便的判斷方法呢？

例如，判斷下列各數能否被 3 整除：

（1）6753　（2）62139　（3）73456

（1）6753，直接略去能被 3 整除的 6，3；7 與 5 的和是 3 的倍數，所以 6753 能被 3 整除。

（2）62139，直接略去能被 3 整除的 6，3，9；2 與 1 的和是 3 的倍數，所以 62139 能被 3 整除。

（3）73456，直接略去能被 3 整除的 3，6；7，4 與 5 的和 16 不是 3 的倍數，所以 73456 不能被 3 整除。

隨堂練習 2：判定下列各數能否被 3 整除？

（1）3648　（2）7439　（3）39567　（4）54178

步驟 11：仿上面步驟 10，我們也可用棄 9 法判定某一數是否可被 9 整除：把數字加起來等於 9 的略去，而僅算其它位數字的和，例如：

（1）8463，略去 6，3；8 與 4 的和不是 9 的倍數，所以 8463 不能被 9 整除。

（2）9347，略去 9；3，4，7 的和不是 9 的倍數，所以 9347 不能被 9 整除。

（3）93672，略去 9，3，6；7 與 2 之和是 9 的倍數，所以 93672 可被 9 整除。

隨堂練習 3：判斷下列各數能否被 9 整除？

（1）333941　（2）645339　（3）726390

步驟 12：（小結論）

（1）用略去 3 的倍數 0，3，6，9 而直接計算(心算)其它位數字的和是否為 3 的倍數，可以便捷知道該數能否被 3 整除。這種方法可稱為**消倍法（或稱棄 9 法）**。

（2）用略去 9 的倍數 0，9 及和為 9 的位數，而直接計算其它位數字的和是否為 9 的倍數，可以便捷知道該數能否被 9 整除，這也是消倍法。

子題：7 的倍數

活動三：在九九乘法表中，有關 7 的倍數：

$$7\times1=7$$
$$7\times2=14$$
$$7\times3=21$$
$$7\times4=28$$
$$7\times5=35$$
$$7\times6=42$$
$$7\times7=49$$
$$7\times8=56$$
$$7\times9=63$$

步驟 13：觀察 21，42，63 三個 7 的倍數，再看 84，105，126，147，168，189 也都是 7 的倍數，21，42，63，…，189 這些數的前兩位都是個位數的 2 倍，要檢驗一個正整數能否被 7 整除，只要檢驗它尾數與前方數字的差是否能

被 7 整除就可以了，就是我們如下的截尾法：

例如：判斷 161 能否被 7 整除

$$\begin{array}{rr:ll} & 1\ \ 6 & 1 & \cdots\ \text{截掉末位數字 1} \\ -) & 2 & & \cdots\ \text{所餘剩的數 16 減去這個 1 的 2 倍} \\ \hline & 1\ \ 4 & & \end{array}$$

因為 14 能被 7 整除，所以 161 能被 7 整除。

反觀 162 就不能被 7 整除：

$$\begin{array}{rr:l} & 1\ \ 6 & 2 \\ -) & 4 & \\ \hline & 1\ \ 2 & \end{array}$$

因為 12 不能被 7 整除，所以 162 不能被 7 整除。

另如判斷 133 能否被 7 整除：

$$\begin{array}{rr:ll} & 1\ \ 3 & 3 & \cdots\ \text{截掉 3} \\ -) & 6 & & \cdots\ \text{13 減 3 的 2 倍} \\ \hline & 7 & & \end{array}$$

因為 7 能被 7 整除，所以 133 可被 7 整除。

於是我們有如下判斷 7 的倍數之**截尾法**：

把一個正整數的末位數字截掉，以所剩餘的數中減去這個末位數字的 2 倍，如果能看出這個差數是 7 的倍數，那麼原數就能被 7 整除，否則就不能被 7 整除。

再如：判斷 497 能否被 7 整除

$$\begin{array}{rr:l} & 4\ \ 9 & 7 \\ -) & 1\ \ 4 & \\ \hline & 3\ \ 5 & \end{array}$$

因為 35 能被 7 整除，所以 497 可被 7 整除。

反觀 297 就不能被 7 整除。

隨堂練習 4：用截尾法判斷下列各數能否被 7 整除？

（1）259　（2）371　（3）517　（4）583

步驟 14：如果所要判定的數，位數稍多，這種截尾法可以繼續進行下去；如判斷 42413 能否被 7 整除

解：

$$\begin{array}{rccccc}
 & 4 & 2 & 4 & 1 & 3\\
-) & & & & 6 & \\ \hline
 & 4 & 2 & 3 & 5 & \\
-) & & 1 & 0 & & \\ \hline
 & 4 & 1 & 3 & & \\
-) & & 6 & & & \\ \hline
 & 3 & 5 & & &
\end{array}$$

因為 35 能被 7 整除，所以 42413 可被 7 整除；

同法可判斷 12413 不能被 7 整除。

隨堂練習 5：判斷下列各數能否被 7 整除：

（1）5047　（2）8918　（3）18473　（4）18573

活動四：(結論)

1. 個位數字 0，2，4，6 或 8 的正整數能被 2 整除，而個位數 0 或 5 的正整數能被 5 整除。

2. 一正整數各位數字和是 3 的倍數，能被 3 整除；而各位數字和是 9 的倍數，可被 9 整除。

3. 可用消倍法便捷快速地檢驗一個正整數能否被 3 或 9 整除。

4. 可用截尾法判定一正整數能否被 7 整除。

你想不想再看看判斷能否被質數 11，13，17，19 整除的方法，請續看巧尋質因數（二）的內容。

教學活動參考解答：

活動一：

步驟 1：0，2，4，6 或 8；0 或 5；是✓。

步驟 2：792，356，3890；835，3890；3890。

步驟 3：25；12；是✓；否✓。

步驟 4：104，112，124，136，248；104，112，136，248；4，12，24，36，48；末兩位數字是 4 的倍數，原數一定是 4 的倍數（但 8 的倍數不然）。

步驟 5：125，150，175，200；25，50，75，0；是✓；末兩位數是 25 的倍數，原數一定是 25 的倍數。

隨堂練習：能被 2 整除有 792，820，910；能被 4 整除有 792，820；能被 5 整除有 820，825，855，910；能被 25 整除只有 825。

活動二：

步驟 7：3，6，9；9。

步驟 8：都符合。

步驟 9：能被 3 整除有 129，258，693，792，3567，12369 及 93456

能被 9 整除有 693，792 及 93456。

隨堂練習 2：能被 3 整除者有 3648、39567 其餘的不能被 3 整除。

隨堂練習 3：能被 9 整除者只有 726390。

活動三：

隨堂練習 4：可被 7 整除者有 259，371；不能被 7 整除者 517，583。

步驟舉例如下：

$$\begin{array}{r:l} 2\ 5 & 9 \\ -)\ \ 1\ 8 & \\ \hline 7 & \end{array}\ \checkmark \ ,\quad \begin{array}{r:l} 3\ 7 & 1 \\ -)\ \ \ \ 2 & \\ \hline 3\ 5 & \end{array}\ \checkmark \ ;$$

$$\begin{array}{r:l} 5\ 1 & 7 \\ -)\ \ 1\ 4 & \\ \hline 3\ 7 & \end{array}\ \times \ ,\quad \begin{array}{r:l} 5\ 8 & 3 \\ -)\ \ \ \ 6 & \\ \hline 5\ 2 & \end{array}\ \times$$

步驟 5: 125，150，175，200；25，50，75，0；是✓；末兩位數是 25 的倍數，原數一定是 25 的倍數。

活動二：

步驟 7：3，6，9；9。

步驟 8：都符合。

步驟 9：能被 3 整除有 129，258，693，792，3567，12369 及 93456；

能被 9 整除有 693，792 及 93456。步驟舉例如下：

$$\begin{array}{lcc|c} & 2 & 5 & 9 \\ -) & 1 & 8 & \\ \hline & & 7 & \end{array}\ \checkmark \quad , \quad \begin{array}{lcc|c} & 3 & 7 & 1 \\ -) & & 2 & \\ \hline & 3 & 5 & \end{array}\ \checkmark \quad ;$$

$$\begin{array}{lcc|c} & 5 & 1 & 7 \\ -) & 1 & 4 & \\ \hline & 3 & 7 & \end{array}\ \times \quad , \quad \begin{array}{lcc|c} & 5 & 8 & 3 \\ -) & & 6 & \\ \hline & 5 & 2 & \end{array}\ \times$$

隨堂練習 5：能被 7 整除者 5047，8918，18473；不能被 7 整除者

18573。步驟舉例如下：

$$\begin{array}{lccc|c} & 5 & 0 & 4 & 7 \\ -) & & 1 & 4 & \\ \hline & 4 & 9 & 0 & \\ -) & & & 0 & \\ \hline & 4 & 9 & & \end{array}\ \checkmark \qquad \begin{array}{lcccc|c} & 1 & 8 & 5 & 7 & 3 \\ -) & & & & 6 & \\ \hline & 1 & 8 & 5 & 1 & \\ -) & & & 2 & & \\ \hline & 1 & 8 & 3 & & \\ -) & & 6 & & & \\ \hline & 1 & 2 & & & \end{array}\ \times$$

七、指定作業：

1. 請用你的話說出一個正整數能被 3 整除的消倍法。

2. 請用你的話說出一個正整數能被 9 整除的消倍法。

3. 請寫出判斷一個正整數能否被 7 整除的截尾法。

4. 試找出下列各數的質因數：

（1）280　（2）315　（3）510　（4）980

5. 試判定下列各數能否被 7 整除：

（1）469　（2）4950　（3）5516　（4）36181

指定作業參考解答：

1. 略；2. 略；3. 略；

4. (1)2，5，7　(2)3，5，7　(3)5，3，17　(4)2，5，7(步驟略)

5. 只有 4950，36187 不能被 7 整除，其餘各數均能被 7 整除，例如：

	4	6	9
−)	1	8	
	2	8	
			✓

	4	9	5	0
−)			0	
	4	9	5	
−)	1	0		
	3	9		×

八、教學注意事項：

1. 各步驟或隨堂練習教學活動時間，引起動機約 2 分鐘，活動一約 2 分鐘，步驟 1 約 2 分鐘，步驟 2 約 2 分鐘，步驟 3 約 2 分鐘，步驟 4 約 4 分鐘，步驟 5 約 4 分鐘，步驟 6(強調(3)(4))約 5 分鐘，活動二約 2 分鐘，步驟 7 約 3 分鐘，步驟 8 約 2 分鐘，步驟 9 約 3 分鐘，步驟 10 約 3 分鐘，隨堂練習 2 約 2

分鐘，步驟 11 約 4 分鐘，步驟 12 約 2 分鐘，活動三(含步驟 3）約 8 分鐘，步驟 14 約 2 分鐘，隨堂練習 5 約 2 分鐘，活動三與指定作業(含提示）約 8 分鐘。

2. 請先預備好九九乘法表，隨時提供教學用。

3. 務必要求學生能口述判定規則；可數次指定學生口述並予以必要的訂正。

4. 本單元質因數 2，3，5 之判定，係國小數學既有知識；重點放在 3 的消倍法。

5. 9 的消倍法很重要，因為可能還會用到棄 9 法檢驗答案是否正確無慮。

6. 能被 7 整除的截尾倍率法之數學原理，請參見教學參考資料 5。

7. 能被 7 整除的截尾法，也可用在質因數 3 的身上，例如由 21，42，63，84，105，126，147，168，189 也都是 3 的倍數，仍可用如下的截尾法判斷能否被 3 整除：1221 可被 3 整除，1223 不能被 3 整除：

$$
\begin{array}{rcccc}
 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
-) & & & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & \\
 & & 0 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & & \checkmark
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
 & 1 & 2 & 2 & 3 \\
-) & & & 6 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 6 & \\
-) & 1 & 2 & & \\
\hline
 & -1 & & & \times
\end{array}
$$

8. 由 1~9 排成的任意九位數，其數字和為 45，故任意排法都可被 3 整除。其中最小者為 123456789；最大者 987654321（可提供額外的教學資源用）。
9. 能被 7 整除之截尾判定法，將來可用做判定 13，17，19，…等等質因數用;因此本單元應特別留意學生能否完全清楚快速的使用截尾判定法，來判定能否被 7 整除的正整數，其數學原理可視教學進度與學生程度加以補充(詳如教學參考資料 4)。
10. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
11. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 曹博盛(2012、2014)。因數與倍數，陳昭地主編：國民中學數學領域教材原型 A 冊。新北市：國家教育研究院。
2. A.S. Posamentier A, Jay Stepelman (1986).Teaching Secondary School Mathematics, 2nd Ed., pp.357-358(Divisibility). Columbus, OH：Merrill.
3. 能被 3 或 9 整除的判定法數學原理：

考慮五位數 $a_4a_3a_2a_1a_0$，此時

$a_4a_3a_2a_1a_0$

$=a_4\times10^4+a_3\times10^3+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$

$=(9+1)^4\times a_4+(9+1)^3\times a_3+(9+1)^2\times a_2+(9+1)\times a_1+a_0$

$=(9\times M_4+1)\times a_4+(9\times M_3+1)\times a_3+(9\times M_2+1)\times a_2+(9\times M_1+1)\times a_1+a_0$

$=9\times(M_4+M_3+M_2+M_1)+(a_4+a_3+a_2+a_1+a_0)$

其中M_4，M_3，M_2，M_1都是非負整數，故

$a_4a_3a_2a_1a_0$能被 3 或 9 整除 $\Leftrightarrow$

$(a_4+a_3+a_2+a_1+a_0)$能被 3 或 9 整除

一般情形$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0$之證法可仿上如下：

$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0$

$=9\times(M_n+M_{n-1}+\cdots+M_2+M_1)+(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0)$

故同上可得證：

$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0$能被 3 或 9 整除$\Leftrightarrow$

$(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1+a_0)$能被 3 或 9 整除

4. 能被 7 整除的截尾法數學原理：

考慮五位數$M_0=a_4a_3a_2a_1a_0$，此時

$\because a_4a_3a_2a_1a_0=a_4\times10^4+a_3\times10^3+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$

若M_0為 7 的倍數，則$M_0'=M_0-7k$ （k為正整數）亦為 7 的倍數：

令$M_0{'}=M_0-21\times a_0$，即

$$M_0{'}=a_4\times10^4+a_3\times10^3+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0-21\times a_0$$

$$=a_4\times10^4+a_3\times10^3+a_2\times10^2+(a_1-2a_0)\times10$$

$$=[a_4\times10^3+a_3\times10^2+a_2\times10+(a_1-2a_0)]\times10$$

$\because 10$不是7的倍數,故$M_1=a_4\times10^3+a_3\times10^2+a_2\times10+(a_1-2a_0)$

為7的倍數(第一次截尾)。

按此方法，可得接下來的$M_2=a_4\times10^2+a_3\times10+[a_2-2(a_1-2a_0)]$

亦為7的倍數(第二次截尾)。

依此類推，第三、四次截尾所得的算式

$M_3=a_4\times10+\{a_3-2[a_2-2(a_1-2a_0)]\}$與

$M_4=a_4-2\{a_3-2[a_2-2(a_1-2a_0)]\}$均為7的倍數（第三、四次截尾）因$a_4$、$a_3$、$a_2$、$a_1$、$a_0$均為正整數。故$M_1$、$M_2$、$M_3$均為正整數，而$M_4$必為整數；且$M_1$、$M_2$、$M_3$、$M_4$均為7的倍數（一般情形則仿照證之)。

5. 李政憲，曹博盛，陳昭地(2012)。巧尋質因數(二) ，陳昭地主編：國民中學數學領域教材原型A冊。新北市：國家教育研究院。

主題 2—3：巧尋質因數（二）

一、授課對象：國中七年級上學期學生

撰寫者：李政憲
曹博盛
陳昭地

二、先備知識：

（一）熟悉截尾法找尋質因數 7。

（二）知道 11，13，17，19 都是 20 以內的質數。

（三）知道因數與倍數的基本概念。

（四）知道 11 的倍數之特性。

（五）熟悉巧尋質因數（一）的教材內容。

三、教學目標：

（一）瞭解判定 11 的倍數~含奇偶位差法與截尾法。

（二）瞭解判定 17 的倍數~倍率 5 的截尾法。

（三）瞭解判定 13 的倍數~倍率 9 的截尾法。

（四）瞭解判定 19 的倍數~倍率 17 的截尾法。

（五）巧尋 1001 的質因數 7，11，13。

四、教學時間：65 分鐘（一節半）

五、教學說明：

承續 10 以內的質因數 2，3，5，7，本單元旨在尋找 11，13，17，19 等 20 內的質因數，可以發現它們都適用截尾法，具體方法相似但倍率不同。

六、教學活動：

子題：11 的倍數

活動一：檢視下列 11 的倍數表

$11\times1=11$	$11\times11=121$	$11\times21=231$		$11\times81=891$	$11\times91=1001$
$11\times2=22$	$11\times12=132$	$11\times22=242$		$11\times82=902$	$11\times92=1012$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
$11\times8=88$	$11\times18=198$	$11\times18=308$		$11\times88=968$	$11\times98=1078$
$11\times9=99$	$11\times19=209$	$11\times19=319$		$11\times89=979$	$11\times99=1089$

由上表可以發現乘積結果，或者偶位數字和與奇位數字和相同或相差 11。就 11 乘一位數a或乘兩位數$a\,b$可歸成如下四類：

（1）

$$\begin{array}{rcc} & 1 & 1 \\ \times & & a \\ \hline & a & a \end{array}$$

（2）

$$\begin{array}{rccc} & & 1 & 1 \\ \times & & a & b \\ \hline & & b & b \\ & a & a & \\ \hline & a & (a+b) & b \\ & & (a+b<9) & \end{array}$$

（3）

$$\begin{array}{rccc} & & 1 & 1 \\ \times & & a & b \\ \hline & & b & b \\ & a & a & \\ \hline & (a+1) & (a+b-10) & b \end{array}$$

$10\leq a+b$，$a+1<10$

（4）

$$\begin{array}{rccc} & & 1 & 1 \\ \times & & a & b \\ \hline & & b & b \\ & a & a & \\ \hline & 1\ \ 0 & (a+b-10) & b \end{array}$$

$10\leq a+b$，$a=9$

也都可以發現偶位數字和恆等於奇位數字和或相差 11，換言之，11 的倍數表呈現偶位數字和與奇位數字和相差 0 或 11，差數都是 11 的倍數。

步驟 1： 檢查看看下列 11 的乘積結果是否符合上述的規律：

(1)
$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ \times\quad 3\ 7 \\ \hline \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 1\ 1 \\ \times\quad 4\ 5 \\ \hline \end{array}$$

(3)
$$\begin{array}{r} 1\quad 1 \\ \times\quad 3\quad 8\quad 1 \\ \hline \end{array}$$

(4)
$$\begin{array}{r} 1\quad 1 \\ \times\quad 1\quad 0\quad 1 \\ \hline \end{array}$$

符合○；不符合○（在○內打勾）

步驟 2：（11 的倍數規律）

11 的倍數其奇位數字和與偶位數字和相差，恆為 11 的倍數；否則就不是 11 的倍數；例如 297，924 與 3487 都是 11 的倍數；而 298，927 與 3456 都不是 11 的倍數

其理由舉例說明如下：

$$\begin{aligned} 3487 &= 3\times1000+4\times100+8\times10+7 \\ &= 3\times(1001-1)+4\times(99+1)+8\times(11-1)+7 \\ &= 3\times1001+4\times99+8\times11+3\times(-1)+4\times1+8\times(-1)+7 \\ &= 3\times1001+4\times99+8\times11-(3-4+8-7) \end{aligned}$$

而 $3456=3\times1001+4\times99+5\times11-(3-4+5-6)$

其中 1001，99，11 都是 11 的倍數，$3-4+8-7=0$ 也是 11 的倍數而 $3-4+5-6=-2$ 不是 11 的倍數，故 3487 能

被 11 整除，即 3487 為 11 的倍數而 3456 不能被 11 整除，即 3456 不為 11 的倍數。

隨堂練習 1：利用上述方法，判斷下列各數是否能被 11 整除：

（1）561　（2）578　（3）1001　（4）1496

步驟 3：（奇偶位差法）利用一個整數的奇位數字和與偶位數和相差是否為 11 的倍數，來判斷此整數是否可被 11 整除，這個方法稱為**奇偶位差法**，如 932657 的奇位數字之和為 $7+6+3=16$ 而其偶位數字之和為 $5+2+9=16$ 這兩個和數之差為 $16-16=0$，能被 11 整除，所以 932657 能被 11 整除，而 923567 則不能被 11 整除。

隨堂練習 2：（1）請說出 923567 不能被 11 整除的理由。

（2）請判斷下列各數能否被 11 整除。

① 333　② 5555　③ 7260　④ 124267

步驟 4：（截尾法）在判斷 7 的倍數中，曾使用過如下的截尾法

$$\begin{array}{rr|l} & 2\ \ 5 & 2 \quad \cdots \ \text{截掉末位數字} \\ -) & 4 & \quad\ \ \cdots \ \text{乘上截掉數字的 2 倍} \\ \hline & 2\ \ 1 & \end{array}$$

21 能被 7 整除，故 252 能被 7 整除，252 是 7 的倍數而

$$\begin{array}{rr|l} & 2\ \ 5 & 3 \\ -) & 6 & \\ \hline & 1\ \ 9 & \end{array}$$

19 不能被 7 整除，故 253 不能被 7 整除，253 不是 7 的倍數。

由 11 的乘積倍數 11，22，33，…88，99，我們也可以用如下的截尾法來判定某一正整數是否能被 11 整除：

例如，429 是否能被 11 整除：

$$\begin{array}{rcc|c} & 4 & 2 & 9 \\ -) & & 9 & \\ \hline & 3 & 3 & \end{array}$$

… 截掉末位數字
… 截掉的數字左下移一位

33 能被 11 整除，所以 429 能被 11 整除。

又如 11429 是否能被 11 整除：

$$\begin{array}{rcccc|c} & 1 & 1 & 4 & 2 & 9 \\ -) & & & & 9 & \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 3 & \\ -) & & & & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & & \\ -) & & & 0 & & \\ \hline & 1 & 1 & & & \end{array}$$

… 第一步不好判斷再繼續作，一直到可判斷為止。

由於 11 能被 11 本身整除，又 1133 亦能被 11 整除，故 11429 能被 11 整除；反觀 430 與 11431 用截尾法都可判定不能被 11 整除。

隨堂練習 3：用截尾法判斷 65175 能被 11 整除，而 3899 不能被 11 整除。

步驟 5：（小結論）

至此，我們有兩種判定 11 倍數的方法，其中一種是奇偶位差法，另一種為截尾法，你能用你的話描述這兩種判定法嗎？

隨堂練習 4：試用兩種方法分別判斷 287 與 812834 可否能被 11 整除？

子題：17 的倍數

活動二：檢視下列 17 的倍數表

$17\times3=51$，$17\times6=102$，$17\times9=153$，$17\times12=204$，

$17\times15=255$，$17\times18=306$，$17\times21=357$，

$17\times24=408$，$17\times27=459$

你有什麼發現？

步驟 6：由上可發現 51，102，153，204，…，408，459 中，5，10，15，20，…，40，45 都是其個位數的 5 倍，於是也可用如下的截尾法來判定 17 的倍數：

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 2\ 2 & 1 \quad \cdots\ \text{截掉末位數字} \\
-) & 5 & \quad\ \ \cdots\ \text{截掉數字的 5 倍左下移} \\
\hline
 & 1\ 7 &
\end{array}
$$

17 是 17 的倍數，所以 221 能被 17 整除，221 是 17 的倍數。另如：用截尾法判定 14892 是否為 17 的倍數：

$$\begin{array}{rrrrr|r}
 & 1 & 4 & 8 & 9 & 2 \\
-) & & & 1 & 0 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 7 & 9 & \\
-) & & 4 & 5 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & &
\end{array}$$

… 還不容易判斷，繼續作下去，直到能判斷為止。

102 是 17 的 6 倍，所以 14892 為 17 的倍數；反觀 222 或 14879 都不是 17 的倍數。

隨堂練習 5：判定 238 與 1649 能否被 17 整除？

步驟 7：（小結論）請用你的話描述如何用截尾法判定 17 的倍數。

子題：13 或 19 的倍數

活動三：檢視下列 13 的倍數表

$13\times7=91$，$13\times14=182$，$13\times21=273$，$13\times28=364$，

$13\times35=455$，$13\times42=546$，$13\times39=637$，

$13\times56=728$，$13\times63=819$　　你有什麼發現？

步驟 8：由上可發現乘積結果的 91，182，273，…，728，819 中，9，18，27，…，72，81 都是其個位數的 9 倍；於是可用如下的截尾法來判定 13 的倍數：

$$\begin{array}{rrr|l}
 & 8 & 9 & 7 \\
-) & 6 & 3 & \\
\hline
 & 2 & 6 &
\end{array}$$

… 截掉末位數字

… 截掉數字的 9 倍

因為 26 是 13 的倍數，所以 897 是 13 的倍數，897 能被 13 整除。另如判斷 1001 能否被 13 整除：

$$\begin{array}{rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -) & & & 9 & \\ \hline & & & 9 & 1 \\ -) & & & 9 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

0 是 13 的倍數，所以 1001 是 13 的倍數，1001 可被 13 整除；反觀 896，1004 都不是 13 的倍數，它們都不能被 13 整除！

隨堂練習 6：試判定 4641 與 124156 能否被 13 整除。

步驟 9：檢視下列 19 的倍數表：

$19\times9=171$，$19\times18=342$，$19\times27=513$，$19\times36=684$，

$19\times45=855$，$19\times54=1026$，$19\times63=1197$，

$19\times72=1368$，$19\times81=1539$

亦可發現個位數 1，2，…，8，9，與其餘位數的關係，其餘位數恆為個位數的 17 倍；於是也可用如下的截尾法來判定 19 的倍數：

$$\begin{array}{rrrll} & 6 & 8 & 4 & \cdots\ \text{截掉末位數字} \\ -) & 6 & 8 & & \cdots\ \text{截掉數字的 17 倍} \\ \hline & & 0 & & \end{array}$$

0 能被 19 整除，故 684 能被 19 整除，684 是 19 的倍數

另如：

$$
\begin{array}{rrrl}
 & 5\ 5 & 1 & \cdots\ \text{截掉末位數字} \\
-) & 1\ 7 & & \cdots\ \text{截掉數字的 17 倍} \\
\hline
 & 3\ 8 & &
\end{array}
$$

38 能被 19 整除，故 551 能被 19 整除，551 是 19 的倍數。

再如，判定 7163 能否被 19 整除：

$$
\begin{array}{rrr}
 & 7\ 1\ 6 & 3 \\
-) & 5\ 1 & \\
\hline
 & 6\ 6 & 5 \\
-) & 8\ 5 & \\
\hline
 & -1\ 9 &
\end{array}
$$

－19 能被 19 整除，所以 7163 能被 19 整除，7163 是 19 的倍數。

反觀 552 及 7162 都不能被 19 整除，它們都不是 19 的倍數。

隨堂練習 7：判定 1501 與 7263 能否被 19 整除

活動四：（結論）至此我們發現不僅是 7，另外 11，13，17，19 等質數之倍數也都可用截尾法來判斷，只不過其倍率有所差別而已！其截尾倍率如下表：

質數	3	7	11	13	17	19
倍數	2	2	1	9	5	17

隨堂練習 8：利用上表求得 3003 的質因數分解 __________。

教學活動參考解答：

活動一：

步驟1：(1) 407　(2) 495　(3) 4191　(4) 1111；符合✓

隨堂練習1：除了578以外，其餘561，1001，1496都能被11整除。

隨堂練習2：(1) 略 (3) 除了333外，其餘都可被11整除。

隨堂練習3：略。

隨堂練習4：287不能被11整除，812834能被11整除。

活動二：

隨堂練習5：238與1649都能被17整除。

步驟7：要指出關鍵性的5倍之倍率。

活動三：

隨堂練習6：4641能被13整除，124156不能被13整除。

隨堂練習7：1501能被19整除，7263不能被19整除。

活動四：

隨堂練習8：$3003=3\times7\times11\times13$ 。

七、指定作業：

1. 下列各數，哪些數含有3，7，11，13，17，19的質因數？

(1) 323 (2) 361 (3) 391 (4) 924 (5) 1001 (6) 323323

2. 請觀察下列二位數加法：

$$\begin{array}{r} 12 \\ +\ 21 \\ \hline 33 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ +\ 23 \\ \hline 55 \end{array} \quad \begin{array}{r} 71 \\ +\ 17 \\ \hline 88 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ +\ 65 \\ \hline 121 \end{array} \quad \begin{array}{r} 74 \\ +\ 47 \\ \hline 121 \end{array} \quad \begin{array}{r} 85 \\ +\ 58 \\ \hline 143 \end{array}$$

你發現它們的結果都是哪一個質數的倍數呢？為什麼？

3. 由 2、3、4、5 四個不同的數字排成四位數，能被 11 整除者，何者最大？何者最小？

指定作業解答：

1. （1）$323=17\times19$　（2）$361=19\times19$　（3）$391=17\times23$

（4）$924=3\times2^2\times7\times11$　（5）$1001=7\times11\times13$

（6）$323323=1001\times323=7\times11\times13\times17\times19$

2. 11；理由如下：

$$\begin{array}{cccc} & & a & b \\ + & & b & a \\ \hline & & (a+b) & (a+b) \end{array} \quad 或 \quad \begin{array}{cccc} & & a & b \\ + & & b & a \\ \hline & 1 & (a+b-9) & (a+b-10) \end{array}$$

其中 $a+b=a+b$ 或 $1+(a+b-10)=a+b-9$ 或

$$ab+ba=(10a+b)+(10b+a)=11(a+b)$$

故它們的結果都是 11 的倍數。

3. 能被 11 整除者計有：2354、2453；3245、3542；4235、4532；5324、5423 共八個；最大者 5423，最小者 2354。

八、教學注意事項：

1. 教學活動時間安排如下提議，提供 1 節半教學參考，活動一約 5 分鐘，步驟 1 約 2 分鐘，步驟 2 及隨堂練習 1 約 6 分鐘，步驟 3 及隨堂練習 2 約 6 分鐘，步驟 4 及隨堂練習 3 約 6 分鐘，步驟 5 及隨堂練習 4 約 5 分鐘，活動二約 2 分鐘，步驟 6 及步驟 7 共約 6 分鐘，活動三約 2 分鐘，步驟 8 及隨堂練習 6 約 6 分鐘，步驟 9 約 8 分鐘，活動四及隨堂練習約 6 分鐘，指定作業（含提示）約 5 分鐘。
2. 課前應交代學生複習找尋質因數 7 之截尾法及其倍率 2。
3. 課文內的乘法倍數表須作預備，期待與學生共同發現截尾法及其倍率，以便能正確應用。
4. 截尾法的共同特徵為減掉 7，11，13，17，19 等質因數的倍數，判斷剩下來的數是否為其倍數！一次作完不便判斷時，再續作一次直到能順利判斷為止；因此，步驟次數可因學生的個別能力來定多一次或少一次步驟，無關緊要。
5. 尋找 2、5 以外質因數的通則：

質數 $n\rightarrow$ 個位數是 1 的最小倍數 $a1$ 或 $ab1\rightarrow$ 倍率就為 a 或 ab

如：7→21→倍率 2；11→11→倍率 1

13→91→倍率 9；17→51→倍率 5

19→171→倍率 17；23→161→倍率 16

37→111→倍率 11；47→141→倍率 14

6. 不同的質數之截尾法倍率可能會不同，初學者一定會不太熟悉出錯，務必耐心謹慎學習，習慣了自然沒問題，或許提供如課文結尾的倍率表是好的主意。

7. 作業 2. 對三位數與倒過來的三位數相加中，其結果不一定是 11 的倍數，例如$123+321=441$不是 11 的倍數，但對偶位數則是正確，其理由為：

$$abcd + dcba = 1001(a+d) + 110(b+c)$$

$$= 11[91(a+d) + 10(b+c)]$$

8. 可當作類似作業 3 的挑戰題：由 1，2，…，9 九個非 0 的數字排成的九位數，能被 11 整除者何者最大？何者最小？（最大者 987652413；最小者 123475869）

9. 鼓勵學生自己擬題：例如欲判定能被 31 整除的原數，設計成 31 的 83 倍，79 倍，101 倍…等等，以熟練倍率 3 的截尾法為目標。

10. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

11. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 曹博盛（2012、2014）。因數與倍數，陳昭地主編：國民中學數學領域教材原型 A 冊。新北市：國家教育研究院。

2. 李政憲，曹博盛，陳昭地（2012、2014）。巧尋質因數（一），陳昭地主編：國民中學數學領域教材原型。新北市：國家教育研究院。

3. A.S. Posamentier A, Jay Stepelman (1986). Teaching Secondary School Mathematics, 2nd Ed., pp.357-358 (Divisibility). Columbus, OH：Merrill.

4. 利用 $1000=10^3=2^3\times5^3=8\times125$

可知正整數 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0$ 能被 8 或 125 整除之充要條件為其末三位數 $a_2a_1a_0$ 能被 8 或 125 整除，同此，31040 能被 8 整除，31250 能被 125 整除，而 31068 不能被 8 整除，31005 不能被 125 整除。

5. 20 以上 50 以內的質因數 23，29，31，37，41，43，47 之判

定也都可用截尾法，其倍率如下表：

質數	23	29	31	37	41	43	47
倍率	16	26	3	11	4	30	14

當倍率超過原質數的一半時，如 13 之倍率 9，23 之倍率 16，29 之倍率 26 等，可採用如下的補數來計算。

如下判定 299 是否能被 13 整除：

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2\ 9 & 9 \quad \cdots \text{ 截掉末位數字} \\
+) & 3\ 6 & \quad\ \ \cdots \text{ 加上數字末位數的 4 倍向左下移} \\
\hline
 & 6\ 5 &
\end{array}$$

因為 65 能被 13 整除，所以 299 能被 13 整除，

其理由為：$299\times4=(290+9)\times4$

$=29\times40+9\times4$

$=29\times(39+1)+9\times4$

$=29\times39+29+9\times4$

$=29\times13\times3+(29+9\times4)$

前項中因 13 為因數且 13 與 4 互質，故只要檢驗$29+9\times4$能否被 13 整除就可以了！

事實在截掉個位數字 9 加上 360，相當於

$299+360-9=299+351$即$650=299+351$

原在教材內文中截掉個位數字 9 再減掉 810 得

$299-810-9=299-819=-520$；

加上的 351 與減掉 819 都是 13 的倍數，因此兩方法概念其實是一樣，惟初學者不宜同時教兩個方法，恐易造成混淆而易生錯！但對有企圖心的中高程度學生，教師可給予額外的指導，或讓學生自行發現這個加的倍率截尾法。

6. 底下分別用減法倍率與加法倍率之截尾法檢驗 124156 能否被 13 整除：

減法(倍率 9，課文內的方法)：

$$\begin{array}{rr}
 & 12415\,|\,6 \\
-) & 54 \\ \hline
 & 1236\,|\,1 \\
-) & 9 \\ \hline
 & 122\,|\,7 \\
-) & 63 \\ \hline
 & 59
\end{array}$$

因為 59 不能被 13 整除，所以 124156 不能被 13 整除。

加法(倍率 4)：

$$\begin{array}{rr}
 & 12415\,|\,6 \\
+) & 24 \\ \hline
 & 1243\,|\,9 \\
+) & 36 \\ \hline
 & 127\,|\,9 \\
+) & 36 \\ \hline
 & 16\,|\,3 \\
+) & 12 \\ \hline
 & 28
\end{array}$$

因為 28 不能被 13 整除，所以 124156 不能被 13 整除。

7. 底下分別用減法倍率與加法倍率之截尾法檢驗 323323 能否被 19 整除：

減法（倍率 17）：

$$
\begin{array}{rrrrrrr|r}
 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & & 3 \\
-) & & & & 5 & 1 & & \\
\hline
 & 3 & 2 & 2 & 8 & 1 & & \\
-) & & & 1 & 7 & & & \\
\hline
 & 3 & 2 & 1 & 1 & & & \\
-) & & 1 & 7 & & & & \\
\hline
 & 3 & 0 & 4 & & & & \\
 & 6 & 8 & & & & & \\
\hline
- & 3 & 8 & & & & &
\end{array}
$$

因為−38 能被 19 整除，所以

323323 能被 19 整除。

加法（倍率 2）：

$$
\begin{array}{rrrrrrr|r}
 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & & 3 \\
+) & & & & & 6 & & \\
\hline
 & 3 & 2 & 3 & 3 & 8 & & \\
+) & & & 1 & 6 & & & \\
\hline
 & 3 & 2 & 4 & 9 & & & \\
+) & & 1 & 8 & & & & \\
\hline
 & 3 & 4 & 2 & & & & \\
+) & & 4 & & & & & \\
\hline
 & 3 & 8 & & & & &
\end{array}
$$

因為 38 能被 19 整除，所以

323323 能被 19 整除。

8. 檢驗質因數 31 的倍數截尾法倍率 3 如下：

$31\times1=31$，$31\times2=62$，…，$31\times8=248$，$31\times9=279$

由上表截掉末位數字後，都呈現所餘位數是末位數的 3 倍，

於是可用截尾法判定 31 的倍數。

如 1457 是否能被 31 整除：

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & 1 & 4 & 5 & 7 \quad \cdots \text{ 截掉末位數字} \\
-) & & 2 & 1 & \quad\;\; \cdots \text{ 截掉數字乘 3 向左下移} \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & \quad\;\; \cdots \text{ 尚無法明顯判定；繼續進行，直到能順利判斷為止。} \\
-) & 1 & 2 & & \\
\hline
 & & 0 & &
\end{array}
$$

因為 0 能被 31 整除，所以 1457 能被 31 整除！

至於質數 37 的截尾法倍率為 11，則為下列不尋常的乘積結果：

$37\times3=111$，$37\times6=222$，$37\times9=333$，$37\times12=444$，

$37\times15=555$，$37\times18=666$，$37\times21=777$，$37\times24=888$，

$37\times27=999$

9. 利用$1001=7\times11\times13$的特殊關係，亦可採用如下統一的截尾法（只要把一個數的末三位截掉，然後求所餘下的數與這三位數的差，如果差值能被 7，11，13 整除，那麼原數就能被 7，11，13 整除；否則不然）。判斷 148473 能否被 7，11，13 整除

解：$148473\to148'473\to148-473=-325$

$$325\div13=25\cdots0$$
$$325\div7=46\cdots3$$
$$325\div11=29\ldots6$$

故 148473 能被 13 整除而不能被 7 或 11 整除

$$[148473=148000+473=148\times(1001-1)+473=148\times1001-(148-473)]$$

10. 判斷 212476 能否被 11 整除還可利用 99，9999 都能被 11 整除的原理採用如下的分節求和法：

解：$24'24'76\to21+24+76=1'21\to1+21=22$

因為 22 能整除 11，所以 212476 能被 11 整除；其理由：

$$212476=21\times9999+24\times99+(76+24+21)$$

故只要檢驗$76+24+21$能否被 11 整除就可以了！

11. 判斷是否合數的倍數方法如下：

（1）合數 6 的倍數充要條件為 2 與 3 的倍數。

（2）合數 10 的倍數充要條件為 2 與 5 的倍數。

（3）合數 12 的倍數充要條件為 3 與 4 的倍數。

（4）合數 15 的倍數充要條件為 3 與 5 的倍數。

（5）合數 18 的倍數充要條件為 2 與 9 的倍數。

（6）合數 21 的倍數充要條件為 3 與 7 的倍數。

（7）合數 24 的倍數充要條件為 3 與 8 的倍數。

（8）合數 26 的倍數充要條件為 2 與 13 的倍數。

（9）合數 28 的倍數充要條件為 4 與 7 的倍數。

⋮

（10）合數 48 的倍數充要條件為 3 與 16 的倍數。

（注：$a_n a_{n-1} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0$ 為 $16 = 2^4$ 的倍數充要條件是末四位數 $a_3 a_2 a_1 a_0$ 為 16 的倍數）

主題 2－4：最大公因數與最小公倍數

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者：**莊國彰

陳昭地

二、先備知識：

（一）知道因數與倍數的意義。

（二）能作具有 3，5，7，11 質因數分解。

（三）知道矩形面積公式。

三、教學目標：

（一）瞭解公因數、公倍數的意義及求法。

（二）瞭解最大公因數與最小公倍數之意義。

（三）瞭解已分解兩數的最大公因數與最小公倍數的求法。

（四）對已分解兩正整數 a，b 瞭解 $ab=(a,b)[a,b]$ 之關係。

（五）會用輾轉相除法求最大公因數。

（六）瞭解最大公因數與最小公倍數之簡易應用。

四、教學時間：90 分鐘（二節課）

五、教學說明：

整除與因數分解是自然數的理論上很重要的兩項概念；與本主題將針對因數成對出現公因數的原理，探討最大公因數與最小公倍數的概念與找法，對於不易分解的兩數，引入輾轉相除法來

求其最大公因數，進而探究最大公因數與最小公倍數的簡易應用。

六、教學活動：

子題：因數成對出現與公因數的意義

活動一：（發現因數成對出現的關係）

步驟 1：先看 20 的正因數：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline & \ \ 5 \end{array}$$

$$20=2\times10=2\times2\times5=2^2\times5$$

20 的正因數有：1，2，4，5，10，20

$$4^2<20<5^2$$

1，2，4＜5　；　4＜5，10，20

$20=1\times10=2\times10=4\times5$

20 共有 6 個正因數，一半（3 個）小於 5，一半（3 個）大於 4 且 1，20；2，10；4，5 成對出現。

步驟 2：再看 30 的正因數：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 30 \\ \hline 5 & 15 \\ \hline & \ \ 3 \end{array}$$

$$30=2\times15=2\times5\times3=2\times3\times5$$

30 的正因數有：1，2，3，5，6，10，15，30

$$5^2<30<6^2$$

1，2，3，5＜6　；　5＜6，10，15，30

30＝1×30＝2×15＝3×10＝5×6

30 共有 8 個正因數，一半（4 個）小於 6，一半（4 個）大於 5 且 1，30；2，15；3，10；5，6 成對出現。

步驟 3：也看 25 的正因數

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2\ 5 \\ \hline & \ 5 \end{array} \qquad 25 = 1\times 25 = 5\times 5 = 5^2$$

25 的正因數有：1，5，25

$1<5$ ， $5<25$

25 共有三個正因數，除了 5 本身以外，一個小於 5，另一個大於 5。1，25；5，5 成對出現。

同樣地，$16 = 4\times 4 = 2^4 = (2^2)^2$

16 的正因數有：1，2，4，8，16

16 共有 5 個正因數，除了 4 本身以外，有 2 個小於 4，另二個大於 4。1，16；2，8；4，4 成對出現。

步驟 4：（小結論）

（1）當正整數$m \ge 2$，m 為平方數（某一整數的平方）

設 $m = b^2 \quad (b>0)$

則 m 除了 b 的因數以外，有一半的正因數小於 b，有另一半的正因數大於 b，小、大正因數成對出現，共有奇數個正因數。

（2）當正整數$m \geq 2$，m 不為平方數(某一整數的平方)

設 $(b-1)^2 < m < b^2$

則有一半的正因數小於 b，有另一半的正因數大於 $b-1$，

小、大正因數成對出現，共有偶數個正因數。

（3）當$(b-1)^2 < m < b^2$，且小於或等於 b 的正整數中，只有 1 是 m 的因數時，則 m 一定是質數，否則為合數；例如 29、31 等都是質數；而 18、25 為合數。

隨堂練習 1：試求 64，108，79 的所有正因數。

活動二：（公因數與最大公因數的意義）

步驟 5： 20 的正因數有：1，2，4，5，10，20

30 的正因數有：1，2，3，5，6，10，15，30

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 20 & 30 \\ \hline 5 & 10 & 15 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

20 與 30 有共同的因數：1，2，5，10

當然也有共同的因數：-1，-2，-5，-10

20 與 30 有**公因數**：±1，±2，±5，±10

1，2，5，10 是正的公因數；-1，-2，-5，-10是負的公因數，只要知道正的因數就可以知道負的因數；同樣地，

公因數就是指正的公因數。

步驟 6：12 與 18 兩數的所有公因數為 1，2，3，6 其中最大的公因數 6 就稱作 12 與 18 的**最大公因數**，

記作 $\gcd(12,18)=6$ 或簡記成 $(12,18)=6$，

同樣地 $\gcd(20,30)=10$ 或簡記成 $(20,30)=10$

步驟 7：（小結論）

（1）兩整數 a，b 的最大公因數記作 $\gcd(a,b)$ 或簡記 (a,b)

（2）兩整數 a，b 的最大公因數 $\gcd(a,b)=1$ 時，即 a，b 沒有共同的質因數，稱 a，b 兩數**互質**。

例如：$(48,60)=2\times2\times3=12$，$(4,5)=1$，即 4，5 兩數互質

$$\begin{array}{r|rr}
2 & 48 & 60 \\ \hline
2 & 24 & 30 \\ \hline
3 & 12 & 15 \\ \hline
 & 4 & 5
\end{array}$$

隨堂練習 2：（1）試求 72 與 108 的最大公因數。

（2）試求 36 與 132 的最大公因數。

（3）試求 21 與 50 的最大公因數。

子題：輾轉相除法

活動三：（原理與具體實例）

步驟 8： 求兩正整數 a，b 的最大公因數，在分數化簡的工作上非常重要，經常的作法是用短除法，例如步驟 7 中求 48，60 的最大公因數解用的方法，把 48 與 60 中所有公有的質因數取出相乘，就得最大公因數 $2\times2\times3=12$ 這是求兩個數最大公因數慣用的方法。但是，並不是所有的時候，這樣作都會順利解題，例如遇到兩個較不易找質因數的數，尤其它們的因數不是常見的 2，3，5 或 11 時，麻煩就出現了！

例如：求 203 與 493 的最大公因數。

由 $493=2\times203+87$

再由 $203=2\times87+29$

$87=3\times29$

倒過來看 $(87,29)=29$

$(203,87)=(87,29)$

$(493,203)=(203,87)$

故得 $(493,203)=29$

$$\begin{array}{r@{\,}r}
 & 2 \\ \cline{2-2}
203 & \big)\,493 \\
 & 406 \\ \cline{2-2}
 & 87
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r@{\,}r}
 & 2 \\ \cline{2-2}
87 & \big)\,203 \\
 & 174 \\ \cline{2-2}
 & 29
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r@{\,}r}
 & 3 \\ \cline{2-2}
29 & \big)\,87 \\
 & 87 \\ \cline{2-2}
 & 9
\end{array}$$

再如求 36，132 的最大公因數，常用的方法：

$$
\begin{array}{r|rr}
2 & 36 & 132 \\ \hline
2 & 18 & 66 \\ \hline
3 & 9 & 33 \\ \hline
 & 3 & 11
\end{array}
$$

得最大公因數為$2\times2\times3=12$；仿上用：

$132=3\times36+24\cdots\cdots①$

$36=1\times24+12\ \ \cdots\cdots②$

$24=2\times12\qquad\quad\cdots\cdots③$

由③知 $(24,12)=12$

②知 $(36,24)=(24,12)$

①知 $(132,36)=(36,24)$

故 $(132,36)=12$

一般而言，當$a=qb+r$

b，r 的公因數必為 a 的因數

故(b,r)為 a 的因數而(b,r)為 b 的因數

得 $(b,r)\le(a,b)$

再由$a-qb=r$故 a，b 的公因數也是 r 的因數

(a,b)為 r 的因數而(a,b)又是 b 的因數

故 $(a,b)\le(b,r)$

這就是輾轉相除的原理。

步驟 9：求 203 與 493 的最大公因數，其具體的作法首先將 203，493 用三條豎線隔開，下面就是詳細的過程。

第一步：用小數 203 去除大數，把商數 2 寫在較大數的直線右方，並求得餘數 87；

2	2 0 3	4 9 3	2
	1 7 4	4 0 6	
	2 9	8 7	3
		8 7	
		0	

第二步：用餘數 87 去除剛才作為除數的 203，把商數 2 寫在較大數 203 的直線左方，並求得餘數 29。

第三步：用餘數 29 去除剛才作為除數的 87，把商數 3 寫在 87 的直線右方，並求得餘數 0。

第四步：當餘數為 0 時，就可判定餘數 0 前面的那個餘數 29，就是最大公因數。

例如：求 221 與 299 的最大公因數

解：

2	2 2 1	2 9 9	1
	1 5 6	2 2 1	
5	6 5	7 8	1
	6 5	6 5	
	0	1 3	

故得最大公因數為 13

再如：求 36 與 132 的最大公因數：

解：

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
1 & 36 & 132 & 3 \\
 & \underline{24} & \underline{108} & \\
 & 12 & 24 & 2 \\
 & & \underline{24} & \\
 & & 0 &
\end{array}
$$

故得 36 與 132 的最大公因數為 12

另如：求 127 與 54 的最大公因數：

解：

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
2 & 54 & 127 & 2 \\
 & \underline{38} & \underline{108} & \\
5 & 16 & 19 & 1 \\
 & \underline{15} & \underline{16} & \\
 & 1 & 3 & 3 \\
 & & \underline{3} & \\
 & & 0 &
\end{array}
$$

故 127 與 54 的最大公因數為 1，127 與 54 互質。

隨堂練習 3：試用輾轉相除法求下列各組數的最大公因數

（1）51 與 68　（2）533 與 697　（3） 889 與 1001

步驟 10：用輾轉相除法求兩個數的最大公因數的方法是先用小數除大數；若不能整除，就用餘數再去除小數；若仍然不能整除，就用第二次的餘數去除第一次的餘數，一直到餘數是 0 為止，這時前一個餘數就是最大公因數了。

這個方法西方人稱為歐幾里德算則，事實上中國西漢末期出版的《九章算術》一書就有有關這個算則之記載，至少比西方人提早了 600 年！

子題：最小公倍數

活動四：（最小公倍數意義與具體實例）

步驟 11：求兩個正整數的最小公倍數也是進行分式運算的重要基礎，顧名思義，最小公倍數仍是正的公有倍數中最小者，例如：求 40 與 30 的最小公倍數

$$\begin{array}{r|cc} 2 & 40 & 30 \\ \hline 5 & 20 & 15 \\ \hline & 4 & 3 \end{array}$$

所以把 40 與 30 中所有公有的質因數取出，再把各個單獨的因數也取出一起相乘，就得到最小公倍數$2\times5\times4\times3=120$

實際上，這裡也有一個最小公倍數的巧妙求法：

$$\begin{array}{r|cc} 2 & 40 & 30 \\ \hline 5 & 20 & 15 \\ \hline & 4 & 3 \end{array}$$

看上式交叉相乘的型式，40 與 30 的最小公倍數為$40\times3=120$或$30\times4=120$，其道理如下：

$120=2\times5\times4\times3$　　；　　$120=2\times5\times4\times3$

$=（2\times5\times4）\times3$　　　　$=（2\times5\times3）\times4$

$=40\times3$　　　　$=30\times4$

步驟 12：對於已完全分解的兩數，如 20，30：

$$20 = 2^2 \times 5 \qquad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 20 & 30 \\ \hline 5 & 10 & 15 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

其最大公因數為 $2 \times 5 = 10$

其最小公倍數為 $2 \times 5 \times 2 \times 3 = 60$

最大公因數與最小公倍數的乘積等於原來兩數的乘積

因此得兩正整數 a、b，恆有 $a \times b = (a,b) \times [a,b]$

即：$[a,b] = \dfrac{a \times b}{(a,b)}$，其中 $[a,b]$ 為最小公倍數 $\mathrm{lcm}[a,b]$ 之簡寫。

換句話說，從輾轉相除法間接地可用來求最小公倍數。

例如：求 64，48 的最小公倍數

解法一：

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 64 & 48 \\ \hline 2 & 32 & 24 \\ \hline 2 & 16 & 12 \\ \hline 2 & 8 & 6 \\ \hline & 4 & 3 \end{array}$$

最小公倍數為 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 4 \times 3 = 192$

解法二：64 與 48 的最大公因數是 16

$$\begin{array}{r|r|r|l} 3 & 48 & 64 & 1 \\ & \underline{48} & \underline{48} & \\ & 0 & 16 & \end{array}$$

故其最小公倍數為 $\dfrac{64 \times 48}{16} = 192$

步驟 13：三個以上的各數之最大公因數與最小公倍數之意義完全類似兩個數的情況，至於其求法如下例：

求 12，18，20 的最大公因數與最小公倍數

$$\begin{array}{r|ccc}
\text{三個共有}\rightarrow 2 & 12 & 18 & 20 \\ \hline
 & 6 & 9 & 10
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr|ccc}
\text{三個共有}\rightarrow & 2 & 12 & 18 & 20 \\ \hline
\text{二個共有}\rightarrow & 3 & 6 & 9 & 10 \\ \hline
\text{二個共有}\rightarrow & 2 & 2 & 3 & 10 \\ \hline
\text{單獨有}\rightarrow & & 1 & 3 & 5
\end{array}$$

故其最大公因數為 2，最小公倍數為$2\times3\times2\times1\times3\times5=180$

上面求最小公倍數的方法亦可採用如下方式：

$(12,18)=2\times3=6$，$(6,18)=6$，$[12,18]=36$

$$\begin{array}{r|cc}
2 & 12 & 18 \\ \hline
3 & 6 & 9 \\ \hline
 & 2 & 3
\end{array}$$

$[36,20]=180$

得$[a,b,c]=\big[[a,b],c\big]$

同樣地$(a,b,c)=\big((a,b),c\big)$，其中 a，b，c 為任意三個整數。

換言之，求三個數的最大公因數或最小公倍數可借助於兩

個數之最大公因數與最小公倍數來逐次求得，但應注意：

$a\times b\times c$ 與 $[a,b,c]\times(a,b,c)$

不再是一定相等了！

隨堂練習 4：

（1）設 $a=3$，$b=4$，$c=5$ 試檢查：

$(a,b,c)\times[a,b,c]$ 與 $a\times b\times c$ 是否相等？

（2）設 $a=12$，$b=18$，$c=20$ 試檢查：

$(a,b,c)\times[a,b,c]$ 與 $a\times b\times c$ 是否相等？

（3）試求 54，63 與 72 的最大公因數與最小公倍數。

子題： 最大公因數與最小公倍數之簡易應用

步驟 14： 假設班上要製作壁報，想將 20 公分×30 公分的長方形紙張裁剪成同樣大小的正方形紙片。請問最大正方形邊長是幾公分？

解：這是求 20 與 30 的最大公因數的問題

因 $(20,30)=10$

$$\begin{array}{r|rr} 10 & 20 & 30 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

長邊 30 公分裁剪成 3 段，短邊 20 公分裁剪成 2 段，故可剪成最大正方形邊長 100 公分的紙片。

步驟 15：假設班上要製作壁報，想利用 20 公分×30 公分的長方形紙片，拼湊成最小的大正方形紙張，請問最少用幾張？

解：這是求 20 與 30 的最小公倍數問題

因為$[20,30]=60$

$$\begin{array}{r|rr} 10 & 20 & 30 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

故這樣的正方形紙張的邊長 60 公分，至少須用 6 張的 20 公分×30 公分的長方形紙片始可併成邊長 60 公分的正方形紙張。

隨堂練習 5：（1）步驟 15 拼成後的正方形紙張面積為步驟 14 裁剪成的正方形紙片的幾倍？

（2）動一動腦筋步驟 14 與步驟 15 如何實際操作！

教學活動參考解答：

隨堂練習 1：

64：1，2，4，8，16，32，64。

108：1，2，3，4，6，9，12，18，27，36，54，108。

79：1，79。

隨堂練習 2：

（1）$2\times2\times3\times3=36$ （2）$2\times2\times3=12$。（3）1（21 與 50 互質）。

隨堂練習 3：

（1）

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
3 & 51 & 68 & 1 \\
 & 51 & 51 & \\
\cline{2-3}
 & 0 & 17 &
\end{array}
$$

$(51,68)=17$

（2）

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
3 & 533 & 697 & 1 \\
 & 492 & 533 & \\
\cline{2-3}
 & 41 & 164 & 4 \\
 & & 164 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

$(533,697)=41$

（3）

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
7 & 889 & 1001 & 1 \\
 & 784 & 889 & \\
\cline{2-3}
15 & 105 & 112 & 1 \\
 & 105 & 105 & \\
\cline{2-3}
 & 0 & 7 &
\end{array}
$$

$(889,1001)=7$

隨堂練習 4：

（1） $(3,4,5)\times[3,4,5]=1\times60=60$

$3\times4\times5=60$，此時$(3,4,5)\times[3,4,5]=3\times4\times5$

（2）$(12,18,20)=2$，$[12,18,20]=180$

$2\times180\neq12\times18\times20$，此時$(12,18,20)\times[12,18,20]\neq12\times18\times20$

（3） $(54,63,72)=9$，$[54,63,72]=9\times6\times7\times4=1512$

隨堂練習 5：（1）36 倍　（2）略。

七、指定作業：

1.試求下列各組數的最大公因數：

（1） 8，12　（2）12，66　（3）51，68　（4）23，18。

2.試求下列各組數的最大公因數：

（1） 481，299　（2）793，1027 。

3.試求下列各組數的最小公倍數：

（1）8，12　（2）12，66　（3）51，68　（4）23，18。

4.試求下列各組數的最小公倍數（可用電算器）：

（1） 481，299　（3）793，1027。

5.設 a，b 兩正整數，$(a,b)=18$，$[a,b]=720$；試求滿足這樣條件的所有 a，b $(a>b)$。

6.某一倉庫中有一百多個物件，3 個一數，5 個一數和 7 個一數，都餘下 1 件，請問這倉庫中有多少物件？

7.（1）16 公分×20 公分的長方形紙張至少可以裁剪成多少張同樣大小的正方形紙片？

（2）16 公分×20 公分的長方形紙張至少須用幾張可拼湊成一張大的正方形紙張？

指定作業參考解答：

1.（1）$(8,12)=4$，（2）$(12,66)=6$，（3）$(51,68)=17$（4） $(23,18)=1$

2. $(299,481)=13$　　　　$(793,1027)=13$

1	299	481	1
	182	299	
1	117	182	1
	65	117	
4	52	65	1
	52	52	
	0	13	

3	793	1027	1
	702	793	
1	91	234	2
	52	182	
3	39	52	1
	39	39	
	0	13	

3.（1）$[8,12]=24$，（2）$[12,66]=132$，（3）$[51,68]=204$

（4）$[23,18]=414$。

4.（1） $[481,299]=11063$，（2）$[793,1027]=62647$

5. $a=720$，$b=18$ 或 $a=144$，$b=90$（共兩組解）

6. 由$[3,5,7]=105$，故物件共有 106 件。

7.（1）$(16,20)=4$，可裁剪成 20 張邊長 4 公分的正方形。

$$\begin{array}{r|cc} 4 & 16 & 20 \\ \hline & 4 & 5 \end{array}$$

（2）$[16,20]=80$，至少須用 20 張始可併成邊長 80 公分的正方形。

八、教學注意事項：

1. 教學時間建議，引起動機(含教學說明)約 3 分鐘，步驟 1、2、

3 共約 12 分鐘，步驟 4 及隨堂練習 1 約 10 分鐘，步驟 5、6 及隨堂練習 2 約 12 分鐘,步驟 7 約 3 分鐘,步驟 8 約 8 分鐘, 步驟 9 (含隨堂練習 3)約 8 分鐘，步驟 10 約 4 分鐘，步驟 11、12 約 8 分鐘,步驟 13(含隨堂練習 4)約 8 分鐘,步驟 14、15(含隨堂練習 5)約 10 分鐘，指定作業(含提示)約 4 分鐘。

2. 最大公因數與最小公倍數的符號易與坐標相混，使用時應特別小心。
3. 對任意兩正整數 a、b；$a\times b=(a,b)\times[a,b]$恆成立，但這個等式無法推廣到三個數的情形。
4. 由已知正整數 a、b,求(a,b)、$[a,b]$都僅有一個解;但已知(a,b)及$[a,b]$時，則 a、b 常有多於一組解的情形。
5. 在指定作業 6 中，如果有 200 多個物件時，則答案為 $105\times2+1=211$件。
6. 本單元提供的輾轉相除法求最大公因數的方法，其演算法為資訊融入數學的絕佳題材，教師務必讓學生熟練其演算規則，縱然理論不熟悉也無妨，將來學習高中數學教材時還有運用的機會。
7. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

8. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 李政豐(2012)。輾轉相除法與大衍求一術，國家教育研究數學領域教材原型研發編輯計畫報告。新北市：國家教育研究院。
2. J.H. Silverman (2006). A Friendly Introduction to Number Theory (3rd Ed.), Upper Saddle Rivor, NJ：Preason Prenticehall.（高立圖書有限公司代行。http://www.gau-lih.com.tw）

3. 已知正整數 a，b

則由輾轉相除法可知：存在整數 x，y 使 $ax+by=(a,b)$

事實上在所有 $ax+by$ 能表達的正整數中，就以最大公因數 (a,b) 為最小，即 $ax+by$ 的最小正整數值為 (a,b)。

主題 2—5：算術基本定理

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　　**撰寫者**：莊國彰

陳昭地

二、先備知識

（一）知道一百以內有 2，3，5，…，97 等 25 個質數。

（二）知道質因數 2，3，5，11 之判別法。

（三）能將 100 以內的合數分解成質因數的乘積。

（四）知道因數的概念。

三、教學目標：

（一）能口述算術基本定理。

（二）知道算術基本定理是可以被證明的事實。

（三）能口述歌德巴赫臆測。

（四）知道歌德巴赫臆測至今還無法給出證明，也無法提出反例。

四、教學時間：45 分鐘（一節課）

五、教學說明：

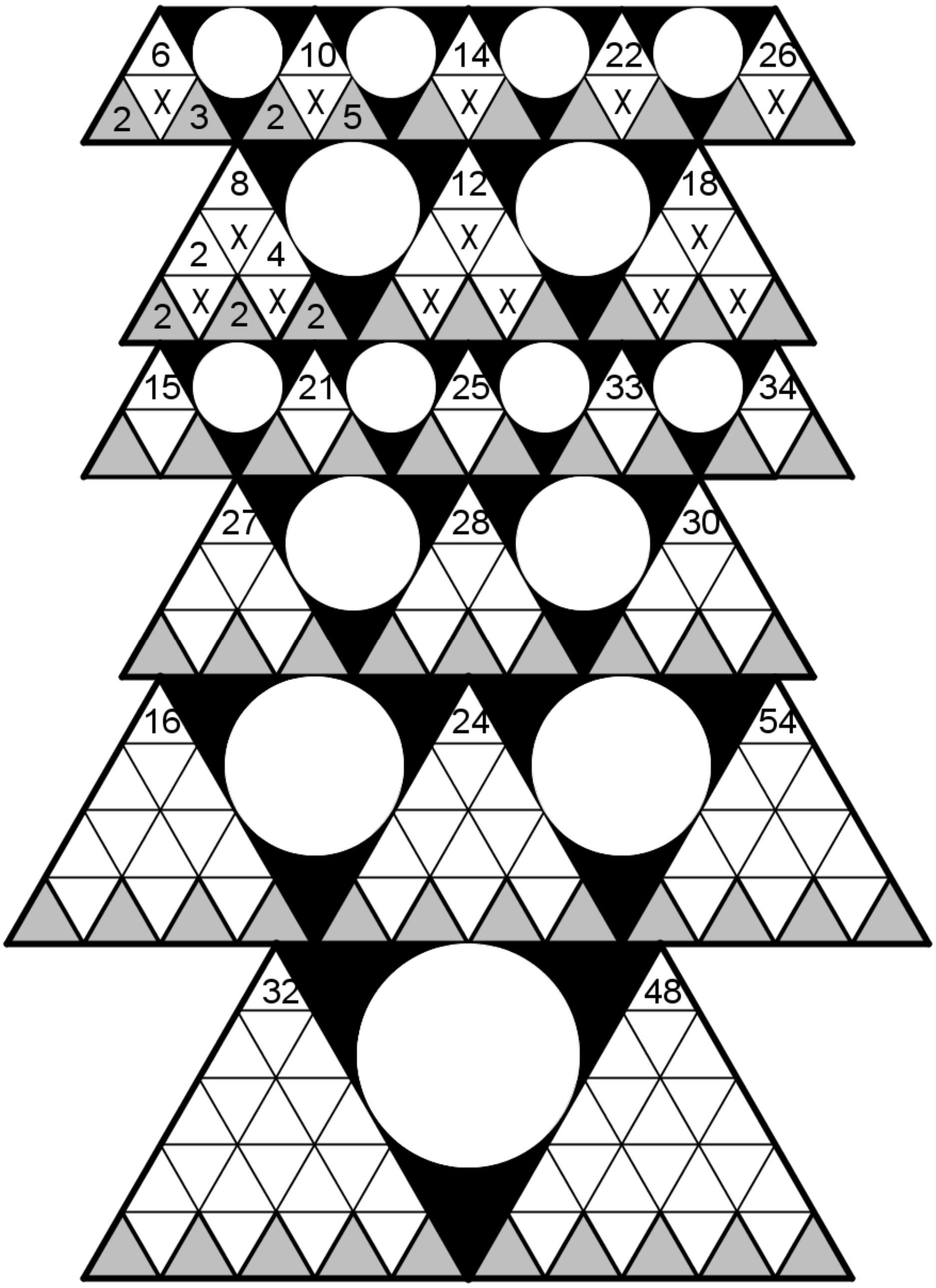
給定一個僅含 2，3，5 或 11 的質因數之自然數，不管多大，仍然可以輕易將它寫成質因數的乘積，而且乘積的寫法獨一無二（次序不同時，只要重新排序就會相同）這是算術基本定理的內

涵，本主題就是要來描述算術基本定理，這個定理之所以稱作定理表示它可以經過數學的推演得到完整的證明；但對任意大於 2 的偶數都可以拆解成兩個質數的和，特例雖然可辦到，但至今尚無法給出完整的證明，也無法找到反例，它就是赫赫有名的歌德巴赫臆測。算術基本定理和歌德巴臆測就是本主題要探索的內容。

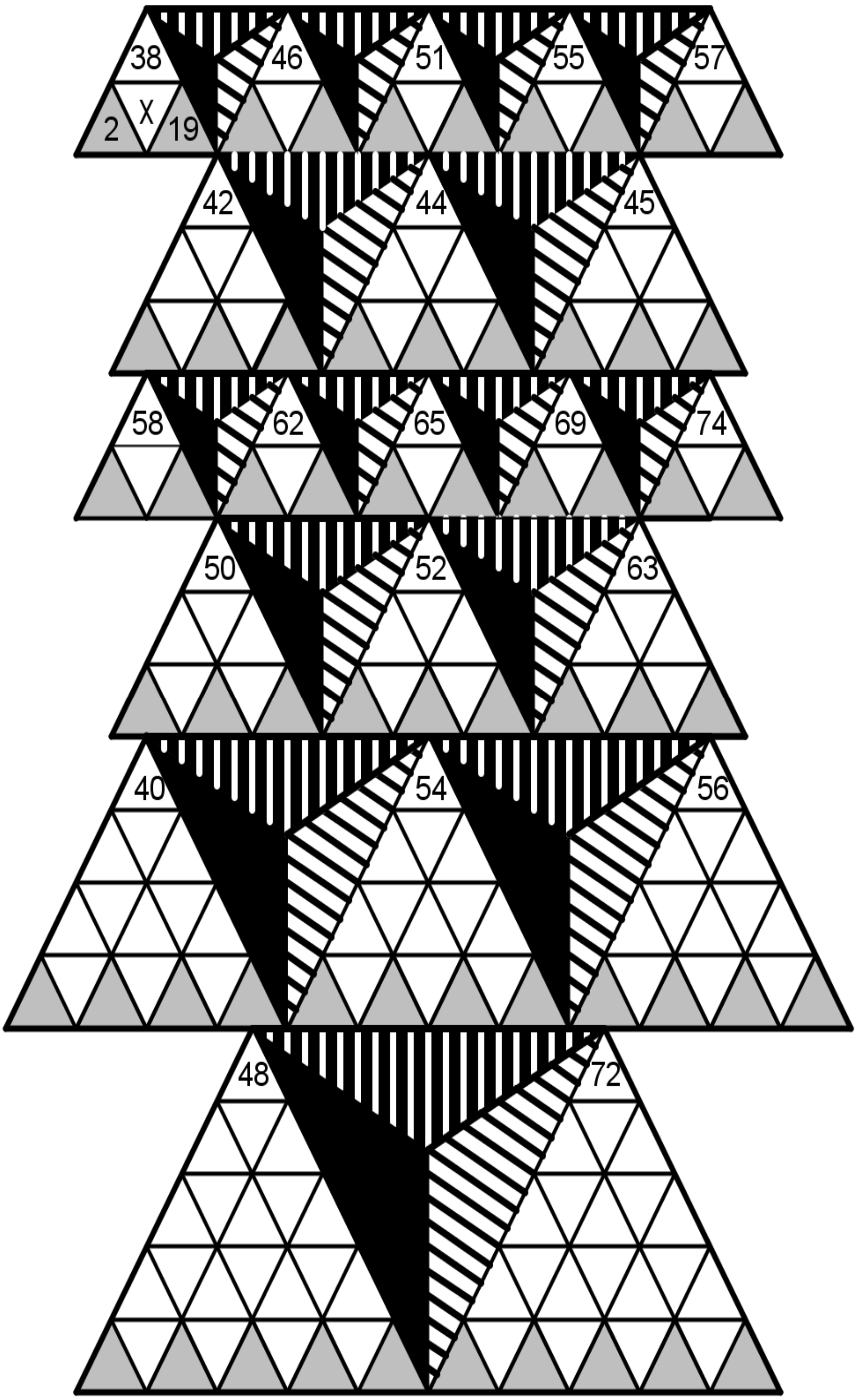
六、教學活動

子題：質因數帳篷～算術基本定理實例

活動一：在下面含有六層部分空白三角形帳篷圖案內，仿第一、二層的方式，正立的空白三角形內填上因數，倒立空白三角形填上乘「×」號，完成下表。



活動二：在下面的帳篷圖案中，仿上層左上方的38＝2×19方式，在倒立的空白三角形填上乘「×」號，在正立空白三角形填上因數，完成下表：


38
46
51
55
57
2
X
19
42
44
45
58
62
65
69
74
50
52
63
40
54
56
48
72

活動三：（結論）

從上面兩個活動共 42 個 100 以內的合數中，不僅知道它們都可以分解成質因數的乘積，而且若不考慮質因數出現的次序，它們出現的質因數是獨一無二的形式，這就是**算術基本定理：**

每一個大於或等於 2 的整數 n，能被唯一地分解質數乘積

$n = p_1 p_2 \cdots p_r$。

特別地，如$18 = 2\times3\times3 = 2\times3^2$，$40 = 2\times2\times2\times5 = 2^3\times5$，$57 = 3\times19$，$72 = 2\times2\times2\times3\times3 = 2^3\times3^2$，$\cdots$，依質因數由小而大出現的次序呈現，並且同一的質因數寫成次方的形式，就稱為**標準分解式**，如果 n 本身是質數就把 n 記成$n = n$；於是我們知道自然數中的最主要算術基本定理就是：

任一大於或等於 2 的整數 n，都可以寫成標準分解式：

$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$，$p_i$為 n 的質因數，r_1，r_2，$\cdots$，r_i為大於或等於 1 的整數。

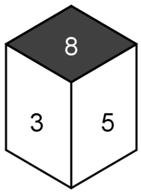
隨堂練習 1：求下列各數的標準分解式

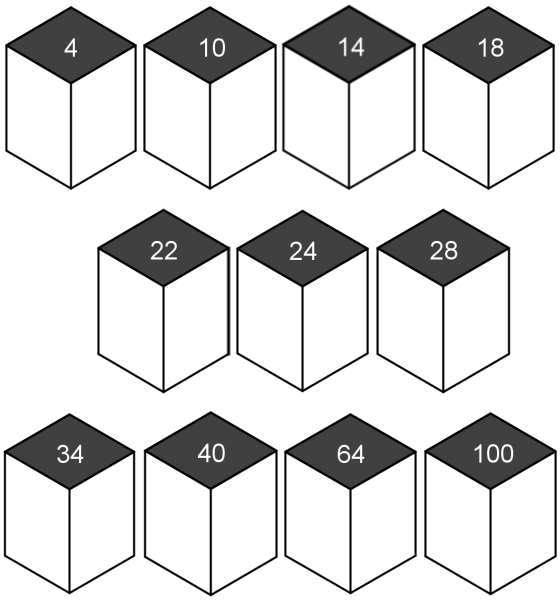
（1）55　　（2）100　　（3）180　　（4）91

子題：哥德巴赫臆測

活動四：在下面各方塊中的空白位數，填上兩個質數(可以相同)，使得其和為其上方已填上的偶數。

例如：8＝3+5故方塊中填入 3、5(或 5、3)





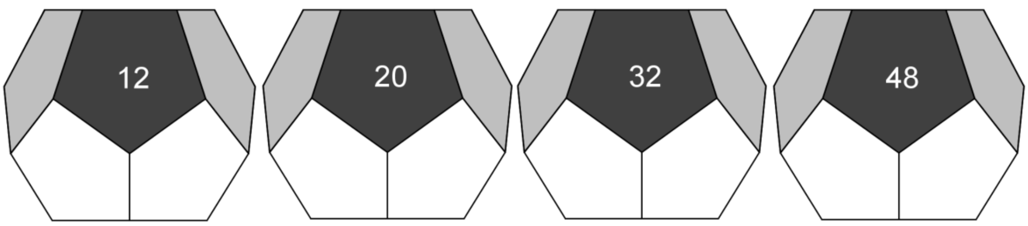
隨堂練習 2：上面最下層的最左、最右的方塊有沒有其它的填法？

活動五：(結論)

由活動四中呈現出每個大於等於 4 的偶數都是兩個質數的和，另由隨堂練習 2 知其和的表示法不唯一，這就是在 1742 年德國數學家哥德巴赫所提出至今尚未被證實也未被否定的臆測：

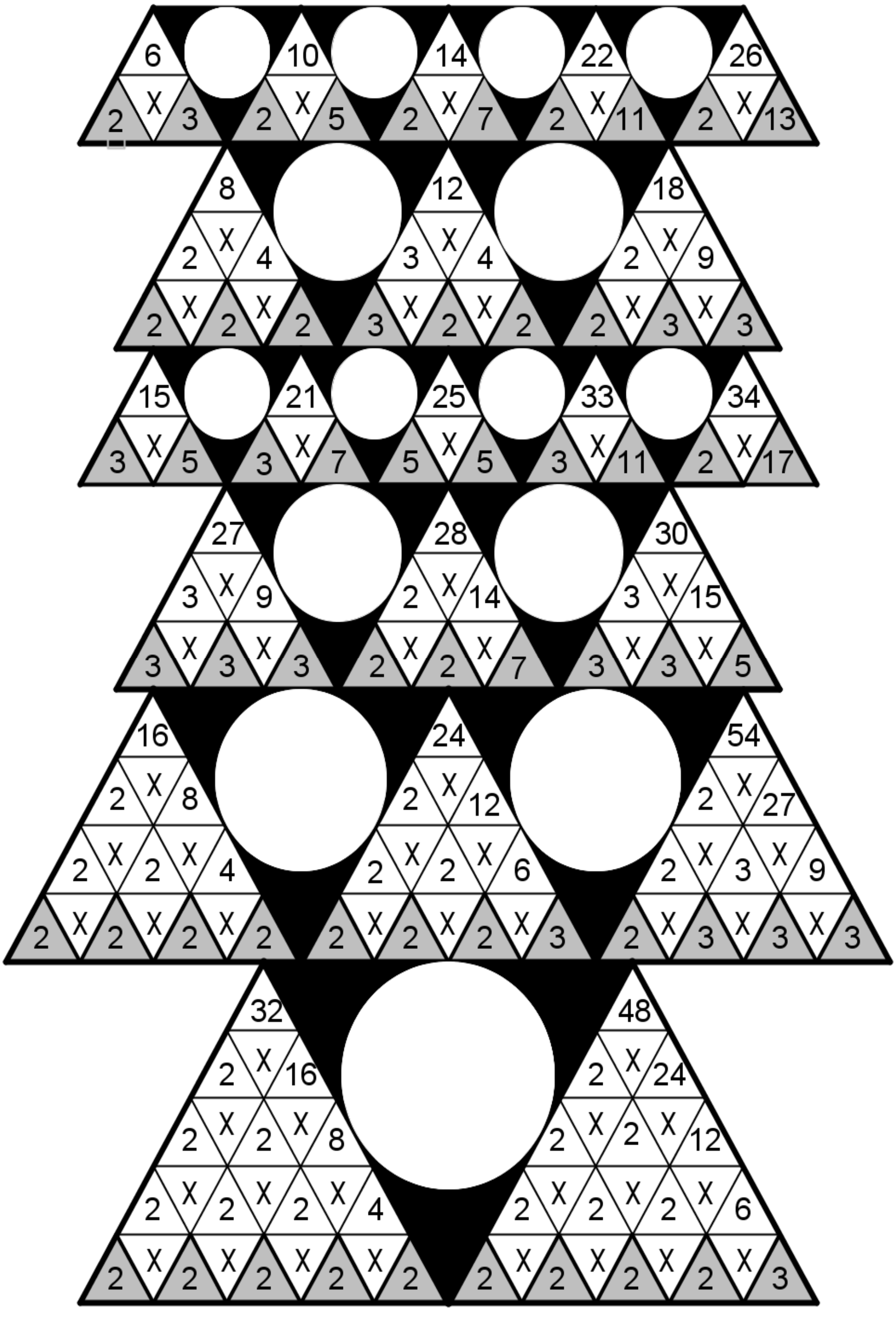
每一個大於等於 4 的偶數都可表成兩個質數的和。

隨堂練習 3：仿照活動四在下列立體方塊空白處，填兩質數使得其和為上的偶數：

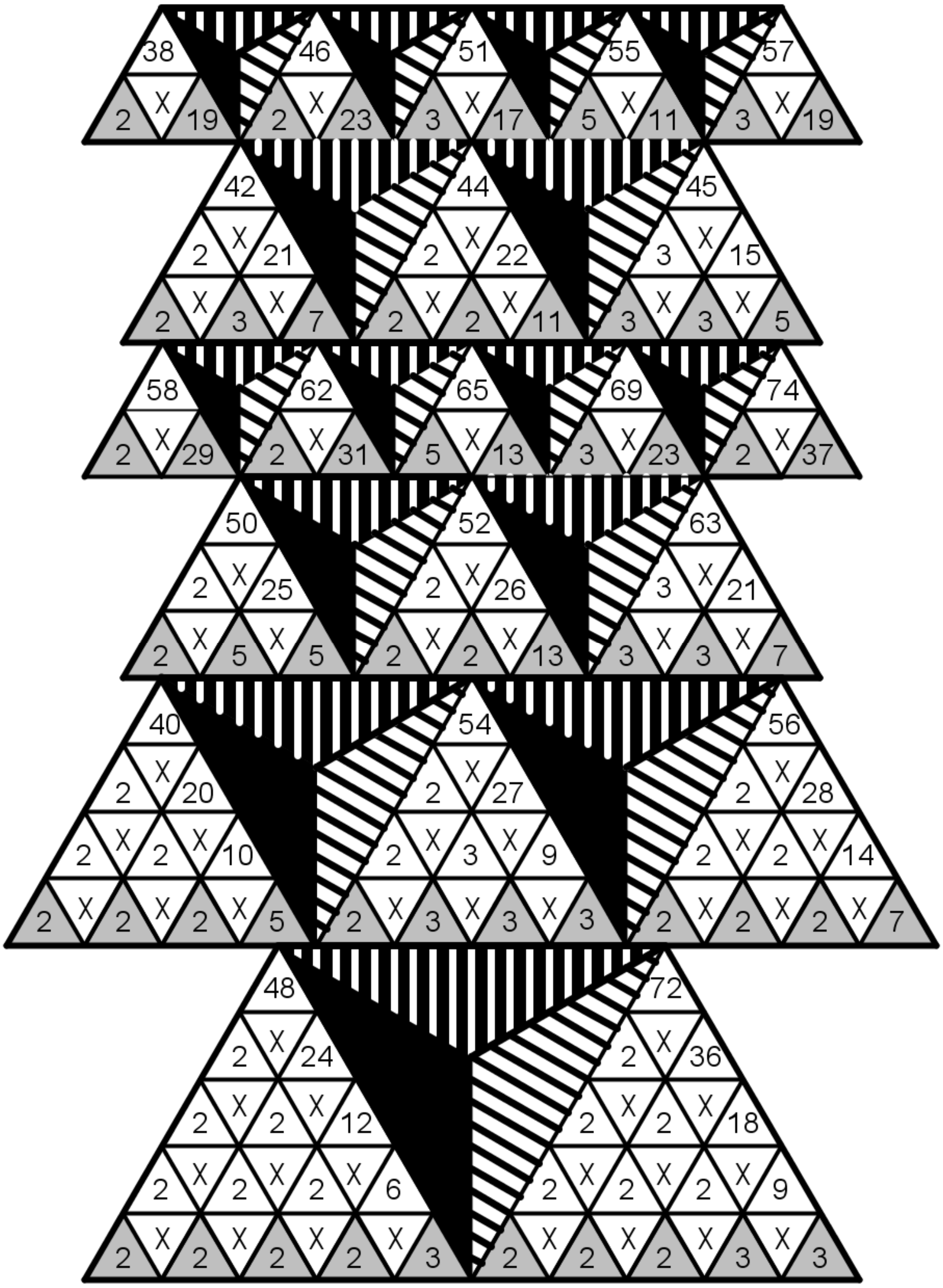


教學活動參考解答：

活動一：



活動二：



隨堂練習 1：

（1）$55 = 5 \times 11$ （2）$100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$

（3）$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ （4）$91 = 7 \times 13$

活動四：2，2；3，7(或 5，5)；3，11(或 7，7)；5，13(或 7，11)；

3，19(或 5，17)；5，19(或 7，17)；5，23(或 11，17)；

3，31(或 17，17)；3，37(或 11，29)；3，61(或 5，59)；

3，97(或 47，53)

隨堂練習 2：$34=17+17=3+31$；$100=47+53=3+97$

隨堂練習 3：$12=5+7$；$20=3+17=7+13$；$32=3+29=13+19$；

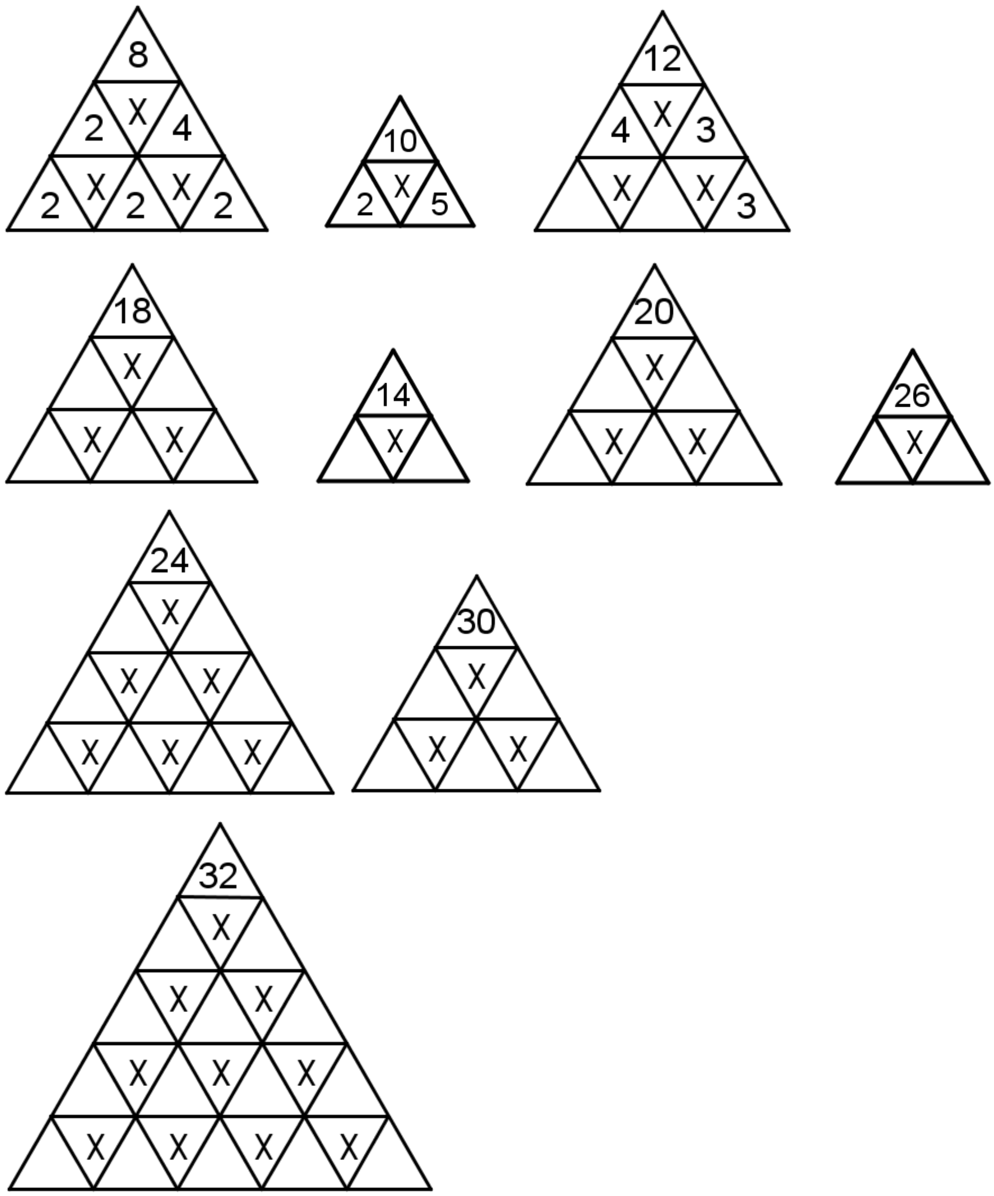
$48=7+41=11+37$

七、指定作業：

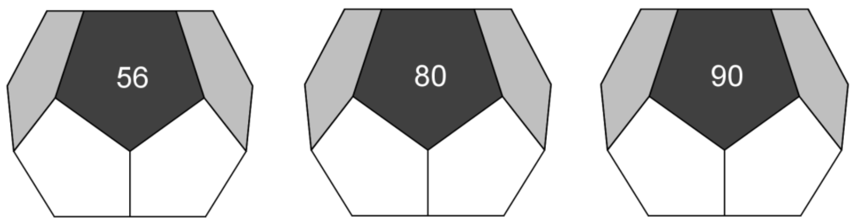
1. 下列11×11的方格中已填上 1~121 共 121 個數。請用紅筆將質數圈出來，再連連看它們會形成哪一個英文字母。

100	104	106	108	111	112	114	116	118	110	120
1	2	3	5	32	34	36	43	47	53	15
4	6	7	10	42	88	90	44	59	114	25
8	9	11	20	52	86	74	45	61	115	45
12	18	13	30	62	84	75	46	67	116	55
16	21	17	101	103	107	109	113	71	119	65
20	91	19	50	72	82	77	48	73	117	75
21	38	23	60	82	80	81	49	79	118	85
28	39	29	70	84	78	82	50	83	51	45
32	37	31	41	94	76	84	97	89	101	105
90	92	93	94	95	96	98	99	121	102	54

2. 在下面十個正三角形方格中，仿最上一行的方式填上因數。



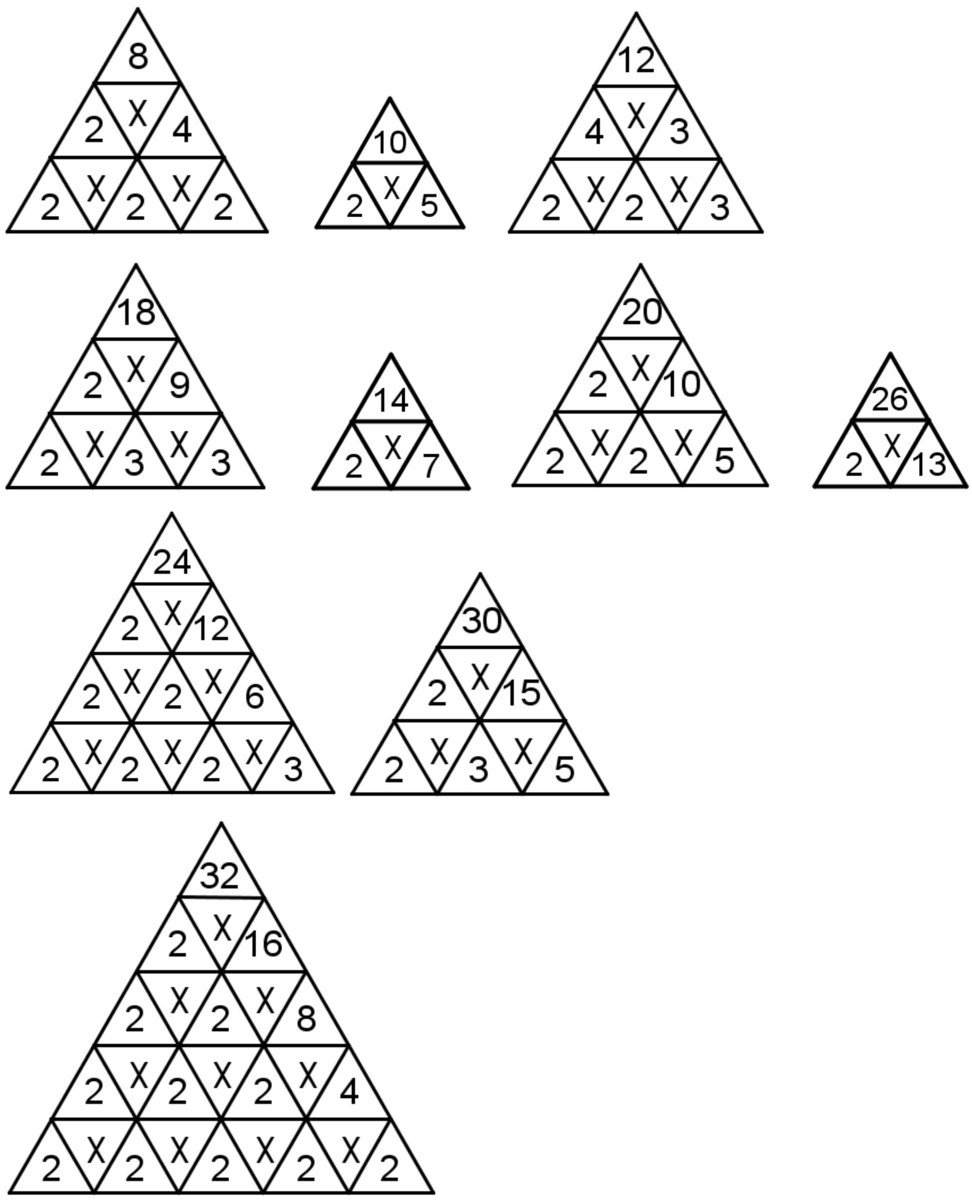
3. 將下列各立體方塊的空白處填上兩質數，使其和等於正上方的偶數。



指定作業參考解答：

1. 略(英文字母 H，共 31 個質數)，易錯之數字：91、119 都是合數。

2. 解答：



3. 解：$56 = 3 + 53 = 19 + 37$

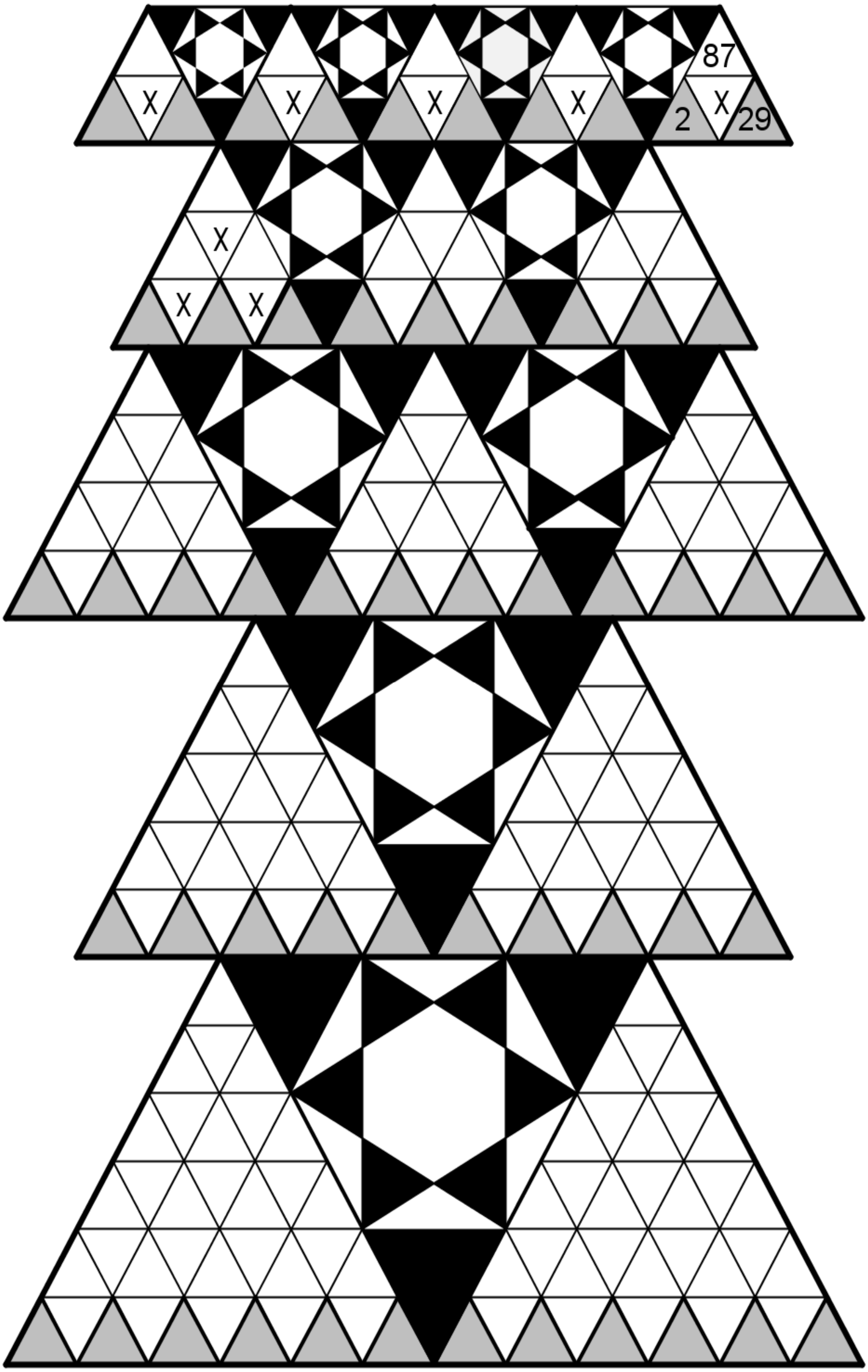
$$80 = 7 + 73 = 37 + 43$$
$$90 = 7 + 83 = 43 + 47 = 11 + 79$$

八、教學注意事項

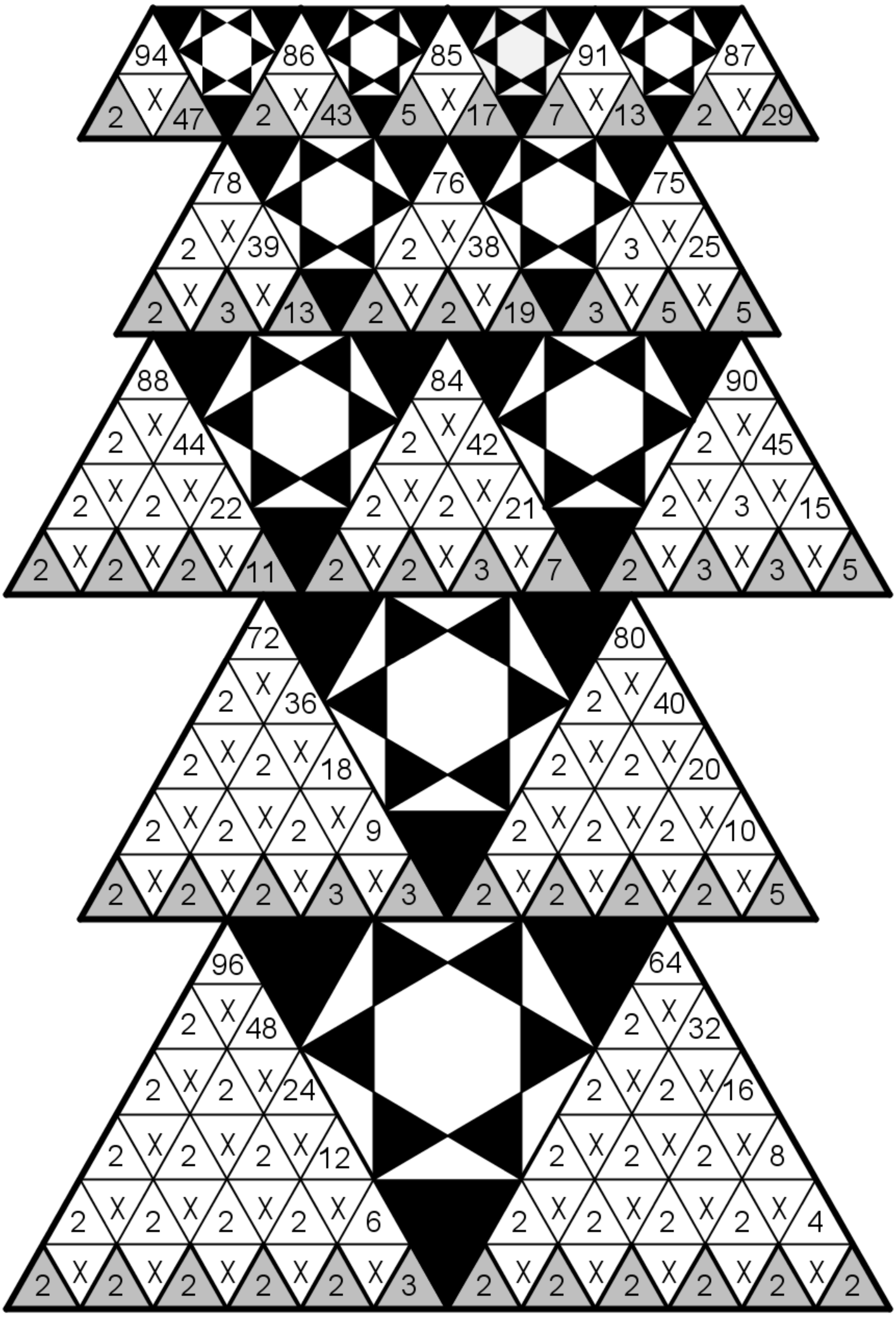
1. 教學時間建議，引起動機約 5 分鐘，活動一約 8 分鐘，活動二約 8 分鐘，活動三約 5 分鐘，隨堂練習 1 約 2 分鐘，活動四約 4 分鐘，隨堂練習 2 約 2 分鐘，活動五(含隨堂練習 3)約 4 分鐘，指定作業(含提示)約’7 分鐘。

2. 下表可供額外標準分解式之練習用。

   可提供 15 個數：64，72，75，76，78，80，84，85，86，87，88，90，91，94，96，依質因數的個數，仿右上方的方式，填入下面帳篷內空白三角形內。

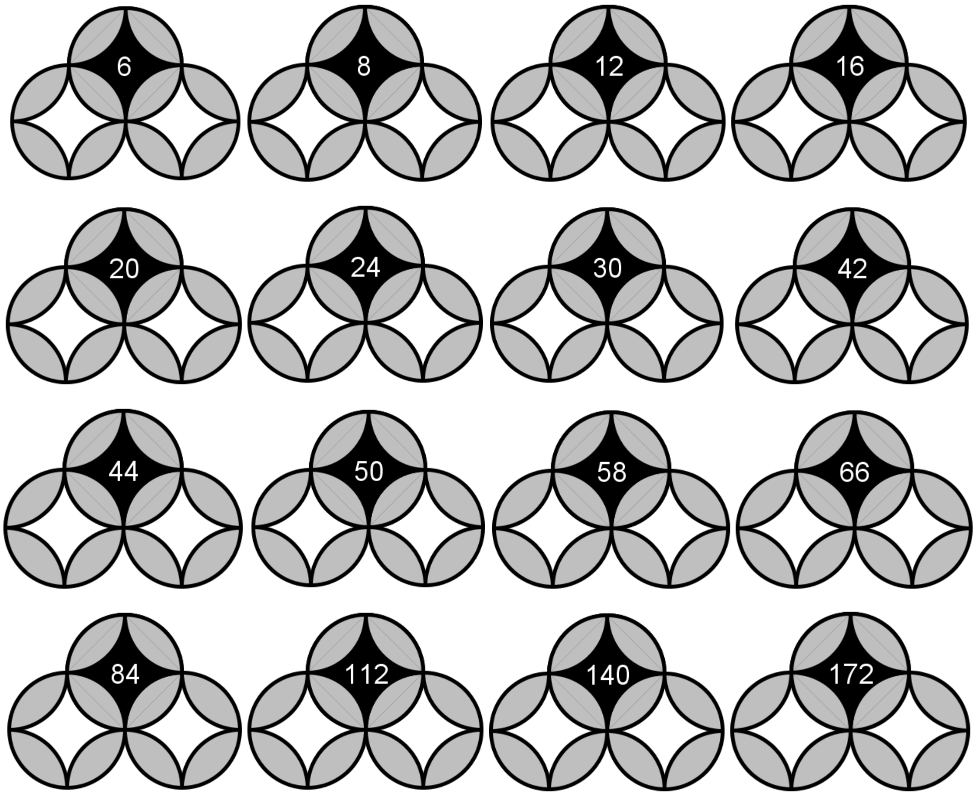

87
X
X
X
X
2
X
29
X
X
X

（2.參考解答）

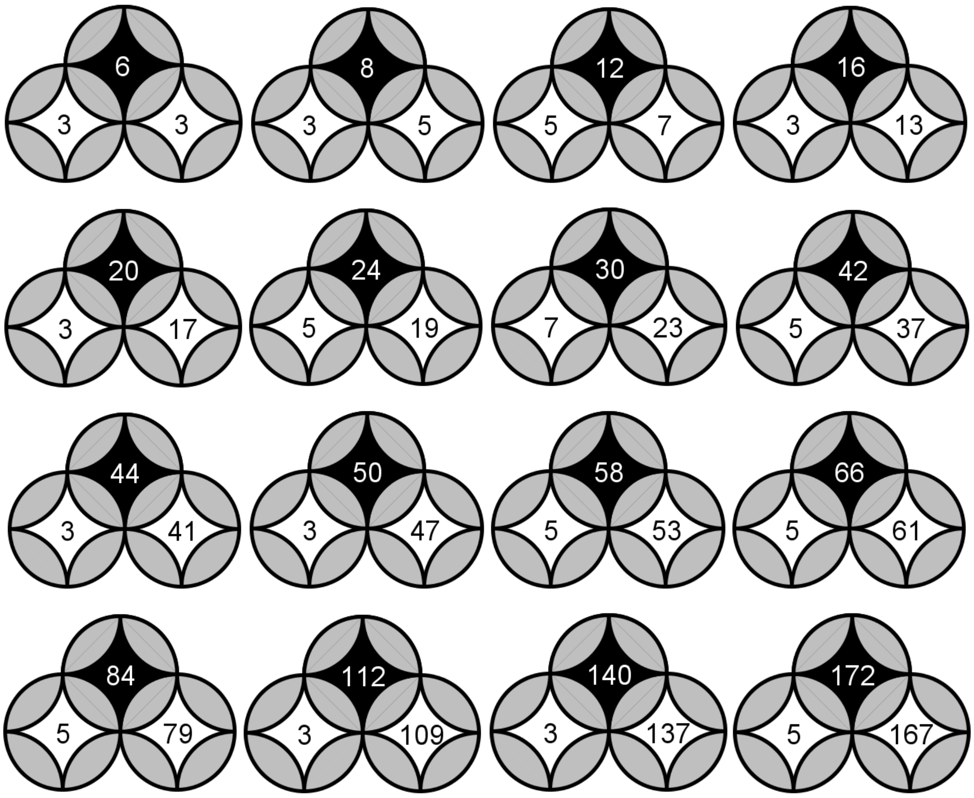


3.下表可提供歌德巴赫臆測作業用

（在各白色空格填入兩質數使得其和跟上方的偶數相等。）



（3. 參考解答，答案可能不唯一。）



4.在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

5.在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料

1.Seymour, D. et al.(1975). Aftermath Vol I-Vol IV. Leeds, UK: Creative.

2. J.H. Silverman(2006).A Friendly Introduction to Number Theory (3rd Ed.), ,Upper Saddle Rivor,NJ：Preason Prenticehall.（高立圖書有限公司代行。http://www.gau-lih.com.tw）

3.有關算術基本定理之證明：（參見參考資料[2]，第 44-50 頁）

每一個$n \geq 2$的整數，都可用唯一的方式(不考慮排序)分解成質因數的乘積：

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_r$$

證明：

（1）當 n 本身為質數時，$n = n$ 成立

（2）當 n 表成 $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_r$ 質因數乘積時，p_1，p_2，…，p_r，並不一定相異，如$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

（3）質因數出現的順序不同時，只要經重新排序相同時，

就視為相同的表示法，如：$12=2\times2\times3$，$12=2\times3\times2$，$12=3\times2\times2$都視為相同的分解法。

（4）再證下列命題：

命題①：每個$n\geq2$的合數都能用某種方法來分解。

命題②：僅有一種質因數分解表示式。

從①開始，我們用歸納法來證明：

若$n=2$、3；則由2、3都是質數，$n=2$或3成立。

若$n=4$；則$n=2\times2$，已分解成兩個相同的質數的乘積，故$n=4$亦成立。

於是$n=2$、3、4，命題①成立。

設$n=2$，3，4，…一直到N命題①已成立。

則當$n=N+1$時，若$N+1$是質數，則$n=N+1$命題①自然成立。

而當$N+1$不為質數時，則有$1<n_1$，$n_2\leq N$使

$N+1=n_1n_2$，現由$1<n_1$，$n_2\leq N$，故依假設知n_1、n_2可分解成質因數的乘積：

$n_1=p_1\cdot p_2\cdots\cdots p_r$；　$n_2=q_1\cdot q_2\cdots\cdots q_s$

於是$N+1=n_1n_2=p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_r\cdot q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_s$

可分成質因數p_1，p_2，…，p_r，q_1，q_2，…，q_s之乘積

其次證命題②：

設$n=p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_r=q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_s$為$n$的兩種質因數乘積

則由$p_1|n$，$p_1|q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_s$

故知$p_1|q_l$，$1\le l\le s$，但q_l為質數

故$p_1=q_l$，不妨設$l=1$

於是得$p_2\cdot p_3\cdot\cdots\cdot p_r=q_2\cdot q_3\cdot\cdots\cdot q_s$

如此得到$r\le s$，我們可重新排序使：

$p_1=q_1$與$p_2=q_2$與$p_3=q_3$與…與$p_r=q_s$

命題②得證。

4. 上面命題②用到：

當p為質數，a、b為整數，$p|ab$；則$p|a$或$p|b$

證明：當$p|a$時，則無需再證

設$p\nmid a$時，此時其最大公因數$(p,a)=1$

則由輾轉相除法得知存在m、n為正整數：

使得$pm+an=1 \Rightarrow pbm+abn=b$

再由$p|(pbm)$及$p|(ab)$之假設，故得$p|b$

5. 設 E 為全體偶數集合，即 $E=\{2n\mid n\in$ 正整數$\}$ 整數的加法與乘法對 E 集合具有封閉性，即 a、$b\in E \Rightarrow a+b\in E$，$ab\in E$ $\{E$；$+$，$\times\}$ 形成一交換環（Commutative Ring），在 E 中可定義整除性質；m、$n\in E$，$m\mid n$（唸作 m 整除 n）$\Leftrightarrow$ 有一 $k\in E$ 使得 $n=mk$ 例如：$12=6\times 2$，$6\mid 12$ 但 $6\nmid 18$；另可定義 E 中的質數：$p\in E$，p 為質數 $\Leftrightarrow$ $p\nmid a$ $\forall a\in E$，因此 2，6，10，14，18，22，26，30，…都是環 E 中的質數，注意 $6\mid 180$，$180=18\times 10$，但在環 E 中 $6\nmid 18$，$6\nmid 10$；此與上面的整數環 $\mathbb{Z}$ 之質數整除性不同，且在環 E 中 $180=6\times 30=10\times 18=2\times 90$（注意 90 也是 E 中的質數），180 有三組不同的質因數乘積表示法；換言之，在 E 中的質因數分解性質也不具有唯一性。

6. 一直到現在為止，歌德巴赫臆測始終未能得到，也無法舉出反例，到 2006 年為止，在 2×10^{10} 以內的偶數均被一一檢驗無誤，在 1937 年 I.M. Vinogradov 證實：足夠大的奇數可表為三個質數的和，1966 年中國解析數論學家陳景潤證明足夠大的偶數為形如 $p+a$ 之和，其中 p 為質數，而 a 或者是質數或

者為兩質數的乘積。這一結果被國際上譽為「陳氏定理」，受到廣泛的引用，這一工作使他獲得中國自然科學獎一等獎，在歌德巴赫預測的研究居世界領先地位。

主題 2－6：單位分數

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　**撰寫者**：丁斌悅
陳彥廷

二、先備知識：

能以最大公因數、最小公倍數熟練約分、擴分、最簡分數及分數加減的計算。

三、教學目標：

（一）認識並瞭解單位分數的意義。

（二）能利用分數的加法組合單位分數。

（三）能利用分數的減法分解單位分數。

（四）能透過單位分數的組合與分解，瞭解分項對消法的使用時機與要領。

四、教學時間：90 分鐘（二節課）

五、教學說明：

以數學史的觀點，引進古埃及數學中，單位分數的意義，與強調實用性的古埃及人對於分數的可能想法；另外並介紹英國數學家西爾維斯特，對於「如何用兩個或兩個以上的相異單位分數之和表示真分數」的作法。最後介紹坊間常見的分項對消法題目，提出可能的作法及其優劣。

期望透過數學史的觀點，提升學生數學學習的興趣，並理解分項對消法相關題型的特殊性與解題技巧。

六、教學活動：

活動一：

活動目標：認識並瞭解「單位分數」的意義。

活動流程：

1.**教師引言**：

目前我們對古埃及數學的認識，主要是來自兩卷用埃及僧侶文寫成的紙草書，分別是成書於公元前 1850 年左右的莫斯科紙草書，以及成書於公元前 1650 年左右的蘭德紙草書，亦稱阿默士紙草書。蘭德紙草書的內容非常豐富，包括古埃及的乘法和除法的介紹、單位分數的用法、計算方程的試位法、求圓面積的方法，以及數學應用題的解法等。

2.**教師介紹這二節課主題**：

其中，「單位分數」指的是：分子是 1，分母是正整數的真分數，有人也稱「埃及分數」。例如：$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、⋯等。我們將利用兩節課的時間，一探「單位分數」的奧秘。

3. <u>**教師提問**</u>：

(1)將上述單位分數一一取其倒數並加以列出：＿＿＿＿＿＿。

(2)想想看，所有的單位分數都恰為＿＿＿＿的倒數。

活動二：

活動目標：能利用分數的加法<u>**組合**</u>單位分數。

1. 任何一個單位分數都可以由<u>**兩個**</u>相異的單位分數相加組合而成，例如：$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$、$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$、…。

2. (承1.)任何一個單位分數都可以由<u>**兩個以上**</u>相異的單位分數相加組合而成，例如：$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$、…。

活動流程：

1. <u>**教師引言並提問**</u>：

在古埃及的蘭德紙草書中，有一張很大的分數表，上面記載著很多形如$\frac{2}{n}$(其中 n 為奇數)的分數，用 2 至 4 個相異單位分數之和表示的式子。例如：

……

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$

……

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$$

$$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$$

$$\frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$$

……

說說看，你認為埃及人是怎麼想的？

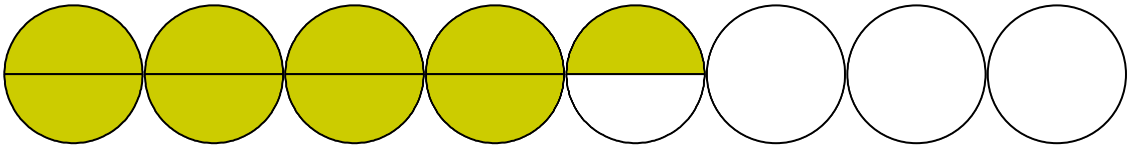
2. **教師說明**：

遇到分子不為 1 的分數，埃及人會將其分解成多個單位分數相加，例如：$\frac{8}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$。

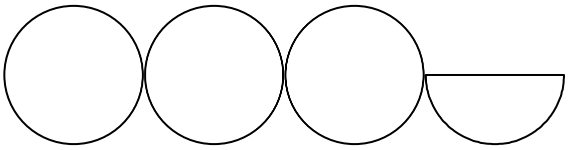
3. **教師續說明**：

對於只強調實用性應用的古埃及人而言，我們可以將$\frac{8}{9}$改以應用問題來思考：「有 8 顆西瓜要平均分給 9 人，應該如何分？」

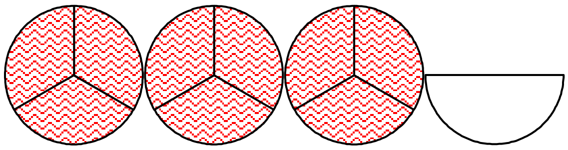
①8 顆西瓜 1 人分一個，不夠分，所以每人考慮分$\frac{1}{2}$個。



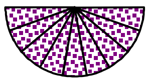
②若每 1 個人分$\frac{1}{2}$個，則還剩下 3 顆半的西瓜。



③若每 1 個人再分$\frac{1}{3}$個，則還剩下半顆西瓜。



④將剩下的半顆西瓜均分給 9 人，每人可再得$\frac{1}{18}$，至此全部分完。



⑤得算式：$\frac{8}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$。

4. **教師提問**：

聰明的你，能否利用古埃及人的智慧，解釋為何$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$？

5. **教師說明**：

（承 4.）事實上，如何將$\frac{2}{5}$用兩個或兩個以上的相異單位分數之和表示？英國數學家西爾維斯特提供了以下的程序性作法：

①求不大於給定分數的最大單位分數(即：$\frac{1}{3}$)

②從給定分數中減去此單位分數(即：$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$)

③求不大於所得差(即：$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$)的最大單位分數。若所得之差恰為單位分數，則停止。

④若所得之差不為單位分數，則繼續減。並且繼續此程序，直到所得之差恰為單位分數為止。

⑤因此，$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$。

6.**教師提問**：

（承 5.）請仿照西爾維斯特的作法，將$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$與$\frac{1}{4}$用兩個或兩個以上的相異單位分數之和表示。

7.**教師提問**：說說看，你發現了什麼？

8.**教師提問**：

那麼，請各位同學將 用**四個**相異單位分數之和表示。

活動三：

活動目標：能利用分數的減法**分解**單位分數。

1. 任何兩個相鄰單位分數相減必為單位分數，例如：$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$、$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$、…等。

2. （承 1.）任何一個分母為兩連續正整數乘積的單位分數，都可以分解為分母恰為此連續正整數的兩個單位分數相減，例如：$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$、$\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$、…等。

活動流程：

1. **<u>教師引言並提問</u>**：

從活動二中，我們發現：任何一個單位分數都可以由兩個相異的單位分數相加組合而成，例如：$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$、$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$、$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$、…。那麼，任何兩個相鄰的單位分數相減呢，是否也必為單位分數呢？

例如：$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$？

$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=$？

$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=$？

2. **<u>教師提問</u>**：說說看，你發現了什麼？

3. **<u>教師說明並提問</u>**：

（承 2.）反之，任何一個單位分數，若分母恰為兩連續正整數的乘積，則此單位分數必可分解為分母恰為此連續正整數的兩個單位分數相減，例如：$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$、$\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$、$\frac{1}{20}=\frac{1}{4\times5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$、…。說說看，你發現了什麼？

活動四：計算$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}$之值（三項）

活動目標：能透過單位分數的組合與分解，瞭解分項對消法的使用時機與要領。

活動流程：

1. **<u>教師引言並說明</u>**：

同學們請看下列式子：$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}=?$

面對這樣的題目，我們可以怎麼作呢？首先，我們可以以「直接通分法」來處理：

解法：$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}\quad=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$

$=\frac{10+5+3}{60}\quad=\frac{18}{60}\quad=\frac{3}{10}$

2.**教師續說明**：

請同學們再看下列式子：$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}=?$

面對這樣的題目，這次我們又要如何作呢？當然，我們還是可以以「直接通分法」來處理：

解法一：

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}\quad=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$$

$$=\frac{10+5+3+2}{60}\quad=\frac{20}{60}\quad=\frac{1}{3}$$

或者，我們可以利用先前的結果，接續來處理：（承 1.）

解法二：

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}\quad=\frac{3}{10}+\frac{1}{30}$$

$$=\frac{9+1}{30}\quad=\frac{10}{30}\quad=\frac{1}{3}$$

3.**教師引言**：

（承 1.與 2.）事實上，如果類似上述式子的項數並不多，我們當然可以一直以「直接通分法」來處理。但是，如果類似上述式子的項數多達十項以上（甚至更多），那麼顯然就不適宜以「直接通分法」來處理；我們應該需要有更簡潔快速的作法來因應這類型的式子。

4. **<u>教師說明</u>**：

由活動三，我們可以得到結論：$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

即： $\dfrac{1}{2\times3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{3\times4}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{4\times5}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}$

因此，我們可以考慮以下做法：

解法三： $\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\dfrac{1}{4\times5}+\dfrac{1}{5\times6}$

$=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}\right)$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6} \quad =\dfrac{3-1}{6} \quad =\dfrac{1}{3}$

5. **<u>教師歸納結論</u>**：

上述解法三中，我們把每一項都分解成兩個相異的單位分數之差（**<u>分項</u>**），如此一來便可以很快的以**<u>對消</u>**的方式，巧妙地得到最後的正確答案！我們將此方法稱為**<u>分項對消法</u>**。

6. **<u>教師提問</u>**：說說看，你認為「分項對消法」有哪些優缺點？

活動五：計算$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+......+\frac{1}{99\times100}$之值

活動目標：藉由增加「直接通分法」的複雜度，讓學生更加瞭解「分項對消法」的優點與其必要性。

活動流程：

1. **<u>教師引言並說明</u>**：

最後，再請同學們看看下列式子：

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+......+\frac{1}{99\times100}=?$$

面對這樣的題目，我們適合以「直接通分法」來處理嗎？顯然並不適合，因為這樣將會使式子變得很複雜！因此，我們便應該以「分項對消法」來巧妙地解決這樣的題目：

解法：

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+......+\frac{1}{99\times100}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+......+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{100}\quad=\frac{50-1}{100}\quad=\frac{49}{100}$$

2. **<u>教師續說明</u>**：

我們常會在坊間參考書或各項數學競賽中，看到類似像：

$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots\cdots+\frac{1}{99\times100}=$？的題目，這時候我們便可以利用「分項對消法」，很快的得到正確答案！同學們或許仍會看到許多其他的變化題型，但基本上都可以依循以下原則：「先把每一項都分解成兩項（**分項**），再加以**對消**！」進而快速地得到最後的正確答案。

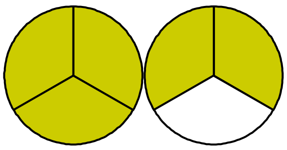
現在，就請同學們練習後面所附的指定作業。

教學活動參考解答：

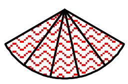
活動一：3.(1)2、3、4、5、6、…。(2)正整數。

活動二：1.(略)。

4.①有 2 顆西瓜平均分給 5 人。1 人分 1 個不夠分、1 人分$\frac{1}{2}$個也不夠分，所以考慮 1 人分$\frac{1}{3}$個。



②因為每人分$\frac{1}{3}$個，還剩下$\frac{1}{3}$顆的西瓜。將剩下的$\frac{1}{3}$顆西瓜均分給 5 人，每人可再得$\frac{1}{15}$，至此全部分完。



③得算式：$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$。

6. ①$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$；②$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$；③$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$。

7. $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$。

8. $\frac{1}{2}=\frac{1}{\underline{3}}+\frac{1}{\underline{\underline{6}}}=\underline{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}+\underline{\underline{\frac{1}{7}+\frac{1}{42}}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{42}$

（表示法**<u>不唯一</u>**！）

活動三：1. 是；$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{12}$、$\frac{1}{20}$。2. $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$。

3. $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$。

活動四：6.（略）。

七、指定作業：

1. 將 1 分解成 5 個相異的單位分數之和。

2. 仿古埃及人的智慧，解釋為何$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$。

3. 依<u>西爾維斯特</u>的作法，將$\frac{8}{9}$用兩個或兩個以上的相異單位分數之和表示。

4. 計算下列式子，並以最簡分數表示：

（1）$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+......+\frac{1}{2011\times2012}=$？

(2) $\dfrac{3}{4\times5}+\dfrac{3}{5\times6}+\dfrac{3}{6\times7}+\dots\dots+\dfrac{3}{2019\times2020}=?$

5. 計算下列式子，並以最簡分數表示：

(1) $\dfrac{2}{1\times3}+\dfrac{2}{3\times5}+\dfrac{2}{5\times7}+\dots\dots+\dfrac{2}{99\times101}=?$

(2) $\dfrac{1}{11\times13}+\dfrac{1}{13\times15}+\dfrac{1}{15\times17}+\dots\dots+\dfrac{1}{199\times201}=?$

(3) $\dfrac{5}{21\times23}+\dfrac{5}{23\times25}+\dfrac{5}{25\times27}+\dots\dots+\dfrac{5}{299\times301}=?$

6. 計算下列式子，並以最簡分數表示：

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{3}{5\times8}+\frac{4}{8\times12}+\frac{3}{12\times15}+\frac{2}{15\times17}+\frac{1}{17\times18}=?$$

指定作業參考解答：

1. $\boxed{\text{法一}}$：$1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\underline{\dfrac{1}{3}}+\underline{\underline{\dfrac{1}{6}}}=\dfrac{1}{2}+\underline{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}}+\underline{\underline{\underline{\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{42}}}}$。

$\boxed{\text{法二}}$：

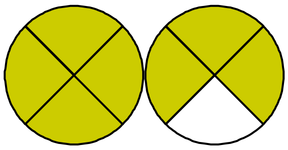
$1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\underline{\dfrac{1}{7}}+\dfrac{1}{42}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\underline{\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{56}}+\dfrac{1}{42}$。

$\boxed{\text{法三}}$：$\because \dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\dfrac{1}{4\times5}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$

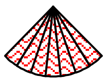
$\therefore 1=\left[\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\dfrac{1}{4\times5}\right]+\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{5}$。

（分解方法**不唯一**！）

2. ①有 2 顆西瓜平均分給 7 人。1 人分 1 個、1 人分$\frac{1}{2}$個、1 人分$\frac{1}{3}$個都不夠分，所以考慮 1 人分$\frac{1}{4}$個。



②因為每人分$\frac{1}{4}$個，還剩下$\frac{1}{4}$顆的西瓜。將剩下的$\frac{1}{4}$顆西瓜均分給 7 人，每人可再得$\frac{1}{28}$，至此全部分完。



③得算式：$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$。

3. ①求不大於給定分數的最大單位分數(即：$\frac{1}{2}$)

②從給定分數中減去此單位分數(即：$\frac{8}{9}-\frac{1}{2}$)

③求不大於所得差(即：$\frac{8}{9}-\frac{1}{2}=\frac{7}{18}$)的最大單位分數(即：$\frac{1}{3}$)。

④因為所得之差不為單位分數，所以繼續減(即：$\frac{7}{18}-\frac{1}{3}$)。所得之差恰為單位分數(即：$\frac{1}{18}$)，故停止。

⑤因此，$\frac{8}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$。

4.（1）$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+......+\frac{1}{2011\times2012}$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+......+\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2012}=\frac{1006-1}{2012}=\frac{1005}{2012}$

（2）$\frac{3}{4\times5}+\frac{3}{5\times6}+\frac{3}{6\times7}+......+\frac{3}{2019\times2020}$

$=3\times\left[\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}+......+\frac{1}{2019\times2020}\right]$

$=3\times\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+......+\left(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)\right]$

$=3\times\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2020}\right]=3\times\left[\frac{505-1}{2020}\right]=3\times\left[\frac{504}{2020}\right]=\frac{378}{505}$

5.（1）$\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{5\times7}+......+\frac{2}{99\times101}$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+......+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{101}=\frac{101-1}{101}=\frac{100}{101}$

（2）　$\dfrac{1}{11\times13}+\dfrac{1}{13\times15}+\dfrac{1}{15\times17}+......+\dfrac{1}{199\times201}$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\frac{2}{11\times13}+\frac{2}{13\times15}+\frac{2}{15\times17}+......+\frac{2}{199\times201}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)+......+\left(\frac{1}{199}-\frac{1}{201}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{11}-\frac{1}{201}\right]=\frac{1}{2}\times\left[\frac{201-11}{2211}\right]=\frac{95}{2211}$$

（3）　$\dfrac{5}{21\times23}+\dfrac{5}{23\times25}+\dfrac{5}{25\times27}+......+\dfrac{5}{299\times301}$

$$=\frac{5}{2}\times\left[\frac{2}{21\times23}+\frac{2}{23\times25}+\frac{2}{25\times27}+......+\frac{2}{299\times301}\right]$$

$$=\frac{5}{2}\times\left[\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{23}\right)+\left(\frac{1}{23}-\frac{1}{25}\right)+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{27}\right)+......+\left(\frac{1}{299}-\frac{1}{301}\right)\right]$$

$$=\frac{5}{2}\times\left[\frac{1}{21}-\frac{1}{301}\right]=\frac{5}{2}\times\left[\frac{301-21}{6321}\right]=\frac{700}{6321}=\frac{100}{903}$$

6.　$\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{2}{3\times5}+\dfrac{3}{5\times8}+\dfrac{4}{8\times12}+\dfrac{3}{12\times15}+\dfrac{2}{15\times17}+\dfrac{1}{17\times18}$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{18}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{18}=\frac{9-1}{18}=\frac{4}{9}$$

八、教學注意事項：

1. 各活動教學參考時間，活動一約用 10 分鐘，活動二與活動三

共用約 50 分鐘，活動四與活動五共用約 30 分鐘。

2. 使用此教材時，請依順序進行教學，較可達最佳學習效果。

3. 在教學過程中，教師應多注重師生間的互動，例如可多提問（同一問題也可問兩位以上的學生）、多鼓勵學生發表不同的看法並適度建立學生的信心（若有藉機調皮搗蛋者亦應適度制止）、多走動教學、留下適當的時間供學生思考或討論…等。

4. 在活動二之 3. 中，「有 8 顆西瓜要平均分給 9 人，應該如何分？」若有學生回答：「把 8 顆西瓜都分成 9 等分，分給 9 個人。」此時教師可以先肯定此方法也是一種分解法，並利用此一機會，與全班學生一起討論此方法是否合適？有哪些優點與缺點？有沒有分最少次的分解法呢？進而引導出古埃及人對於分數的可能想法！（例如：切割物品時，可能切愈多刀則損失愈多，像切餅會掉屑屑一樣，而大家並不想拿到一堆破破的食物，所以 $\frac{8}{9}$ 不會是 8 個 $\frac{1}{9}$，而是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$；同時這也是分最少次的分解法。）

5. 在活動二之 5. 中，若用英國數學家西爾維斯特所提供的程序性作法，將任何一個分數表示成兩個或兩個以上的相異單位分數之和，則此表示法必定是唯一的。

6. 除了西爾維斯特的表示法必定是唯一的之外，其餘在各活動中所提及之分數的組合與分解，表示法都不唯一！例如活動二中所提：$\frac{8}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$，也可表示為$\frac{8}{9}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$；又如在古埃及的蘭德紙草書中提及：$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$，但是若用英國數學家西爾維斯特所提供的程序性作法，則會得到$\frac{2}{9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}$。教學過程中，若有學生對於分數的組合與分解提出不同之表示法，教師應適度予以肯定；若發現學生誤以為表示法是唯一的，教師也應適度予以糾正。
7. 活動四中的「直接通分法」，在學生的次文化中習慣稱「暴力解題法」。
8. 本單元的指定作業難度較高，因此教師在例題上宜多引導，並注意學生的指定作業作答情形，多花點時間講解是必須的（如有必要）。
9. 在指定作業之 4. 中，若有學生使用不同於分項對消的方法，例如：$\frac{1}{\underline{2}\times\underline{3}}=\frac{1}{6}=\frac{3-2}{3\times2}$

$$\frac{1}{\underline{2}\times 3}+\frac{1}{3\times \underline{4}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=\frac{4-2}{4\times 2}$$

$$\frac{1}{\underline{2}\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times \underline{5}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{5}{20}+\frac{1}{20}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}=\frac{5-2}{5\times 2}$$

$$\frac{1}{\underline{2}\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times \underline{6}}=\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=\frac{9}{30}+\frac{1}{30}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}=\frac{6-2}{6\times 2}$$

……

（學生發現規律並歸納結論為：）

所求分數之分母＝最後項分母之乘數×第一項分母之被乘數

所求分數之分子＝最後項分母之乘數－第一項分母之被乘數

所以：

$$\frac{1}{\underline{2}\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+......+\frac{1}{2011\times \underline{2012}}=\frac{2012-2}{2012\times 2}=\frac{2010}{4024}=\frac{1005}{2012}$$

雖然在各活動內容中並未出現上述想法，但是面對學生這樣的發現，教師應給予高度肯定，並對全班學生作進一步的講解與延伸。事實上，依數學歸納法的精神，這樣的發現是正確而合理的！

倘若教學完全結束時，仍沒有學生提出上述想法，教師亦可視班級或學生程度，斟酌進行補充教學（可將上述想法補充作為活動四中的解法四）。

10. 教師可視班級或學生程度，對「分項對消法」的題型適度地加深加廣（舉例如下）：

（1）$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+......+\frac{1}{98\times100}+\frac{1}{99\times101}=?$

解法：$\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{4\times6}+......+\frac{1}{98\times100}+\frac{1}{99\times101}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{2\times4}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{4\times6}+......+\frac{2}{98\times100}+\frac{2}{99\times101}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+......+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{100}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right]\quad=\frac{1}{2}\left[\frac{15150+10100-303-300}{30300}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{24647}{30300}\right]\quad=\frac{24647}{60600}$$

（2）$\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{4\times5\times6}+......+\frac{1}{99\times100\times101}=?$

解法：$\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{4\times5\times6}+......+\frac{1}{99\times100\times101}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{2\times3\times4}+\frac{2}{3\times4\times5}+\frac{2}{4\times5\times6}+......+\frac{2}{99\times100\times101}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\left(\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right)+......+\left(\frac{1}{99\times100}-\frac{1}{100\times101}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{100\times101}\right]\ =\frac{1}{2}\left[\frac{5050-3}{30300}\right]\ =\frac{1}{2}\left[\frac{5047}{30300}\right]=\frac{5047}{60600}$$

（3）$\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{2}{3\times4\times5}+\frac{3}{4\times5\times6}+......+\frac{98}{99\times100\times101}=?$

解法：

$$\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{2}{3\times4\times5}+\frac{3}{4\times5\times6}+......+\frac{98}{99\times100\times101}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right]+\frac{2}{2}\left[\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right]+......\frac{98}{2}\left[\frac{1}{99\times100}-\frac{1}{100\times101}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+......+\frac{1}{99\times100}\right]-\frac{98}{2}\left[\frac{1}{100\times101}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+......+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)\right]-\frac{98}{2}\left[\frac{1}{100\times101}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{100}\right]-49\left[\frac{1}{10100}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{50-1}{100}\right]-\frac{49}{10100}$$

$$=\frac{49}{200}-\frac{49}{10100}=\frac{4949-98}{20200}=\frac{4851}{20200}$$

9.外國人名索引與專有名詞索引：

(1)外國人名索引：

①西爾維斯特 James Joseph Sylvester,英國,1814～1897

(2)專有名詞索引（依本教材出現順序）：

① 莫斯科紙草書 Moscow Mathematical Papyrus

② 蘭德紙草書 Rhind Papyrus

③ 阿默士紙草書 Ahmes Papyrus

④ 試位法 method of false position

九、教學參考資料：

1. 教育部編著(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部。

2. 國中各版本第一冊數學課本。

3. 文耀光(2002)。古埃及的單位分數問題。數學傳播，第 26 卷第 4 期，52-59，臺北。

4. 馮振業(1998)。來自古埃及的教學靈感。EDUMATH 數學教育，第 6 期，31-33，香港。

5. 馮振業(1998)。單位分數的奧秘。EDUMATH 數學教育，第 7 期，75-79，香港。

6. 劉清田(2008)。國小數學三秒解題秘訣。快樂三秒數學文化股份有限公司，52-60，臺南。

主題 2－7：巧排真分數

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者：**丁斌悅

陳彥廷

陳昭地

二、先備知識：

（一）認識單位分數。

（二）知道$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，…等最簡真分數。

（三）知道如何比較簡易分數的大小。

（四）知道兩正整數互質的意義。

（五）知道在數線上標示真分數。

三、教學目標：

（一）熟悉最簡真分數。

（二）瞭解真分數如何比較大小。

（三）熟悉分母 10 以下 31 個最簡真分數之排序。

（四）瞭解 n 階法萊數列之意義。

（五）發現法萊數列的特徵。

（六）提昇學生對數學的好奇心，進而增進數學學習的興趣。

四、教學時間：45 分鐘（一節課）

五、教學說明：

假如有人請你在 2 分鐘之內，將下列 17 個真分數：

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\ldots,\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}$$

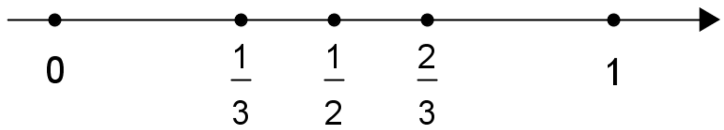
由小到大排成一列，你該如何處理呢？只要你能學好這個主題，保證你必能順利正確無誤的達成；而且你更可以在 3 分鐘之內將分母 10 以下 31 個真分數正確無誤地由小到大排成一列，並能發現這樣的數列項與項之間的奧秘，這就是本主題要探討的問題。

六、教學活動：

子題：特殊化（分母 5 以下真分數之排序）

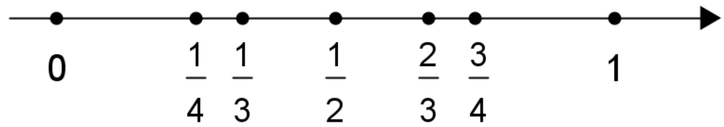
活動一：如果分母小些，例如分母只限於 5 以下；甚至 4 以下，更小些 3 以下，如何排序？

步驟 1：考慮分母 3 以下的真分數：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，將這三個分數標示在數線上：



則 $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$ ，完成排序！

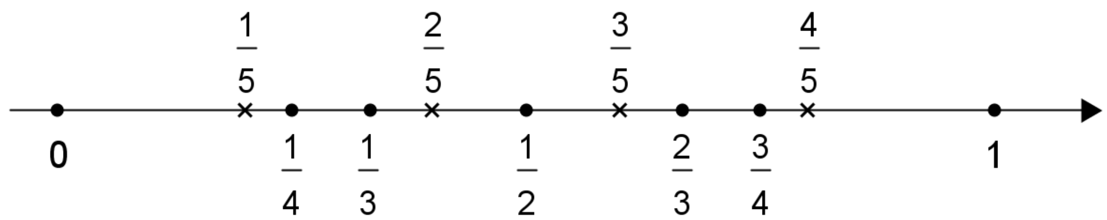
步驟 2：考慮分母 4 以下的真分數：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，仿照上圖，這五個分數標示在數線上：



只要將上圖 0 與$\frac{1}{3}$之間標出$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$與 1 之間標出$\frac{3}{4}$，就可變成 $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$ 之排序。

步驟 3：現在我們可以來排序：

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$

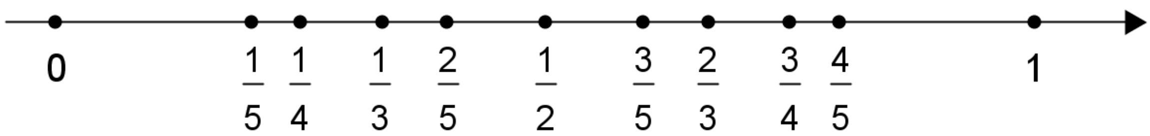


先將 0 寫成$\frac{0}{1}$，1 寫成$\frac{1}{1}$，又$\frac{1}{5}$在$\frac{0}{1}$與$\frac{1}{4}$之間，$\frac{1}{5}=\frac{0+1}{1+4}$

$\frac{4}{5}$在$\frac{3}{4}$與 1 之間，$\frac{4}{5}=\frac{3+1}{4+1}$，因此可先標示$\frac{1}{5}$與$\frac{4}{5}$

再盯住，有哪兩個相鄰項分母相加起來是 5，發現$\frac{1}{3}$與$\frac{1}{2}$，而$\frac{1+1}{3+2}=\frac{2}{5}$，可在$\frac{1}{3}$與$\frac{1}{2}$之間標出$\frac{2}{5}$，同樣地在$\frac{1}{2}$與$\frac{2}{3}$之間標出$\frac{1+2}{2+3}=\frac{3}{5}$。

步驟 4：於是得到分母 5 以下的九個真分數排序：



那麼，你能否再利用 1 分鐘之內，將

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$ 再重新排序一次？

能___○___不能___○___（在○內打✓）勾選不能者：先檢查並再排一次。

步驟 5：把上面各步驟之數線圖整理如下

$$\frac{1}{2}$$

$$\dashrightarrow \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$$

$$\dashrightarrow \quad \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$$

$$\dashrightarrow \quad \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$$

並可發現相鄰的兩項之差，恆為單位分數：

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}，\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}，\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}，$$

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}，\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{10}，\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{1}{15}，$$

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}，\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{1}{20}$$

隨堂練習 1：檢查看看$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$每相鄰兩項之差，是否仍為單位分數。

進一步發現相連三項之間的關係：

$$\frac{1}{5}，\frac{1}{4}，\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1+1}{5+3}$$

$$\frac{1}{4}，\frac{1}{3}，\frac{2}{5} \rightarrow \frac{1}{3}=\frac{1+2}{4+5}$$

$$\frac{1}{3}，\frac{2}{5}，\frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{5}=\frac{1+1}{3+2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{2}{3}，\frac{3}{4}，\frac{4}{5} \rightarrow \frac{3}{4}=\frac{2+4}{3+5}$$

隨堂練習 2： 檢查看看$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$每相連三項之間，是否有如上列之關係。

步驟 6： 1816 年英國地質學家法萊就把上面各已排序的數列記成

$\mathcal{F}_2$，$\mathcal{F}_3$，$\mathcal{F}_4$，$\mathcal{F}_5$：

$\mathcal{F}_2$：	$\frac{1}{2}$
$\mathcal{F}_3$：	$\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}$
$\mathcal{F}_4$：	$\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}$
$\mathcal{F}_5$：	$\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}$
	$\vdots$

並稱$\mathcal{F}_n$為n階法萊數列$(2 \le n \le 5)$。

再盯住$\mathcal{F}_5$的各項，可以發現如下：

（1）$\dfrac{b}{a}$為$\mathcal{F}_5$之項時，$1 \le b < a \le 5$，且$(a,b)=1$(即a，b互質)，$\dfrac{1}{2}$為其最中間的一項。

（2）$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{d}{c}$為$\mathcal{F}_5$之相鄰兩項時，$\dfrac{d}{c}-\dfrac{b}{a}=\dfrac{ad-bc}{ac}=\dfrac{1}{ac}$，即其差為單位分數$\dfrac{1}{ac}$。

（3）$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{l}{m}$，$\dfrac{d}{c}$為$\mathcal{F}_5$的相連三項時，$\dfrac{l}{m}=\dfrac{b+d}{a+c}$。

上面（1），（2）（3）是5階法萊數列的特徵！同樣的3階與4階法萊數列也有（1），（2）（3）的性質。

隨堂練習3：檢查看看4階法萊數列$\mathcal{F}_4$是否具有類似步驟6之（1），（2）（3）三個特徵。

子題：分母7以下真分數的排序

活動二：如果分母大些如10，如何將分母10以下的法萊數列寫出來！

步驟7：由$\mathcal{F}_5$之首尾插入$\dfrac{1}{6}$與$\dfrac{5}{6}$得6階的法萊數列$\mathcal{F}_6$：

$$\mathcal{F}_5: \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{F}_6: \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$$

再由$\mathcal{F}_6$，除了首尾插入$\frac{1}{7}$，$\frac{6}{7}$外，另在$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$之間插入$\frac{1+1}{4+3}=\frac{2}{7}$，$\frac{2}{5}$與$\frac{1}{2}$之間插入$\frac{2+1}{5+2}=\frac{3}{7}$，$\frac{1}{2}$與$\frac{3}{5}$之間插入$\frac{1+3}{2+5}=\frac{4}{7}$，最後由$\frac{2}{3}$與$\frac{3}{4}$之間插入$\frac{2+3}{3+4}=\frac{5}{7}$，於是得到 7 階的法萊數列$\mathcal{F}_7$：

$$\mathcal{F}_7: \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$$

步驟 8：請你從頭分別寫出$\mathcal{F}_2$，$\mathcal{F}_3$，$\mathcal{F}_4$，$\mathcal{F}_5$，$\mathcal{F}_6$及$\mathcal{F}_7$看看能否在 2 分鐘內準確完成排序。

能○，不能○（在○內打✓），不能者先檢查再作一次。

子題：分母 10 以下真分數排序

步驟 9：由$\mathcal{F}_7$的 17 項真分數排序，再插入$\frac{1}{8}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{7}{8}$四個真分數，可得 8 階的法萊數列$\mathcal{F}_8$：

$$\mathcal{F}_8:\frac{1}{8},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},$$
$$\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8}$$

$\mathcal{F}_8$中再插入$\frac{1}{9}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{9}$，$\frac{7}{9}$，$\frac{8}{9}$六個真分數，可得

9 階的法萊數列$\mathcal{F}_9$：

$$\mathcal{F}_9:\frac{1}{9},\frac{1}{8},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{2}{9},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{4}{9},$$
$$\frac{1}{2},\frac{5}{9},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{7}{9},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9}$$

步驟 10：(結論)

由$\mathcal{F}_9$：$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{9}$，

$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{9}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{9}$，$\frac{4}{5}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{6}{7}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{8}{9}$等 27 項

由大小排序的 9 階法萊數列，可準確地完成前後共 31 項的 10 階法萊數列$\mathcal{F}_{10}$：

$$\mathcal{F}_{10}:\frac{1}{10},\frac{1}{9},\frac{1}{8},\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{2}{9},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{3}{10},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{2}{5},$$
$$\frac{3}{7},\frac{4}{9},\frac{1}{2},\frac{5}{9},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{7}{10},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{7}{9},\frac{4}{5},$$
$$\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9},\frac{9}{10}$$

一般說來，給定正整數 n，將分母不超過 n 的最簡真分數，由小而大排成一列的數列，統稱為 n 階法萊數列。那麼你可以在 3 分鐘之內寫出總共有 31 項的 10 階法萊數列 $\mathcal{F}_{10}$。

教學活動參考解答：

步驟 4：能☑跳到步驟 5，不能☑重複作一次！

隨堂練習 1：是；隨堂練習 2：有；隨堂練習 3：有。

七、指定作業：

1. 寫出所有法萊數列的共同項。

2. （1）試由 $\mathcal{F}_3$：$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$ 寫出 $\mathcal{F}_4$

   （2）試由 $\mathcal{F}_4$ 寫出 $\mathcal{F}_5$

3. 試在 3 分鐘內正確無誤地寫出 12 階的法萊數列 $\mathcal{F}_{12}$

4. 觀察在 7 階的法萊數列中，$\frac{3}{7}$ 在中間項 $\frac{1}{2}$ 的前一項，$\frac{4}{7}$ 在 $\frac{1}{2}$ 的後一項；$\frac{2}{7}$ 在 $\frac{1}{2}$ 的前四項，而 $\frac{6}{7}$ 在 $\frac{1}{2}$ 的後四項；對 10 階的法萊數列而言，已知 $\frac{2}{7}$ 在中間項 $\frac{1}{2}$ 的前七項，那麼 $\frac{1}{2}$ 的後七項是多少？

5. 設 n 階的法萊數列 $\mathcal{F}_n$ 中，已知最簡真分數 $\dfrac{b}{a}$ 為中間項 $\dfrac{1}{2}$ 的前五項，則 $\dfrac{1}{2}$ 的後五項是哪個最簡真分數？

6. 已知 $\mathcal{F}_{10}$ 有 31 項，那麼 $\mathcal{F}_{11}$ 與 $\mathcal{F}_{12}$ 各有幾項？

7. 大明聲稱他能在 3 分鐘之內寫出 $\dfrac{1}{13}$，$\dfrac{1}{12}$，…，$\dfrac{1}{2}$，…，$\dfrac{11}{12}$，$\dfrac{12}{13}$ 共 55 項 13 階的法萊數列 $\mathcal{F}_{13}$；你能毫不猶豫地指出他一定有出錯的地方嗎？

作業參考解答：

1. $\dfrac{1}{2}$ 。 2. 略。 3. 略。 4. $\dfrac{5}{7}$ 。 5. $\dfrac{a-b}{a}$ 。

6. $\mathcal{F}_{11}$ 有 41 項 $(31+10)$； $\mathcal{F}_{12}$ 有 45 項 $(41+4)$。

7. $\mathcal{F}_{13}$ 的項數應該有 57 項 $(45+12)$，而不是 55 項至少漏寫了 2 項。

八、教學注意事項：

1. 教學時間建議，引起動機(含教學說明)約 2 分鐘，活動一約步驟 1~步驟 4 約 10 分鐘，步驟 5(含隨堂練習 1，2)約 5 分鐘，步驟 6 約 5 分鐘，活動二約步驟 7~步驟 8 約 6 分鐘，步驟 9 約 4 分鐘，步驟 10 約 5 分鐘，指定作業(含提示)約 8 分鐘。

2. 本主題教學使用 powerpoint 呈現圖形，可以增強教學效果。

3. 標示在數軸上的真分數，注意$\mathcal{F}_n$（n≥ 3）各項之間的間隔不一樣長。
4. 英國地質學家法萊(John Farey,1766-1826)於 1816 年引進法萊數列用於研究一長串的十進位表示商數;約 100 年後有關法萊數列跟數論或圖論的關係才被聯結起來。
5. 步驟 6 中，可以發現n階法萊數列$\mathcal{F}_n(n\geq 2)$中任意相鄰兩項$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$恆有$n+1\leq a+c\leq 2n-1$這也是其一項特徵。
6. 從$\mathcal{F}_2$，…，$\mathcal{F}_{10}$中亦可發現：

   $\frac{l}{n}\in\mathcal{F}_n \Leftrightarrow \frac{n-l}{n}\in\mathcal{F}_n$，另外，$\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$為$\mathcal{F}_n$之相鄰兩項，

   則$\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$ 且 $\frac{b}{a}$，$\frac{b+d}{a+c}$，$\frac{d}{c}$為$\mathcal{F}_{a+c}$的相連三項。
7. 步驟 6 中的 3 個特徵對一般的n階法萊數列$\mathcal{F}_n$亦成立：

   （1）$\frac{b}{a}\in\mathcal{F}_n \Leftrightarrow 1\leq b<a\leq n$且$(a,b)=1$且$\frac{1}{2}$為其中間項。

   （2）$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$為$\mathcal{F}_n$之相鄰兩項差為單位分數$\frac{1}{ac}$：

   $$\frac{d}{c}-\frac{b}{a}=\frac{ad-bc}{ac}=\frac{1}{ac}$$

   （3）$\frac{b}{a}$，$\frac{l}{m}$，$\frac{d}{c}$為$\mathcal{F}_n$的相連三項時，$\frac{l}{m}=\frac{b+d}{a+c}$，但$(m,l)=1$，$(a+c,b+d)$可能不為 1。

8. 學完本主題後，學生應能發現任意階法萊數列的項數都是奇數。

9. 要求學生口述 10 階的法萊數列$\mathcal{F}_{10}$及其特徵(含項數是奇數)。

10. 上完本主題之後，可分組比賽寫出$\mathcal{F}_{10}$的速度跟準確性，增加本單元的學習心得及樂趣。

11. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

12. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 丁斌悅、陳彥廷(2012)。單位分數，陳昭地主編：國民中學數學領域教材原型 A 冊。新北市：國家教育研究院。

2. A.S. Posamentier A, Jay Stepelman (1986). Teaching Secondary School Mathematics, 2nd Ed., pp.368-369(The Farey Sequence).Columbus, OH：Merrill.

3. 若$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{d}{c}$為$\mathcal{F}_n$之相鄰項，則$\dfrac{b}{a}$，$\dfrac{b+d}{a+c}$，$\dfrac{d}{c}$為$\mathcal{F}_{a+c}$的相連三項。

說明：①由$(a,b)=1$，$(c,d)=1$且$a>b$，$c>d$，$ad-bc=1$

$$\frac{b+d}{a+c}-\frac{b}{a}=\frac{ad-bc}{a(a+c)}=\frac{1}{a(a+c)}>0$$

$$\frac{d}{c}-\frac{b+d}{a+c}=\frac{ad-bc}{c(a+c)}=\frac{1}{c(a+c)}>0$$

②$(a+c,b+d)=1$

反設$(a+c,b+d)=k>1$

則$a+c=kA$，$b+d=kB$，其中 A，B都是正整數

所以$ad+cd=kAd$，$bc+cd=kBc$，

$ad-bc=k(Ad-Bc)$與$ad-bc=1$，$1=k(Ad-Bc)$不合

於是$(a+c,b+d)=1$，此時$\frac{b}{a}$，$\frac{b+d}{a+c}$，$\frac{d}{c}$為$\mathcal{F}_{a+c}$由小而大的三項。

③因$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$為$\mathcal{F}_{\max\{a,c\}}$兩相鄰項

設$\frac{b}{a}$，$\frac{l}{m}$，$\frac{d}{c}$為$\mathcal{F}_{a+c}$之三相連項

則$la=mb+1$，$md=lc+1$

$$lad=mbd+d=b(lc+1)+d=lbc+b+d$$

$l(ad-bc)=b+d$所以$l=b+d$，同理$m=a+c$故$\frac{l}{m}=\frac{b+d}{a+c}$

4. 由 3-①之$(\frac{b+d}{a+c}-\frac{b}{a}):(\frac{d}{c}-\frac{b+d}{a+c})=c:a$，另由

$\frac{b+d}{a+c}=\frac{\frac{b}{a}\times a+\frac{d}{c}\times c}{a+c}$都可以知道：$\frac{b+d}{a+c}$為兩端點$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$的線段

依$c:a$為比例的內分點。

5. 法萊數列$\mathcal{F}_n$的項數跟圓周率π比有密切的關係：

以尤拉函數$\varphi(m)$表示小於m且與m互質的正整數的個數，

如：

$\varphi(2)=1$，$\varphi(3)=2$，$\varphi(4)=2$，⋯；

則$\mathcal{F}_n$的項數有$\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)$

所以$\mathcal{F}_5$有$\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(5)=9$（項）

$\mathcal{F}_7$有$9+\varphi(6)+\varphi(7)=17$（項）

$\mathcal{F}_{10}$有$17+\varphi(8)+\varphi(9)+\varphi(10)=31$（項）

一般而言，$\mathcal{F}_n$的項數$\sum_{m=2}^{n}\varphi(m)\approx\frac{3n^2}{\pi^2}\ (n\approx\infty)$（見參考資料[2]）

；例如$\mathcal{F}_{100}$真正的項數為 3043，而$\frac{3\times100^2}{\pi^2}\approx3039.6355$

$\mathcal{F}_8$共有 21 項，而$\frac{3\times8^2}{\pi^2}\approx19.52$；$\mathcal{F}_{200}$約有$\frac{3\times200^2}{\pi^2}\approx12171.6$

即 200 階的法萊數列約有 12171 項。

6. 有關尤拉函數$\varphi(m)$或法萊數列的更進一步性質如

（1）當$(m,m')=1$時$\varphi(mm')=\varphi(m)\varphi(m')$

（2）當 p 為質數時，$\varphi(p^l) = p^l = p^{l-1} = p^l(1-\frac{1}{p})$

（3）$\varphi(m) = m\prod_{p|m}(1-\frac{1}{p})$，特別

$\varphi(300) = \varphi(2^2 \times 3 \times 5^2) = 2^2 \times 3 \times 5^2(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5}) = 80$

$\varphi(p) = p-1$（當 p 為質數）

請參見：華羅庚，數論導引(第 28 頁~第 30 頁及第 140 頁~第 145 頁)，先登出版社印行。

（4）從（3）中可知 $\mathcal{F}_n$ 都有奇數個真分數。

主題2－8：分數的乘除與加減

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　**撰寫者**：丁斌悅

蘇進發

二、先備知識：

（一）能以最大公因數、最小公倍數熟練約分、擴分、最簡分數及分數加減的計算。

（二）學過單位分數。

三、教學目標：

（一）能發現：有兩個單位分數相乘恰等於相減，並歸納其規律。

（二）能發現：沒有兩個單位分數相乘恰等於相加。

（三）能發現：有兩個同分子的分數相乘恰等於相加，並歸納其規律。

（四）能發現：有兩個同分子的分數相乘恰等於相減，並歸納其規律。

（五）能熟練分數的四則運算。

四、教學時間：90分鐘（二節課）

五、教學說明：

在學過「單位分數」之後，我們會發現：有兩個單位分數相乘恰等於相減，例如：

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\text{；}\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\text{；……等}$$

於是我們探討這些例子中隱含的特性，並試著歸納其規律。當我們想要進一步找出是否有兩個單位分數相乘恰等於相加時，我們卻發現答案是：沒有！

但是，我們如果將問題中的「單位分數」改為「分數」，則我們會發現：有兩個同分子的分數相乘恰等於相減，例如：

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{3\times5}=\frac{10-6}{3\times5}=\frac{10}{15}-\frac{6}{15}=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\text{；……等}$$

並且也有兩個同分子的分數相乘恰等於相加，例如：

$$\frac{8}{3}\times\frac{8}{5}=\frac{64}{3\times5}=\frac{40+24}{3\times5}=\frac{40}{15}+\frac{24}{15}=\frac{8}{3}+\frac{8}{5}\text{；……等}$$

我們也將探討在這些例子中所隱含的特性，並試著歸納其規律。

另外，本教材採分組競賽的方式，以提高學生的參與度；期望透過此教材中「發現→猜測→驗證→歸納結論」等教學之步驟，一方面讓學生熟練分數的四則運算，加強其速度與正確率；另一方面也期望藉此提升學生對於數學學習上的興趣。

六、教學活動：

活動一：

活動目標：能發現有兩個單位分數相乘恰等於相減，並歸納其規律。

活動流程：

1. **教師引言**：

各位同學，昨天有同學下課時跑來問我，這位同學說：他發現了一個在分數加減乘除上的現象，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$，也就是說$\frac{1}{2}$與$\frac{1}{3}$，兩數相乘恰等於兩數相減。他問說：「還有別的例子也是會兩數相乘恰等於兩數相減嗎？為什麼會有這種現象？」

2. **教師說明小組競賽方式**：

所以今天我們就要以組為單位來探討這個問題，每答對一個小問題，小組可以加 5 分；每答對一個大問題，小組可以加 10 分。

3. **教師提問**：

（1）首先我們來看看：這個例子中的$\frac{1}{2}$與$\frac{1}{3}$，恰好都是之前所介紹過的什麼分數？這是一個可以加 5 分的小問題。

（2）是否所有的兩個單位分數，相乘都一定等於相減呢，為什麼？這個小問題也是 5 分。

（3）有沒有哪一組，可以想出別的例子，同樣也是兩個單位分數相乘恰等於相減？每舉出一個正確的例子，小組可以加 5

分，老師需要 2～4 個例子，請同學上台來將你們小組的答案寫在黑板上。

（教師可以依班級程度，自行決定需要讓學生舉出多少的相似例子，一般而言以 2～4 個例子為原則；如果有些班級無法自行找出其他正確例子，教師亦可以適度給予提示，甚至直接給予一個其他正確例子。）

（4）現在黑板上有 3 個例子，都是兩個單位分數相乘恰等於相減，那麼老師要問：這些例子之中隱含著什麼特性，有沒有哪個小組可以將其中規律歸納出來？（這是一個可以加 10 分的大問題）

活動二：

活動目標：能發現沒有兩個單位分數相乘恰等於相加。

活動流程：

1. <u>**教師歸納之前結論並引言提問**</u>：

（1）各位同學，現在我們已經知道：只要兩個單位分數的分母相差 1 時，這兩個單位分數相乘必等於相減！

（2）那麼，會不會有兩個單位分數，相乘恰等於相加呢？老師同樣需要 2～4 個例子，請同學上台來將你們小組的答案寫在黑板上。（每個正確例子 5 分）

2.<u>**教師續提問**</u>：

（1）同學再仔細想想，或許這個問題的例子比較難想的出來，想出一個正確的例子加 10 分。

（教師可以依班級程度與特性，自行決定需要讓學生思考多久。）

（2）同學們，這一次怎麼這麼難想出例子來？是「有這樣的例子但目前找不到」，還是「根本沒有這樣的例子」？

（3）為什麼沒有這樣的例子呢？有沒有哪一組可以將其中的原因加以說明清楚？（10 分）

活動三：

活動目標：能發現有兩個同分子的分數相乘恰等於相加，並歸納其規律。

活動流程：

1.<u>**教師歸納之前結論並引言提問**</u>：

（1）各位同學，現在我們已經知道：

① 只要兩個單位分數的分母相差 1 時，這兩個單位分數相乘必等於相減！

② 不會有兩個單位分數，相乘恰等於相加。

（2）那麼，如果只要求「同分子的分數」，即不一定得要單位分數，會不會有兩個同分子的分數，相乘恰等於相加呢？如果有，老師同樣需要2～4個例子，請同學上台來將你們小組的答案寫在黑板上。（每個正確例子5分）

（教師可以依班級程度，自行決定需要讓學生舉出多少的相似例子，一般而言以 2～4 個例子為原則；如果有些班級無法自行找出其他正確例子，教師亦可以適度給予提示，甚至直接給予一個其他正確例子）

2.<u>**教師續提問**</u>：

（1）現在黑板上有 3 個例子，都是兩個同分子的分數相乘恰等於相加，那麼老師一樣要問：這些例子之中隱含著什麼特性，有沒有哪個小組可以將其中規律歸納出來？（10分）

活動四：

活動目標：能發現有兩個同分子的分數相乘恰等於相減，並歸納其規律。

活動流程：

1.<u>**教師歸納之前結論並引言提問**</u>：

（1）各位同學，現在我們已經知道：

① 只要兩個單位分數的分母相差 1 時，這兩個單位分數相乘必等於相減！

② 不會有兩個單位分數，相乘恰等於相加。

③ 只要兩個同分子的分數，分母相加都恰等於分子時，這兩個同分子的分數相乘必等於相加！

（2）那麼，會不會有兩個同分子的分數，相乘恰等於相減呢？如果有，老師同樣需要 2～4 個例子，請同學上台來將你們小組的答案寫在黑板上。（每個正確例子 5 分）

（教師可以依班級程度，自行決定需要讓學生舉出多少的相似例子，一般而言以 2～4 個例子為原則；如果有些班級無法自行找出其他正確例子，教師亦可以適度給予提示，甚至直接給予一個其他正確例子。）

2. **教師續提問**：

現在黑板上有 3 個例子，都是兩個同分子的分數相乘恰等於相減，那麼老師一樣要問：這些例子之中隱含著什麼特性，有沒有哪個小組可以將其中規律歸納出來？（10 分）

教學活動參考解答：

活動一：

3.（1）單位分數。

（2）不一定，例如：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\neq\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$。

（3）有，例如：$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$、$\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$。

（4）規律：只要兩個單位分數的分母相差1時，這兩個單位分數相乘必等於相減。（或：$\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$）

活動二：

1.（2）無。2.（2）根本沒有這樣的例子。（因為兩個真分數相乘必小於其中任何一個真分數，詳見指定作業參考解答3。）（3）略。

活動三：

1.（2）有，例如：$\frac{5}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{5}{2}+\frac{5}{3}$、$\frac{7}{2}\times\frac{7}{5}=\frac{7}{2}+\frac{7}{5}$、$\frac{13}{3}\times\frac{13}{10}=\frac{13}{3}+\frac{13}{10}$。

2.（1）規律：只要兩個同分子的分數，分母相加都恰等於分子時，這兩個同分子的分數相乘必等於相加。

（或：$\frac{n+m}{n}\times\frac{n+m}{m}=\frac{n+m}{n}+\frac{n+m}{m}$）

活動四：

1.（2）有，例如：$\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{2}-\frac{3}{5}$、$\frac{5}{2}\times\frac{5}{7}=\frac{5}{2}-\frac{5}{7}$、$\frac{10}{3}\times\frac{10}{13}=\frac{10}{3}-\frac{10}{13}$。

2.（1）規律：只要兩個同分子的分數，分母相減都恰等於分子時，

這兩個同分子的分數相乘必等於相減。

（或：$\frac{m}{n}\times\frac{m}{n+m}=\frac{m}{n}-\frac{m}{n+m}$）

七、指定作業：

1. 求下列各式中a的值：

（1）$\frac{1}{12}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{12}-\frac{1}{a}$；

（2）$\frac{5}{2012}\times\frac{5}{a}=\frac{5}{2012}-\frac{5}{a}$；

（3）$\frac{15}{7}\times\frac{15}{a}=\frac{15}{7}+\frac{15}{a}$；

（4）$\frac{199}{99}\times\frac{199}{a}=\frac{199}{99}+\frac{199}{a}$。

2. 求下列各式中a的值：

（1）$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{a}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{a}$；

（2）$\frac{1}{99}-\frac{1}{100}-\frac{1}{a}=\frac{1}{99}\times\frac{1}{100}\times\frac{1}{a}$；

（3）$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{31}-\frac{1}{a}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{31}\times\frac{1}{a}$。

3. 是否可以找到正整數a，使得$\frac{1}{60}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{60}+\frac{1}{a}$成立，請說明理由。

4. 觀察下列的式子：

$$3\times\frac{3}{2}=4\frac{1}{2}=3+\frac{3}{2}.........(1)$$

$$4\times\frac{4}{3}=5\frac{1}{3}=4+\frac{4}{3}.........(2)$$

$$5\times\frac{5}{4}=6\frac{1}{4}=5+\frac{5}{4}.........(3)$$

試寫出第（4）、第（5）與第（10）個式子，並舉例簡單說明其理由。

5. 計算下列各式：

（1）$(\frac{1}{23}-\frac{1}{24})\times4\frac{3}{5}$；

（2）$2+(\frac{4}{13}\times\frac{4}{17})+\frac{9}{13}+\frac{21}{17}$；

（3）$\frac{70}{29}\times\frac{70}{41}-\frac{70}{29}$；

（4）$5+\frac{23}{9}\times\frac{23}{14}-\frac{5}{9}\times\frac{5}{14}$。

指定作業參考解答：

1.（1）$a-12=1$，$\therefore\ a=13$。（2）$a-2012=5$，$\therefore\ a=2017$。

（3）$a+7=15$，$\therefore\ a=8$。（4）$a+99=199$，$\therefore\ a=100$。

2.（1）$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{a}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{a}$　$\therefore\ \frac{1}{12}-\frac{1}{a}=\frac{1}{12}\times\frac{1}{a}$　$\therefore\ a=13$。

（2）$\frac{1}{99}-\frac{1}{100}-\frac{1}{a}=\frac{1}{99}\times\frac{1}{100}\times\frac{1}{a}$　$\therefore\ \frac{1}{9900}-\frac{1}{a}=\frac{1}{9900}\times\frac{1}{a}$

$\therefore\ a=9901$。

（3）$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{31}-\frac{1}{a}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{31}\times\frac{1}{a}$

$\therefore\ \frac{1}{30}-\frac{1}{31}-\frac{1}{a}=\frac{1}{30}\times\frac{1}{31}\times\frac{1}{a}$

$\therefore\ \frac{1}{930}-\frac{1}{a}=\frac{1}{930}\times\frac{1}{a}$

$\therefore\ a=931$。

3.（1）若$a=1$：則$\frac{1}{60}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{60}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{60}\neq\frac{1}{60}+\frac{1}{1}$

（2）若$a>1$：因為a為大於 1 的正整數，則$\frac{1}{a}$為真分數

所以$\frac{1}{60}\times\frac{1}{a}<\frac{1}{60}$，故找不到$a$，使得$\frac{1}{60}\times\frac{1}{a}=\frac{1}{60}+\frac{1}{a}$成立。

4. 第（4）個式子為$6\times\frac{6}{5}=7\frac{1}{5}=6+\frac{6}{5}$

第（5）個式子為$7\times\frac{7}{6}=8\frac{1}{6}=7+\frac{7}{6}$

第（10）個式子為$12\times\frac{12}{11}=13\frac{1}{11}=12+\frac{12}{11}$

理由說明如下：

例如第（4）個式子的$6\times\frac{6}{5}$，利用分配律可得：

$6\times\frac{6}{5}=6\times(1+\frac{1}{5})=6+\frac{6}{5}$，在此條件下，二數相乘等於二數相加。

5.（1） $(\frac{1}{23}-\frac{1}{24})\times4\frac{3}{5}=(\frac{1}{23}\times\frac{1}{24})\times\frac{23}{5}=\frac{1}{24}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{120}$。

（2） $2+(\frac{4}{13}\times\frac{4}{17})+\frac{9}{13}+\frac{21}{17}=2+(\frac{4}{13}-\frac{4}{17})+\frac{9}{13}+\frac{21}{17}=2+\frac{13}{13}+\frac{17}{17}=4$

（3） $\frac{70}{29}\times\frac{70}{41}-\frac{70}{29}=\frac{70}{29}+\frac{70}{41}-\frac{70}{29}=\frac{70}{41}$。

（4） $5+\frac{23}{9}\times\frac{23}{14}-\frac{5}{9}\times\frac{5}{14}=5+(\frac{23}{9}+\frac{23}{14})-(\frac{5}{9}-\frac{5}{14})=5+\frac{18}{9}+\frac{28}{14}=9$

八、教學注意事項：

1. 各活動教學參考時間，活動一約 15 分鐘，活動二約 20 分鐘，活動三約 15 分鐘，活動四約 15 分鐘，指定作業約 20～25 分鐘。

2. 使用此教材時，請依順序進行教學，較可達最佳學習效果。

3. 本教材中所稱「分數」皆為「正分數」。

4. 教師可以透過分組競賽的方式，提高學生對於本教材的參與度：

（1）將全班學生分組，以六組為原則，每組 5～6 人，並於上課前一天公布於教室佈告欄。

（2）分組時，應參酌學生過去之段考與小考成績（各組程度應相當或接近）、同學之間的情誼（感情好的盡量同一組）、……等，必要時詢問導師意見，妥為分組，以提高同學分組競賽時的參與度。

（3）第一次實施分組競賽的班級，宜向學生說明規則如下：

①當你的小組有答案時，請務必舉手，經老師同意後才可發言或到黑板上寫出你的小組答案；

②此次分組競賽結果將列為平時成績的重要參考依據，希望同學發揮團隊合作精神，為你的小組爭取榮譽。

（4）本教材內各活動之分組競賽加分原則（如：小問題加 5 分，大問題加 10 分）僅供參考，教師可自行決定欲加之分數多寡。

5. 在教學過程中，教師應多注重各組內部組員跟組員之間的討論情形，勿使各組內有發生組員因意見相左而爭執、組員遭冷落、組員未參與討論、……等情事。
6. 在教學過程中，教師亦應多注重師生間的互動，例如可多提問（同一問題也可問兩位或兩組以上的學生）、多鼓勵學生發表不同的看法並適度建立學生的信心（若有藉機調皮搗蛋者亦應適度制止）、多走動教學、留下適當的時間供學生思考或討論、……等。
7. 使用此教材時，教師應注意學生的學習狀況與學習效果，切勿因學習此教材而對分數的四則運算反生混淆！例如：勿使學生誤以為任意的兩個分數相乘必定都可以等於相加（或相減）、任意的兩個分數相除也必定都可以等於相加（或相減）……等。
8. 在活動一之 3（3）、活動三之 1（2）、活動四之 1（2）中，教師可以依班級程度，自行決定需要讓學生舉出多少的相似例子，一般而言以 2～4 個例子為原則；如果有些班級無法自行找出其他正確例子，教師亦可以適度給予提示，甚至直接給予一個其他正確例子。而在活動一之 3（4）中，若發生學生

因較不熟悉數學語言的使用，導致在規律的說明或表達上較為不清楚，教師應給予充分時間表達並適度給予鼓勵，多給學生信心。

9. 在活動二中，教師可以讓學生多多嘗試，即使學生所寫出來的例子是錯的，也應該多予以安慰並鼓勵；若有其他同學因此而嘲笑，也應立即予以制止。若有學生未經思考而直接回答沒有兩個單位分數相乘等於相減，教師也可反問學生：「真的沒有嗎？」以使學生多多嘗試並自行加以驗算！務使學生經過充分思考之後再作出活動二的結論。

10. 本單元的指定作業，主要目的在於運用各活動中所發現的規律，較有技巧且較為快速地解決問題。因此，教師應注意學生的指定作業作答情形，必要時花些時間講解，讓學生瞭解這些規律的妙用。

11. 在指定作業之 4. 中，$3\times\frac{3}{2}$可視為$\frac{3}{1}\times\frac{3}{2}$，所以仍適用活動三的規律（只要兩個同分子的分數，分母相加恰等於分子時，這兩個同分子的分數相乘必等於相加）。

12. 在指定作業之 5.（3）與（4）中，部分程度不錯的學生可能有如下做法：

（3） $\frac{70}{29}\times\frac{70}{41}-\frac{70}{29}=\frac{70}{29}\times(\frac{70}{41}-1)=\frac{70}{29}\times(\frac{70}{41}-\frac{41}{41})=\frac{70}{29}\times\frac{29}{41}=\frac{70}{41}$

（4） $5+\frac{23}{9}\times\frac{23}{14}-\frac{5}{9}\times\frac{5}{14}=5+\frac{1}{9}\times\frac{1}{14}\times(23^2-5^2)$

$=5+\frac{1}{9}\times\frac{1}{14}\times(23+5)\times(23-5)=5+\frac{1}{9}\times\frac{1}{14}\times(28)\times(18)$

$=5+(2)\times(2)=9$

教師應尊重並予以肯定，但仍應將教學重心放在本教材內容所得到之相關規律上。

13. 教師可視班級或學生程度，針對下列主題適度地給予加深加廣：

（1）能發現：有兩個不同分子的分數相乘恰等於相加，並歸納其規律（詳見教學參考資料 4 之(5)）。

（2）能發現：有兩個不同分子的分數相乘恰等於相減，並歸納其規律（詳見教學參考資料 4 之(6)）。

九、教學參考資料：

1. 教育部編著（2008）。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部。

2. 國中各版本第一冊數學課本。

3. 丁斌悅、陳彥廷(2012)，單位分數，陳昭地主編：國民中學數學領域教材原型 A 冊。新北市：國家教育研究院。

4.（1）兩個單位分數相乘恰等於相減，意即：

$$\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\ \Rightarrow\frac{1}{a\times b}=\frac{b}{a\times b}-\frac{a}{a\times b}=\frac{b-a}{a\times b}\quad\therefore\ b-a=1$$

（即：分母相差 1）

（2）兩個單位分數相乘恰等於相加，意即：

$$\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\quad\Rightarrow\frac{1}{a\times b}=\frac{b}{a\times b}+\frac{a}{a\times b}=\frac{b+a}{a\times b}$$

$\therefore\ b+a=1$（不合）

（即：沒有兩個單位分數相乘恰等於相加）

（3）兩個同分子的分數相乘恰等於相加，意即：

$$\frac{m}{a}\times\frac{m}{b}=\frac{m}{a}+\frac{m}{b}$$

$$\Rightarrow\frac{m^2}{a\times b}=\frac{b\times m}{a\times b}+\frac{a\times m}{a\times b}=\frac{m\times(b+a)}{a\times b}$$

$\therefore m^2=m\times(b+a)$ $\therefore m=b+a$（即：分母相加等於其分子）

（4）兩個同分子的分數相乘恰等於相減，意即：

$$\frac{m}{a}\times\frac{m}{b}=\frac{m}{a}-\frac{m}{b}$$

$$\Rightarrow\frac{m^2}{a\times b}=\frac{b\times m}{a\times b}-\frac{a\times m}{a\times b}=\frac{m\times(b-a)}{a\times b}$$

$\therefore m^2=m\times(b-a)$ $\therefore m=b-a$（即：分母相減等於其分子）

（5）兩個不同分子的分數相乘恰等於相加，意即：

$$\frac{m}{a}\times\frac{n}{b}=\frac{m}{a}+\frac{n}{b}$$

$$\Rightarrow\frac{m\times n}{a\times b}=\frac{b\times m}{a\times b}+\frac{a\times n}{a\times b}=\frac{b\times m+a\times n}{a\times b}$$

$$\Rightarrow mn=bm+an \quad \Rightarrow mn-bm-an=0$$

$$\therefore m(n-b)-a(n-b)=ab \quad \therefore\ (m-a)(n-b)=ab$$

或$(a-m)(b-n)=ab$（即：兩分數之分子減分母，其乘積等於分母乘積）

（或：兩分數之分母減分子，其乘積等於分母乘積）

（6）兩個不同分子的分數相乘恰等於相減，意即：

$$\frac{m}{a}\times\frac{n}{b}=\frac{m}{a}-\frac{n}{b}$$

$$\Rightarrow\frac{m\times n}{a\times b}=\frac{b\times m}{a\times b}-\frac{a\times n}{a\times b}=\frac{b\times m-a\times n}{a\times b}$$

$$\Rightarrow mn=bm-an \quad \Rightarrow mn-bm+an=0$$

$$\therefore\ m(n-b)+a(n-b)=-ab$$

$\therefore\ (m+a)(n-b)=-ab$ 或 $(a+m)(b-n)=ab$

（即：被乘數之分母加分子，與乘數之分母減分子，其乘積等於分母乘積）

主題3－1：三角形數與平方數

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者：**陳昭地

二、先備知識：

（一）熟悉九九乘法。

（二）瞭解自然數（正整數）的運算。

三、教學目標：

（一）理解三角形數的意義。

（二）理解平方數的意義。

（三）歸納觀察三角形數與平方數的關係。

（四）理解第 n 個三角形數就是$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$。

（五）強化自然數的數感。

四、教學時間：45 分鐘（一節課）

五、教學說明：

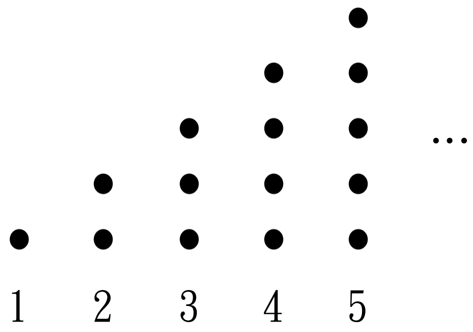
以下用一個黑點或小圓圈代表自然數 1，這些點或圈的個數代表自然數，用來認識三角形數及平方數，並探索三角形數與平方數的關係。

六、教學活動：

子題一：標記自然數

活動一：用點標記自然數

步驟 1：自然數 1，2，3，4，5，…用點標記成如下圖：



並完成下表：

自然數	1	2	3	4	5	…	10	20	100	…
點數	1	2	3	4	5	…	（　　）	（　　）	（　　）	…

步驟 2：可用多少個點來表示 6？（　　）個點

可用多少個點來表示 9？（　　）個點

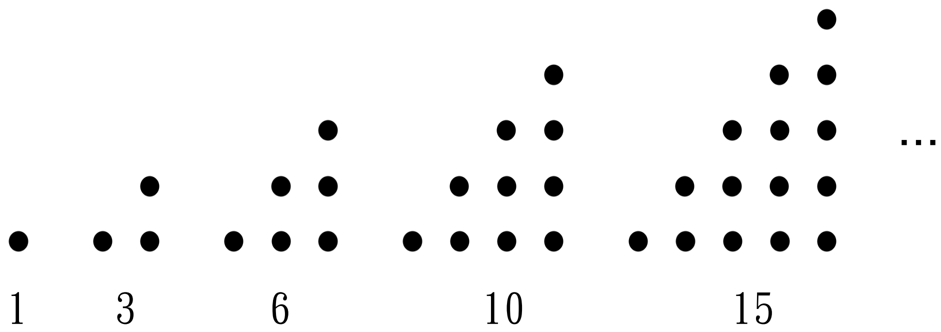
可用多少個點來表示 99？（　　）個點

活動二：對任意給定的自然數 n，就可用（　　）個黑點或（　　）個小圓圈來表示

子題二：何謂三角形數？

活動三：用黑點(或小圓圈標記三角數)

步驟 3：三角形數 1，3，6，10，15，…用點(或圈)標記成下圖：



並完成下表：

三角形數	第 1 個	第 2 個	第 3 個	第 4 個	第 5 個	…
數字	1	3	6	（　　）	（　　）	…

步驟 4： 第 7 個三角形數為多少？（＿＿＿）

第 8 個三角形數為多少？（＿＿＿）

第 10 個三角形數為多少？（＿＿＿）

活動四： 如果第 99 個三角形數為 a，那麼第 100 個三角形數等於 a＋（＿＿＿），用 a 表示。

一般來說，第 1 個三角形數記做 $T_1=1$，第 2 個三角形數 T_2 記做 $T_2=T_1+2$…，第 n 個三角形數記做 T_n，那麼下一個三角數 T_{n+1} 等於 T_n＋（＿＿＿＿）。

活動五： 三角形數的一般樣式

第一個三角形數是 1；

第二個三角形數是 1＋2，即 3；

第三個三角形數是 1＋2＋3，亦即 6；

⋮

第十個三角形數是 1＋2＋3＋ ⋯ ＋9＋10，即 55；

⋮

第 n 個三角形數是 1＋2＋3＋ ⋯ ＋（n－1）＋n

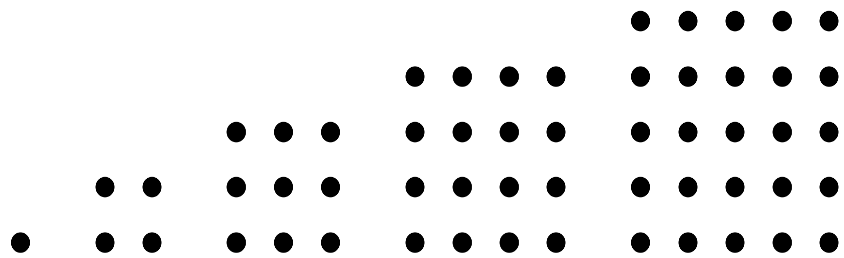
子題三：何謂平方數？

活動六：九九乘法中，知

1×1＝1，2×2＝4，3×3＝9，4×4＝16，5×5＝25，

6×6＝36，7×7＝49，8×8＝64，9×9＝81

這些都是平方數；前五個平方數點記成如下圖：



1　　4　　9　　16　　25

活動七：100～200 之間的平方數有哪些？

10×10＝100，11×11＝121，12×12＝144，13×13＝169

100～200 之間的平方數有

100，121，144，169，196 等 5 個

活動八： 200～400 之間的平方數有哪些？

14×14＝196，15×15＝225，16×16＝（　　），

17×17＝（　　），18×18＝（　　），19×19＝（　　），

20×20＝（　　），21×21＝（　　）

200～400 之間的平方數有

225，256，289，324，361，400 等 6 個。

活動九： 任意給定自然數 n，n 自乘二次：記作 $n \times n = n^2$；

n^2 是平方數且為第 n 個平方數。

由於 $30^2 = 30 \times 30 = 900$，$31^2 = 961$，$32^2 = 1024$，所以

1～1000 之間最小的平方數是（　　），最大的平方數是（　　），共有（　　）個平方數。

子題四： 三角形數與平方數之間的關係

活動十： 三角形數依序為 1，3，6，10，15，21，…

列出相連兩個三角形數之和，發現：

第 1 個三角形數 1 就是第 1 個平方數，

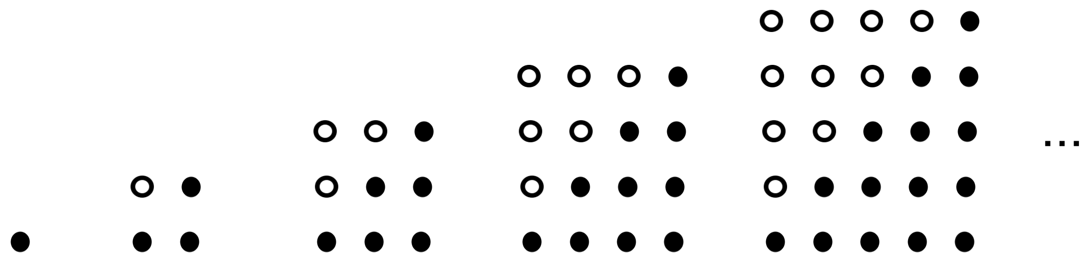
第 1 個三角形數 1 加上第 2 個三角形數 3 就是第 2 個平方數 4，

⋮

第 5 個三角形數 15 加上第 6 個三角形數 21 就是第 6 個平方數 36，同樣可得：

第 6 個三角形數 21 加上第 7 個三角形數（　　）就是第 7 個平方數（　　）

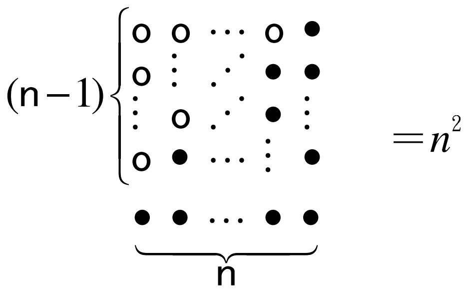
活動十一：如下圖，將平方數標記成兩個相鄰的三角形數相加：



1　$1+3=4$　$3+6=9$　$6+10=16$　$10+15=25$

歸納觀察出：

第$(n-1)$個三角形數$[1+2+\cdots+(n-1)]$與第 n 個三角形數$[1+2+\cdots+(n-1)+n]$之和為$[1+2+\cdots+(n-1)]+[1+2+\cdots+(n-1)+n]=n^2$如下圖所示：



故得出$[1+2+\cdots+(n-1)+n]+[1+2+\cdots+(n-1)+n]=n^2+n$

$2[1+2+\cdots+(n-1)+n]=n^2+n$

$1+2+\cdots+(n-1)+n=\frac{n^2+n}{2}$（或$\frac{n(n+1)}{2}$）

於是第 n 個三角形數是$\frac{n^2+n}{2}$。

子題五：主題結論

（一）自然數　1，2，3，…，n，…

三角形數 1，3，6，…，$\frac{n^2+n}{2}$，…

平方數　1，4，9，…，n^2，…

（二）1～100 之間的三角形數：

1，3，6，10，15，21，28，36，45，55，66，78，91

1～100 之間的平方數：

1，4，9，16，25，36，49，64，81，100

（三）101～400 之間的平方數：

121，144，169，196，225，256，289，324，361，400

（四）相連兩個三角形數之和一定是平方數。

教學活動參考解答：

活動一，步驟 1：10，20，100；步驟 2：6，9，99。

活動二：n，n。活動三，步驟 3：10，15，步驟 4：28，36，55。

活動四：a＋100，T_n＋(n＋1)。活動八：256，289，324，361，441。

活動九：1，961，31。活動十：28，49。

七、指定作業：

1.（1）第 10 個三角形數是多少？

（2）第 20 個三角形數是多少？

（3）第 100 個三角形數又是多少？

2.（1）第 10 個平方數是多少？

（2）第 20 個平方數是多少？

（3）第 100 個平方數又是多少？

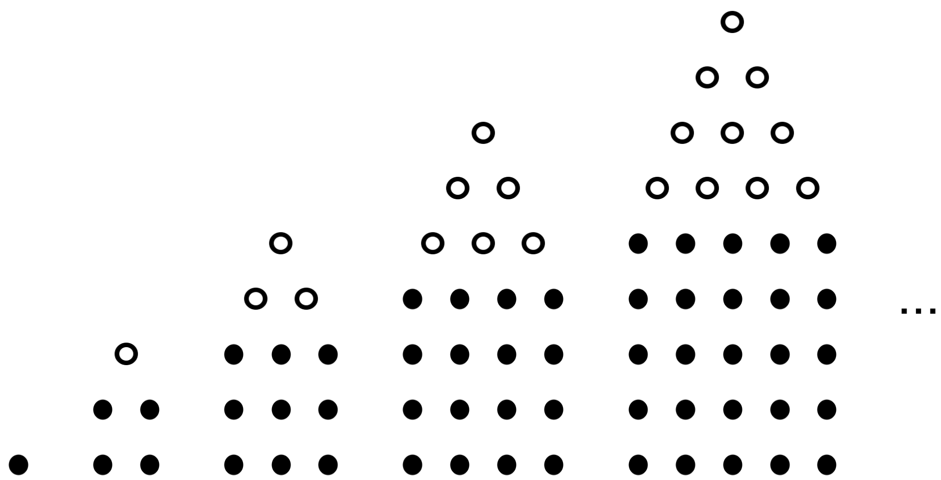
3.（1）第 9，10 兩個三角形數之和是多少？

（2）第 19，20 兩個三角形數之和是多少？

（3）第 49，50 兩個三角形數之和是多少？

（4）第 99，100 兩個三角形數之和又是多少？

4. 五邊形數 1，5，12，22，35，…點記成如下圖表（黑點表示平方數，小圓圈表示三角形數）：



1　5　12　22　35

一般來說，第 n 個五邊形數定義成第 n 個平方數加上第（$n-1$）個三角形數。

試回答下列各問題：

（1）第 6 個五邊形數是多少？

（2）第 10 個五邊形數是多少？

（3）第 25 個五邊形數是多少？

（4）第 n 個五邊形數是多少？(用 n 來表示)

指定作業參考解答：

1.（1）55（2）210（3）5050。2.（1）100（2）400（3）10000。

3.(1)100(2)400(3)2500(4)10000。4.(1) $6^2+\frac{5\times6}{2}=36+15=51$，

（2）$10^2+\frac{9\times10}{2}=100+45=145$（3）$25^2+\frac{24\times25}{2}=625+300=925$

（4）$n^2+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{3n^2-n}{2}$ 或 $\frac{n(3n-1)}{2}$

八、教學注意事項：

1.本教學主題以 powerpoint 檔來呈現圖型會產生極佳的效果。

2.引起動機(約 2 分鐘)：講述高斯小學老師給他

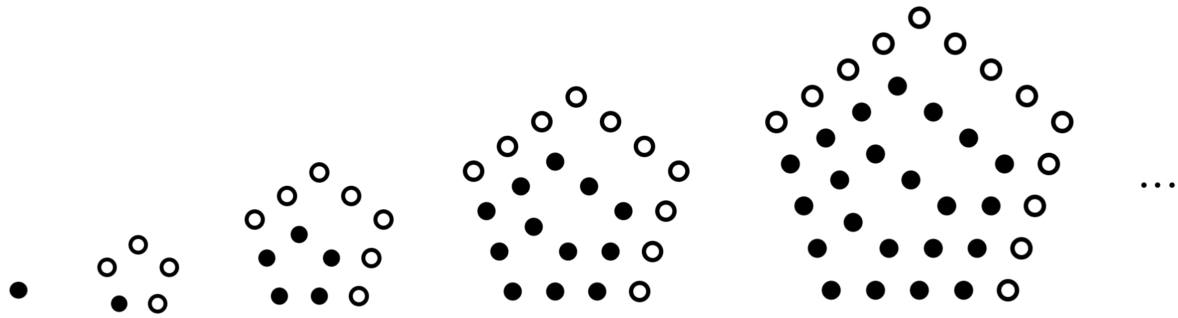
S＝1＋2＋3＋…＋100 求和的故事：

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
2S= & 1 & + & 2 & + & 3 & +\cdots+ & 99 & + & 100 \\
 & 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 101 & + & 101 & + & \cdots\cdots & & +101 & + & 101
\end{array}
$$

$= 100\times101$ ，　$S = 5050$

3. 教學活動建議時間，活動一、二各約 2 分鐘，活動三約 4 分鐘，活動四約 2 分鐘，活動五約 4 分鐘，活動六、七、八、九各約 2 分鐘，活動十約 5 分鐘，活動十一約 5 分鐘，主題結論約 5 分鐘，指定作業含提示約 5 分鐘。

4. 作業 4 有關五邊形數的定義方式亦可如下圖：



1　5　12　22　25

詳見如下教學參考資料 2。

5. 本主題教學在具有數型規律（如等差數列的規則之基礎下，效果更突顯。）

6. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

7. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. Posamentier A, Jay Stepelman (1986), Teaching Secondary School Mathematics, (2nd Ed.), pp. 353-359(Sum

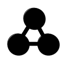
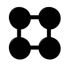
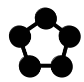
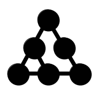
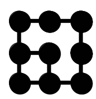
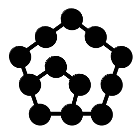
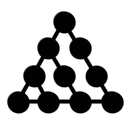
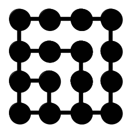
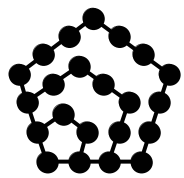
Deviations with Arrays). Columbus, OH：Merrill.

2. 大學入學考試中心試題(2008)。指考數學甲。

http://www.ceec.edu.tw/

題目：

A. 用大小一樣的鋼珠可以排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，其排列的規律如下圖所示：

	正三角形陣列	正方形陣列	正五邊形陣列
每邊1個鋼珠			
每邊2個鋼珠			
每邊3個鋼珠			
每邊4個鋼珠			

已知 m 個鋼珠恰好可以排成每邊 n 個鋼珠的正三角形陣列與正方形陣列各一個；且知若用這 m 個鋼珠去排成每邊 n 個鋼珠的正五邊形陣列時，就會多出 9 個鋼珠。則 $n=$ ⑨ ，$m=$ ⑩⑪⑫ 。

試題動機：測驗學生觀察圖形規律的能力，以及能否充分運用等差級數求和。

詳細解題說明：

（1）排成邊 n 個鋼珠的正三角形陣列的鋼珠數

$$1+2+\cdots+n=\frac{n^2+n}{2}$$

（2）排成邊 n 個鋼珠的正方形陣列的鋼珠數為

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

（3）排成邊 n 個鋼珠的正五邊形陣列的鋼珠數為

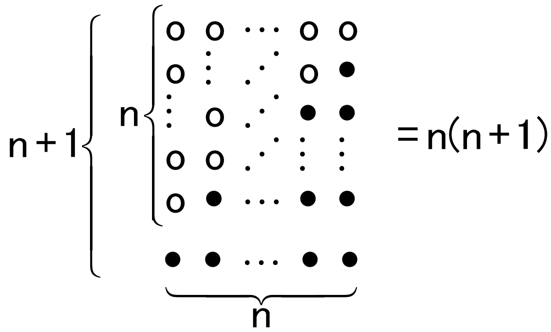
$$1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{3n^2-n}{2}$$

由 $\frac{n^2+n}{2}+n^2=\frac{3n^2-n}{2}+9$，可解得 $n=9$。

於是，$m=\frac{n^2+n}{2}+n^2=126$。

[**另解**]觀察每邊 n 個鋼珠時，正三角形陣列的鋼珠數與正方形陣列的鋼珠數之和恰好比正五邊形陣列的鋼珠數多出 n 個，故 $n=9$。

3. 我們也可用下列圖示方式求出 $1+2+\cdots+n=\frac{n+(n+1)}{2}$：



即 $2(1+2+\cdots+n)=n(n+1)$

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

4. 前 n 個平方數之和 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$：

$$
\begin{array}{rlllll}
 & (n+1)^3 & =n^3 & +3n^2 & +3n & +1 \\
 & n^3 & =(n-1)^3 & +3(n-1)^2 & +3(n-1) & +1 \\
 & & & \vdots & & \\
 & 3^3 & =2^3 & +3\times 2^2 & +3\times 2 & +1 \\
+) & 2^3 & =1^3 & +3\times 1^2 & +3\times 1 & +1 \\
\hline
\multicolumn{6}{l}{(n+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n}
\end{array}
$$

故 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{3}[(n+1)^3-(n+1)-3(1+2+...+n)]$

$$=\frac{1}{3}[(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2}]$$

$$=\frac{(n+1)}{3}[(n+1)^2-1-\frac{3n}{2}]$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. 前 n 個三角形數之和 $1+3+6+...+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$：

$$1+3+6+...+\frac{n(n+1)}{2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j^2+j$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}j^2+\sum_{j=1}^{n}j\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{(2n+1)+3}{6}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

6. (1)第 n 個三角數與第 n 個平方數的比值為 $\dfrac{n+1}{2n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$，

符合直觀結果。

(2)由 4、5 得前 n 個三角數之和與前 n 個平方數之和的比值為

$\dfrac{n+2}{2n+1}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$。

7.（1）既是三角形數又是平方數，即三角平方數有如下無限多組解：

$\frac{1\times2}{2}=1^2$，$\frac{8\times9}{2}=6^2$，$\frac{49\times50}{2}=35^2$，$\frac{288\times289}{2}=204^2$

$\frac{1681\times1682}{2}=1189^2$，$\frac{9800\times9801}{2}=6930^2$，…。

（2）既是三角形數又是五邊形數，即三角五角數有如下無限多組解：

$\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{3\times1^2-1}{2}=1$，$\frac{20(20+1)}{2}=\frac{3\times12^2-12}{2}=210$，

$\frac{285(285+1)}{2}=\frac{3\times165^2-165}{2}=40755$，…。

（3）既是平方數又是五邊形數，即五角平方數有如下無限多組解：

$\frac{3\times1^2-1}{2}=1^2$，$\frac{3\times81^2-81}{2}=99^2$，$\frac{3\times7921^2-7921}{2}=7901^2$…，…。

（4）猜測既是三角形數又是平方數也是五邊形數只有 1。

以上資料可參考：

李政豐、洪有情、陳昭地(民 100)，初探多邊形數，教育部高級中學數學學科中心電子報(民 100 年 11 月 59 期)。

http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/

主題 3－2：五邊形數與六邊形數

一、授課對象：國中七年級下學期學生　　　　**撰寫者：**陳昭地

二、先備知識：

（一）知道四百以內的平方數。

（二）知道一百以內的三角形數。

（三）知道 36 是三角形數也是平方數。

（四）已習三角形數與平方數。

（五）具有 3、5、9 因數的概念。

三、教學目標：

（一）理解五邊形數的意義。

（二）理解六邊形數的意義。

（三）歸納觀察第 n 個多邊形數的樣式。

（四）認識所有的六邊形數都是三角形數。

（五）強化自然數的數感。

四、教學時間：45 分鐘（一節課）

五、教學說明：

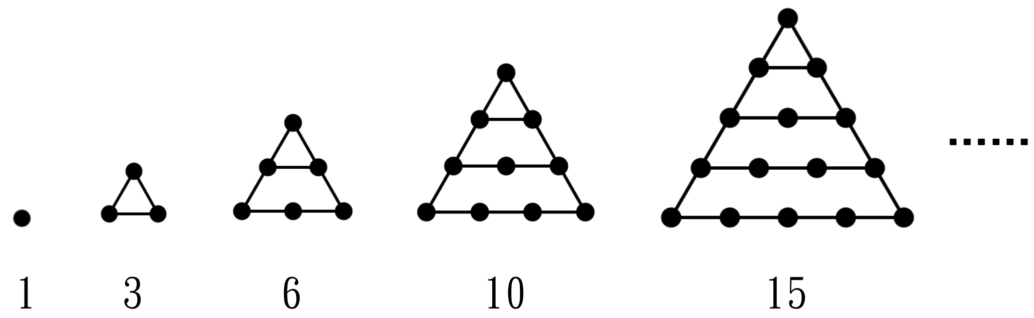
用一個黑點代表自然數 1，黑點的個數代表自然數，以點記方式回憶三角形數與平方數，再看何謂五邊形數與六邊形數，並探索五邊形數與六邊形數跟三角形數或平方數(四邊形數)的關係。

六、教學活動：

子題一：（溫故）三角形數與平方數的點記樣式

活動一：三角形數

步驟 1：三角形數 1，3，6，10，15，…用點標記成如下的正三角形樣式



依此樣式，第 6 個三角形數是多少？ (　　)

第 8 個三角形數是多少？ (　　)

第 10 個三角形數是多少？ (　　)

步驟 2：用 T_n 表示第 n 個三角形數，n＝ 1，2，…

那麼 T_{n+1} 與 T_n 有什麼關係？ (　　　　　　)

所以 T_6 是多少？ (　　)

T_8 是多少？ (　　)

T_{10} 是多少？ (　　)

T_{20} 又是多少？ (　　)

設已知 T_{50}＝1275，可知 T_{49}＝（　　）

T_{49}是不是平方數呢？（　　）；為什麼？（　　）

第 50 個以內的三角形數中也有 3 個平方數，它們各是多少？（　　），（　　），（　　）

步驟 3：(小結論)綜合以上步驟可知：

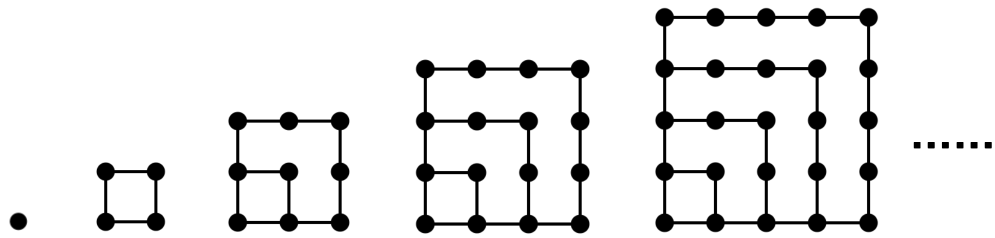
$T_n=1+2+\ldots+n$

$=n+(n-1)+\cdots+2+1$

故知 $2T_n=T_n+T_n=n(n+1)$，所以 T_n ＝(　　)

活動二：平方數

步驟 4：平方數（或稱四邊形數）1，4，9，16，25，…用點標記如下的正方形樣式



1　4　9　16　25

依此樣式，第 6 個平方數是多少？（　　）

第 8 個平方數是多少？（　　）

第 35 個平方數是多少？（　　）

第 99 個平方數又是多少？（　　）

步驟 5：觀察平方數與三角形數的關係：

由步驟 1 與步驟 4 觀察出：

4＝3＋1，9＝6＋3，16＝10＋6，25＝15＋10，…

依此樣式，若用 S_n 表示第 n 個平方數，T_n 表示第 n 個三角形數，可知

$S_2=T_2+T_1$，$S_3=T_3+T_2$，$S_4=T_4+T_3$，$S_5=T_5+T_4$，…

於是依此規律可以歸納出：

$S_n=T_n+T_{n-1}$，$n\geqq 2$

$S_1=T_1+T_0$，於是可規定 $T_0=0$

得 S_n ＝（　　），（n≧1）

步驟 6：定義三角平方數：

1 是三角形數也是平方數，

36 是三角形數也是平方數，

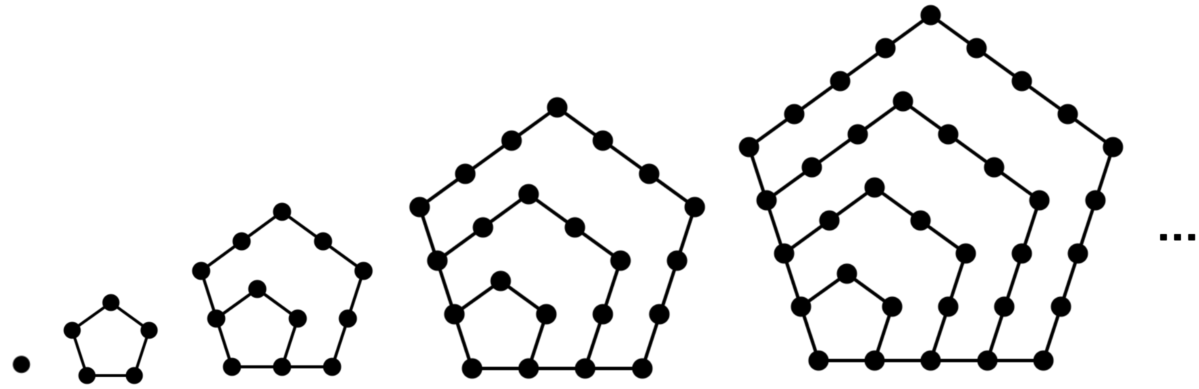
1225 是三角形數也是平方數，

它們被稱作三角平方數，請你想想看可能有其它的三角平方數？ 有○；沒有○；不知道○（在內○打勾）

子題二：（知新）如何標記五邊形數與六邊形數

活動三：何謂五邊形數？

步驟 7：五邊形數 1，5，12，22，35，…用點標記成如下正五邊形樣式：



1　　5　　12　　22　　35

觀察：

5＝1＋4， 12＝5＋7， 22＝12＋10， 35＝22＋(　　)
＝1＋4＋7 ＝1＋4＋7＋10 ＝1＋4＋7＋10＋(　　)

依此樣式，第 6 個五邊形數為多少？ (　　)

第 7 個五邊形數為多少？ (　　)

第 8 個五邊形數為多少？ (　　)

第 9 個五邊形數為多少？ (　　)

第 10 個五邊形數為多少？ (　　)

第 11 個五邊形數為多少？ (　　)

第 12 個五邊形數又為多少？ (　　)

步驟 8：觀察前五個三角形數、平方數與五邊形數

三角形數	1	3	6	10	15	…
平方數	1	4	9	16	25	…
五邊形數	1	5	12	22	35	…

並用 P_n 表示第 n 個五邊形數，$n=1$，2，…

可以發現 $P_2=5=4+1=S_2+T_1$

$P_3=12=9+3=S_3+T_2$

$P_4=22=16+6=S_4+T_3$

$P_5=35=25+10=S_5+T_4$

依此規律，我們歸納發現 $P_n=S_n+T_{n-1}$，$n\geqq 2$

又規定 $T_0=0$ 故知 $P_n=S_n+T_{n-1}$，$n\geqq 1$

於是 $P_6=$（______），$P_7=$（______），…

$P_{12}=$（______），$P_{81}=$（______），…

$P_{100}=$（______）

步驟 9：（小結論）由平方數 $S_n=n^2$，三角形數 $T_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

故知五邊形數 $P_n=n^2+\dfrac{(n-1)n}{2}=\dfrac{3n^2-n}{2}$

P_6，P_7，…，P_{12}，…，P_{81}，…，P_{100} 一一代入

符合嗎? 是〇；不是〇 （在〇打勾）

並可發現 $P_{12}=$（____）是第（____）個三角形數

$P_{81}=$（____）是第（____）個平方數

換言之，第 12 個五邊形數是第（____）個三角形數，所以（____）既是五邊形數又是三角形數，可稱它為三角五角數；同樣第 81 個五邊形數（____）也是平方數，可稱之為五角平方數。

當然 1 是三角五角數，也是五角平方數。

請你想想看是否有其它的三角五角數？

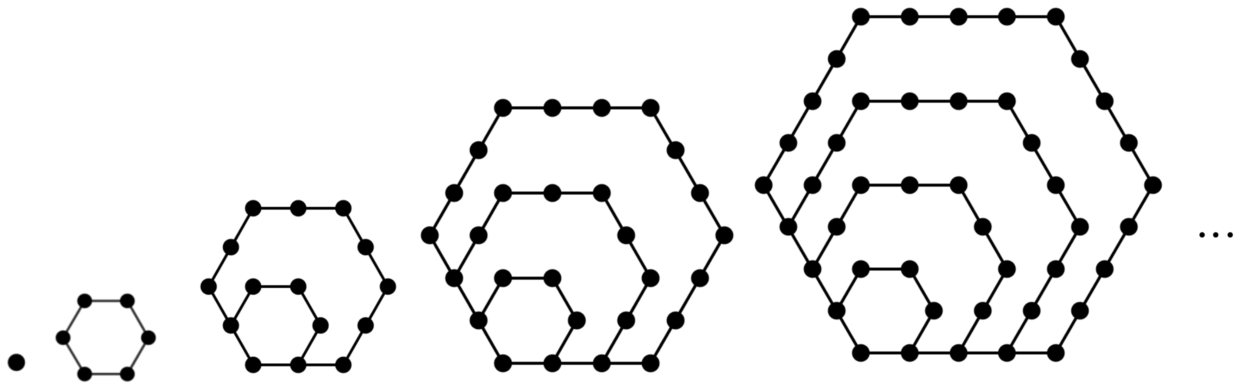
是○；不是○ （在○打勾）

是否有其它的五角平方數?

是○；不是○ （在○打勾）

活動四：何謂六邊形數？

步驟 10：六邊形數 1，6，15，28，45，…用點標記成如下正六邊形樣式：



1 6 15 28 45

步驟 11：觀察前五個三角形數與六邊形數：

三角形數	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**…**
六邊形數	**1**	**6**	**15**	**28**	**45**	**…**

再用 H_n 表示第 n 個六邊形數，$n=1$，2，…

可以發現 $H_1=1=T_1$

$H_2=6=T_3$

$H_3=15=T_5$

$H_4=28=T_5+13=T_5+6+7=T_7$

依此規律

⋮

$H_n=T_{2n-1}$，$n=1$，2，…

⋮

步驟 12：（小結論）

（1）每一個六邊形數都是三角形數

（2）$H_n=T_{2n-1}=\dfrac{(2n-1)(2n)}{2}=n(2n-1)$，$(n\geqq 1)$

（3）檢驗 $H_n=P_n+T_{n-1}$，$n\geqq 1$

（4）1225 是第 49 個三角形數，也是第 25 個六邊形數

活動五：結論

（5）1 都是多邊形數

（6）第 n 個三角形數 $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$（$n\geqq 1$），$T_0=0$

（7）第 n 個平方數 $S_n=n^2=T_n+T_{n-1}$（$n\geqq 1$）

（8）第 n 五邊形數 $P_n=S_n+T_{n-1}=\frac{3n^2-n}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$

（9）第 n 個六邊形數 $H_n=P_{2n-1}=P_n+T_{n-1}=n(2n-1)$

（10）36，1225 都是三角平方數；9801 是五角平方數；210 是三角五角數；1225 當然又是三角六角平方數。

教學活動參考解答：

步驟 1：21；36；55。

步驟 2：$T_{n+1}=T_n+(n+1)$ 或 $T_{n+1}-T_n=(n+1)$ 或 $T_{n+1}-(n+1)=T_n$；21；36；55；210；1225；35^2(或$(5\times 7)^2$)；1，36，1225。

步驟 3：$\frac{n(n+1)}{2}$。步驟 4：36；64；1225；9801。步驟 5：T_n+T_{n-1}。

步驟 6：有✓；如 $204^2=41616=T_{288}$；$6930^2=48024900=T_{9800}$

（有無限多個，請見教學參考資料 2.）

步驟 7：13；13；51；70；92；117；145；176；210。

步驟 8：51，70，⋯，210，⋯，9801，⋯，14950

步驟 9：是✓；210，20；9801，99；20；210；9801

是✓；如$\frac{285\times 286}{2}=40755=\frac{165(3\times 165-1)}{2}$

是✓；如$9701^2=94109401=\frac{7921(3\times 7921-1)}{2}$

（有無限多個三角五角數，也有無限多個五角平方數，見

教學參考資料 2.）

七、指定作業：

1.（1）第 8 個三角形數是多少？

（2）第 49 個三角形數是多少？

2.（1）第 6 個平方數是多少？

（2）第 35 個平方數是多少？

（3）第 99 個平方數是多少？

3.（1）第 12 個五邊形數是多少？

（2）第 81 個五邊形數是多少？

（3）試舉出 1 以外的五角三角數

4. 試舉出 1 以外 2000 以內的兩個三角平方數

5.（1）第 25 個六邊形數是多少？

（2）第 50 個六邊形數是多少？

（3）試舉出一個 1 以外的六角平方數

6. 定義第 n 個七邊形數等於第 n 個六邊形數與第（$n-1$）個三角形數之和，試求

（1）第 1 個七邊形數

（2）第 2 個七邊形數

（3）第 5 個七邊形數

指定作業參考解答：

1.（1）36（2）1225。

2.（1）36（2）1225（3）9801。

3.（1）210（2）9801（3）9801（或 9701^2）。

4. 36，1225。

5.（1）1225（2）4950（3）1225。

6.（1）1（2）7 (3)55。

八、教學注意事項：

1. 本教學可允許學生使用電算器，並以 powerpoint 檔呈現圖型更具教學效果。

2. 教學活動建議時間，活動一係複習三角形數，教學時間約 5 分鐘；活動二亦屬複習平方數教材，教學時間亦約 5 分鐘；活動三，五邊形數的定義約 13 分鐘；活動四，六邊形數的定義

約 12 分鐘；活動五，結論約 5 分鐘；指定作業（含提示）約 5 分鐘。

3. 步驟 6 或步驟 9 中有沒有或是不是的勾選對錯無關緊要，但老師應強調正確答案。

4. 步驟 12 之（3）亦可列表來發現 $H_n=P_n+T_{n-1}$ 之關係式。

5. (1)三角形數 T_n 亦可定義成如下首項 1，公差 1 的等差級

$$T_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

（2）平方數 S_n 亦可定義成如下首項 1，公差 2 的等差級數

$$S_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

（3）五邊形數 P_n 亦可定義成如下首項 1，公差 3 的等差級數

$$P_n=1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$$

（4）六邊形數 H_n 亦可定義成如下首項 1，公差 4 的等差級數

$$H_n=1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$$

（5）七邊形數 $Hep_n=1+6+11+16+\cdots+(5n-4)=\frac{n(5n-3)}{2}$

（6）k 邊形數 $K_n=1+(k-1)+\cdots+[(k-2)n-(k-3)]$

$$=\frac{n[(k-2)n-(k-4)]}{2},(k\geqq 3)$$

6. 一般而言，第 n 個 k 邊形數等於第 n 個$(k-1)$邊形數加上第

(n－1)個三角形數 (k≧3)；所以三角形數是最基本而重要的多邊形數。(發現此規律難度很高，但檢驗證明此規律卻相對容易。)

7. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
8. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 有無限多個三角平方數，也有無限多個三角五角數，亦有無限多個五角平方數。請參考：李政豐、洪有情、陳昭地(民100)。初探多邊形數，教育部高級中學數學學科中心電子報(民100年11月59期)。http://mathcenter.ck.tp.edu.tw/
2. A.S. Posamentier A, Jay Stepelman (1986). Unit 82：Sum deviations arraye. Unit 95：Polygonal numbers. Teaching Secondary School Mathematics, 2nd Ed., pp.353-354及pp.378-381. Columbus, OH：Merrill.
3. 有無限多個三角七角數，三角八角數，三角九角數，三角十角數，七角平方數，八角平方數，九角平方數，但可能只有

1 個十角平方數。用 Excel 軟體計算如下：

找尋三角七角數：

$$\frac{x(x+1)}{2}=\frac{5y^2-3y}{2}$$

x	y
1	1
10	5
496	221
3382	1513
158905	71065
⋮	⋮

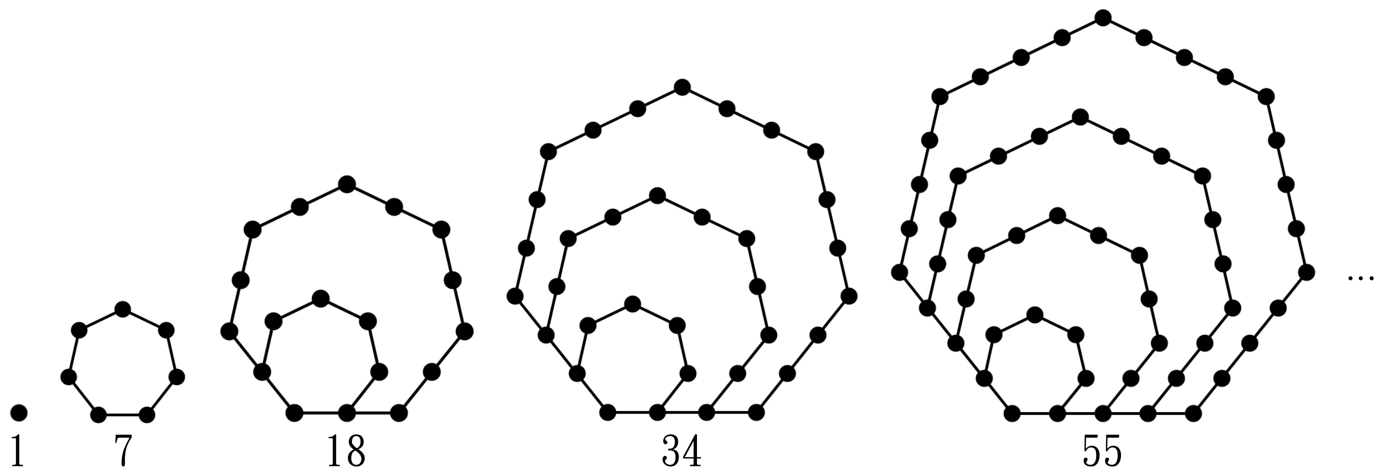
找尋三角十角數：

$$\frac{x(x+1)}{2}=\frac{8y^2-6y}{2}$$

x	y
1	1
4	2
55	20
154	55
1885	667
5248	1856
⋮	⋮

以上請參考：李政豐、洪有情、陳昭地(民 100)，續探多邊形數，教育部高級中學數學學科中心電子報(民 100 年 12 月 60 期)

4. 七邊形數 1，7，18，34，55，…亦可用正七邊形樣式定義如下：



但點記方式越來越繁雜，於是以首項 1，公差 5 之等差級數來定義

$$1+6+11+\cdots+(5n-4)=\frac{n(5n-3)}{2}$$

依此定義一般 k 邊形數；其第 n 個 k 邊形數定義成首項 1，公差（$k-2$）之級數 n 項和：

$$1+(k-1)+\cdots+[(k-2)n-(k-3)]=\frac{n[(k-2)n-(k-4)]}{2}$$

主題3－3：符號的意義

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者：**蘇進發

二、先備知識：

(一)能理解加減互逆，並運用於驗算及解題。

（二）能理解乘除互逆，並運用於驗算及解題。

（三）能將單步驟的具體情境問題，列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。

（四）能理解等量公理。

（五）能用符號表示常用公式。

三、教學目標：

（一）認識未知數符號的演變。

（二）複習國小教學中，未知數符號所代表的意義。（國小階段：未知數符號只代表等待發現的數值，僅能透過加減互逆、乘除互逆或單步驟等量公理做運算而求得。）

（三）瞭解國中教學中，未知數符號所代表的意義。（國中階段：未知數符號可以直接運算）

四、教學時間：45分鐘（一節課）

五、教學說明：

就國中階段而言，符號的認知學習，大約可分為下列情形，與方程式有關的未知數及與函數有關的變數，而本單元教學設計則以前者為主，目的在探討國中小未知數符號教學的差異，期許學生藉由活動的學習歷程，對未知數符號的認知與瞭解，能從算術概念進入代數概念。

六、教學活動：

活動一：（認識未知數符號的演變。）

透過運算式子或生活具體情境問題，認識未知數符號的演變及體會未知數符號產生的必要性。

步驟 1：教師請學生上台作答，透過計算與運算式子，讓學生認識未知數符號的演變過程。

例 1：計算下列各式，並將結果填入(　　)中。

（1） 5+8=(　　)

（2）5+(　　)=13

例 2：計算下列各式：

（1）若 $6\times\square=18$，則$\square=$？

（2）若 $6\times x=18$，則 $x=$？

步驟 2：教師請學生上台作答，透過生活具體情境問題，引導學生將等式概念，如何從「運算結果」過渡到「等價概念」，讓學生體會未知數符號產生的必要性。

例 3：若原子筆每枝 x 元，小恩買了 2 枝原子筆，與一本 25 元的筆記本，共付款 73 元，則 x 之值為多少？

例 4：小華到書局買每枝 x 元的原子筆，若買 5 枝則剩下 10 元，若買 3 枝則剩下 46 元，請依題意填入下列中的空格，

因為小華所帶的錢數不變，所以…

買 5 枝則剩下 10 元，可列出小華的錢：____________…①

買 3 枝則剩下 46 元，可列出小華的錢：____________…②

由①、②(錢數相同)可列出 x 的等式為：

____________________________________ 。

隨堂練習 1：小芬花了 115 元買禮物，已知禮物內有 3 包餅乾及每支售價 20 元的棒棒糖 2 支。若每包餅乾的售價為 x 元，則依題意列出 x 的等式。

隨堂練習 2：已知連續三個奇數中，若最小奇數為 x，則最小奇數與次小奇數的和，剛好比最大奇數多 11，請依題意列出 x 的等式。

活動二：（複習國小教學中，未知數符號所代表的意義。）

活動目標：

透過師生的有趣對話與生活具體情境問題，讓學生回想國小的未知數符號，只是代表等待發現的數值，同學只要利用加減互逆、乘除互逆或單步驟等量公理，便可計算求得。引發學生回想國小教學中，未知數符號所代表的意義，進而避免同學，以為國中小所學的概念都一樣，產生學習上的困惑。

步驟 1：教師利用師生對話，讓學生回想國小未知數符號，所代表的意義是什麼？

例 1：師生對話如下：

老師問：國小學過的「x」符號是什麼？

學生答：未知數。

老師再問：什麼是「未知數」？

學生再答：不知道的數。

老師又問：不知道的數加上不知道的數等於什麼？

學生回答：不知道的數。

老師最後問：為什麼「$x+x=2\times x$」？

學生回答：……

老師告知：國小教學過程中的未知數符號「x」，只是代表等待發現的數值，與國中的未知數符號「x」是不同的。

步驟 2：教師透過加減互逆、乘除互逆或單步驟等量公理的方法，求解x的等式或生活具體情境問題。

例 2：求下列各式中未知數x的值。

（1） $x+15=27$	（2） $\frac{7}{3}\times x=\frac{5}{2}$
（3） $x\times 7+100=121$ $x\times 7=($　　　$)$ $x=($　　　$)$	（4） $(3+x)\times 2=11$ $3+x=($　　　$)$ $x=($　　　$)$

例 3：小瑜買一本書花了全部錢的$\frac{3}{4}$，又再花了 20 元買一瓶飲料，已知今日小瑜總共花了 200 元，如果小瑜全部的錢為x元，請依題意列出x的等式，並求x的值。

活動三：(瞭解國中教學中，未知數符號所代表的意義。)

活動目標：

教師透過操作活動，讓學生瞭解國中教學的未知數符號，雖然代表一個符號，也是一個目前不知道等於多少的數，但它可以和其它的數進行運算，且順從運算的所有性質(交換律、結合律與分配律)。此與國小教學的未知數符號，有明顯的不同，不是一個等待發現的數值概念，而是可以代數運算的未知數符號。

步驟 1：

教師透過具體物的操作，引導學生認知未知數符號，可以如同數字一般進行運算。

例 1：假設 1 個沙包()的重量為 x 公克，請回答下列問題：

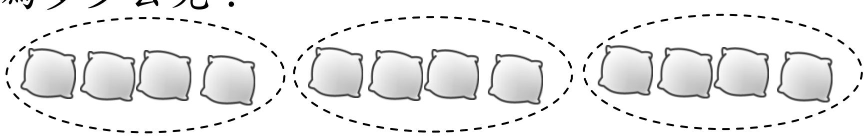
(以 x 表示)

(1) 2 個沙包()的重量為多少公克？

(2) 3 個沙包()的重量為多少公克？

(3) 2 個沙包()與 3 個沙包()的重量和為多少公克？

(4) 如下圖所示有三堆相同的沙包，則所有沙包的重量為多少公克？



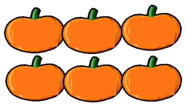
（1）______公克。

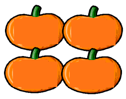
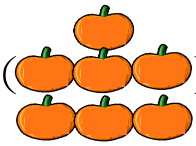
（2）______公克。

（3）$2\times x+$ ________ $=$ ________（公克）。

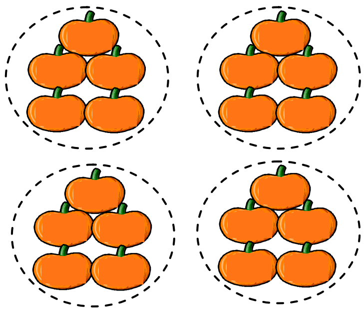
（4）_____$\times 4\times x=$_________（公克）。

隨堂練習 1： 假設 1 個水果()的重量為 x 公克，請回答下列問題：(以 x 表示)

（1）6 個水果()的重量為_______公克。

（2）4 個水果()與 7 個水果()的重量和為_______公克。

（3）如右圖所示，有四堆相同的水果，則所有水果的重量為________公克。

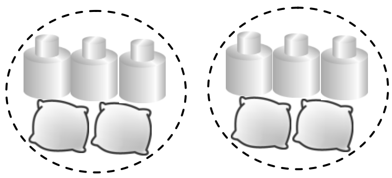


隨堂練習 2： 計算下列各式：

（1）$8\times x+13\times x=$___________。

（2）$6\times 9\times x=$___________。

例 2：有兩堆相同物品，每堆中有 2 個沙包與 3 個砝碼，如果沙包每個重 x 公克，砝碼每個重 200 公克，則這兩堆物品的總重量為多少公克？(以含 x 的式子表示)



因為一堆為 ______ $+3\times200$

$=$______________

所以兩堆為 $2\times($______________$)$

$=2\times$______ $+2\times$_______

$=$ ______________（公克）

隨堂練習 3：計算下列各式：

（1）$3\times(2\times x+100)=$____________。

（2）$4\times(5\times x+30)+6\times x=$____________。

（3）$2\times(4\times x+50+3\times x)+50=$____________。

教學活動參考解答：

活動一：

例 1：（1）13，（2）8。例 2：（1）$\square=3$，（2）$x=3$。例 3：$x=24$。

例 4：$5\times x+10$，$3\times x+46$，$5\times x+10=3\times x+46$。

隨堂練習 1：$3\times x+20\times2=115$。隨堂練習 2：$x+(x+2)=(x+4)+11$。

活動二：

例 2：（1）$x=12$，（2）$x=\frac{15}{14}$，（3）21，3，（4）$\frac{11}{2}$，$\frac{5}{2}$。

例 3：x 的等式為：$x\times\frac{3}{4}+20=200$，$x$ 的值為 240。

活動三：

例 1：(1) $2\times x$，(2) $3\times x$，(3) $3\times x$，$5\times x$，(4) 3，$12\times x$。

隨堂練習 1：(1) $6\times x$，(2) $11\times x$，(3) $20\times x$。

隨堂練習 2：(1) $21\times x$，(2) $54\times x$。

例 2：$2\times x$，$2\times x+600$，$2\times x+600$，$2\times x$，600，$4\times x+1200$。

隨堂練習 3：(1) $6\times x+300$，(2) $26\times x+120$，(3) $14\times x+150$。

七、指定作業：

1. 計算下列各式，並將結果填入(　　)中。

(1) $\frac{3}{4}+(\quad)=\frac{5}{6}$

(2) $(\quad)\times 8=12$

(3) $\frac{3}{2}\div(\quad)=4$

2. 利用等量公理，求下列各式中 x 的值。

(1) $x-12=30$

(2) $x\times\frac{2}{3}=\frac{5}{4}$

(3) $6\times x-56=70$

3. (1) 小博坐公車到書局購買每本 x 元的英文雜誌，來回車資共花 30 元。已知小博買了 1 本英文雜誌，且順便幫同

學買了 4 本，結果連同車資共花了 570 元，請依題意列出 x 的等式。

（2）已知 701 班有 x 位同學，老師帶了一袋糖果，要平分請全班同學吃，如果每人分 5 顆，則剩下 40 顆；如果每人分 7 顆，則不夠 32 顆，請依題意列出 x 的等式。

4. 計算下列各式：

（1）$5\times x+12\times x=$____________。

（2）$7\times x\times 5=$____________。

（3）$3\times(6\times x+10)=$____________。

（4）$12\times x+4\times(9\times x+50)=$____________。

（5）$6\times 2\times x+4\times(5\times x+10)+20=$____________。

5. 小恩學了一種測心術，他對小哲說：「你心裡想一個數，將此數乘以 5，再加 3，再乘以 2，再減去 6，然後將結果告訴我，我就知道你心裡想到的數是什麼。」小哲說：「90」，小恩馬上說：「你心裡想到數是 9」；你知道原因嗎？

指定作業參考解答：

1.（1）$\frac{1}{12}$，（2）$\frac{3}{2}$，（3）$\frac{3}{8}$。

2.（1）$x=42$，（2）$x=\dfrac{15}{8}$，（3）$x=21$。

3.（1）$5\times x+30=570$，（2）$5\times x+40=7\times x-32$。

4.（1）$17\times x$，（2）$35\times x$，（3）$18\times x+30$，（4）$48\times x+200$。

（5）$32\times x+60$。

5. 假設心裡想的數為 x

$(x\times5+3)\times2-6=x\times5\times2+3\times2-6=10\times x$

故將結果除以 10 即為答案。

八、教學注意事項：

1. 教學活動時間，活動一約 15 分鐘，活動二約 12 分鐘，活動三約 18 分鐘。

2. 教師於活動一之前，可先利用 2～3 分鐘的時間，透過計算機的猜數遊戲，引起學生的學習動機，並感受到符號應用的威力。然而，因為不同廠牌的計算機，其運算操作次序可能不同，所以教師請學生操作時，每做一次運算動作後，要求學生按下等於(＝)的符號，避免不必要的錯誤。

【計算機的猜數遊戲】：

教師請一位學生參與遊戲，並提供計算機給學生操作，你心裡想一個數按於計算機上(也寫在紙上)，將此數乘以 5， 再

加 3，再乘以 2，再減去 16，然後將結果告訴我，我就知道你心裡想到的數是什麼。

3. 活動一的步驟 1，學生能從例題中學習，觀察未知數符號的演變，是從可以填入答案【例 1：(1) 13，(2) 8。】的概念，到漸漸不能填入答案，而需要利用加減互逆或乘除互逆或等量公理運算，才能求出答案【例 2：(1) □=3，(2) x=3。】的演變過程。

4. 乘除互逆或加減互逆屬於專有名詞，教師在使用或介紹時，應放慢速度或多舉一些例子，來增加學生的理解度。

5. 小學中年級已經認識英文字母，故建議教師使用 x、y、z、…等英文字母表示未知數符號。

6. 活動一的步驟 2 之例 3，學生有兩種思維。

第一種是以運算為主：

$$\begin{aligned} x &= \frac{73-25}{2} \\ &= \frac{48}{2} \\ &= 24 \end{aligned}$$

第二種是以列式為主：

$$\begin{aligned} 2\times x+25 &= 73 \\ 2\times x &= 48 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

第一種思維的學生，只掌握運算的結果，無法確定學生是否具有列出等式的能力，第二種思維的學生，已可利用等價概念列出等式，是國中教學的要求重點，否則當未知數不只出現在等式一邊的時候，學生較難用第一種思維解決問題。

另外，若學生利用多個算式解題：

$$73-25=48$$
$$48\div 2=24$$

答：$x=24$

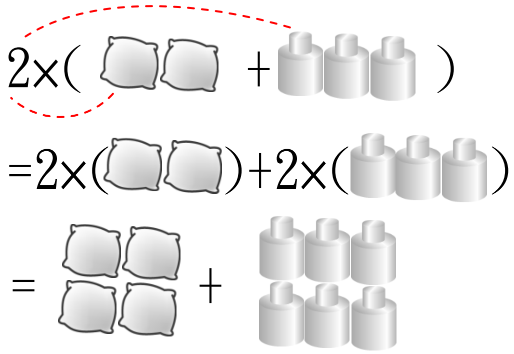
屬於國小中年級能力，應提升至國中所要求的，利用等價概念列出等式的能力。

7. 活動一的步驟 2 之例 4，此例的設計原則，要求學生依提示，利用等價概念列出等式即可，因為此時學生尚未學習過，如何解兩邊都有未知數符號的等式。

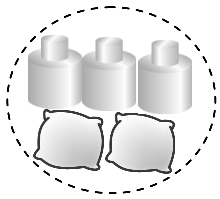
8. 活動二的步驟 2 之例 2，教師可同時利用不同的方法解題，引導學生觀察，國小數學教學中的未知數符號，只是等待發現的數值。

加減互逆或乘除互逆	等量公理
(1) $x+15=27$ $x=27-15$ $=12$	$x+15=27$ $x+15\boxed{-15}=27\boxed{-15}$ $x=12$
(2) $\frac{7}{3}\times x=\frac{5}{2}$ $x=\frac{5}{2}\div\frac{7}{3}$ $=\frac{15}{14}$	$\frac{7}{3}\times x=\frac{5}{2}$ $\frac{7}{3}\times x\boxed{\times\frac{3}{7}}=\frac{5}{2}\boxed{\times\frac{3}{7}}$ $x=\frac{15}{14}$
(3) $x\times7+100=121$ $x\times7=121-100$ $x\times7=21$ $x=21\div7$ $x=3$	$x\times7+100=121$ $x\times7+100\boxed{-100}=121\boxed{-100}$ $x\times7=21$ $x\times7\boxed{\div7}=21\boxed{\div7}$ $x=3$
加減互逆或乘除互逆	等量公理
(4) $(3+x)\times2=11$ $3+x=11\div2$ $3+x=\frac{11}{2}$ $x=\frac{11}{2}-3$ $x=\frac{5}{2}$	$(3+x)\times2=11$ $(3+x)\times2\boxed{\div2}=11\boxed{\div2}$ $3+x=\frac{11}{2}$ $3+x\boxed{-3}=\frac{11}{2}\boxed{-3}$ $x=\frac{5}{2}$

9. 活動三的例 2，此例題的設計原則，希望同學能理解國中數學教學中的未知數符號，可以如同數字一般進行運算。並期許教師多利用圖像解說，幫助學生學習及增加學生對分配律的瞭解與熟練度。

圖像解說	式子紀錄
	$2\times(2\times x+600)$ $={\color{red}2}\times(2\times x)+{\color{red}2}\times 600$ $=4\times x+1200$

10. 圖像解說可以增加學生的理解，但教學過程中仍應小心處理，例如，沙包每個重 x 公克，砝碼每個重 200 公克，教師應強調$2\times x+3\times 200$，是指沙包與砝碼的重量和，而非沙包與砝碼可以相加。



11. 國小教學並未要求代數式的簡記，且本單元教學次序，先於代數式的簡記，故在進行課程教學時，可不要求學生，用簡記表示代數式。例如，「$2\times x$」就可以表示，不一定要寫成「$2x$」。然而，大部分的小學教師，都已經教導過學生符號的簡記，所以教師可以先問完學生後，再決定是否使用符號的簡記，但若

有學生對於符號的簡記，仍有不明瞭的地方，建議教師暫時不要使用符號的簡記。

九、教學參考資料：

1. 教育部編著(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部。

2. 國中各版本第一冊數學課本。

3. 國小各版本第十二冊數學課本。

4. 為了區別國中小對未知數符號的教學不同，國小是不可運算的，國中則可以直接運算，所以在本單元的教學過程中，我們將小學的未知數符號，設定為等待發現的數值，或說為「暫時未知的已知數」，也可說為「定量的未知數」。

主題3—4：等量公理

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者：**李政憲

二、先備知識：能理解等量公理。

三、教學目標：

以等量公理解兩步驟以上以及等式兩側均含未知數的一元一次方程式，並做驗算。

（一）複習國小等量公理。

（二）利用等量公理解一元一次方程式並做驗算（先從具體物操作與方程式對應開始)。

（三）利用等量公理，解一元一次方程式並做驗算。

四、教學時間：90～112分鐘（二節課～二節半）

五、教學說明：

透過等量公理的複習與舉例的說明，熟悉等量公理的概念與練習。

六、教學活動：

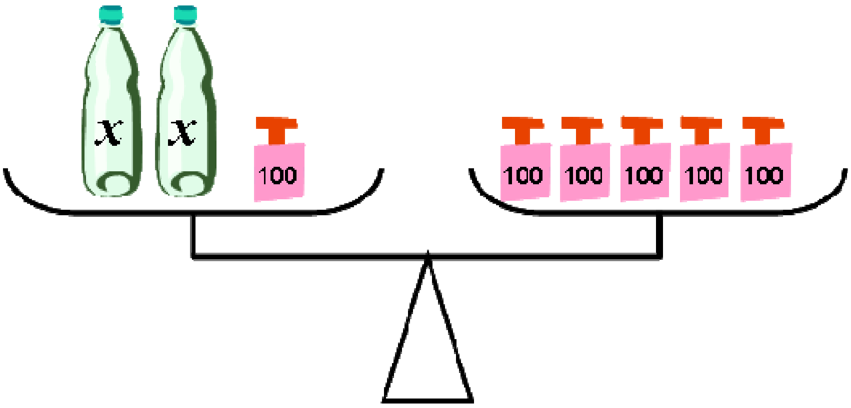
活動一：透過具體物操作，了解方程式的列式與對應關係。

活動目標：藉由具體物（磁鐵）的操作，了解一元一次方程式的意義與列式求解。

活動流程：

1. 在黑板上繪製等臂天平，並在天平兩側放置磁鐵保持平衡。

在左方托盤放置未知重量的空瓶兩個與 100 公克砝碼，右方托盤放置 5 個 100 公克砝碼，則天平保持平衡。（如下圖一）



（圖一）

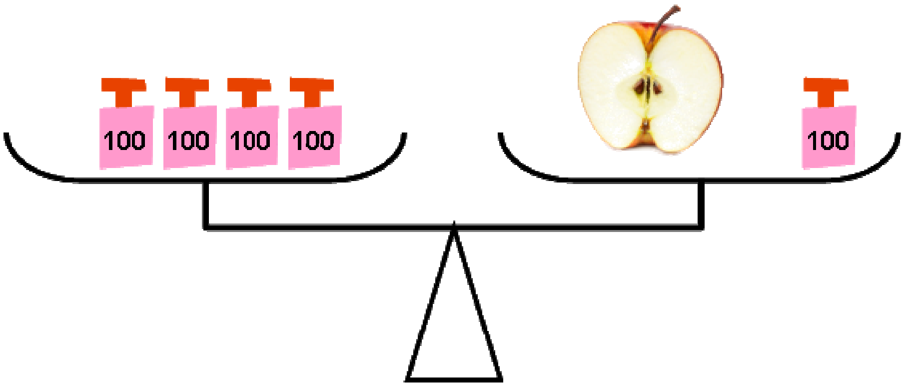
① 設瓶子的重量x公克，請同學列出等式以表示其平衡。

② 凡形如①中的數學等式，算式中僅含有一個未知數，且此未知數的最高次方數為 1 的算式，我們稱為「一元一次方程式」；其中「元」代表的是未知數的個數，「次」所代表的是此算式中未知數的最高次方。若要知道瓶子的重量為多少，請問天平兩側要作什麼樣的移動或計算？請依序列式表示，並說明利用到哪些等量公理。

③ 請計算出瓶子的重量，並驗算確認答案是否正確。

2. 如（圖二），在天平左方托盤放置 4 個 100 公克的砝碼，右方托

盤放置 100 公克砝碼及半顆蘋果，兩側保持平衡。



（圖二）

① 設一顆蘋果的重量為 y 公克，請問半顆蘋果的重量是多少公克？請同學列出等式以表示其平衡。

② 若要知道一顆蘋果的重量為多少，請問天平兩側要作什麼樣的移動或計算？請依序列式表示，並說明利用到哪些等量公理。

③ 請計算出蘋果的重量，並確認答案是否正確。

隨堂練習 1：利用等量公理解下列一元一次方程式，並驗算其結果：

① $x-25=32$

② $x+9=15$

③ $x \div 5=13$

④ $4x=18$

⑤ $3x-2=22$

⑥ $\frac{1}{5}x+3=4$

活動二：討論等量公理的使用時機。

活動目標：藉由算式的運算規則，發現等量公理使用的限制。

活動流程：

1. 觀察下列算式：「說明：2=1」

① 若 $x=y$ ，則 $x-y=y-y \Rightarrow x-y=0$ （等量減法公理）；

② 故 $2(x-y)=0$ （等量乘法公理）；

③ 利用分配律將 $2(x-y)$ 乘開得： $2x-2y=0$

④ 將 $x-y=0$ 代入右式得： $2x-2y=x-y$

⑤ 利用分配律提出公因數： $2(x-y)=x-y$

⑥ 兩邊同除以 $x-y$ ，因此可得：2=1（等量除法公理）。

上述的運算過程在某一步驟必有錯誤，請問是在哪一個步驟的運算過程開始出錯的呢？

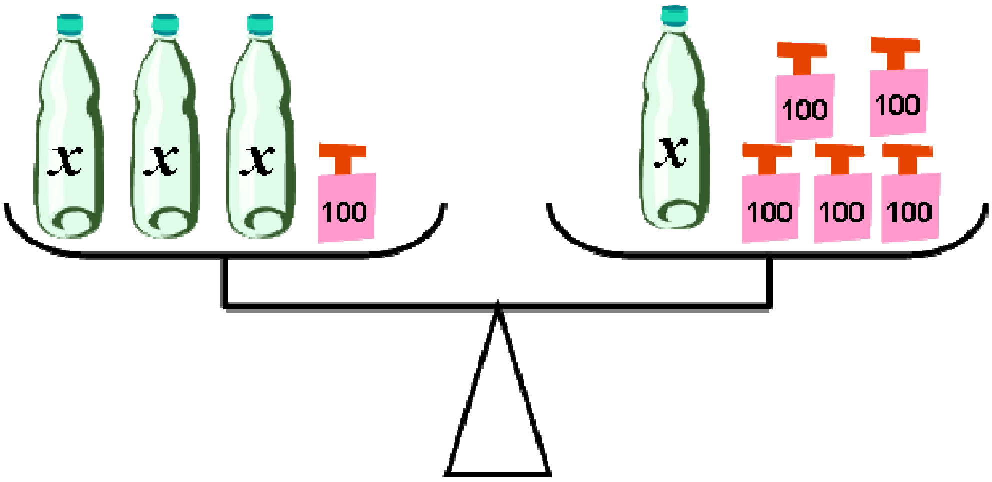
活動三：透過方程式的列式，了解具體物操作與其對應關係。

活動目標：

利用等量公理概念，討論等號兩側皆有未知數的算式的解決方式。

活動流程：

1. 觀察已保持平衡的（圖三），請回答下列幾個問題：



（圖三）

① 若瓶子的重量為x公克，請同學列出等式以表示其平衡。

② 若要知道瓶子的重量為多少，請問天平兩側要作什麼樣的移動或計算？請一邊操作，一邊依序列式表示，並說明利用到哪些等量公理。

③ 請計算出瓶子的重量，並確認答案是否正確。

④請問是否有其他移動方式可以算出瓶子的重量？

2. 若已知方程式$x+17=3x+8$，其中x代表的是一枝鉛筆的價錢。

① 請畫出以上式子所代表的圖像，並依序說明要如何解題。

② 請確認答案是否正確，並說明你用到哪些等量公理？

③ 請在日常生活中舉一實例，說明以上算式所代表的意義。

隨堂練習 2：利用等量公理解下列一元一次方程式，並驗算其結果：

① $7x+1=3x+9$　② $3x-2=19+x$　③ $\frac{15}{2}-5x=\frac{5}{2}+13x$

活動四：引入負數列式，說明負數也能透過等量公理解題

活動目標：利用等量公理概念，討論等號出現負數的解決方式。

活動流程：

1. 觀察方程式$x-16=-24$，請回答下列幾個問題：

① x的值為多少？你是如何知道的？

② 你用到了什麼等量公理？

③ 請在日常生活中舉一個實例，會利用到以上的算式解題，並驗算其結果。

2. 觀察方程式$37=x+(-26)$，請回答下列幾個問題：

① x的值為多少？你是如何知道的？

② 你用到了什麼等量公理？有沒有其他方式可以解題？

③ 請在日常生活中舉一個實例，會利用到以上的算式解題，並驗算其結果。

3. 觀察方程式$x\div(-15)=-25$，請回答下列幾個問題：

① x的值為多少？你是如何知道的？

② 你用到了什麼等量公理？

③ 請驗算x的值是否正確。

4. 觀察方程式$13=-\dfrac{1}{5}x$，請回答下列幾個問題：

① x的值為多少？你是如何知道的？

② 你用到了什麼等量公理？有沒有其他方式可以解題？

③ 請驗算x的值是否正確。

隨堂練習 3：利用等量公理解下列一元一次方程式，並驗算其結果：

① $-4.7+x=9.8$

② $\dfrac{35}{3}=x\times\left(-\dfrac{5}{9}\right)$

③ $x-(-12)=-18$

④ $x\div\left(-\dfrac{5}{9}\right)=\dfrac{35}{3}$

活動五：負數列式與等量公理綜合解題

活動目標：利用等量公理概念，討論等號出現負數的解決方式。

活動流程：

1. 觀察方程式：$\dfrac{x}{4}+3=-17$，請回答下列幾個問題：

① x的值為多少？你要如何計算？

② 驗算x的值是否正確，並說明是否有其他方法可解。

2. 觀察方程式：$-2x=-5-x$，請回答下列幾個問題：

① x的值為多少？你要如何計算？

② 驗算x的值是否正確，並說明是否有其他方法可解。

3. 觀察方程式：$2x-8=6x+8$，請回答下列幾個問題：

① x的值為多少？你要如何計算？

② 驗算x的值是否正確，並說明是否有其他方法可解。

4. 觀察方程式：$\frac{3x-5}{2}=\frac{10+x}{3}$，請回答下列幾個問題：

① x的值為多少？你要如何計算？

② 驗算x的值是否正確，並說明是否有其他方法可解。

隨堂練習 4：

利用等量公理算出下列方程式中的x值，並驗算其結果：

① $13=12x-(-31)$

② $-4x+15=15$

③ $\frac{5}{3}=-5-\frac{2x}{3}$

④ $-3.3=2.2+(-1.1x)$

⑤ $-3x+15=27-2x$

⑥ $21-(-7x)=(-4x)+(-52)$

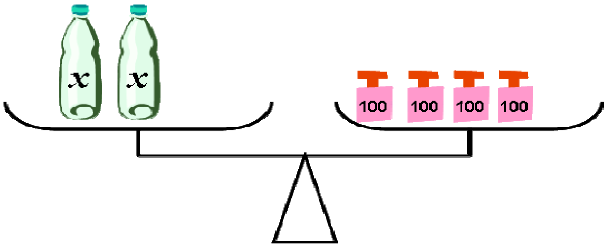
教學活動參考解答：

活動一：

1 ① $2x+100=500$

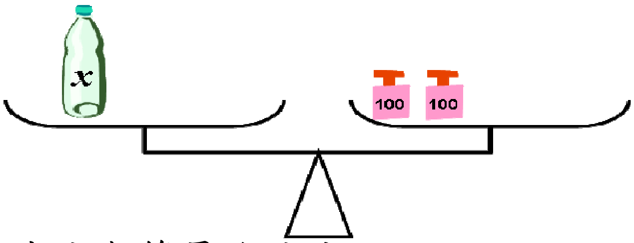
② 兩側各拿出 100 公克的砝碼（配合圖示左右對照），

$2x+100-100=500-100$，$2x=400$



兩側的物品再分別減半（配合圖示左右對照）；

$2x\div 2=400\div 2$，$x=200$



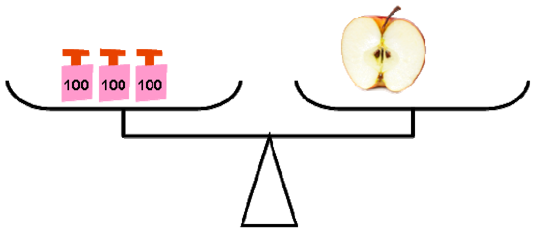
用到了等量減法與等量除法公理。

③ 瓶子重 200 公克，代入得：$2\times 200+100=500$。

2 ① $400=\frac{1}{2}y+100$

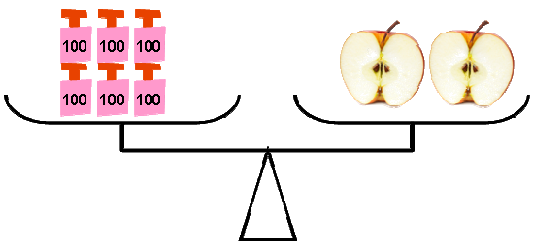
② 兩側各拿出 100 公克的砝碼（配合圖示左右對照），

$400-100=\frac{1}{2}y+100-100$，$300=\frac{1}{2}y$



再將兩側的重量分別加倍（配合圖示左右對照）；

$300\times 2=\frac{1}{2}y\times 2$，$600=y$



用到了等量減法與等量乘法公理。

③ 一顆蘋果重 600 公克，代入得：$400=\frac{1}{2}\times 600+100$。

隨堂練習 1：

① $x-25+25=32+25 \Rightarrow x=57$，$57-25=32$。

② $x+9-9=15-9 \Rightarrow x=6$，$15-9=6$。

③ $x\div 5\times 5=13\times 5 \Rightarrow x=65$，$65\div 5=13$。

④ $4x\div 4=18\div 4 \Rightarrow x=\frac{9}{2}$，$4\times\frac{9}{2}=18$。

⑤ $3x-2+2=22+2 \Rightarrow 3x=24 \Rightarrow 3x\div 3=24\div 3 \Rightarrow x=8$。

⑥ $\frac{1}{5}x+3-3=4-3 \Rightarrow \frac{1}{5}x=1 \Rightarrow \frac{1}{5}x\times 5=1\times 5 \Rightarrow x=5$。

活動二：在步驟⑥出錯，因為 $x-y=0$，等式兩側不能同除以 0，

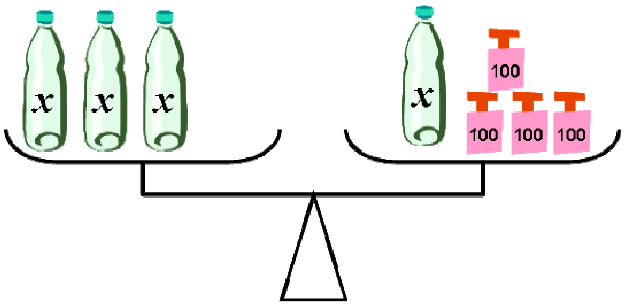
除以 0 是無意義的。

活動三：

1 ① $3x+100=x+500$。

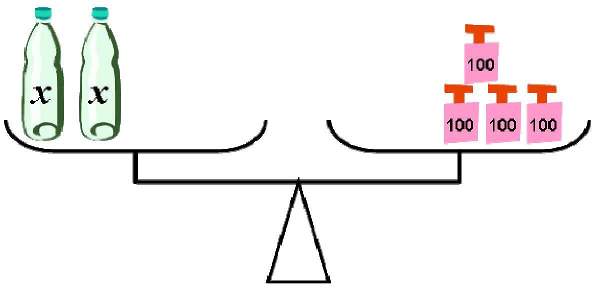
② 兩側各拿出 100 公克的砝碼（配合圖示左右對照），

$3x+100-100=x+500-100 \Rightarrow 3x=x+400$



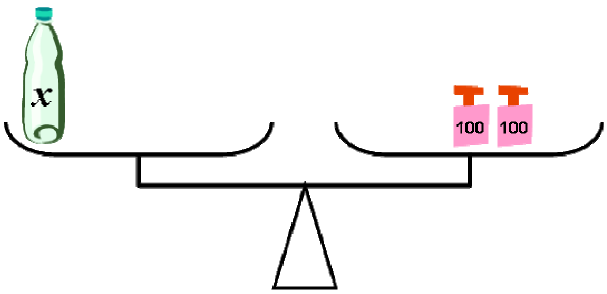
再各拿出一個瓶子（配合圖示左右對照），

$3x - x = x + 400 - x \;\Rightarrow\; 2x = 400$



最後兩側物品再分別減半（配合圖示左右對照）；

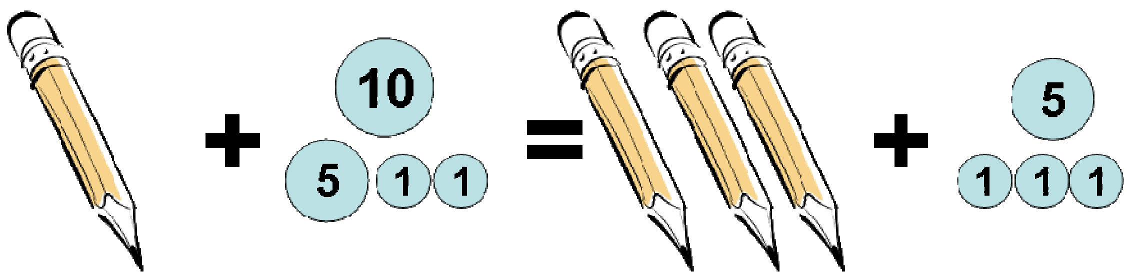
$2x \div 2 = 400 \div 2 \;\Rightarrow\; x = 200$



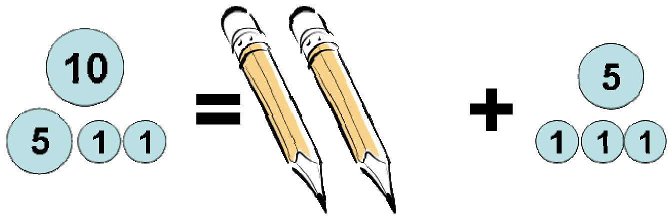
用到了等量減法與等量除法公理。

③ 瓶子重 200 公克， $200 \times 3 + 100 = 200 + 100 \times 5$ 。

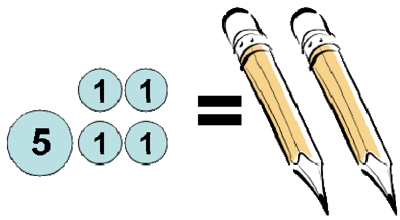
④ 可先拿瓶子再拿砝碼。

2 ① 

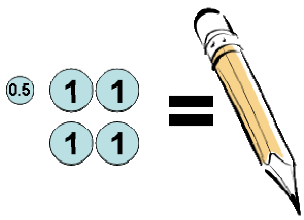
先同減x，$x+17-x=3x+8-x \Rightarrow 17=2x+8$



再同減 8，$17-8=2x+8-8 \Rightarrow 9=2x$



再同除以 2；$9=2x \Rightarrow \dfrac{9}{2}=x$



② $\dfrac{9}{2}+17=\dfrac{9}{2}\times 3+8$，等量減法、等量除法

③ 小華到文具店買鉛筆，買 1 支剩下 17 元，買 3 支還剩 8 元，請問鉛筆每支多少錢？

隨堂練習 2：

①$7x+1-1=3x+9-1 \Rightarrow 7x-3x=3x+8-3x$

$\Rightarrow 4x\div 4=8\div 4 \Rightarrow x=2$

②$3x-2-x+2=19+x-x+2 \Rightarrow 2x=21 \Rightarrow x=\dfrac{21}{2}$

③$\dfrac{15}{2}-5x+5x-\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}+13x+5x-\dfrac{5}{2} \Rightarrow \dfrac{10}{2}=18x \Rightarrow x=\dfrac{5}{18}$

活動四：

1 ① $x-16+16=-24+16 \Rightarrow x=-8$

② 等量加法

③ 參考解答：某公司上個月虧本16萬元，結果本月月初結算時共虧本24萬元，若以負號代表虧本，請問上個月初的結算為多少元？

驗算：$-8-16=-24$。

2 ① $37-(-26)=x+(-26)-(-26) \Rightarrow x=63$

② 等量減法，可去括號後利用等量加法：

$37=x-26 \Rightarrow 37+26=x-26+26 \Rightarrow x=63$

③ 參考解答：某水庫的水位逐月下降，已知這個月的水位線位於37公分處，且上個月下降了26公分。若以負號代表水位下降，試問上個月的水位線位於多少公分處？

驗算：$63-26=37$

3 ① $x\div(-15)\times(-15)=-25\times(-15) \Rightarrow x=375$

② 等量乘法

③ $375\div(-15)=-25$

4 ① $13\div\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{5}x\div\left(-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow x=-65$

② 等量除法，化簡後等量乘法：$13=-\frac{x}{5}$

$\Rightarrow\ 13\times(-5)=-\dfrac{x}{5}\times(-5)\ \Rightarrow\ x=-65$

③ $13=-\dfrac{1}{5}\times(-65)$

隨堂練習 3：

① $x=14.5$（過程及驗算略） ② $x=-21$（過程及驗算略）

③ $x=-30$（過程及驗算略） ④ $x=-\dfrac{175}{27}$（過程及驗算略）

活動五：

1 ① $x=-80$，先等量減法再等量乘法。

② 驗算：$\dfrac{-80}{4}+3=-17$，先等量乘法再等量減法。

2 ① $x=5$，利用等量加法。

② 驗算：$-2\times5=-5-5$，先等量加法再等量除法。

3 ① $x=-4$，先等量減法再等量除法（未知數在等式右方）。

② 驗算：$2\times(-4)-8=6\times(-4)+8$，先等量加法、等量減法再等量除法（未知數在等式左方）。

4 ① $x=5$，等量乘法、等量加法、等量減法與等量除法。

② $\dfrac{3\times5-5}{2}=\dfrac{10+5}{3}$，通分後再進行方程式的運算。

隨堂練習 4：

① $x=-\frac{3}{2}$（過程及驗算略）② $x=0$（過程及驗算略）

③ $x=-10$（過程及驗算略）④ $x=5$（過程及驗算略）

⑤ $x=-12$（過程及驗算略）⑥ $x=-\frac{73}{11}$（過程及驗算略）

七、指定作業：

1. 分別說明下列題目中的x，要利用哪一些等量公理解出？

① $x+12=-13$　② $-\frac{32}{5}x=-4\frac{4}{5}+x$　③ $-\frac{12}{7}=\frac{x}{1.2}$

④ $x-\frac{1}{3}=2x+\frac{5}{3}$　⑤ $5+1.2x=2x-1.3$

2. 利用等量公理，解出下列方程式中的x：

① $3x-5=-13$　② $-5x=3-2x$　③ $-33=7x-33$

④ $31-2x=-11-5x$　⑤ $\frac{5-2x}{3}=\frac{3x+1}{2}$

指定作業參考解答：

1 ①等量減法（或等量加法）

②等量減法（或等量加法）＋等量除法（或等量乘法）

③等量乘法（或等量除法）

④等量減法（或等量加法）(＋等量除法或等量乘法）

⑤等量加法（或等量減法）＋等量減法（或等量加法）＋等量除

法(或等量乘法)

2 ① $x=-\frac{8}{3}$ ② $x=-1$ ③ $x=0$ ④ $x=-14$ ⑤ $x=\frac{7}{13}$

八、教學注意事項:

1. 等量公理為移項法則的前置學習,務必確認學生清楚相關概念,並做精熟練習,後續較易達到學習遷移的效果;另外活動一至活動五與課後練習每個活動進行時間約 15～20 分鐘(視學生程度與課程進行彈性調整),整個主題進行完畢約二節課～二節半。而相關教材若要改版為學生上課用學習單,應在題目後多留空白,以供學生計算寫答使用。

2. 此單元開始前,可再強調未知數假設與化簡的意義,最重要的目的即為接下來這兩個章節的核心內容,要如何列式與解方程式,其中列式於應用問題時所需的是文字轉換符號的能力,學生要能找出文字敘述的關鍵詞與關鍵句,需要較長時間的練習與指導。而解方程式則是程序執行的應用,只要能確實了解每一種方法的進行步驟與限制,利用等量公理與移項法則均可正確地計算出正確的答案值;另外可與學生進行討論"="的使用時機,區分出恆等式(如:$2x+3x=5x$)與方程式(如: $2x+3=5x$)的差異性。

3. 在此要求學生進行驗算，除了確認所計算出答案的正確性外，另外可說明在進行上一章節「代數式的化簡」時，若題目的化簡較為複雜(如分數或雙重以上括號)，亦可利用將原式、中間步驟或答案代入部份簡單的數字（如 0 或 1)，進行答案的簡單確認。

4. 活動一是小學等量公理的複習，透過逐次減項的反序運算，得到原始的未知數x，在此建議底下各題在學生尚未熟練前，教師不妨配合圖片操作，在原題方程式兩側分別輔以相同強調顏色粉筆作註記（例如此題可利用紅色或黃色等較顯目的顏色於等式兩側同減 100)；此外可利用天平的概念，讓學生了解等號兩邊相同的意義，建議可透過從不同兩側看天平，了解$2x+100=500$與$500=2x+100$的概念，而寫成解：$x=200$（而不是$200=x$）的形式主要原因是約定成是，表現方式讓人一目瞭然；最後一個步驟可透過兩側分別分成兩份的方式，讓學生更清楚等量除法的意義；另外「一元一次方程式」的名詞，教師亦可多舉例再解釋。

5. 活動二主要在討論等量除法時，除數不能為 0 的限制，教師可針對為何除數不能為 0 再與學生作討論，主要原因是若除

數為 0，則利用直式除法後的商將無法確定，例如：$0\overline{)1}$，商式並無法確定，而在除法中的商要唯一確定（well－defined)。另外此活動可搭配接下來要授課的移項法則，進行移乘作除容易犯錯（如：變號）的學生進行比對參照。

6. 活動三主要是介紹等號兩側皆有未知數的解法，問題 1.④主要在強調未知數與數字可分別進行等量減法的運算（不必依序)；另外問題 2. 主要是透過列式與實物的比較（自行列式說明)，加強學生等量公理的應用，另外再強調未知數放於等號左右邊等價的概念（即$\frac{9}{2}=x$與$x=\frac{9}{2}$意義相同)，而答案為分數的目的是為了避免有些學生會直接利用數字（整數）代入得到結果，並訓練能逐漸將實際圖像轉化為心智圖像，再透過生活中的舉例，連帶思考接下來將遇到的應用問題。最後在隨堂練習 2 時，建議可讓學生逐漸接受等號兩側同時加(減)符號及數字，以便讓學生將等量公理的步驟簡單化，作為接下來移項法則的先備知識。

7. 活動一與活動三的實物操作，可配合算式左右對照，讓學生更易產生心智圖像，進行等量公理的運算；透過算式的記錄與結果的驗證，讓學生從國小的具體圖像到磁鐵的替代圖

像，最後於心中產生心智圖像，以替代實物的運算。

8. 活動四以負數進行列式，並以等量公理進行解題，與活動一最大的差異在題目中已出現負數，並能利用實例的舉出，作算式與實際應用的比較；另外也利用去括號、符號化簡等規則，強調一題多解的概念；最後配合題目的練習，作算式等號單邊有未知數的運算。

9. 活動五則是綜合活動一至活動四，作方程式運算中一些學生較容易產生迷思的概念，包含加/減與乘/除的運算順序，方程式包含$-x$的運算，等式兩邊同時帶有x的運算順序等概念，並藉由題目的綜合練習，讓等量公理的運算更為熟練。

10. 教師於活動一～活動五的解題建議於算式兩側同時進行等量公理運算的紀錄，待學生熟練後於指定作業再利用口頭說明等量公理的運算，並輔以運算後的結果紀錄，以利接下來移項法則的教學。另外此處等量公理的運算步驟，建議由完整漸近至省略部份步驟，讓學生接著對於移項法則能產生潛移默化的學習效果。

11. 此主題著重等量公理的使用，目的則是為了作為接下來移項法則的先備概念，題目建議不必過難，以活動五與指定作業

的題目類型即可，去括號及較複雜的分數與小數解題建議於移項法則再進行練習，此處的解題步驟以 3～5 步上限為原則。另相關練習題不宜出現「無解」或「無限多解」題型，以避免初學學生造成混淆。

12. 指定作業第 1 題主要在看學生的等量公理是否能靈活運用，呈現的答案只要能說明清楚，順序與方法可不唯一。例如第①題：$x+12=-13$；學生可利用反運算的概念，將等式兩側同減 12；也可利用反元素的概念，將等式兩側同時加上 12 的相反數－12 進行運算（以下各題亦同)。

13. 學生在國小學習到的未知數，主要是位置的概念，因此等式的左右邊僅單邊出現x，到國中後未知數轉換為可運算的變數，因此在等式的左右方可同時出現x，透過等量公理作變數的運算，並要求學生進行驗算，以確認列式過程與結果確認的可逆性。另外可強調等量公理的使用，主要是透過減法與除法兩種運算，將原方程式的解正確解出，而加法與乘法則為反運算，可與其交替使用（如指定作業的第 1. 題)。至於部份學生會利用逆運算的方法解題，造成不喜歡用等量公理，建議可利用不方便利用逆運算方法的題目（如指定作業

2.④、⑤的類似題)，讓學生了解國中方程式解題與國小方式的最大差異性。

14. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

15. 在各活動進行時，可隨機指定學生口頭回答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其它同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 99 學年度國小各版本第十二冊數學課本；
2. 99 學年度國中各版本第一冊數學課本；
3. 教師可針對程度較好的同學輔以乘法公式討論除數不能為 0 的補充，或於八年級時再進行說明：

《補充一》：因式分解說明「2＝1」

① $a=b \Rightarrow a^2=ab$（等量乘法）

② $a^2-b^2=ab-b^2$（等量減法）

③ $(a+b)(a-b)=b(a-b)$（因式分解）

④ $(a+b)=b$（等量除法） $\Rightarrow$ 步驟④錯誤！！

⑤ $b+b=b$（$a=b$代入）

⑥ $2b=b$（化簡）

⑦ $2=1$（當$b=0$時此處亦為錯誤）

《補充二》：因式分解說明「$2=3$」

① $4-10=9-15$（均為-6）

② $4-10+\frac{25}{4}=9-15+\frac{25}{4}$（等量加法）

③ $\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$（乘法公式）

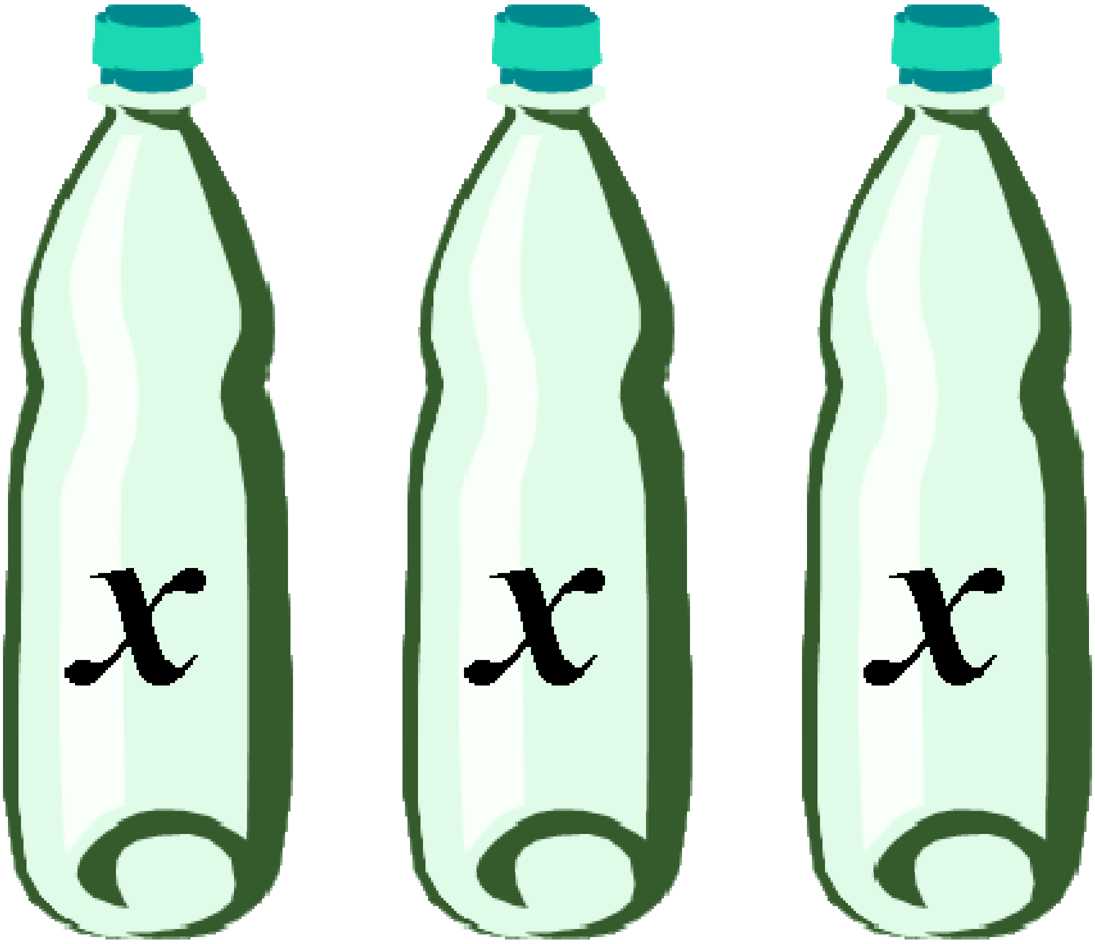
④ $2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$（同開根號）$\Rightarrow$ 步驟錯誤！！

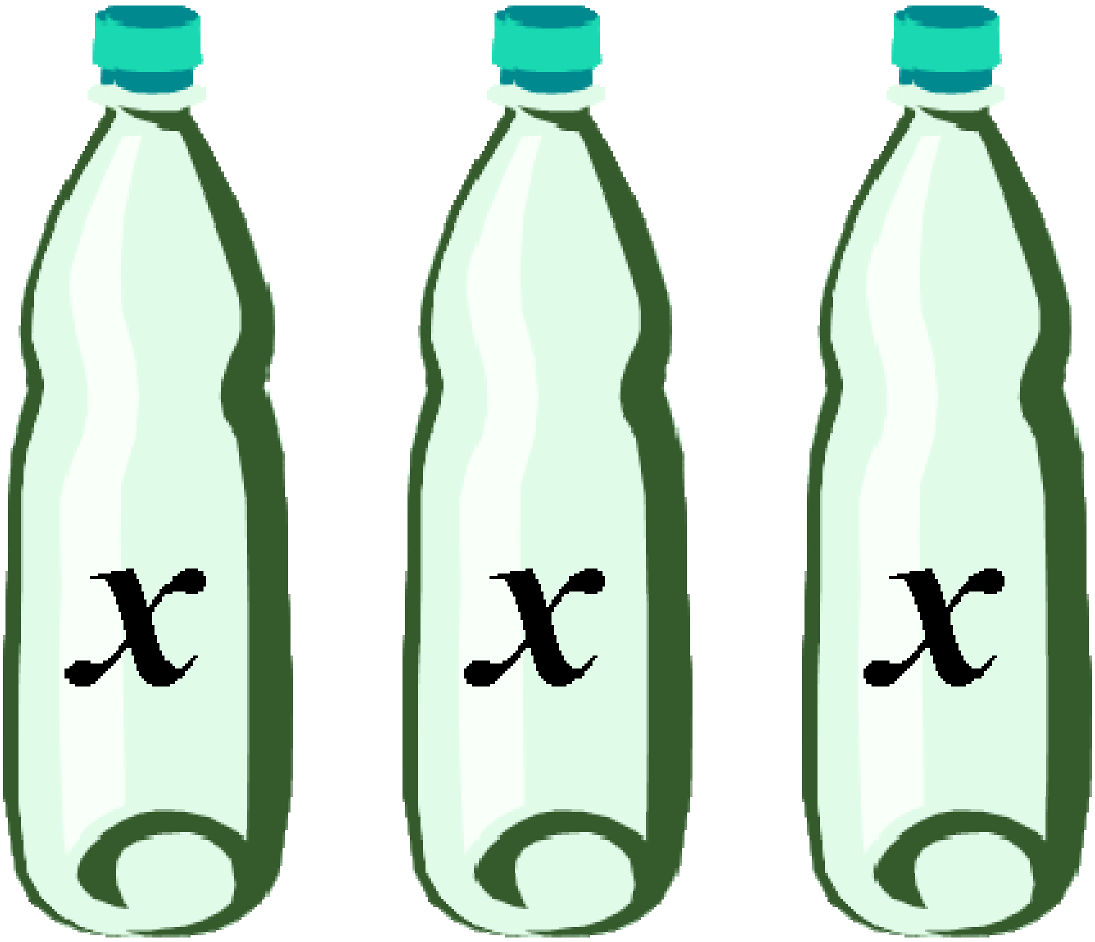
⑤ $2=3$（等量加法）

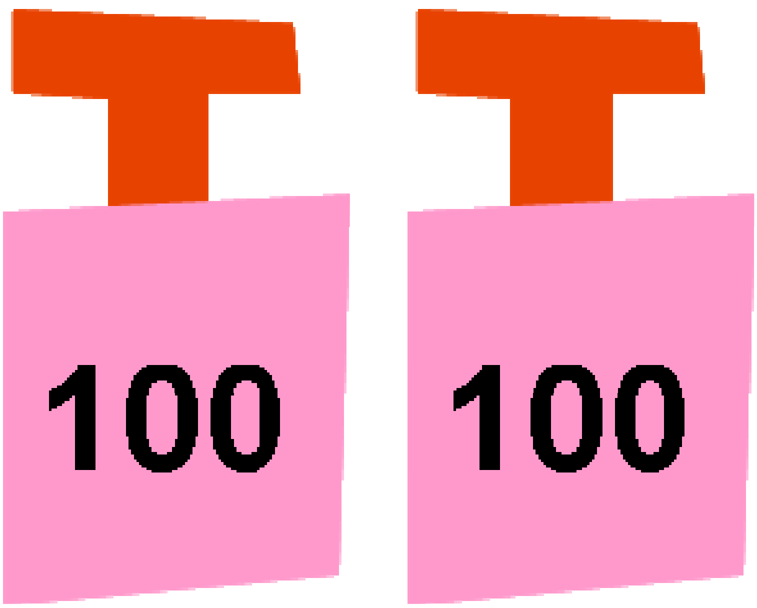
4.維基百科。無效證明：(檢索日期：2013/12/27)

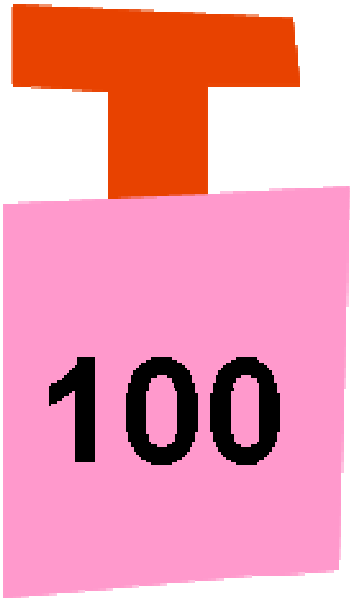
http://zh.wikipedia.org/zh-tw/無效證明

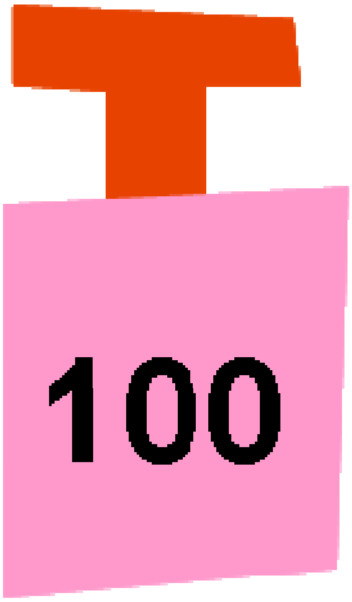
實物圖卡（教師可視需求，自行放大列印護貝裁切，加上磁性貼片後使用）：

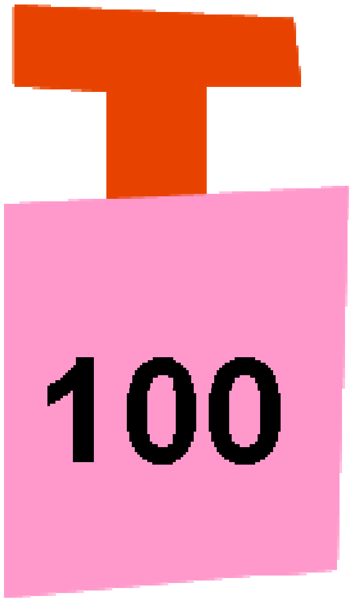


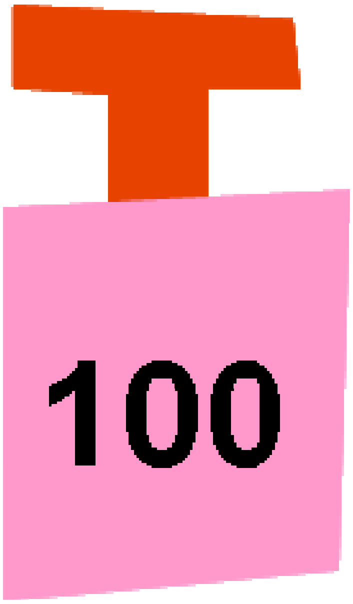

x
x
x

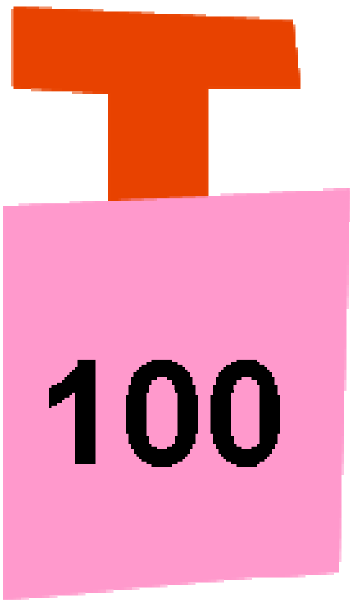

100
100

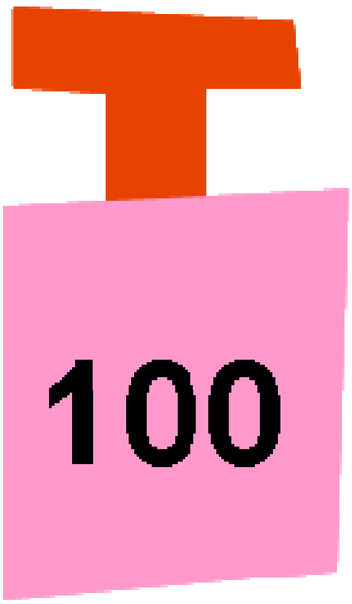

100

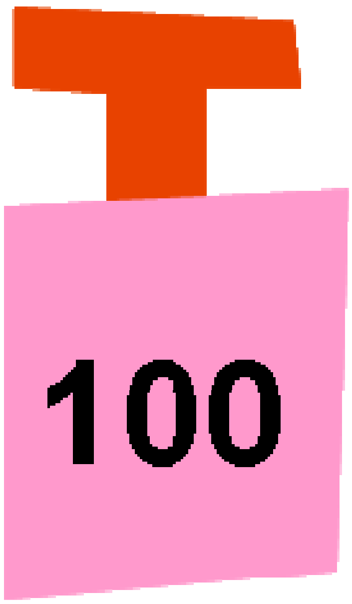

100

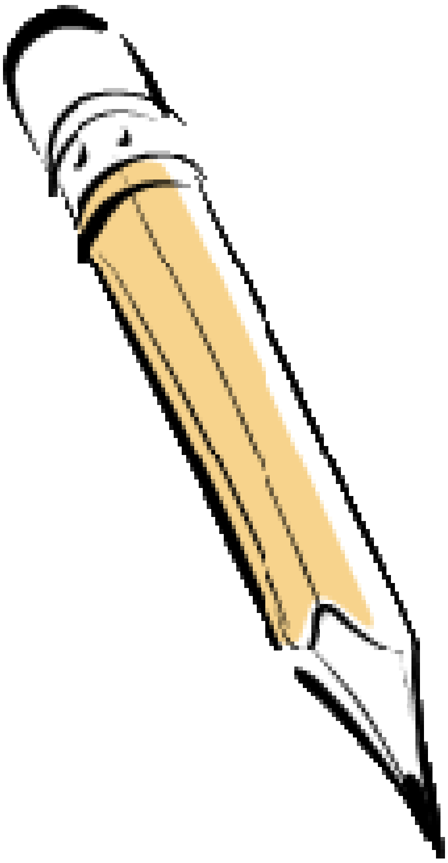

100

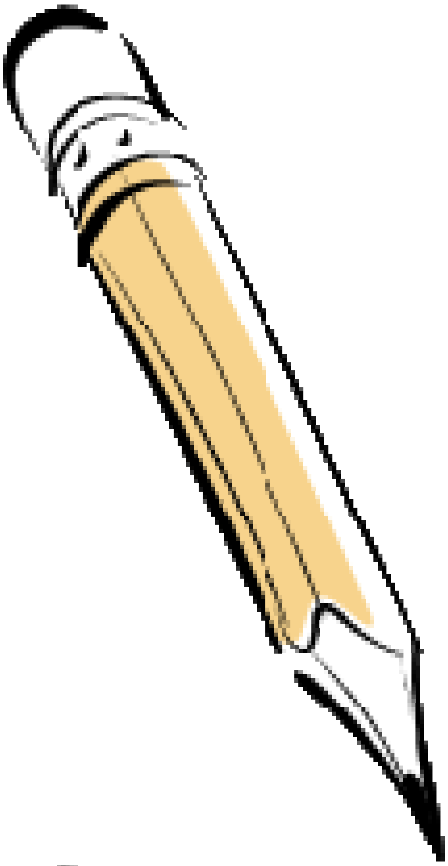

100

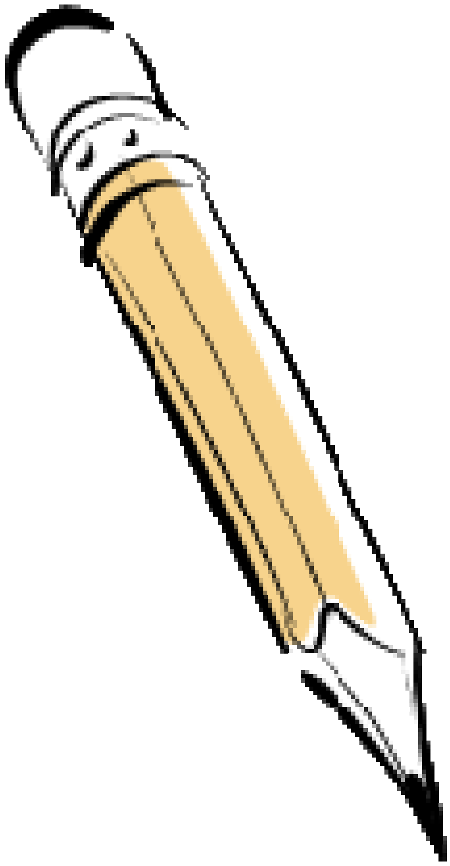

100

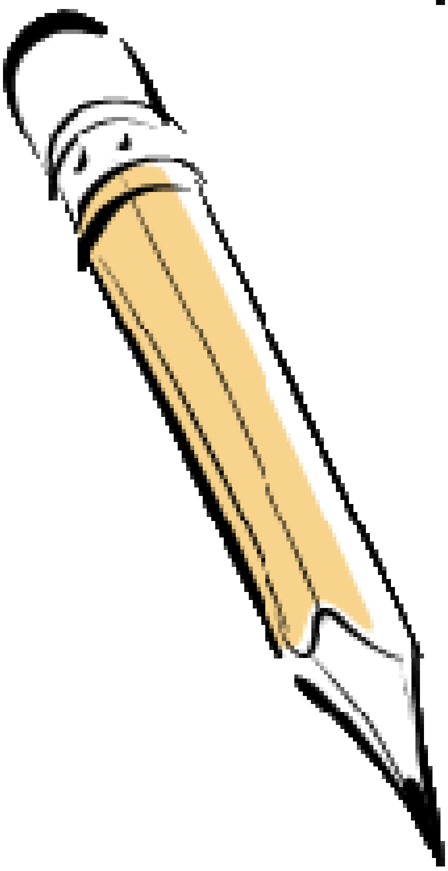

100

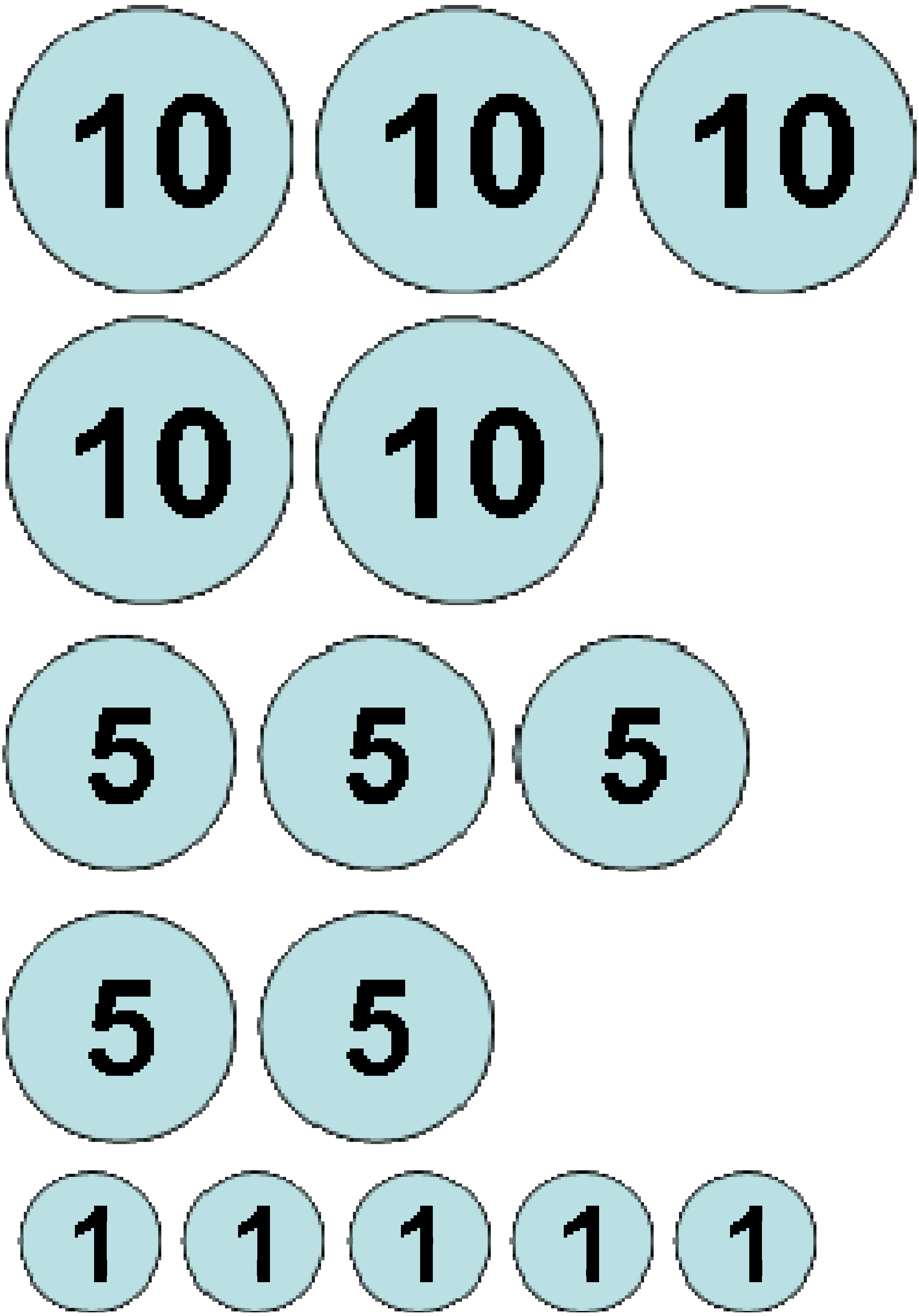

100










10
10
10
10
10
5
5
5
5
5
1
1
1
1
1


1
1
0.5
0.5
0.5
0.5

主題3—5：解一元一次方程式

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　**撰寫者：**李政豐

二、先備知識：

（一）能理解加減互逆，計算熟練，並運用於驗算與解題。

（二）能理解乘除互逆，計算熟練，並運用於驗算與解題。

（三）能理解負數的特性，並熟練數（含小數、分數）的四則混合運算。

（四）能熟練數的運算規則， 如交換律、結合律、分配律。

（五）能熟練等量公理及移項法則。

三、教學目標：

（一）能熟練符號的意義及其代數運算，最初引進代表數的符號，應讓學生了解，它其實可當成一個數，來做四則運算，不僅是一個文字而已。

（二）能用符號算式記錄生活情境中的數學問題，能轉化日常生活的未知數，為解方程式做基礎。

（三）能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中，列出一元一次方程式。

（四）能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算，必須熟

練等量公理，才能以此為基礎，進一步推導出移項法則。

（五）能熟練的利用移項法則來解一元一次方程式，並作答案的檢核驗算。

四、教學時間：65 分鐘（一節半）

五、教學說明：

（一）本節的重點在教導學生如何將數學問題中的未知數以代表數的符號 x, y, z……來代表它。

（二）讓學生了解：代表數的符號 x, y, z 也能夠像一般的數一樣，做四則運算。

（三）一旦我們將未知數以代表數的符號來表示之後，我們就能夠將數學問題以方程式來表達(即所謂的列式)。

（四）列式完成之後，在開始解一元一次方程式，初期要充分引導，能以等量公理解一元一次方程式，並做基本的代回驗算。

（五）學生以等量公理解一元一次方程式的經驗成熟之後，就要教導學生能利用移項法則來解一元一次方程式，並作基本的答題過程審驗與答案檢核。

（六）如果等量公理、移項法則的解題步驟均已熟練，則可

以訓練學生各種簡化計算的規則與方法。以期達成快速解題之目標。

（七）本節的重點在列一元一次方程式與解一元一次方程式，縱然學生假設未知數的方法有所不同，但必須容許學生以各種不同的列式方法或解方程式，只要他方法正確且答案對。

六、教學活動：

活動一：（基本計算題）

小彤為了要體會工讀的生活，在暑假期間打工，想賺點學費幫助家計，已知平時（週一到週五）的工資比假日（週六、週日）每天少 100 元，八月份有 31 天，其中有 8 個假日，而小彤八月份每天都上工，沒有休假，領了月薪 25600 元。請問小彤平時（週一到週五）的工資，一天是多少錢？

活動目標：

1. 以學生為幫忙家計而打工的情境，鼓勵同學勤奮好學，努力向上的精神。
2. 引導學生以各種不同的假設法來列方程式，最後都能得到相同的答案。

3. 鼓勵同學根據自己在解題當中的想法與靈感，直觀的照自己的方式來解題。

4. 當學生遇到困難或錯誤時，老師應及時提出協助辦法或解決方案，以增進學生的列式或解方程式的能力。

5. 老師站在輔助的立場，學生位居主動的角色，讓學生能充分發揮思考、創造的能力，達到自我解題、融會貫通的學習目標。

活動流程：

1. 如果把小彤平時(週一到週五)的工資設為 x，則假日(週六、週日)工資為($x+100$)。

  (1) 如果把平時與假日分開計算，列式為：

  $23x+8(x+100)=25600$。

  (2) 如果把 31 天全看成平時工資，列式為：

  $31x+8\times100=25600$

  (3) 若把 31 天全看成假日工資，列式為：

  $31(x+100)-23\times100=25600$

  解方程式得到平時工資 x，即為所求。

2. 如果把小彤假日的工資設為 x，則平時工資為($x-100$)

  (1) 如果把平時與假日分開計算，列式為：

  $23(x-100)+8x=25600$

（2）如果把 31 天全看成平時工資，列式為：

$31(x-100)+8\times100=25600$

（3）若把 31 天全看成假日工資，列式為：

$31x-23\times100=25600$

解方程式得到假日工資 x，則平時工資 $(x-100)$，即為所求。

3. 如果能讓學生用各種不同的假設法都演算一次，而且答案都正確，那就是融會貫通了。

4. 如果學生用不同的假設法，卻無法算得相同的答案，老師應追根究底的把原因找出來，或把計算錯誤找出來，不可只公佈答案，就算完成教學流程，否則學生無法做診斷學習。

5. 當各種假設法與解題過程都已經完整的嘗試一次，接下來老師要分析哪一種假設法最簡單，最容易計算，讓學生能體會最適合自己想法的計算流程，達到精簡快速的解題目標。

活動二：

一年甲班有 40 位學生，第三次段考全班數學平均是 63.8 分，其中有一位同學叫阿德，他的數學特別強，數學老師估計:如果阿德的成績不列入平均，其餘 39 位同學的平均只有 63 分，請問阿德考了多少分？

活動目標：

1. 先讓同學不需用未知數的符號，僅以算術解題。以方便與後續的代數解題方法相互對照與接軌。
2. 指導學生把數學問題中想要求算的數，列為未知數 x。
3. 藉由算術平均數的概念，引導學生用總分列方程式。
4. 讓學生熟悉等量公理、移項化簡的步驟。
5. 讓學生能主動利用解方程式的方法，解出一元一次方程式的未知數 x。

活動流程：

1. 說明算術平均數的涵意。
2. 說明算術平均數與總分的關係。

   阿德的數學成績為 $40\times63.8-39\times63=95$（分）
3. 令阿德的成績為 x，之後老師需要走動，以觀察同學列式的情形，或讓同學發問、互相討論，以觀察同學的列式是否正確。

   $40\times63.8=39\times63+x$
4. 以問答方式引導同學解題，將有未知數的項放在等號的一邊，把沒有未知數的項放在另外一邊，等號兩邊的式子分別化簡後，再解出未知數。

$x\ =40\times63.8-39\times63$

特別需要先說明利用等量公理的解法，這是最基本的要領，然後再逐漸轉化成使用移項法則的解法，最後必須說明兩種方法有異曲同工的效果，但是移項法則是未來必須熟練且較為快速的方法。

5. 審驗同學的答案，並公開提出各種解題說明。藉由同儕學習的功能，讓同學能彼此互相觀摩，互相討論，達到預定的學習目標。

活動三：

『希臘選集』的書中有一個問題：德莫查爾斯一生中的四分之一是童年，五分之一是青年，三分之一是中年，還有 13 年是老年，請問德莫查爾斯有多大年紀？

活動目標：

1. 讓學生熟悉列式中分數的假設法。
2. 讓學生了解方程式的等號好比天平，兩邊的重量必須相等。
3. 不管天平兩邊的法碼，是代表數字或符號，都需要讓他們兩邊的值相等。
4. 學生宜熟悉通分，合併含未知數的項，讓等號的兩邊，分別是一邊是未知數與一邊是已知數。
5. 最後能用等量公理或移項法則解得未知數。

活動流程：

1. 我們想要算德莫查爾斯有多大年紀，於是我們要假設德莫查爾斯一生的年紀為 x，如此的假設最為方便而容易計算。其實我們也可假設不同的未知數為 x，但是整個列式的過程將變成比較麻煩，因此未知數的選定是決定解方程式計算困難或簡單的一個重要關鍵。
2. 四分之一是童年，因此童年令為 $\frac{x}{4}$。
3. 五分之一是青年，因此青年令為 $\frac{x}{5}$。
4. 三分之一是中年，因此中年令為 $\frac{x}{3}$。
5. 13 年是老年，就令它是常數項。
6. 將以上的條件，列式如下：$x=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+13$。
7. 透過等量公理或移項法則，化簡之後，解方程式。

活動四：

今年爸爸的年齡是小桃年齡的 16 倍，如果再過 8 年後，爸爸的年齡變成是小桃年齡的 4 倍，請問今年小桃幾歲？

活動目標：

1. 老師要讓同學了解：要把什麼東西當成未知數 x？
2. 讓同學能根據假設的未知數，列出相對應的其他變量，能主動且獨立的列方程式，老師需要查看同學列式正確與否。

3. 以問答方式，點選幾位同學，引導同學列式的過程，詢問他所列的方程式是否正確。

4. 走動觀察，看同學演算流程是否合理，檢核解得的未知數是否正確。

5. 宜公開說明解題步驟與答案，求得一致性的標準。

6. 培養同學對數字變化的感覺，尤其是數的增量與倍數變化的直觀性。

活動流程：

1. 要讓同學知道，問題中「今年小桃幾歲」，就是我們要假設的未知數 x（求算的是什麼，我們就把它當成 x）。

2. 今年小桃年齡是 x，爸爸的年齡是 $16x$。

3. 再過 8 年後小桃年紀是（$x+8$），爸爸的年齡是（$16x+8$）。

4. 讓同學自己能夠主動列式，老師需要走動觀察，看列式是否正確，或以點選同學回答，以了解同學列式的基本假設法是否正確。

5. 再過 8 年後，爸爸的年齡變成是小桃年齡的 4 倍。

$$(16x+8)=4(x+8)$$

會利用乘開、移項法則、等量公理來解題。

$$16x+8=4x+32 \qquad 16x-4x=32-8$$
$$12x=24 \qquad x=2$$

6. 代回原方程式，驗算答案的合理性。

$(16\times2+8)=4\times(2+8)$ 符合題意

活動五：

爺爺、父親、兒子，祖孫三代同堂，三人的年齡和是 100 歲，已知爸爸年齡是兒子的 16 倍，爸爸年齡的兩倍加上兒子年齡恰好是爺爺的年齡，請問爺爺、父親、兒子的年齡各是多少？

活動目標：

1. 讓學生能直觀的選定，哪個變量（爺爺的年齡、父親的年齡、或兒子的年齡）當作未知數 x 會讓方程式的計算最為簡單。

爺爺年齡	父親年齡	兒子年齡	方程式
x	$\frac{16}{33}x$	$\frac{1}{33}x$	$x+\frac{16}{33}x+\frac{1}{33}x=100$
$2x+\frac{1}{16}x$	x	$\frac{1}{16}x$	$(2x+\frac{1}{16}x)+x+\frac{1}{16}x=100$
$33x$	$16x$	x	$(2\times16x+x)+16x+x=100$

觀察上面未知數的選定，以兒子年齡設為 x 最為簡單，方便計算。

（1）請計算以爺爺年齡設為 x，所得到方程式的解

$$x+\frac{16}{33}x+\frac{1}{33}x=100$$

（2）請計算以父親年齡設為 x，所得到方程式的解

$$(2x+\frac{1}{16}x)+x+\frac{1}{16}x=100$$

（3）請計算以兒子年齡設為 x，所得到方程式的解

$$(2\times16x+x)+16x+x=100$$

2. 一旦未知數 x 選定，學生要能夠根據未知數 x，假設出其他與 x 相關的變量，例如:我們把兒子的年齡當作 x，那麼爺爺的年齡、父親的年齡要如何假設？
3. 讓學生能根據上面的假設，引導學生列出方程式的能力。
4. 讓學生熟悉等號兩邊分別放置未知數與已知數，要有合併化簡的基本計算能力。
5. 訓練學生由未知數的假設開始，一直到解得未知數的值為止，對整個代數運算的感覺、習慣與素養。
6. 需要將答案代回原式，符合題意的才是正確答案。

活動流程：

1. 把兒子的年齡當作 x，同時向學生分析：如果把爸爸年齡當 x，或把爺爺的年齡當 x，在計算上，會產生哪些困擾。當然也要向學生表明：把爸爸年齡當 x，或把爺爺的年齡當 x，都同樣可以解出爺爺、父親、兒子的年齡，只是計算時間的長短，或計算之繁雜與簡單，有所差別而已，並不是絕對不可。
2. 爸爸年齡是兒子的 16 倍，爸爸年齡應是 $16x$。
3. 爺爺的年齡等於爸爸年齡的兩倍加上兒子年齡，所以爺爺的年齡應假設為 $2(16x)+x$。

4. 三人的年齡和是 100 歲，列出方程式。

$100 = x + 16x + [2(16x) + x]$

5. 整理合併等號兩邊的未知數及已知數，得到

$50x = 100$

6. 解出未知數 $x = 2$。代回原題，符合。

活動六：(曹沖秤象)

曹沖(196 年－208 年)，字倉舒，中國東漢、三國時代人物，曹操之子，由環夫人所生，有神童之名聲，曹沖自小生性聰慧，五、六歲的時候，智力就和成人相仿。孫權曾送給曹操一頭大象，曹操想知道大象的重量，問遍了手下的人，都想不出秤象之法，因為沒有那麼大的秤。曹沖想出一法：把大象放進船裡，記錄水位到達船舷的位置；牽出大象，將石塊往船上裝，直到水位到達先前記錄的位置；然後分批秤出石塊的重量，併疊加得出總重量。這總重量即等於大象的重量。曹操非常高興，按照他說的方法秤出了大象的重量。

已知曹沖準備了等重的大石頭 1000 顆，等重的小石頭 1800 顆。然後把大象牽入船艙，記錄水位到達船舷的位置，再把大象牽出船外。

（1）當曹沖把大石頭1000顆全部都放入船艙，還需要再放600顆小石頭，水位才會到達先前記錄的位置。

（2）當曹沖把小石頭1800顆全部都放入船艙，還需要再放400顆大石頭，水位才會到達先前記錄的位置。

（3）只知道一台牛車載重2000斤，曹操總共派了19台牛車才將所有的石頭運到河邊。

請問：

（1） 一顆大石頭的重量是一顆小石頭重量的多少倍？

（2） 一顆小石頭重量是多少？

（3） 一顆大石頭重量是多少？

（4） 大象有多重？

活動目標：

1. 讓學生了解有關一元一次方程式發展的數學歷史與背景，引起學生學習數學的動機。
2. 藉由曹沖秤象的方程式，引導學生學習以代表數的符號列方程式的要領。
3. 與學生共同合作討論，利用等量公理、移項法則，試圖引導同學，逐步熟悉解方程式的步驟與方法。

活動流程：

1. 大石頭1000顆＋小石頭600顆＝小石頭1800顆＋大石頭400顆。

   移項化簡：大石頭600顆＝小石頭1200顆

   因此一顆大石頭的重量是一顆小石頭重量的2倍

2. 1000顆大石頭＋1800顆小石頭＝3800顆小石頭＝38000斤

3. 小石頭一顆10斤

4. 大石頭一顆20斤

5. 大象重 $1000\times20+600\times10=26000$（斤）

教學活動參考解答：

活動一：設平時一天工資為 x，則 $23x+8(x+100)=25600$

得到平時（週一到週五） 一天的工資是800元。

活動二：$40\times63.8=39\times63+x$

得到 $x=95$，即阿德考了95分。

活動三：$x=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{3}+13$，$x=60$

活動四：小桃今年 x 歲，爸爸的年齡是（$16x$）歲。

再過8年後，小桃$(x+8)$歲，爸爸的年齡是$(16x+8)$歲。

爸爸的年齡變成是小桃年齡的4倍：

列式$(16x+8)=4(x+8)$，解 $x=2$。即小桃今年2歲。

活動五：$100=x+16x+[2(16x)+x]$

整理合併等號兩邊的未知數及已知數，得到

$50x=100$，解得 $x=2$

即爺爺 66 歲、父親 32 歲、兒子 2 歲的年齡

活動六：設大石頭重量是小石頭重量的 x 倍：

$1000x+600=400x+1800$

$600x=1200 \Rightarrow x=2$

令一顆小石頭重量是 y

$(1000\times 2+1800)y=38000 \Rightarrow y=10$

大象重$=20\times 1000+10\times 600=26000$（斤）

七、指定作業：

1. 在夠大的培養器皿中，食物與氧氣都充分的條件下，合適草履蟲生殖繁衍的環境。假設每個草履蟲在此環境中，五小時進行一次分裂生殖：第一次分裂，由一個變成兩個，再一次分裂，兩個變成四個，且不會死亡，經過 20 小時之後，培養器皿中共有 160 個草履蟲，請問剛開始的時候，培養器皿中有幾個草

履蟲？

（1）假設剛開始的時候，培養器皿中有 x 個草履蟲。以 x 表示下列問題。

則五小時後有_____（甲）_____個草履蟲。

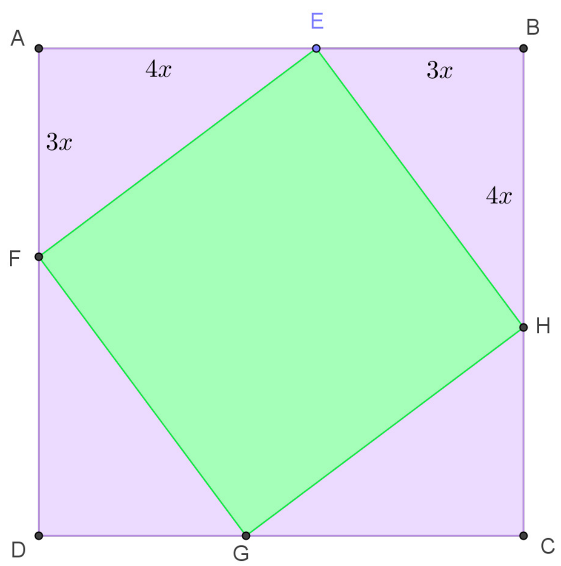
經十小時後有_____（乙）_____個草履蟲。

十五小時後有_____（丙）_____個草履蟲。

二十小時後有_____（丁）_____個草履蟲。

（2）由此可解得，剛開始的時候有______個草履蟲。

2. 如下圖，一個面積為 196 平方單位的大正方形中，包含四個相同的直角三角形及一個小正方形，已知直角三角形的長股比短股是 4:3，則小正方形的面積是多少？小正方形邊長為何？



（1）一個面積為 196 平方單位的大正方形，其邊長為多少？同學可由 10×10＝___（甲）___，11×11＝___（乙）___，12×12＝___（丙）___13×13＝___（丁）___，14×14＝___（戊）___，找出大正方形的邊長。

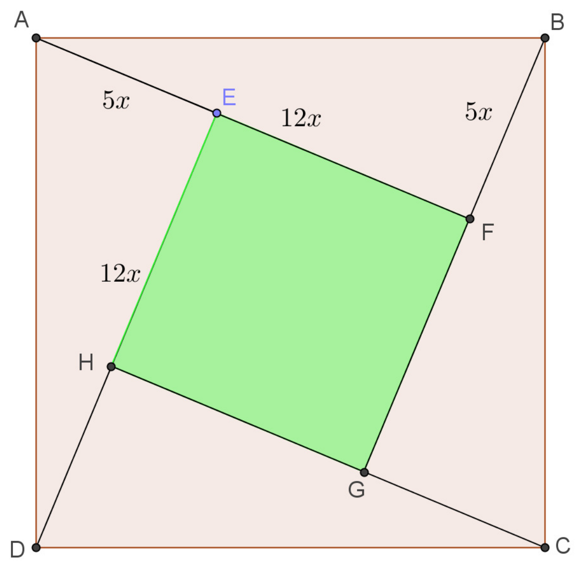
（2）設直角三角形的長股長為 4 x，則短股為___（甲）___，由上圖若把大正方形邊長用 x 表示為___（乙）___，由此可解得 x ＝___（丙）___。

（3）請您算出一個直角三角形的面積＝______。

（4）把大正方形面積扣除四個直角三角形的面積，可得到小正方形面積＝______。

（5）小正方形邊長為______。

3. 如下圖，一個大正方形中，包含四個相同的直角三角形及一個小正方形，已知小正方形面積為 49 平方單位，且已知直角三角形的長股比短股是 12：5，則大正方形的面積是多少？大正方形邊長為何？



（1）假設直角三角形的短股是 $5x$，則長股用 x 表示是__（甲）__，小正方形的邊長用 x 表示是__（乙）__，已知小正方形面積為 49 平方單位，故小正方形邊長是__（丙）__，由此可得 $x=$__（丁）__。

（2）大正方形面積為 4 個直角三角形的面積加上小正方形面積，故大正方形面積為__（甲）__。大正方形邊長為__（乙）__。

4. 中國古代的數學作品：【孫子算經】裏有一則『雞兔同籠』的問題：今雞兔同籠，上有 35 頭，下有 94 足，問雞兔各幾何？

（1）假設雞有 x 隻，則兔以 x 表示有__（甲）__隻，雞兔共有足的數目以 x 表示為__（乙）__，因為題目中說「下有 94 足」，因此解得 $x=$__（丙）__，也得到兔有__（丁）__隻。

（2）假設兔有 y 隻，則雞以 y 表示為__（甲）__隻，雞兔共有足的數目以 y 表示為__（乙）__，因為題目中說「下有 94 足」，因此解得 $y=$__（丙）__，也得到雞有__（丁）__隻。

5. 小明想要循序漸進的鍛鍊身體，第一天嘗試做了幾個伏地挺身之後，就規定自己以後每天都要比前一天多做一個伏地挺身，這樣連續做了 10 天不間斷，10 天總共做了 145 個伏地挺身，請問小明第一天做了幾個伏地挺身？

（1）假設小明第一天做了 x 個伏地挺身，則第二天做了＿（甲）＿個伏地挺身，第三天做了＿（乙）＿個伏地挺身，第十天做了＿（丙）＿個伏地挺身。

（2）10 天總共做了[x ＋（x ＋1）＋（x ＋2）＋（x ＋3）＋⋯]＝＿（甲）＿個伏地挺身（用 x 表示）。由「10 天總共做了 145 個伏地挺身」，可以解得 x ＝＿（乙）＿

指定作業參考解答：

1. （1）（甲）$2x$，（乙）$4x$ ，（丙）$8x$，（丁）：$16x$。（2）10。
2. （1）（甲）100，（乙）121，（丙）144，（丁）169，（戊）196。
   （2）（甲）$3x$，（乙）$7x$，（丙）2。（3）24。（4）100。（5）10。
3. （1）（甲）$12x$，（乙）$7x$，（丙）7，（丁）1。
   （2）（甲）169，（乙）13。
4. （1）（甲）35－ x，（乙）140－$2x$，（丙）23，（丁）12。
   （2）（甲）35－y，（乙）70＋$2y$，（丙）12，（丁）23 。
5. （1）（甲）x ＋1，（乙）x ＋2，（丙）x ＋9。
   （2）（甲）$10x$ ＋45，（乙）10。

八、教學注意事項：

1. 活動一到活動六約 60 分鐘的教學時間，估計活動一約 8 分鐘，活動二約 9 分鐘，活動三約 9 分鐘，活動四約 10 分鐘，活動五約 10 分鐘，活動六約 14 分鐘。
2. 活動一的教學過程中，老師宜鼓勵學生用不同的假設法，列出不同的方程式，最後都能得到相同得答案，但是一定要分析給學生了解，用哪一種假設法列出的方程式解題最方便。
3. 活動二的教學，須重視算術解法與代數解法（假設未知數 x）的轉換，希望能讓學生由算術解法轉變到代數解法時，了解代數解法在簡化複雜算式中的必要性。
4. 活動三藉由計算「德莫查爾斯有多大年紀」，剛開始先訓練同學熟悉簡單的分數未知數假設的能力，以便循序漸進的引進比較複雜的未知數假設法。
5. 活動四藉由計算「小桃今年幾歲」，訓練同學列方程式的能力，這裡在訓練學生對選定未知數 x 之後，與 x 相關的其他年齡也要做相應的假設。
6. 活動五主要的目的在讓學生了解，不同的未知數假設法，居然會使得解方程式的難度有那麼大的差異，希望學生以後對

未知數的選定，能做比較慎重的抉擇。

7. 活動六主要在訓練同學列式與解方程式能力。融入數學史的題材有助於讓學生了解代數發展的過程。如果學生不約分，直接由用分數去減 $1-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{7}-\frac{1}{2}=\frac{9}{84}$，而求得年齡 84 歲，也是不錯的算術解法。

8. 指定作業 1 藉助假設未知數的方法，為將來學習等比數列、等比級數做基礎。

9. 指定作業 2，由這個解題經驗，可幫助學生，為以後學習畢氏定理的證明鋪路。也讓學生提早熟悉 6, 8, 10 這組畢氏數。

10. 指定作業 3，這個經驗可幫助學生將來為證明畢氏定理的基礎，也讓學生熟悉 5, 12, 13 這組畢氏數。但是我們不主張在此時導出畢氏定理。

11. 『雞兔同籠』的問題，希望老師能引入中國算學史的題材，讓同學了解我們的祖先，在數學史的成就。同時讓學生體會比較複雜的未知數假設，其目的在於為以後學習二元一次聯立方程組的解作基礎。

12. 指定作業 5，藉由列式，讓學生體會基本等差數列、等差級數的面貌，以後接觸這個題材會更有經驗。但是我們不主張在

此時導出等差數列、等差級數的公式。

13. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。

14. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 黃武雄編(1980)中西數學簡史。臺北市：人間文化事業股份有限公司。
2. Howard Eves 著，歐陽絳譯（1997)，數學史概論第 197 頁。臺北市：曉園出版社。
3. 維基百科網站，曹沖秤象，取自：http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%9B%B9%E5%86%B2#.E7.88.B6.E6.AF.8D
4. 洪萬生、林倉億、蘇惠玉、蘇俊鴻等著（2005)。數之起源，第 58 頁，中國數學史開章＜筭（念算）數書＞。臺北市：台灣商務印書館。

附 錄：同餘法找因數

一、授課對象：國中七年級上學期學生　　　　　**撰寫者：**蘇進發

二、先備知識：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　陳昭地

（一）瞭解整數除法的意義（含商數與餘數)。

（二）熟悉截尾倍率法找尋質因數 7 或 13。

（三）知道能被 2、3、5 整除的判定。

（四）熟悉巧尋質因數（一)、(二）之教材內容。

三、教學目標：

（一）瞭解對模 7 同餘的概念。

（二）瞭解對模 m 同餘的概念。

（三）利用同餘法找質因數 7、11、13 的規則。

（四）巧判 101 的倍數規則。

（五）強化整除的概念。

四、教學時間：90 分鐘（二節課）

五、教學說明：

對於一個整數能否被另一正整數整除，是整數除法運算經常遇到的問題：例如 $259=7\times37$，$261=7\times37+2$，$263=7\times37+4$，…；259 能被 7 整除，餘數 0；261 不能被 7 整除，餘數 2；263 不能被

7 整除，餘數 4，又$-261=7\times(-37)-2=7\times(-38)+5$，

$-263=7\times(-37)-4=7\times(-38)+3$，$-261$ 不能被 7 整除，餘數 5；-263

不能被 7 整除，餘數 3；這些除法的餘數問題就是本單元用來介紹

同餘的主題，並利用同餘的概念來判定因數的準則。

六、教學活動

子題：同餘的概念

活動一：如何依除以 7 的餘數來分類整數

步驟 1：首先將整數 0，±1，±2，±3，…，±n，…分類成下表：

7k	…，－21，－14，－7，	0	，7，14，21，…
7k+1	…，－20，－13，－6，	1	，8，15，22，…
7k+2	…，－19，－12，－5，	2	，9，16，23，…
7k+3	…，－18，－11，－4，	3	，10，17，24，…
7k+4	…，－17，－10，－3，	4	，11，18，25，…
7k+5	…，－16，－9，－2，	5	，12，19，26，…
7k+6	…，－15，－8，－1，	6	，13，20，27，…

盯住正中央行中的數字 0，1，2，3，4，5，6，我們能看到每一橫行上的任意兩整數相差都是 7 的倍數而且被 7 除餘數都是相同！例如第 4 橫行中－11，17 其差 28 是 7 的倍數，它們被 7 除的餘數都是 3，其中 $17=7\times2+3$，$-11=7\times(-2)+3$。

隨堂練習 1：

試檢驗上表中第 7 橫行兩整數－15，27 其差是否是 7 的倍數，它們被 7 除的餘數是否相等？

步驟 2： 在步驟 1 中任一橫行中的任意兩整數其差永遠是 7 的倍數，且被 7 除所得的餘數自上而下各行，分別為 0，1，2，3，4，5，6。換言之，各橫行的整數除以 7 都得到相同餘數，數學上就稱同一橫行中的任意兩整數 a，b 對模 7 **同餘**，記作

$a \equiv b \pmod{7}$，唸作 a，b 對模 7 同餘。例如：

$-11 \equiv 17 \pmod{7}$，$-15 \equiv 27 \pmod{7}$；

當然 9、16 對模 7 同餘；25、18 對模 7 也同餘。

步驟 3： 將整數 a 除以 7 得到相同的餘數歸成一類，即可將步驟 1 的分類表簡記成：

$$
\begin{aligned}
a &\equiv 0 \pmod{7}\\
a &\equiv 1 \pmod{7}\\
a &\equiv 2 \pmod{7}\\
&\ \vdots\\
a &\equiv 6 \pmod{7}
\end{aligned}
$$

隨堂練習 2：

試檢驗 $259 \equiv 0 \pmod{7}$，$261 \equiv 2 \pmod{7}$，$263 \equiv 4 \pmod{7}$

活動二： 由活動一及以上 3 個步驟我們可將整數 a 依除以 7 所得的餘數分成七類：

7 的倍數：$a \equiv 0 \pmod 7$

7 的倍數加 1：$a \equiv 1 \pmod 7$

7 的倍數加 2：$a \equiv 2 \pmod 7$

7 的倍數加 3：$a \equiv 3 \pmod 7$

7 的倍數加 4：$a \equiv 4 \pmod 7$

7 的倍數加 5：$a \equiv 5 \pmod 7$

7 的倍數加 6：$a \equiv 6 \pmod 7$

活動三： 如何依除以正整數 m 的餘數來分類整數

步驟 4： 依活動一的分類法對 2 而言，整數 a 可分類成偶數與奇數：

偶數：$a \equiv 0 \pmod 2$

奇數：$a \equiv 1 \pmod 2$

步驟 5： 仿上，對 3 而言，整數 a 可分成 3 類：

3 的倍數：$a \equiv 0 \pmod 3$

3 的倍數加 1：$a \equiv 1 \pmod 3$

3 的倍數加 2：$a \equiv 2 \pmod 3$

當然對 5 而言，整數 a 亦可分成 5 類：

5 的倍數：$a \equiv 0 \pmod 5$

5 的倍數加 1：$a \equiv 1 \pmod 5$

5 的倍數加 2：$a \equiv 2 \pmod 5$

5 的倍數加 3：$a \equiv 3 \pmod 5$

5 的倍數加 4：$a \equiv 4 \pmod 5$

步驟 6：對一般的正整數 m 而言，整數 a 可分成 m 類

m 的倍數：$a \equiv 0 \pmod{m}$

m 的倍數加 1：$a \equiv 1 \pmod{m}$

m 的倍數加 2：$a \equiv 2 \pmod{m}$

$\vdots$

m 的倍數加$(m-1)$：$a \equiv (m-1) \pmod{m}$

其中$a \equiv b \pmod{m}$，唸作 a、b 對模 m **同餘**，即 a、b 除以 m 的餘數都相等或$(a-b)$為 m 的倍數。同餘的符號「≡」是在 1801 年高斯首先使用的，不同餘就可記作「≢」例如：

25≡27（mod 2），20≢23（mod 2）；

27≡0（mod 3），28≢2（mod 3）；

10≡2（mod 4），100≡0（mod 4）；

18≡13（mod 5），17≢14（mod 5）；

91≡0（mod 7），99≢9（mod 7）；

111≡1（mod 11），189≢9（mod 11）；

100≡9（mod 13），144≡1（mod 13）。

而且一整數 a 能被 m 整除時(記作 $m \mid a$) $\Leftrightarrow$ $a \equiv 0 \pmod{m}$而當$a \equiv r \pmod{m}$，$1 \le r \le m-1$，a 就不能被 m 整除(記作 $m \nmid a$)。

子題：同餘的基本性質

活動四：發現對模 7 同餘的基本性質

步驟 7：在活動一、二對模 7 的同餘表觀察得出：任取兩個同餘式

$a \equiv r_1 \pmod 7$，$b \equiv r_2 \pmod 7$，易知：

$a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod 7$

$ab \equiv r_1 r_2 \pmod 7$

$ka \equiv kr_1 \pmod 7$（k 為整數）

例如：已知：$17 \equiv 3 \pmod 7$，$12 \equiv 5 \pmod 7$

得：$17 + 12 \equiv 3 + 5 \pmod 7$；

$17 \times 12 \equiv 3 \times 5 \pmod 7$；

$34 \equiv 6 \pmod 7$

步驟 8：對一般正整數 m 而言，模 m 的同餘式亦有同樣的性質

已知：$a \equiv b \pmod m$，$c \equiv d \pmod m$

則（1）$a + c \equiv b + d \pmod m$

（2）$ac \equiv bd \pmod m$

（3）$ka \equiv kb \pmod m$。(其中 k 為任意整數)

子題：同餘概念及其基本性質在尋找因數上的應用

活動五：整理以上各活動有關同餘概念及其基本性質，

可羅列如下：

（1）$a \equiv 0 \pmod{|a|}$ $(a \neq 0)$

（2）$a \equiv 0 \pmod{1}$

（3）若 $a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$

則 $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$ (符號順取)

$ac \equiv bd \pmod{m}$

$ka \equiv kb \pmod{m}$，(k 為整數)

特別地，若 $a^n \equiv 0 \pmod{m}$

則 $a^{n+1} \equiv 0 \pmod{m}$ (n 為正整數)

步驟 9： 設 $10 \equiv r_1 \pmod{m}$，$10^2 \equiv 10r_1 \equiv r_2 \pmod{m}$，⋯，

$10^n \equiv 10 \times 10^{n-1} \equiv 10 \times r_{n-1} \equiv r_n \pmod{m}$

則十進位數 $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$

$$= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$$

$N \equiv a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots + a_n r_n \pmod{m}$

例如，$10 \equiv 1$，$10^2 \equiv 1$，⋯，$10^n \equiv 1$（mod 3 或 mod 9）

故 $N = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 \equiv a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$（mod 3 或 mod 9）

而 $10 \equiv -1$，$10^2 \equiv 1$，⋯，$10^n \equiv (-1)^n$（mod 11）

故 $N = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$（mod 11）

由上可知消倍法可用來判別 3 或 9 的倍數;奇偶位差法可用來判別 11 的倍數。

步驟 10:

(1)由 10≡2(mod 4),$10^2 \equiv 20 \equiv 0$(mod 4),$10^3 \equiv 0$(mod 4),…,$10^n \equiv 0$(mod 4)$n \geq 2$

故 $a_8a_7a_6 \cdots a_2a_1a_0 \equiv a_0 + 2a_1$(mod 4)

於是 8136≡$6+2\times 3 \equiv 0$(mod 4),8136 能被 4 整除。

(2)由 10≡2(mod 8),$10^2 \equiv 4$(mod 8),$10^3 \equiv 0$(mod 8),…,

$10^n \equiv 0$(mod 8)$n \geq 3$

故 $a_8a_7a_6 \cdots a_2a_1a_0 \equiv a_0 + 2a_1 + 4a_2$(mod 8)

於是 8136≡$6+2\times 3+4\times 1 \equiv 0$(mod 8),8136 除以 8 的餘數為 0。

(3)由 10≡10(mod 25),$10^2 \equiv 0$(mod 25),$10^3 \equiv 0$(mod 25),…,

$10^n \equiv 0$(mod 25)$n \geq 2$

故 $a_8a_7a_6 \cdots a_2a_1a_0 \equiv a_0 + 10a_1$(mod 25)

於是 8175$\equiv 5+10\times 7 \equiv 0$(mod 25),8175 能被 25 整除。

(4)由 10≡3(mod 7),$10^2 \equiv 30 \equiv 2$(mod 7),$10^3 \equiv 20 \equiv -1$(mod 7),

$10^4 \equiv -10 \equiv -3$(mod 7),$10^5 \equiv -30 \equiv -2$(mod 7),

$10^6 \equiv -20 \equiv 1$(mod 7)

故$a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 \equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6$（mod 7）；

於是 1547$\equiv 7 + 3\times 4 + 2\times 5 - 1 = 28 \equiv 0$（mod 7），

1547 能被 7 整除，而 2547$\equiv 7 + 3\times 4 + 2\times 5 - 2 = 27 \equiv 6$（mod 7）

故 2547 不能被 7 整除，2547 除以 7 的餘數是 6。

（5）由 10≡－3（mod 13），$10^2 \equiv -30 \equiv -4$（mod 13），

$10^3 \equiv -40 \equiv -1$（mod 13），$10^4 \equiv -10 \equiv 3$（mod 13），

$10^5 \equiv 30 \equiv 4$（mod 13），$10^6 \equiv 40 \equiv 1$（mod 13）

故$a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0 \equiv a_0 - 3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5 + a_6$，於是

1547$\equiv 7 - 3\times 4 - 4\times 5 - 1 + 3\times 0 + 4\times 0 + 0 = -26 \equiv 0$（mod 13）

1547 能被 13 整除，而

2547$\equiv 7 - 3\times 4 - 4\times 5 - 2 = -27 \equiv 12$（mod 13）

2547 不能被 13 整除且 2547 除以 13 的餘數是 12。

活動六：(結論)

由 10≡10（mod 101），$10^2 \equiv 100 \equiv -1$（mod 101），

$10^3 \equiv -10$（mod 101），$10^4 \equiv -100 \equiv 1$（mod 101）

故 9898$\equiv 8+9\times 10+8\times(-1)+9\times(-10) \equiv 0$（mod 101）

9898 能被 101 整除！而 9899 不能被 101 整除，9899

除以 101 的餘數是 1。

隨堂練習 3：試分別求 7979、7981 除以 101 的餘數各是多少？

教學活動參考解答：

隨堂練習 1：是；是 。隨堂練習 2：略

隨堂練習 3：餘數分別是 0 與 2（7979 能被 101 整除；7981 不能被 101 整除，餘數是 2)。

七、指定作業：

1. 試求 1001 分別被 4、7、11、13 除之餘數。
2. 試求 1089 分別被 7、9、11、13 除之餘數。
3. 試用同餘法判定 1859 能否被 11 或 13 整除。
4. 試用同餘法判定 9999 能否被 9 或 11 或 101 整除。

指定作業參考解答：

1. $1001\equiv 1 \pmod 4$，$1001\equiv 0 \pmod 7$，$1001\equiv 0 \pmod{11}$，$1001\equiv 0 \pmod{13}$。
2. $1089\equiv 4 \pmod 7$，$1089\equiv 0 \pmod 9$，$1089\equiv 0 \pmod{11}$，$1089\equiv 10 \pmod{13}$。
3. $1859\equiv 9-5+8-1\equiv 0 \pmod{11}$，1859 能被 11 整除
   $1859\equiv 9-3\times 5-4\times 8-1=-39\equiv 0 \pmod{13}$，1859 亦可被 13 整除。（$1859=11\times 13^2$）

4. $9999 \equiv 9+9+9+9 \equiv 0$ （mod 9）

$9999 \equiv 9-9+9-9 \equiv 0$ （mod 11）

$9999 \equiv 9+9\times10+9\times(-1)+9\times(-10) \equiv 0$ （mod 101）

故 9999 都能被 9、11、101 整除。

八、教學活動注意事項：

1. 教學活動時間建議如下，教學說明(含引起動機)：5 分鐘，活動一、二（步驟 1～3，隨堂練習 1、2)：15 分鐘，活動三(步驟 4、5、6)：15 分鐘，活動四(步驟 7、8)：15 分鐘，活動五、六(步驟 9、10，隨堂練習 3)：30 分鐘，指定作業(含提示)：10 分鐘。

2. 由對模 7 的具體同餘實例，引進對一般正整數 m 同餘的概念，顯示對模 7 的同餘概念與及其性質均要具體徹底地瞭解，始可分別引入對一般正整數 m 的同餘概念及其一般性質。

3. $a \equiv b \pmod{m}$ 之正式數學定義為：

$\begin{cases} a = mk + r \\ b = mk' + r \end{cases}$，$0 \le r < m \Leftrightarrow a-b$ 能被 m 整除，即 $m \mid (a-b)$

4. 根據定義可知：$a \equiv 0 \pmod{|a|}$ $(a \ne 0)$

$a \equiv 0$ （mod 1)

5. 若 $a \equiv b \pmod{m}$，$c \equiv d \pmod{m}$

則 $a + c \equiv b + d \pmod{m}$

$ac \equiv bd \pmod{m}$

$ka \equiv kb \pmod{m}$，(k 為整數)

證明：$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)\equiv 0 \pmod{m}$

$$ac-bd=a(c-d)+d(a-b)\equiv 0 \pmod{m}$$

$$ka-kb=k(a-b)\equiv k\times 0\equiv 0 \pmod{m}$$

6.用已學截尾倍率法判定 1561 能否被 7 整除：

$$\begin{array}{rccc:c}
 & 1 & 5 & 6 & 1 \\
-) & & & 2 & \\
\hline
 & 1 & 5 & 4 & \\
-) & & 8 & & \\
\hline
 & & 7 & &
\end{array}$$

7 能被 7 整除，故 $7 \mid 1561$。

用同餘法判定 1561 能否被 7 整除：

$$1561 \equiv 1+3\times 6+2\times 5-1=28\equiv 0 \pmod{7}$$

亦可知 $7 \mid 1561$；但就 2561 來說，直接使用截尾倍率法

$$\begin{array}{rccc:c}
 & 2 & 5 & 6 & 1 \\
-) & & & 2 & \\
\hline
 & 2 & 5 & 4 & \\
-) & & 8 & & \\
\hline
 & 1 & 7 & &
\end{array}$$

因 $7 \nmid 17$ 故 2561 不能被 7 整除，$7 \nmid 2561$

若直接使用同餘法，則得

$$2561 \equiv 1+3\times 6+2\times 5-2=27\equiv 6 \pmod 7$$

顯然要求餘數時，同餘法較為便捷！

7. $10^0 \equiv 1 \pmod 7$，$10^1 \equiv 3 \pmod 7$，$10^2 \equiv 30 \equiv 2 \pmod 7$，

$10^3 \equiv 20 \equiv -1 \pmod 7$，$10^4 \equiv -10 \equiv -3 \pmod 7$，

$10^5 \equiv -30 \equiv -2 \pmod 7$，$10^6 \equiv -20 \equiv 1 \pmod 7$

其規律為 $\underbrace{1，3，2，-1，-3，-2}$；$\underbrace{1，3，2，\cdots}$。

8. $10^0 \equiv 1 \pmod{13}$，$10^1 \equiv -3 \pmod{13}$，$10^2 \equiv -30 \equiv -4$ $\pmod{13}$，$10^3 \equiv -40 \equiv -1 \pmod{13}$，$10^4 \equiv -10 \equiv 3 \pmod{13}$，

$10^5 \equiv 30 \equiv 4 \pmod{13}$，$10^6 \equiv 40 \equiv 1 \pmod{13}$

其規律為 $\underbrace{1，-3，-4，-1，3，4}$；$\underbrace{1，-3，-4，\cdots}$。

9. 同餘概念在數論中很重要，例如：

平方數 1，4，9，16，25，49，64，⋯

被 4 除之餘數為 1，0，1，0，⋯，1，0，⋯

即 $x^2 \equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$

同理，同餘式 $x^2 \equiv -1 \pmod{13}$，可見 $x=13k+5$ 或 $13k+8$ (k 為整數)都是其解。

10. 試用同餘法判斷 24｜2136

解由 $24=3\times 8$ 且 $(3,8)=1$，故 $24 \mid 2136 \Leftrightarrow 3 \mid 2136$ 且 $8 \mid 2136$

但由 $2136 \equiv 2+1+3+6 \equiv 0 \pmod 3$

$2136 \equiv 136 \equiv 0 \pmod 8$

故 $3 \mid 2136$ 且 $8 \mid 2136 \Rightarrow 24 \mid 2136$

11. 對 17、19 而言，使用同餘法判定其餘數之規律性如下：

n=17：1，－7，－2，－3，4，6，9，5，－1，7，2，3，－4，－6，－9，－5；1，…

n=19：1，10，5，－7，6，3，11，－4，－2，－1，－10，－5，7，－6，－3，－11，4，2；1，…

其規律性不易記得，在因數的判別上就不如使用截尾倍率法便捷！

12. 在各活動間，教師宜行間走動，加強瞭解學生學習情形。
13. 在各活動進行時，可隨機指定學生作答。答對時給予言語上的獎勵，答錯時另請其他同學作答，再答錯老師應加強解說。

九、教學參考資料：

1. 李政憲，曹博盛，陳昭地(2012)。巧尋質因數（一）、（二），陳昭地主編：國民中學數學領域教材原型 A 冊。新北市：國家教育研究院。

2. A.S. Posamentier A, Jay Stepelman (1986).Teaching Secondary School Mathematics, 2nd Ed., pp.372-374(Application of Congruence to Divisibily).Columbus, OH：Merrill.

3. J.H. Silverman (2006).A Friendly Introduction to Number Theory (3rd ed.), Upper Saddle Rivor,NJ：Preason Prenticehall.(高立圖書有限公司代行。http://www.gau-lih.com.tw)

4.當 a、b 為較大不易分解的正整數時，則可用輾轉相除法求得 a、b 的最大公因數(a,b)：

例如：$a = 493$，$b = 391$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
3 & 391 & 493 & 1 \\
 & 306 & 391 & \\ \cline{2-3}
5 & 85 & 102 & 1 \\
 & 85 & 85 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 17 &
\end{array}$$

得$(493,391)=17$

其數學原理為$(493,391)=(391,102)=(102,85)=(85,17)=17$

即$a=bq+r \quad 0 \le r < b$

$(a,b)=(b,r)$，其證明主要方法，則為$d\,|\,(a,b) \Leftrightarrow d\,|\,(b,r)$

故$(b,r)\,|\,(a,b)$，$(a,b)\,|\,(b,r)$，即得$(a,b)=(b,r)$

5. Pell 方程$x^2-3y^2=-1$無整數解

可用同餘法證明如下：

設$x^2-3y^2=-1$有正整數解(m,n)

則$m^2-3n^2=-1$

故左式$m^2-3n^2\equiv m^2\equiv 0$或 1 (mod 3)

而右式$-1\equiv 2$ (mod 3)，又 $2\not\equiv 0$ 或 1 (mod 3)

於是$m^2-3n^2\not\equiv -1$ (mod 3)

此為矛盾，故$x^2-3y^2=-1$無整數解。

國民中學數學教材原型 A 冊 / 陳昭地　主編
-- 二版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院，2014.03

1.數學教育
2.中小學教育
3.教材與教法

國民中學數學教材原型 A 冊
主 編 者：陳昭地
作　　者：丁斌悅　李政憲　李政豐　陳昭地　陳彥廷　莊國彰
　　　　　曹博盛　蘇進發　（依姓氏筆畫順序排列）
發 行 人：柯華葳
出 版 者：國家教育研究院
編 審 者：數學領域教材原型研發編輯委員會
主任委員：陳昭地
副主任委員：鍾　靜　謝　堅
委　　員：丁斌悅　李政憲　李政豐　吳欣悅　房昔梅　周筱亭
　　　　　胡蕙芬　張東輝　陳彥廷　莊國彰　曹博盛　黃幸美
　　　　　傅淑婷　詹婉華　魏慶雲　蘇進發
　　　　　（依姓氏筆畫順序排列）
編輯小組：丁斌悅　李政憲　李政豐　陳昭地　陳彥廷　莊國彰
　　　　　曹博盛　蘇進發
　　　　　（依姓氏筆畫順序排列）
封面設計：朱墨形象設計廣告有限公司
助理編輯：吳柏萱、張淑娟、蔡敏冲
出版年月：103 年 3 月
版　　次：二版
電子全文可至國家教育研究院網站 *http*: *//www.naer.edu.tw* 免費取用

非賣品

本書經雙向匿名審查通過