

國民小學數學教材原型C冊

謝 堅教授 主編



國家教育研究院 出版

國民小學數學教材原型 C 冊



國家教育研究院 編印

國民小學數學教材原型 C 冊

目次

序.....	vii
編輯大意.....	ix
第一章：幾何概論	
主題 1-1：緒論.....	1
主題 1-2：兒童幾何概念的發展	
1-2-1：視覺期.....	3
1-2-2：分析期.....	4
1-2-3：關係期.....	6
主題 1-3：幾何概念	
1-3-1：特例與集合.....	8
1-3-2：定義與定理.....	10
1-3-3：不存在的幾何圖形.....	13
第二章：平面圖形	
◎理念篇	
主題 2-1：三角形	
2-1-1：三角形的分類與命名.....	21
2-1-2：三角形的包含關係.....	29

2-1-3：三角形任兩邊和大於第三邊.....	31
主題 2-2：四邊形	
2-2-1：四邊形的分類與命名.....	38
2-2-2：四邊形的包含關係.....	42
主題 2-3：多邊形	
2-3-1：多邊形與多邊形區域.....	44
2-3-2：凸多邊形與凹多邊形.....	46
2-3-3：正多邊形.....	48
主題 2-4：圓	
2-4-1：圓與扇形.....	50
2-4-2：圓周率.....	53
2-4-3：與圓有關的工具.....	56

◎案例篇

主題 2-1-3：三角形任兩邊之和大於第三邊.....	59
主題 2-2-1：四邊形的分類與命名.....	73
主題 2-3-3：正多邊形.....	81
主題 2-4-2：圓周率.....	88

第三章：平面圖形的關係

◎理念篇

主題 3-1：垂直與平行

3-1-1：兩直線的關係..... 95

3-1-2：垂直..... 97

3-1-3：平行..... 102

主題 3-2：全等、對稱與相似

3-2-1：全等圖形..... 107

3-2-2：線對稱圖形..... 112

3-2-3：相似..... 123

◎案例篇

主題 3-1-2：線與線的垂直關係..... 127

主題 3-1-3：線與線的平行關係..... 140

主題 3-2-1：正方形的平面鋪設..... 155

主題 3-2-2：線對稱..... 164

主題 3-2-3：放大圖、縮小圖與比例尺..... 179

第四章：立體圖形

◎理念篇

主題 4-1：柱體

4-1-1：角柱..... 193

4-1-2：圓柱..... 197

主題 4-2：錐體

4-2-1：角錐..... 200

4-2-2：圓錐..... 203

主題 4-3：視圖、透視圖與展開圖

4-3-1：視圖與透視圖..... 204

4-3-2：角柱和角錐的展開圖..... 207

4-3-3：圓柱和圓錐的展開圖..... 208

◎案例篇

主題 4-3-1：立方體堆疊..... 211

主題 4-3-2：立方體展開圖..... 221

第五章：立體圖形的關係

◎理念篇

主題 5-1：空間的垂直關係

5-1-1：線與線的垂直..... 235

5-1-2：線與面的垂直..... 238

5-1-3：面與面的垂直..... 241

主題 5-2：空間的平行關係

5-2-1：線與線的平行..... 245

5-2-2：面與面的平行.....	246
主題 5-3：頂點、邊與面個數的關係	
5-3-1：立體的頂點、邊和面.....	248
5-3-2：角柱、角錐的頂點、邊與面的個數關係	250

◎案例篇

主題 5-1-3：面與面的垂直關係.....	259
主題 5-2-2：面與面的平行關係.....	271
主題 5-3-2：角柱、角錐的頂點、邊與面的個數關係	283

◎附錄-試教教學活動設計

主題 2-1-3：三角形任兩邊之和大於第三邊.....	303
主題 3-3-2：比例尺.....	310
主題 1-3-2：立方體展開圖.....	315
主題 5-3-2：角柱的面、頂點及邊的個數關係.....	327

序

數學不僅是科學的基礎，數學教育更是關乎國家公民素養和人才素質的重要因素之一。國家教育研究院推動課程與教學研究及研發適性適量適時之教材工作，進行中小學各學習領域（學科）教材研發、編輯與試用，並建置教科書資源資料庫。本數學領域教材原型研發手冊即是針對中學生與小學生所設計之教學輔助教材，期能落實課程綱要能力指標與教材細目之課程與教學之實踐，提供教師或教科書編輯者可依循或指引之教科書編輯素材，活化數學教材的內涵，並引領未來十二年國民基本教育數學教學之方向。

此計畫研發初期，本人時任國家教育研究院院長，當時曾召開會議徵詢國內數學專家學者之意見，幾經遴選承蒙陳昭地教授願意在國立臺灣師範大學教職退休後，因為對數學教育的使命感，而接下此研發編輯之重任。陳教授學經歷豐富，不但在教學及專業領域上的研究，受到學術界的肯定及重視，表現傑出，對啟蒙青年學子有滿滿的熱情，對數學教育貢獻不遺餘力，在他的號召之下，旋即組織優秀的學者專家教授與教學卓越的中小學教師等成立編輯委員會，前後歷經三年，完成本系列的教材原型作品。

本書研發編撰適合國中、小數學能力之題材，這些題材與教師未來的數學教學密切相關，並可藉此增長學生數學的學習能力，內容相當豐富，盼讀者以輕鬆愉快的心情欣賞閱讀數學的相關方法與應用，經由與日常生活相關的例題，透過循序漸進的演練，以培養學生自我學習的興趣與信心，期待能為數學教師提供便捷的教學資源。

教育部國民及學前教育署 署長

吳清山 謹識

2013年12月

序

政府為回應立法院與民意的需求，於民國 92 年起責成本院組成委員會編撰九年一貫數學領域國中、小部編本教科書，經審定後上市供書，以平抑教科書價格，同時引領民間出版商改善教科書的品質。部編本教科書在完成教材示範編撰與制衡教科書市場之階段性任務後，轉型發展教材原型，本書即為教材原型的研發成果之一。

本書分為中學與小學，中學部分配合國中以上之數學教師的數學專業素養，編輯延伸性與原創性的題材，包含未來與國民教育第十年數學銜接息息相關的重要內容，提供教師編選相關教材之用，或提供教科書編輯者及民間出版業研發教師手冊及相關教材。小學部分：配合教師需求，著重於國小階段之數、計算、量與實測、幾何等相關教材教法。本套教材編撰之目的，在於能引發教師教學之共鳴，進而沿用於教學，故於其取材方向及內容，依中、小學之特性而有些許差異。

本書係由課程及教學研究中心數學教材原型研發編輯委員會陳昭地教授、鍾靜教授、謝堅教授、張東輝教授、曹博盛教授、黃幸美教授、陳彥廷教授、周筱亭研究員、李政豐教師、蘇進發教師、傅淑婷教師、李政憲教師、丁斌悅教師、莊國彰教師、魏慶雲教師、房昔梅教師、詹婉華教師、吳欣悅教師、胡蕙芬教師等，前後共計三年的辛勤投入，內容極具意義與參考價值，對落實數學教育，應該頗有助益。茲值付梓之前，特為之序，並致最高謝意。

國家教育研究院課程及教學研究中心主任

范信賢 謹識

2013 年 12 月

編輯大意

- 一、 本研究成品為國家教育研究院數學領域教材原型研發編輯計畫第三年(民 102 年)國民小學部分的成果。
- 二、 本研究成品以國小階段之幾何為主軸撰寫，因為時間不足，研發團隊並沒有編寫出全部的教材，只編寫部份的教材。
- 三、 本研究成品分成三類，第一類為理念篇，編寫相關教材的認知及數學結構，以及教學時可能產生的迷思概念；第二類為案例篇，編寫教師不易教學或可能教錯的部份教材；第三類為教學活動設計篇，在每個案例篇選擇一節課的教材，編寫成較詳細的教學活動設計。
- 四、 理念篇共有幾何概論、平面圖形、平面圖形的關係、立體圖形、立體圖形的關係等五個部分，每個部分再分成數個主題，分別說明相關之認知及數學結構。
- 五、 案例篇配合主題且擇要撰寫，尤其針對該主題之重要學習關鍵或教學不易掌握之處編寫；共計 14 案例，提供 20 節教學節數之教材。
- 六、 各案例之教學說明係聯絡該主題之理念、該活動之目標，教師可參考教學活動流程及教學注意事項進行教學，亦可融入現行或自編教材；指定作業部份可直接下載應用。

- 七、 本冊已選擇 4 個案例進行試教，並編寫較詳細的教學活動設計，除了提供課堂教學參考之外，也做為修改本教材之依據。
- 八、 本教材單元雖經研發團隊審慎研發編輯而成，惟疏漏之處仍在所難免，使用者針對案例可直接或間接以最適當的方式調整。

第一章：幾何概論

撰寫者：謝堅

主題 1-1：緒論

認知及數學結構：

國民小學數學教材原型包含 A 冊、B 冊及 C 冊三冊，A 冊的主題是「整數概念與加減計算」，B 冊的主題是「量與實測」，C 冊的主題是「幾何」。

A 冊主題的範圍比較小，討論的範圍比較能包含國小相關的教材內容。A 冊主題包含「整數的數概念」，「整數加減情境問題」，「整數的加減運算」，以及「大數及概數」等四個部份。

B 冊主題的範圍比較大，包含時間、長度、面積、重量、容量、角度及體積等教材，因為國家教育研究院出版了很多與長度以及時間有關的影帶及書籍，因此 B 冊不討論時間及長度，B 冊主題包含「量與實測概論」，「面積」，「重量」，「角度」，「體積與容量」等五個部份。

C 冊主題的範圍最大，無法較完整的討論國小所有的幾何教材。因此在幾何數學知識部份，C 冊只討論編者認為比較重要以及教師易產生迷思概念的幾何知識；在幾何教材部份，只討論教師不易教學，或教學時易產生錯誤概念的教材；在幾何概念發展部份，除了簡單的陳述荷蘭教育家 Van Hiele 夫婦的幾何發展過程理論外，不討論幾何發展的概念，只描述看到的幾何現象。C

冊主題包含「幾何概論」，「平面幾何圖形」，「平面幾何圖形的關係」，「立體幾何圖形」，以及「立體幾何圖形關係」等五個部份。

主題 1-2：兒童幾何概念的發展

荷蘭教育家 Van Hiele 夫婦將幾何概念的發展區分為五個階段，分別是視覺期、分析期、關係期、形式演繹期，以及最後發展出的嚴密性或公理性的幾何知識。

由於學童在國小階段通常可以發展到關係期，下面簡單的介紹幾何發展前三個階段學童的學習特徵，與相對應的教材安排與教學重點。

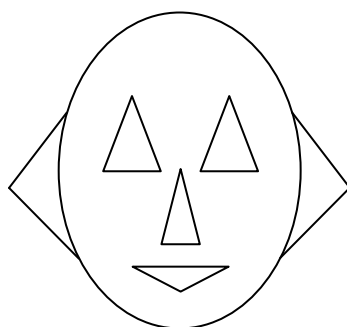
1-2-1：視覺期

認知及數學結構：

低年級學童的幾何概念屬於視覺期階段，處於這個階段的學童，主要藉由實物的大概輪廓來辨識形體或圖形，因此當學童使用「正方形」、「長方形」、「三角形」、「圓形」、「正方體」、「長方體」及「球」等數學語言來稱呼某類圖形時，只是給這些長的很像的圖形一個名字，學童不見得能清楚知道這些數學語言的數學定義。

【圖一】是一個人的臉部圖像，圖像中的兩個眼睛、一個鼻子、一個嘴巴都是三角形，耳朵部分和臉連接的地方是圓弧。當教師要求學童回答此圖像中有多少個三角形時，仍在視覺期的學童，可能回答有 6 個三角形，也可能回答有 4 個三角形。回答 6 個三角形的學童直觀的認為耳朵像三角形，而回答 4 個三角形的

學童直觀的認為耳朵不像三角形，他們並不理會三角形三個邊的構成要素必須是直線段。



【圖一】

低年級的幾何教學活動，建議安排較多的感官操作活動，讓學童進行簡單的分類、造形、滾動、堆疊、描繪、著色、觸摸、複製等活動，例如透過七巧板等具體物，幫助學童察覺如何才能排出給定的圖形，逐步的注意到圖形的構成要素。以【圖一】為例，當學童注意到構成三角形的三邊必須是直線段，才知道耳朵不是三角形，因為其中有一個邊不是直線段。

1-2-2：分析期

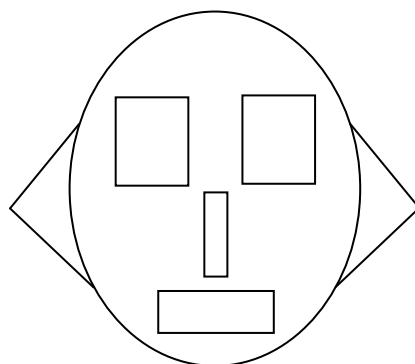
認知及數學結構：

中年級學童的幾何概念屬於分析期階段，從視覺期進入分析期的學童，有了豐富的視覺辨識經驗後，能開始注意各圖形的構成要素，以及不同圖形間的異同關係，但無法利用這些構成要素進行推理，或解釋這些幾何性質間的關係。

【圖二】也是一個人臉部的圖像，圖像中的兩個眼睛是正方形，一個鼻子，及一個嘴巴是長方形，耳朵和臉連接的那一部分是圓弧。中年級學童能注意到構成要素，知道兩個耳朵中都有一條邊不是直線段，因此這兩個耳朵都不是三角形。

當教師要求中年級學童回答圖像中有幾個長方形時，學童可能有兩種不同的答案，第一種答案是有 4 個長方形，第二種答案是有 2 個長方形。

回答 4 個長方形的學童可能只注意到長方形的構成要素，知道四個角都是直角的四邊形是長方形，鼻子、嘴巴及眼睛圖形中的四個角都是直角，滿足長方形的構成要素，所以圖中有 4 個長方形。回答 2 個長方形的學童同時注意到正方形與長方形的構成要素，知道四個角都是直角的四邊形是長方形，四條邊等長且四個角都是直角的四邊形是正方形，圖中有兩個圖形除了滿足長方形的構成要素外，也滿足正方形的構成要素，因此回答圖中有 2 個正方形及 2 個長方形。



【圖二】

在中年級幾何的教學活動，建議安排圖形的製作、組合、拆解與檢驗等活動，幫助學童探索圖形與圖形之間的差異，以及某類圖形共同的性質；例如幫助學童察覺所有的長方形都有 4 個直角，並能判斷某一個圖形是否為長方形。以【圖二】為例，當學童將注意力放在長方形的構成要素時，這四個圖形都滿足長方形的構成要素，所以這四個圖形都是長方形；當學童先將注意力放在限制較多的正方形時，圖像中有 2 個正方形，再將注意力放在限制較少的長方形時，剩下的兩個圖形都是長方形。

1-2-3：關係期

認知及數學結構：

高年級學童的幾何概念在分析期到關係期之間，在掌握各種圖形的構成要素之後，就可以進一步了解圖形內在的屬性關性，並開始探索各圖形之間的包含關係，據以進行簡單的推理。

學童此時應有能力掌握各種簡單圖形的構成要素，可以開始進一步探索這些圖形的內在屬性關係，以及圖形間的包含關係。例如當學童知道三角形的內角和是 180 度時，教師可以透過由多邊形內一點(或多邊形的一個頂點)分割多邊形的策略，幫助學童推論出 n 邊形($n > 3$)的內角和是 $(n-2) \times 180$ 度；當學童掌握三角形任兩邊和大於第三邊的意義時，教師可以透過較短的兩邊和必須大於最長邊的想法，幫助學童推論出 n 邊形($n > 3$)任 $n-1$ 邊的和

於第 n 邊；當學童掌握兩線平行的意義後，教師可以透過長方形的定義，幫助學童推論當一個平行四邊形有一個角是直角時，則這個平行四邊形一定是長方形。

並不是所有的學童都能掌握上述推論的意義，建議教師提供學生推論的學習機會，但是這些推論不是評量的重點。

主題 1-3：幾何概念

下面提出三個教師們容易混淆的幾何概念或迷思概念，第一是特例與集合(等價類)，第二是定義與定理，第三是不存在的幾何圖形。

1-3-1：特例與集合

認知及數學結構：

日常生活中的名詞，經常有兩種意義，第一種是特例，另一種是集合。先以「計程車」為例說明它們的差異，當要搭計程車去火車站時，我會拜託朋友幫我叫一輛計程車，此時的「計程車」是集合的意義，指的是任意的一輛計程車，也就是所有計程車所成的集合；我在街上想攔一部計程車去火車站時，我發現前面有一輛空計程車，很高興的攔下這一輛計程車，此時的「計程車」是特例的意義，指的是攔下的那一輛空計程車。

再舉一個比的例子來說明，冷飲店的夥計甲用 1 分公升的牛奶加 5 分公升的紅茶泡出一杯奶茶，牛奶：紅茶=1：5；冷飲店的伙計乙用 1 公升的牛奶加 5 公升的紅茶泡出一桶奶茶，牛奶：紅茶=1：5；這兩種泡奶茶的方式都是「牛奶：紅茶=1：5」的特例，泡出奶茶的味道相同。

冷飲店老闆為了讓奶茶的品質一致，規定夥計一定要按照「牛奶：紅茶=1：5」的方式泡奶茶，此時「牛奶：紅茶=1：5」

是一個集合，透過「牛奶：紅茶=1：5」的方式，我們可以泡出一小杯、一大杯、一桶的奶茶，而這些奶茶的味道都一樣。

當教師拿出一張長方形圖卡，告訴學童這是一個「長方形」時，教師和學童對「長方形」的解讀可能不相同。學童可能認為拿出的那一張長方形圖卡為「長方形」，也就是將此長方形圖卡看成長方形的一個特例；而教師可能將此長方形圖卡視為所有長方形所成的集合，將拿出的長方形圖卡看成所有長方形所成集合的代表。

學童第一次學習的長方形是一個特例，當他有很多長方形特例的學習經驗，並察覺這些長方形共同的特徵之後，長方形開始由特例發展為一個集合，數學上稱之為等價類。

在還沒有引入長方形的定義之前，所有討論的長方形都應該視為特例，教學時教師必須畫出要討論的長方形圖形；當引入長方形的定義之後，所討論的長方形都是集合，教師不必畫出長方形的圖形，討論的重點是所有長方形的共同特徵。建議教師教學或評量時，應該要掌握長方形是特例或等價類的意義。

1-3-2：定義與定理

認知及數學結構：

下面以平行四邊形為例，幫助教師區分定義與定理的意義。平行四邊形所成集合中的每一個平行四邊形，都具有下列 A 至 E 中的性質，這些性質都是等價的，可以透過平行線的性質以及三角形全等定理，證明這些性質可以互推。

A：兩組對邊互相平行。

B：一組對邊平行且相等。

C：兩組對邊分別相等。

D：兩組對角分別相等。

E：對角線互相平分。

為了方便檢驗一個四邊形是否為平行四邊形，需要給一個判斷的標準，也就是給平行四邊形下定義。可以在 A、B、C、D、E 五個性質中，任意選一個性質當做平行四邊形的定義，大多數的數學課本都選用性質 A 當做平行四邊形的定義，因為 A 和平行四邊形的名字最相符。

選擇性質 A 當做平行四邊形的定義後，可以透過定義，證明其它四個性質也成立，此時這四個經過證明的性質稱為定理，除了定義之外，也可以利用這四個定理來檢驗某一個四邊形是否為平行四邊形。國小階段並沒有引入幾何證明，因此在國小階段，

判斷某四邊形是否為平行四邊形時，只能透過定義，也就是 A 的性質來判斷，不可以透過其它的性質，也就是定理來判斷。

因為定義與定理討論的對象都是集合，而不是特例，因此教師在評量時，不能夠問「兩組對邊等長(兩組對角相等或對角線互相平分)的四邊形是否為平行四邊形」這類的問題，也不能夠問「平行四邊形是否滿足兩組對邊等長(兩組對角相等或對角線互相平分)」這類問題，因為它們都是定理。國小學生只能透過「有兩組對邊平行」來判斷某一個四邊形是否為平行四邊形，也只知道每一個平行四邊形都滿足兩組對邊平行的性質。

下面以兩個問題為例，說明國小階段幾何評量時，教師如何區分特例與集合，以及定義與定理的意義。

問題一：菱形是否為平行四邊形

國小學童能掌握菱形和平行四邊形的定義，知道四條邊都等長的四邊形是菱形，兩組對邊互相平行的四邊形是平行四邊形。當我們評量菱形是否為平行四邊形時，應注意到定義與定理以及特例與集合的意義。

國小階段不引入幾何的證明，國小學童不知道兩組對邊分別相等的所有四邊形都是平行四邊形，因此在國小評量問題中，不可以問所有的菱形(集合)是否都是平行四邊形的問題，但是可以畫出一個菱形(特例)，問學童這個菱形是否為平行四邊形，當學

童能掌握平行四邊形的定義，就可以透過檢驗兩組對邊是否互相平行，判斷出這個畫出的菱形是平行四邊形。

問題二：菱形對角線是否互相垂直？長方形對角線是否等長？

因為對角線並不是四邊形的構成要素，因此國小階段不會透過對角線來定義四邊形。當教師評量「菱形及長方形中，那些圖形的對角線等長？那些圖形的對角線互相垂直？」時，應注意問題中的圖形是特例或是集合。

如果教師將圖形視為集合，必須透過證明，才可能知道每一個長方形的對角線都等長，每一個菱形的對角線都互相垂直，國小學童不會證明，因此在國小階段，不宜評量這類問題。

如果教師將這些圖形視為特例，並畫出圖形，國小階段可以評量這類問題，學童可以利用三角板或直尺等工具，檢驗這個給定的圖形是否滿足對角線等長或對角線互相垂直的性質。教師可以提供學童一些這類問題解題的經驗，為以後國中學習幾何證明來鋪路。

1-3-3：不存在的幾何圖形

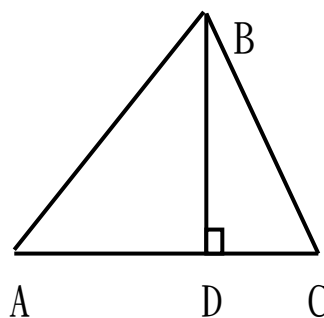
認知及數學結構：

教師在評量幾何性質、平面圖形的周長或面積，以及立體圖形的表面積或體積等問題時，因為沒有考慮到給定的數據必須滿足圖形的幾何性質，導至畫出的幾何圖形是不存在的。例如畫出三邊長分別是 3、4、8 公分的三角形($3+4<8$ ，不符合三角形任兩邊和大於第三邊的性質，該圖形不存在)；畫出三邊長分別是 4、5、6 公分的直角三角形($4^2+5^2\neq 6^2$ ，不符合畢式定理，該圖形不是直角三角形)；畫出三邊長分別是 4、5、7 公分的銳角三角形($4^2+5^2<7^2$ ，該圖形是鈍角三角形，不是銳角三角形)；或畫出半徑為 10 公分，弧長為 15.7 公分，圓心角大約是 60 度的扇形(該扇形是四分之一圓，圓心角是 90 度，畫出的扇形不正確)。

下面提出一些國小評量試題中常見不存在或不正確幾何圖形的例子，提供教師們參考，建議教師命題時要小心，不要犯這些錯誤。

(一)如【圖三】， $AC=AB=3$ 公分， $BC=2.7$ 公分， $BD=2.4$ 公分，

求 $\triangle ABC$ 面積=()平方公分



【圖三】

本問題是民國 64 年國編版數學課本中的題目，題目中提供了三角形三邊的長度及一條高的長度，而不是只提供底邊以及其對應高的長度。提供三邊長度的用意是檢驗學童是否理解三角形面積公式中的底及高，必須是一邊與其對應的高。

因為國小階段只引入一種求三角形面積的公式，教師及學童們求三角形面積的方法都一樣，因此，很多評量試題中出現數據不滿足幾何性質的三角形，但是教師們都沒有察覺。

下面提供兩種不同的解題方式，這兩種解題方式所用的面積公式都是正確的，但是算出來的答案不一樣。

第一種：利用國小三角形面積公式「(底×高)÷2」解題。

$$\triangle ABC \text{ 面積} = (\text{底} \times \text{高}) \div 2 = (3 \times 2.4) \div 2 = 3.6 (\text{平方公分})$$

第二種：利用高中海龍公式「 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 」解題，公

式中的 a 、 b 、 c 是三角形三邊長， $s = (a+b+c) \div 2$ 。

$$s = (3+3+2.7) \div 2 = 4.35$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ 面積} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{4.35 \times (4.35-3) \times (4.35-3) \times (4.35-2.7)} \\ &\neq 3.6 (\text{平方公分}) \end{aligned}$$

用兩個不同的正確公式來解題，算出來答案不一樣的理由是【圖三】的數據不滿足某些幾何性質，也就是說，【圖三】的圖形不存在，下面簡單說明該圖形不存在的理由。

假設 $AD=x$ ， $DC=y$ ， $AC=x+y=3$ 。 $\triangle BAD$ 及 $\triangle BCD$ 都是直角三角形，直角三角形三邊長必須滿足畢氏定理。

直角 $\triangle BAD$ 中， $3^2-2.4^2=x^2$ ， $3^2-2.4^2=1.8^2$ ，得到 $x=1.8$ 。

直角 $\triangle BCD$ 中， $2.7^2-2.4^2=y^2$ ，得到 $y=\sqrt{1.53}$ 。

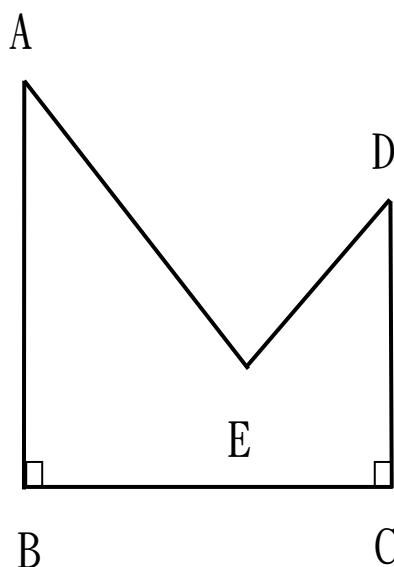
計算出來的 y 不是有理數，因此 $y \neq 1.2$ 。

因為 $BC=x+y=3$ ，而算出來的 $x+y \neq 3$ ，該圖形給定的數據讓該圖形不存在。

畫幾何圖形的時候，給的數據愈多，愈容易讓該幾何圖形不存在，教師畫出圖形後，應該檢驗該圖形是否存在。以本題為例，因為不易找出都滿足畢氏定理的整數數據，教師只要刪除 AB 或 AC 中的一個長度，讓 x 或 y 的值有彈性，就可以讓圖形存在。

(二)如【圖四】， $AB=10$ ， $BC=12$ ， $CD=7$ ， $AE=9$ ， $ED=5$ ，

$\angle AED=90^\circ$ ，求五邊形 $ABCDE$ 的面積？



【圖四】

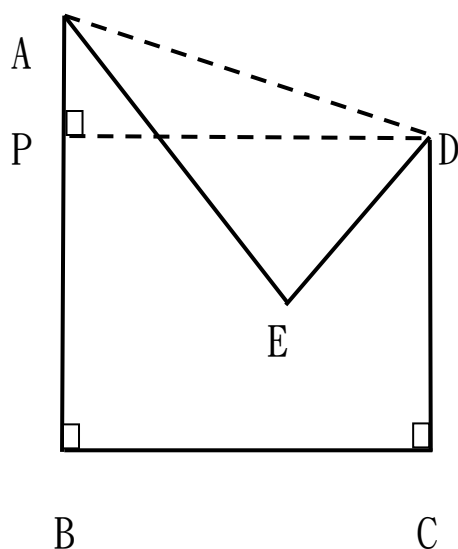
本題是國小常見的評量試題，評量學童是否能利用梯形 ABCD 面積減直角三角形 ADE 面積的方式，算出五邊形 ABCDE 的面積。雖然教師及部份學童們能算出正確的答案，但是，大多數試題中的數據都讓該圖形不存在，想想看，為什麼該圖形不存在。

【圖五】中 $\triangle APD$ 及 $\triangle AED$ 都是直角三角形，這兩個直角三角形的斜邊都是 AD，直角三角形三邊長必須滿足畢氏定理。

直角 $\triangle APD$ 中， $AD^2 = AP^2 + PD^2 = 12^2 + (10 - 7)^2 = 144 + 9 = 153$

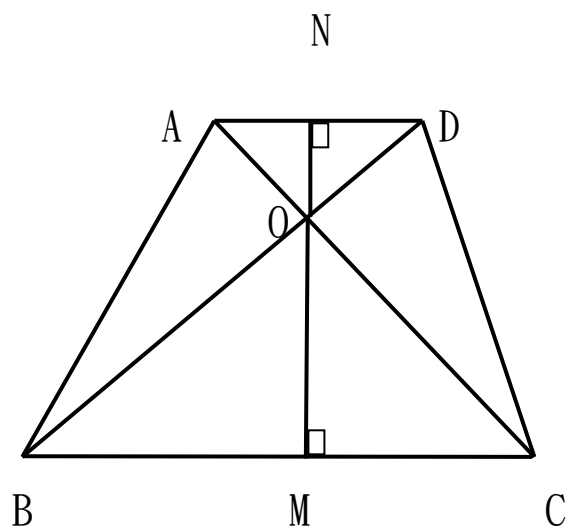
直角 $\triangle AED$ 中， $AD^2 = AE^2 + ED^2 = 9^2 + 5^2 = 81 + 25 = 106$

$AD^2 = AD^2$ ，但是 $153 \neq 106$ ，所以該圖形不存在。



【圖五】

(三)如【圖六】，已知梯形 ABCD， $AD=5$ ， $BC=10$ ， $ON=2$ ， $OM=5$ ，
求 $\triangle OAB$ 面積 + $\triangle OCD$ 面積 = ？



【圖六】

本題也是國小常見的評量試題，下面提出三種不同的解法，
得到三種不同的答案，想想看，哪個解法是正確的。

解法 1：梯形 ABCD 面積 - ($\triangle OAD$ 面積 + $\triangle OBC$ 面積)

$$\text{梯形 ABCD 面積} : (5 + 10) \times (2 + 5) \div 2 = 52.5$$

$$\triangle OBC \text{ 面積} : (10 \times 5) \div 2 = 25$$

$$\triangle OAD \text{ 面積} : (5 \times 2) \div 2 = 5$$

$$\triangle OAB \text{ 面積} + \triangle OCD \text{ 面積} = 52.5 - (25 + 5) = 22.5$$

解法 2：($\triangle ACD$ 面積 - $\triangle OCD$ 面積) $\times 2$

先說明 $\triangle OAB$ 面積 = $\triangle OCD$ 面積

$$\triangle OAB \text{ 面積} = \triangle ABC \text{ 面積} - \triangle OBC \text{ 面積}$$

$$\triangle OCD \text{ 面積} = \triangle DBC \text{ 面積} - \triangle OBC \text{ 面積}$$

$\triangle ABC$ 面積 = $\triangle DBC$ 面積(同底等高)，所以

$$\triangle OAB \text{ 面積} = \triangle OCD \text{ 面積}$$

再計算 $\triangle OAB$ 面積 + $\triangle OCD$ 面積

$$\triangle ABC \text{ 面積} = 10 \times (5 + 2) \div 2 = 35$$

$$\triangle OBC \text{ 面積} = (10 \times 5) \div 2 = 25$$

$$\triangle OAB \text{ 面積} + \triangle OCD \text{ 面積} = (35 - 25) \times 2 = 20$$

解法 3：($\triangle CAB$ 面積 - $\triangle OAB$ 面積) $\times 2$

$$\triangle BAD \text{ 面積} = 5 \times (5 + 2) \div 2 = 17.5$$

$$\triangle OAD \text{ 面積} = (5 \times 2) \div 2 = 5$$

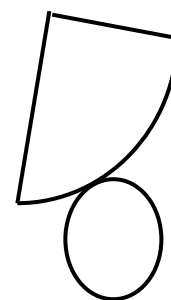
$$\triangle OAB \text{ 面積} + \triangle OCD \text{ 面積} = (17.5 - 5) \times 2 = 25$$

上面這三種解法都是正確的，為什麼算出來的答案不一樣，理由還是【圖六】的圖形不存在，下面簡單說明該圖形不存在的理由。

$\angle DBC = \angle ADB$ ， $\angle DAC = \angle BCA$ (內錯角相等)，所以 $\triangle OAD$ 和 $\triangle OBC$ 是相似三角形(AA相似)。相似三角形的對應邊成比例，所以 $BC : AD = OM : ON$ 但是 $BC : AD = 10 : 5$ ， $OM : ON = 5 : 2$ ， $10 : 5 \neq 5 : 2$ ，所以【圖六】的圖形不存在。

(四)圓錐甲的底半徑是 3 公分，高是 4 公分，【圖七】是圓錐甲的展開圖，圖中扇形的弧長是幾公分？（圓周率=3.14）

- ①5 ②10 ③15.7 ④31.4



【圖七】

本題也是國小常見的評量試題，教師們應該察覺到，評量試卷中出現的圓錐展開圖，扇形的圓心角都小於 180 度(大部份扇形的圓心角都接近 120 度)，幾乎沒有見過圓心角大於 180 度的扇形。請算算看，展開圖中扇形的圓心角是多少度？

(圓錐側邊長)²=3²+4²=5²=25，圓錐側邊長=5，所以展開圖中扇形的半徑是 5 公分。

展開圖中扇形的弧長是圓錐底面的圓周長，圓錐底面的圓半徑是 3 公分，所以扇形的弧長是 $3 \times 2 \times 3.14$ 公分。

半徑 5 公分圓周長：扇形弧長=360 度：扇形圓心角的度數，
 $5 \times 2 \times 3.14 : 3 \times 2 \times 3.14 = 360 : x$ ，可以算出 $x = 216$ (度)。

由上面的說明可以知道，滿足題意的扇形是圓心角大於 180 度的優扇形，題目中畫出的扇形是不正確的。

為了幫助教師們掌握圓錐展開圖中扇形的圓心角度數，提出一個關係式給教師們參考：

1. 圓錐底邊的半徑：圓錐側邊的邊長 $=0.5$ ，該直圓錐展開圖中的扇形部份剛好是半圓。
2. 圓錐底邊的半徑：圓錐側邊的邊長 <0.5 ，該直圓錐展開圖中的扇形部份是劣扇形(圓心角 <180 度)。
3. 圓錐底邊的半徑：圓錐側邊的邊長 >0.5 ，該直圓錐展開圖中的扇形部份是優扇形(圓心角 >180 度)。

第二章：平面圖形

撰寫者：謝堅

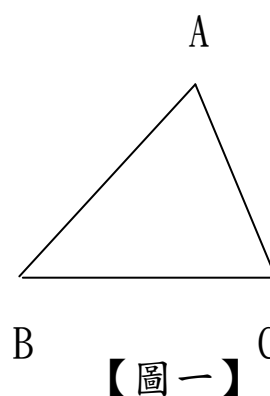
主題 2-1：三角形

在三角形教材中，理念篇只討論三個部份，第一部份是三角形的分類與命名，第二部份是三角形的包含關係，第三部份是三角形任兩邊長的和大於第三邊。

2-1-1：三角形的分類與命名

認知及數學結構：

三角形有三條邊及三個角，因此，數學上常透過邊和角的關係來將三角形分類。以【圖一】中的三角形為例，每一個角都只有一條對應的邊，每一條邊都只有一個對應的角，為了溝通上的方便，我們稱 $\angle A$ 的對邊是BC邊，也稱AB邊的對角是 $\angle C$ 。



國小階段常見的三角形包含了「三角形、等腰三角形、正三角形、直角三角形，銳角三角形、鈍角三角形、等腰直角三角形」。其中三角形是字集合，等腰三角形和正三角形可以透過有幾條邊

等長，或有幾個角的角度相等的關係來命名；直角三角形，銳角三角形、鈍角三角形可以透過最大內角是直角、銳角或鈍角來命名；等腰直角三角形可以透過等腰三角形和直角三角形的交集來命名，分別說明如下：

(一)等腰三角形與正三角形

三角形的邊和角之間滿足「大邊對大角，小邊對小角」，以及「大角對大邊，小角對小邊」的關係，因此可以透過有幾條邊等長的關係，也可以透過有幾個角的角度相等的關係將三角形分類。因為等腰三角形中「腰」的語意與邊長有關，因此，透過有幾條邊等長的關係來命名等腰三角形與正三角形可能比較恰當。

以有幾條邊等長的關係來分類，可以將所有的三角形區分為「三條邊都等長」、「恰有兩條邊等長」、「三條邊都不等長」三類，其中「三條邊都等長」的三角形滿足「三個角的角度都相等」，「恰有兩條邊等長」的三角形滿足「恰有二個角的角度相等」，「三條邊都不等長」的三角形滿足「三個角的角度都不相等」。三條邊都等長的三角形可以稱為等邊三角形，恰有兩條邊等長的三角形可以稱為等腰三角形，三條邊都不等長的三角形沒有特殊的性質可以討論，因此沒有給這類三角形命名。

數學上並沒有將正三角形排除在等腰三角形之外，將三條邊

等長的三角形也稱為等腰三角形，因此，教師教學時必須澄清有兩條邊等長或三條邊都相等的三角形都是等腰三角形。建議教師可以透過問話「正三角形有兩條邊相等嗎？所以正三角形也是等腰三角嗎？」，來協助學童形成正三角形也是等腰三角形的共識。

(二)命名等腰三角形與梯形的迷思概念

數學上稱「有兩條邊等長」的三角形為等腰三角形；稱「有一組對邊平行」的四邊形為梯形，雖然等腰三角形和梯形的定義中都出現「有」，但是它們所傳遞的訊息並不相同。下面說明命名等腰三角形和梯形時，可能產生的迷思概念。

「有」可以包含三種意義，第一種是「至多有」，第二種是「恰有」，第三種是「至少有」，下面先以梯形的命名為例，說明以「至多有」、「恰有」及「至少有」來定義梯形時，可能產生的不同結果，再說明教師命名梯形以及等腰三角形時應注意的事項。

(1)「至多有」一組對邊平行的四邊形稱為梯形：

梯形只有兩組對邊，「至多有」一組對邊平行指的是沒有對邊平行或恰有一組對邊平行。

因此，兩組對邊都不平行，以及恰有一組對邊平行的四邊形都是梯形；只有兩組對邊都平行的平行四邊形不是梯形。

(2) 「恰有」一組對邊平行的四邊形稱為梯形：

梯形只有兩組對邊，「恰有」一組對邊平行指的是一組對邊平行，另一組對邊不平行。

因此，兩組對邊都不平行的四邊形，以及兩組對邊都平行的平行四邊形都不是梯形。

(3) 「至少有」一組對邊平行的四邊形稱為梯形：

梯形只有兩組對邊，「至少有」一組對邊平行指的是恰有一組對邊平行或有兩組對邊平行。

因此，兩組對邊都不平行的四邊形不是梯形；只有一組對邊平行和兩組對邊都平行的平行四邊形都是梯形。

國小階段等腰三角形定義中的「有」是「至少有」的意義，而梯形定義中的「有」是「恰有」的意義。建議教師以「只有兩邊等長，或三邊都等長的三角形是等腰三角形」，來說明等腰三角形的意義；以「一組對邊平行，另一組對邊不平行的四邊形是梯形」，來說明梯形的意義。

(三) 直角三角形，銳角三角形、鈍角三角形

三角形的內角和為 180 度，三個內角中最大角的角度會大於或等於 60 度，會小於 180 度，而最小內角的角度會小於或等於 60 度。也就是說，三角形中最小角一定是銳角，而最大角可以是銳角($60 \text{ 度} \leq x < 90 \text{ 度}$)，也可以是直角($x = 90 \text{ 度}$)，也可以是鈍角($90 \text{ 度} \leq x < 180 \text{ 度}$)。因此，可以透過三角形內角中最大角是直角、銳角或鈍角的關係，將所有的三角形區分為直角三角形，銳角三角形與鈍角三角形三類，這三類三角形兩兩的交集都是空集合，而它們的聯集是所有的三角形。

有三種定義直角三角形，銳角三角形、鈍角三角形的方法，依序分別說明如下。

第一種：

直角三角形：有一個角是直角的三角形。

鈍角三角形：有一個角是鈍角的三角形。

銳角三角形：三個角都是銳角的三角形。

第一種是最常見，也是比較摘要的定義方式。成人知道三角形的內角和是 180 度，也知道三角形中有一個角是直角時，另外兩個角一定是銳角，三角形中有一個角是鈍角時，另外兩個角也

一定是銳角，因此定義直角及鈍角三角形時，省略說明另外兩個內角是銳角的結果，摘要的定義有一個角是直角的三角形為直角三角形，有一個角是鈍角的三角形為鈍角三角形。

當學童尚未掌握三角形內角和是 180 度的意義之前，並不知道直角及鈍角三角形其它兩個角的屬性，面對直角三角形中有一個角是直角，或鈍角三角形中有一個角是鈍角，其它兩個角的角度可以是多少度問題時，常會答錯。

建議當學童尚未掌握三角形內角和是 180 度的意義之前，教師可以透過下面第二種或第三種方式來定義直角、銳角及鈍角三角形。其中第二種命名方式和第一種相同，差別是較詳細的描述三角形三個內角的屬性。

第二種：

直角三角形：有一個角是直角、其它二個角是銳角的三角形。

鈍角三角形：有一個角是鈍角、其它二個角是銳角的三角形。

銳角三角形：三個角都是銳角的三角形。

也可以透過三角形中最大角的概念，改寫第一種定義方式為第三種。第三種定義方式中，三類三角形都透過最大角來判斷，而第一種定義方式中，直角及鈍角三角形的描述中只涉及一個角

，而銳角三角形的描述中同時涉及三個角。

第三種：

直角三角形：最大角是直角的三角形。

鈍角三角形：最大角是鈍角的三角形。

銳角三角形：最大角是銳角的三角形。

(四)等腰直角三角形

等腰直角三角形同時滿足「有兩邊等長」及「一個角為直角」這兩個特徵，是等腰三角形和直角三角形的交集，學童必須分別掌握等腰三角形和直角三角形的意義之後，才可能理解等腰直角三角形的意義。

有兩種幫助學童澄清等腰直角三角形定義的教學方式。第一種是先做出等長的腰，再做出直角；第二種是先做出直角，再做出等長的腰。這兩種方式都可以幫助學童察覺等腰直角三角形同時滿足「兩邊等長」及「一個角為直角」這兩個特徵，建議教師教學時應引入這兩種教法。

第一種：利用扣條等教具進行做等腰直角三角形的實作活動

利用扣條做等腰直角三角形時，多數學童會先做出等長的兩邊，也就是先滿足等腰三角形的條件，再透過旋轉扣條讓兩邊的

夾角是直角之後，再圍成一個三角形，這個三角形會同時滿足等腰及直角兩個條件，所以是等腰直角三角形。

第二種：進行畫等腰直角三角形實作活動

畫等腰直角三角形時，多數學童會先利用三角板畫出直角，再利用圓規畫出等長的兩邊，最後連成一個三角形，這種畫法比較容易畫出等腰直角三角形。這個畫出來三角形會同時滿足直角及等腰兩個條件，所以是等腰直角三角形。

當學童有一些用扣條做等腰直角三角形，以及畫等腰直角三角形的經驗後，較能夠同時掌握等腰直角三角形滿足「兩邊相等」及「一個角為直角」關係的意義。

2-1-2：三角形的包含關係

認知及數學結構：

下面這七類三角形是國小階段常見的三角形，如何將這些三角形分類，最容易呈現它們之間的包含關係，請教師們先嘗試利用文氏圖畫出這些三角形間的包含關係，再看後面的說明。

A：三角形 B：等腰三角形 C：正三角形
 D：直角三角形 E：銳角三角形 F：鈍角三角形
 G：等腰直角三角形。

不同的分類方式，可以讓一個集合產生不同的分割關係，最常見的分類方式，是讓分割出來的子集合，彼此之間都沒有交集，而且所有子集合的聯集是原來的集合。透過三角形內最大角是銳角、直角或鈍角的分類方式，可以將所有的三角形區分為銳角三角形、直角三角形和鈍角三角形三類，這三類三角形的聯集是所有的三角形，而它們的交集都是空集合。

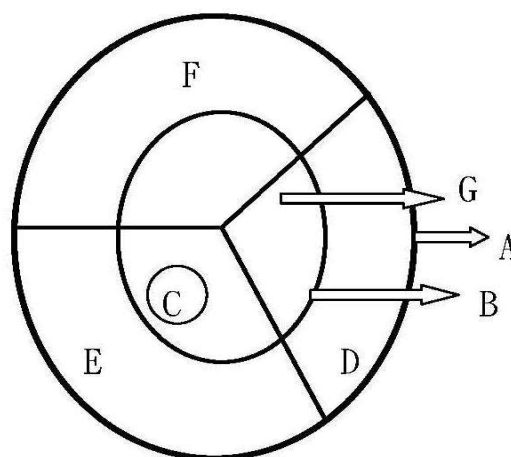
如【圖二】，先畫出一個大圓 A 代表所有的三角形，再將 A 分割成三個部份，分別代表直角三角形(D)、銳角三角形(E)和鈍角三角形(F)。

因為等腰三角形和銳角、直角及鈍角三角形都有交集，畫出一個中圓代表等腰三角形(B)，等腰三角形(B)和直角三角形(D)

的交集就是等腰直角三角形(G)，等腰三角形(B)和銳角三角形(E)的交集就是等腰銳角三角形，等腰三角形(B)和鈍角三角形(F)的交集就是等腰鈍角三角形，國小階段並沒有命名等腰銳角三角形及等腰鈍角三角形。

正三角形是三個角都相等的等腰三角形，包含在等腰銳角三角形內，最後在等腰三角形(B)和銳角三角形(E)的交集中畫出小圓代表正三角形(C)。

建議教師透過文氏圖幫助自己澄清不同三角形間的包含及分割關係，但是這些圖形間的包含以及分割的關係，都不是國小階段評量的重點。



【圖二】

2-1-3：三角形任兩邊邊長和大於第三邊

認知及數學結構：

(一)精確的定義(well-defined)

數學上常追求精確的定義(well-defined)，也就是說，在很多等價的定義中，儘量找出描述最精確，適用的範圍最大的當做數學上的定義。精確的定義會讓數學定義變的更抽象，因此對國小學童或國中學生而言，更無法理解其意義。

以長方形的定義為例，數學上稱「四個角相等的四邊形為長方形」，國中、小階段稱「四個角都是直角的四邊形為長方形」，因為四邊形的內角和是360度，所以「四個角相等」和「每一個角都是直角」的意義相同，也就是說，這兩個定義是等價的或相同的。數學上用「四個角相等的四邊形為長方形」當做長方形的定義，因為「四個角相等」比「四個角都是直角」描述更簡單，適用範圍更大。國、中小用「四個角都是直角的四邊形為長方形」當做長方形的定義，主要的原因是檢驗四個角是否為直角比檢驗四個角的角度相等簡單許多。

「三角形任兩邊邊長的和的大於第三邊」與「三角形比較短兩邊邊長和大於最長邊」也是等價的定義。假設三角形三邊的長度是 a 、 b 、 c ， $a \geq b \geq c$ ，如果 $b+c \geq a$ 成立，那麼 $a+b \geq c$ 、 $a+c \geq b$ 一定也會成立，所以當「三角形比較短兩邊邊長和大於最長邊」成立時，

「三角形任兩邊邊長和大於第三邊」也會成立。

反過來說，當「三角形任兩邊邊長和大於第三邊」成立，也就是說 $b+c \geq a$ 、 $a+b \geq c$ 、 $a+c \geq b$ 都成立， $b+c \geq a$ 只是其中的一部份，「三角形比較短兩邊邊長和大於最長邊」當然也會成立。

(二)「三角形任兩邊邊長和大於第三邊」教學的迷思概念：

國小最常見的教法，就是提供很多不同長度的竹籤，要求學童任意選出三根竹籤來圍三角形，學童有時能圍成三角形，有時不能圍成三角形。接著要求學童將注意力放在竹籤的長度上，找出能圍成三角形與不能圍成三角形時邊長的關係，希望學童察覺「三角形任兩邊邊長和大於第三邊」。

學童不易察覺「三角形任兩邊邊長和大於第三邊」，因為最長邊及次長邊邊長的和大於最短邊，以及最長邊及最短邊邊長的和大於次長邊的現象非常明顯，學童不會主動去討論。換句話說，學童察覺的是「三角形較短兩邊邊長和大於最長邊」時，才能圍成一個三角形，而不是「三角形任兩邊邊長和大於第三邊」時，才能圍成一個三角形。

以三角形的邊長來分類，可以區分成三邊等長(a 、 a 、 a)，恰有兩邊等長(a 、 a 、 b 及 a 、 b 、 b ，其中 $a < b$) 及三邊不等長三類(a 、 b 、 c ， $a < b < c$)，教師可以幫助學童察覺，它們也符合「三角形較

短兩邊邊長和大於最長邊 ($a+a>a$, $a+a>b$, $a+b>b$)」的關係。

很多教師誤認為學童察覺「三角形較短兩邊邊長和大於第三邊」，就等同於理解「三角形任兩邊邊長和大於第三邊」，其實不然，學童很容易得到「三角形較短兩邊邊長和大於最長邊」的結果，如果沒有教師的幫助，學童很難自行將「三角形較短兩邊邊長和大於最長邊」推廣至「三角形任兩邊邊長和大於第三邊」。

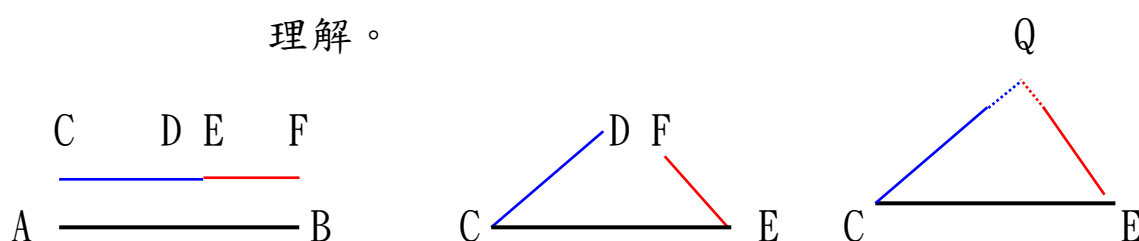
建議教師先接受「三角形比較短兩邊邊長和大於最長邊」的結果，接著說明當「三角形比較短兩邊邊長和大於最長邊」成立時，最長邊及次長邊邊長和大於最短邊，以及最長邊及最短邊邊長和大於次長邊也會成立，可以得到「三角形任兩邊邊長和大於第三邊」的結果。

(三)「三角形任兩邊邊長和大於第三邊」的教學策略

教師面對新的教學單元時，有三種準備教學的想法，第一種是將新單元視為一個全新的數學問題，思考如何教學最容易幫助學童理解該單元的教學內容；第二種是檢查學童的舊經驗，找出和該單元相關的先備知識，思考那如何延伸這些舊的解題經驗，幫助學童自己解決問題；第三種是反省以後還有哪些與該單元相關的教材，教學時儘量為以後引入的相關教材鋪路，或者，至少不要引入妨礙以後概念發展的口訣或特殊解法。

第一種想法的教師，教學時可能很精彩，也幫助學童學會了新的教材，但是學童學習的都是片段的數學知識，除非學生有反省能力，否則很難掌握數學的整體脈絡。建議教師教學時，應該同時有第二種及第三種想法。

下面以這三種想法為例，提出三種教學策略提供教師們參考。
第一種想法：將它視為一個新的問題，思考如何教學能幫助學童理解。



【圖三】

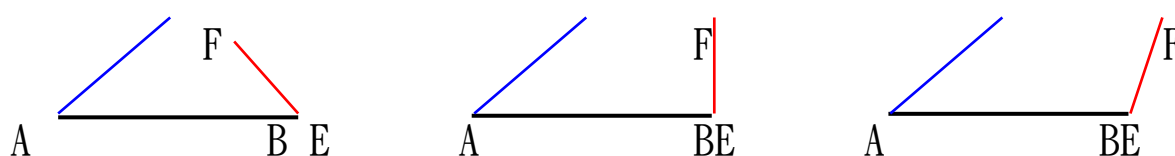
【圖三】左邊的圖形中，CD 線段的長為 m 、EF 線段的長為 n ，AB 線段和 CD 及 EF 線段接起來一樣長，所以 AB 線段的長為 $m+n$ 。

【圖三】中間的圖形中，以 AB 線段為三角形的底邊，CD 及 EF 線段為三角形的兩邊，CD 及 EF 線段無法相交於一點，也就是無法圍成一個三角形，必須延長 CD 及 EF 線段，讓它們交於一點，才能圍成一個三角形。

【圖三】右邊的圖形中，CD 及 EF 線段的延長線交於一點 Q，在三角形 CEQ 中，學童可以察覺三角形的左邊比 CD 的長度 m 長，右邊比 EF 的長度 n 長，這兩邊邊長加起來一定比底邊的長度 $m+n$ 長。請注意，學童察覺的是「三角形兩邊邊長和一定大於底邊」的

結果，不是「三角形任兩邊邊長和大於第三邊」。

以 CD 及 EF 線段為邊時，有很多不同的畫法，教師不宜只出現 AB 線段與 EF 線段夾角為銳角的情形(【圖四】左邊的圖形)，教師應以 AB 線段與 EF 線段的交點為圓心畫圓，幫助學童察覺，當 AB 線段與 EF 線段夾角為直角(【圖四】中間的圖形)，或夾角為鈍角時(【圖四】右邊的圖形)，也可能圍成一個三角形，如果能圍成一個三角形，該三角形也滿足三角形兩邊邊長和一定大於底邊的結果。



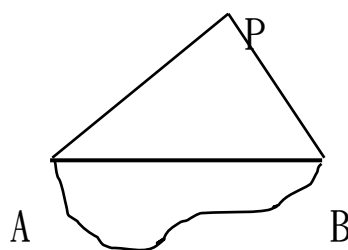
【圖四】

第二種想法：檢查學生以前學過什麼，思考如何墊步能幫助學童自己解決問題

以 A、B 為端點可以有很多不同的路徑，數學上稱連接兩點最短路徑的長度為這兩點的距離，在這些連接 A、B 兩點的路徑中，連接 A、B 兩點直線段路徑的長度最短，因此 AB 線段的長度就是 A、B 這兩點的距離。

如果低年級學童已有上述兩點距離的概念，教師只要透過下【圖五】復習如何求兩點的距離，就可以幫助學童察覺「三角形兩邊的和的大於 A、B 兩點的距離($AP + PB > AB$)」。請注意，學童察覺的

是「三角形兩邊邊長和一定大於第三邊」的結果，不是「三角形任兩邊邊長和大於第三邊」。



【圖五】

第三種想法：反思以後還有哪些相關的教材，如何為以後的教學鋪路。

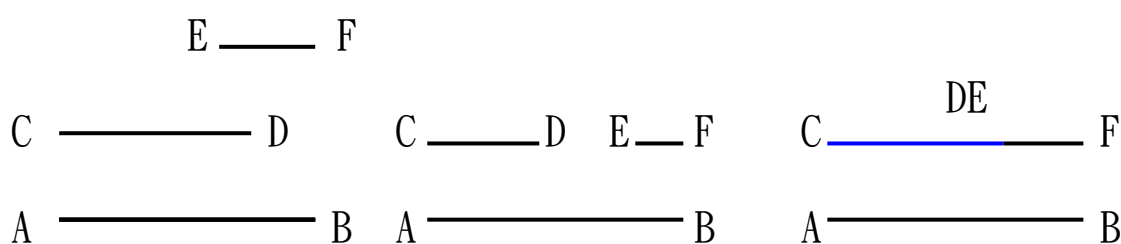
「任兩邊邊長和大於第三邊就能圍成三角形」只是「任 $n-1$ 邊邊長和大於第 n 邊 ($n \geq 3$) 就能圍成 n 邊形」的一個特例，前面二種想法都只針對三角形的問題，對以後解 n ($n > 3$) 邊形問題時，並沒有太大的幫助。下面提供另一種教學方式，既能解決三角形的問題，對學童以後面對 n ($n > 3$) 邊形問題，也能自發性的解決問題。

【圖六】中有 AB 、 CD 、 EF 三條線段，滿足 $AB \geq CD \geq EF$ 的關係，將最長的線段 AB 放在下面，比較短的兩條線段 CD 和 EF 接起來的長度與 AB 長度間有下列三種關係：

1. CD 和 EF 接起來比 AB 長(如【圖六】左邊的圖形)，當 C 和 A 重合、 F 和 B 重合時， D 和 E 會交於一點，這三條線段能圍成一個三角形。
2. CD 和 EF 接起來比 AB 短(【圖六】中間的圖形)，當 C 和 A 重合、

F 和 B 重合時，D 和 E 無法交於一點，也就是說，這三條線段無法圍成一個三角形。

3. CD 和 EF 接起來和 AB 一樣長(【圖六】右邊的圖形)，當 C 和 A 重合、F 和 B 重合時，CD 和 EF 線段接起來就是 AB 線段，這三條線段無法圍成一個三角形。



【圖六】

由上面的說明可以知道，當比較短兩邊邊長和大於最長邊時，這三邊一定可以圍成一個三角形。

相同的理由，【圖七】中有 AB、CD、EF、GH 四條線段，當比較短的四條線段接起來比 AB 長(【圖七】左邊的圖形)，一定能圍成四邊形；當比較短的四條線段接起來比 AB 短(【圖七】右邊的圖形)，就不能圍成四邊形。也就是說，當比較短三邊邊長和大於最長邊時，這四邊一定可以圍成四邊形。



【圖七】

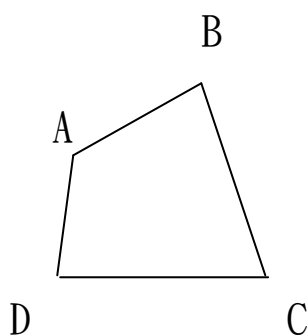
主題 2-2：四邊形

在四邊形教材中，理念篇只討論兩個部份，第一部份是四邊形的分類與命名，第二部份是四邊形的包含關係。

2-2-1：四邊形的分類與命名

認知及數學結構：

四邊形有四條邊及四個角，以【圖八】中的四邊形為例，每一個角都有一個相對的角，以及兩個相鄰的角，例如 $\angle A$ 有一個相對的角 $\angle C$ ，有兩個相鄰的角 $\angle B$ 和 $\angle D$ ；每一條邊都都有一條相對的邊，以及兩條相鄰的邊，例如 AB 邊有一條相對的邊 CD ，有兩個條相鄰的邊 BC 和 AD ，其中相對的邊還有互相平行與不互相平行兩類關係。因此，除了透過有幾條邊等長，或有幾個角的角度相等的關係將四邊形分類之外，還可以透過有幾組對邊互相平行來分類。



【圖八】

連接四邊形相對的頂點可以形成兩條對角線，因為四邊形的構成要素是頂點、邊和角，對角線不是四邊形的構成要素，因此國小階段不透過兩條對角線的關係來定義四邊形，也不討論不同四邊形對角線平分、等長或垂直等性質。

國小階段常見的四邊形包含「四邊形、正方形、長方形、菱形，平行四邊形，梯形、等腰梯形、箏形」。其中四邊形是字集合，長方形可以透過四個角角度都相等(都是直角)來命名，菱形可以透過四條邊都等長來命名，正方形可以透過長方形和菱形的交集來命名，平行四邊形和梯形可以透過有幾組對邊互相平行來命名，等腰梯形可以延伸等腰三角形的意義來命名梯形，箏形可以透過對角線及邊長的關係來命名，分別說明如下：

(一)透過有幾條邊等長來分類：

常見的四邊形中，只有菱形是透過邊長的關係來命名，數學上稱四條邊都等長的四邊形為菱形，菱形也稱為等邊四邊形。

下面以 a 、 b 代表不同的邊長，兩組對邊等長的四邊形(a 、 b 、 a 、 b 型)是平行四邊形；相鄰兩邊分別相等，但是相對兩邊不等長的四邊形(a 、 a 、 b 、 b 型)是箏形。但是數學上不透過邊長的關係來定義平行四邊形與箏形。

(二)透過有幾個角的角度相等來分類：

常見的四邊形中，只有長方形是透過角度的關係來命名，稱四個角的角度都相等(或都是直角)的四邊形為長方形，長方形也稱為等角四邊形或矩形。

下面以 a 、 b 代表不同的角度，兩組對角相等的四邊形(a 、 b 、 a 、 b 型)是平行四邊形；相鄰兩角分別相等，但是相對兩角不相等的四邊形(a 、 a 、 b 、 b 型)是等腰梯形。但是數學上不透過角度的大小關係來定義平行四邊形與等腰梯形。

(三)透過有幾組對邊平行來分類：

四邊形每一條邊都有相對的邊，因此四邊形共有兩組相對的邊。常見的四邊形中，平行四邊形和梯形是透過有幾組對邊互相平行來分類，有兩組對邊平行的四邊形稱為平行四邊形，恰有一組對邊平行的四邊形稱為梯形，沒有對邊平行的四邊形沒有特殊的性質可以討論，因此沒有給這類四邊形命名。

(四)透過對角線的關係來分類

四邊形有兩條相交的對角線，常見的四邊形中，只有箏形是

透過對角線來命名，稱對角線互相垂直，但僅平分其中一條對角線的四邊形為箏形，或稱恰有一條對角線，其兩側的對應邊都一樣長的四邊形(同側的兩邊不等長)為箏形。

也可以透過對角線的關係來命名其它常見的四邊形。例如稱對角線互相平分的四邊形為平行四邊形；稱對角線互相平分且等長的四邊形為長方形；稱對角線互相平分且互相垂直的四邊形為菱形；稱對角線互相平分、垂直且等長的四邊形為正方形。因為對角線並不是四邊形的構成要素，所以國小階段不透過對角線的關係來給這些四邊形命名。

2-2-2：四邊形的包含關係

認知及數學結構：

下面這八類四邊形是國小階段常見的四邊形，如何將這些四邊形分類，最容易呈現它們之間的包含關係，請教師們先嘗試利用文氏圖畫出這些四邊形間的包含關係，再看後面的說明。

A：四邊形 B：正方形 C：長方形 D：菱形
E：平行四邊形 F：梯形 G：等腰梯形 H：箏形

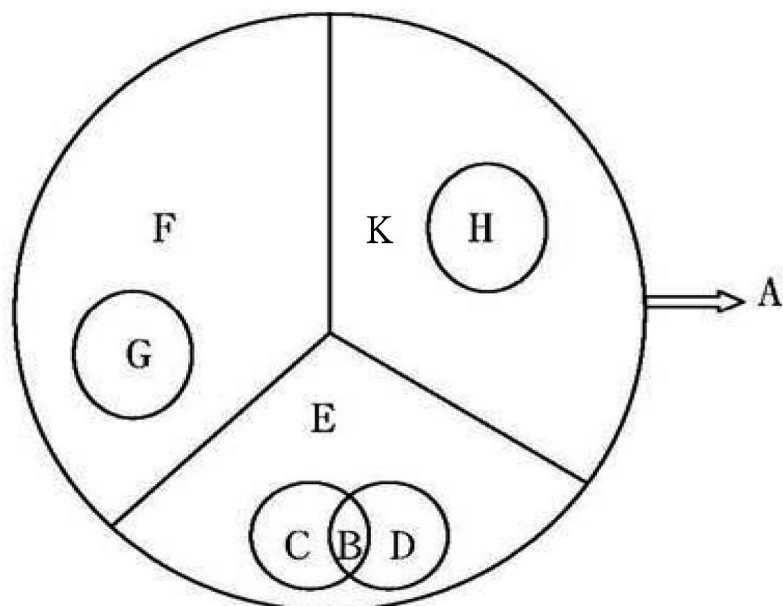
透過有幾組對邊互相平行的分類方式，可以將所有的四邊形區分為有兩組對邊互相平行，恰有一組對邊互相平行，以及沒有對邊互相平行三類，這三類四邊形的聯集是所有的四邊形，而它們的交集都是空集合。

如【圖九】，先畫出一個大圓代表所有的四邊形(A)，再將大圓分割成三個部份，第一部份代表有兩組對邊互相平行的平行四邊形(E)，第二部份代表恰有一組對邊互相平行的梯形(F)，剩下的那一部份代表沒有對邊互相平行的四邊形(命名為k)。

因為長方形及菱形也是平行四邊形，它們的聯集不是所有的平行四邊形，它們的交集是正方形，所以在平行四邊形內部畫兩個相交的圓，一個圓代表長方形(C)，另一個圓代表菱形(D)，而這兩個圓的交集就是正方形(B)。因為等腰梯形是兩腰等長的梯

形，包含於梯形，在 F 的內部畫一個圓代表等腰梯形(G)。箏形沒有對應邊互相平行，所以在 K 的內部畫一個圓 H 代表箏形。

建議教師透過文氏圖幫助自己澄清不同四邊形間的包含及分割關係，但是這些圖形間的包含及分割的關係，都不是國小階段評量的重點。



【圖九】

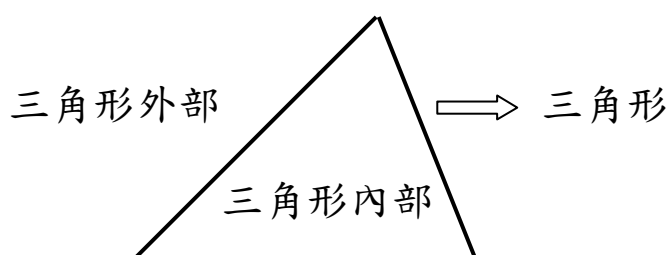
主題 2-3：多邊形

在多邊形教材中，理念篇只討論三個部份，第一部份是多邊形與多邊形區域，第二部份是凸多邊形與凹多邊形，第三部份是正多邊形。

2-3-1：多邊形與多邊形區域

認知及數學結構：

由直線段所圍成的封閉圖形，數學上稱為多邊形，多邊形與多邊形區域是兩種不同的圖形概念，以【圖十】中的三角形為例，由三條直線段頭尾相接所圍成的圖形稱為三角形，這個三角形可以把平面分割成三角形、三角形內部與三角形外部等三個部分，而三角形和三角形內部合起來的圖形稱為三角形區域。



【圖十】

三角形區域有周界，周界由三角形的三條邊所圍成，所以三角形的周長就是三角形三條邊的長度和。三角形本身沒有面積，

在討論三角形的面積時，指的就是三角形區域的面積。在日常生活中，常把三角形區域簡稱為三角形，並沒有嚴格的區分三角形和三角形區域的說法。

低年級屬於視覺期階段，教師教學時不必嚴格區分多邊形與多邊形區域的意義，教學時可以畫出三角形、剪出三角形形狀的色紙、用扣條圍成三角形，或在畫出三角形的內部塗色。但是，中年級屬於分析期階段，開始討論多邊形的構成要素，建議教師在布題時，必須分辨討論的重點是多邊形還是多邊形區域，例如進行三角形構成要素的教學時，三角形的構成要素是頂點、邊和角，並不涉及三角形的內部，因此討論的對象應該是紙上畫出的三角形，或由扣條所圍成的三角形，而不是剪出三角形形狀的色紙，或在內部塗色的三角形。進行三角形面積的教學時，討論的對象是三角形的區域，而不是只有三角形，建議教師在進行三角形面積的教學時，不宜用手指繞三角形一圈來描述三角形區域，應該用手掃過三角形區域。

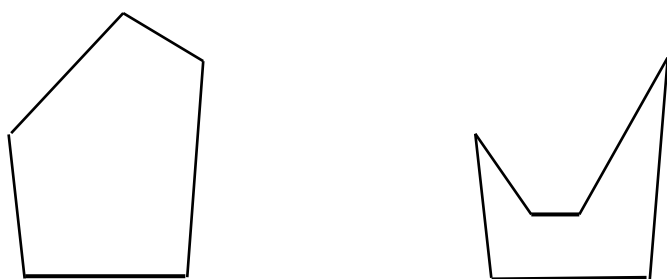
2-3-2：凸多邊形與凹多邊形

認知及數學結構：

(一)凸多邊形與凹多邊形

多邊形可以區分成凸多邊形與凹多邊形兩類，如果一個多邊形其內部任意兩點所連成的線段，一定都在該多邊形的內部，則稱該多邊形為凸多邊形，如果一個多邊形內部存在兩個點，使這兩個點所連成的線段，有一部分在該多邊形的外部，則稱該多邊形為凹多邊形。 n 邊形($n \geq 3$)中只有三角形一定是凸多邊形，其它的 n 邊形($n > 3$)可以是凸多邊形，也可以是凹多邊形。

【圖十一】中左邊的圖形是凸多邊形，右邊的圖形是凹多邊形。



【圖十一】

還有兩種判斷凸多邊形與凹多邊形的方法，一種是透過內角來判斷，每一個內角的角度都小於 180 度的多邊形是凸多邊形，至少有一個內角的角度超過 180 度的多邊形是凹多邊形；另一種是將多邊形的各邊做延長線來判斷，如果有一條延長線與另一邊相交，則為凹多邊形，否則即為凸多邊形。

(二) 鈍角與銳角

很多教師沒有說明銳角及鈍角討論的範圍，直接透過「比 90 度大的角就是鈍角，比 90 度小的角就是銳角」的方式來定義鈍角與銳角，導至國小學童面對 190 度是否為鈍角，0 度是否為銳角的問題，以及高中學生面對 500 度是否為鈍角， -30 度是否為銳角的問題時，常引起爭議。

凸多邊形的每一個內角都介於 0 度和 180 之間(不包含 0 度和 180 度)，凹多邊形的每一個內角都介於 0 度和 360 之間(不包含 0 度和 360 度)，面對 n 邊形時(最常見的是三角形)，為了方便溝通內角與直角的大小關係，數學上使用銳角、直角及鈍角來溝通內角或外角角度的屬性，如果討論的範圍都是凸多邊形，數學上稱角度介於 0 度和 90 度之間(不包含 0 度和 90 度)的角為銳角，稱角度是 90 度的角為直角，稱角度介於 90 度和 180 度之間(不包含 90 度和 180 度)的角為鈍角；如果還討論凹多邊形，銳角和直角角度的範圍不變，鈍角會介於 90 度和 360 度之間(不包含 0 度和 360 度)。

2-3-3：正多邊形

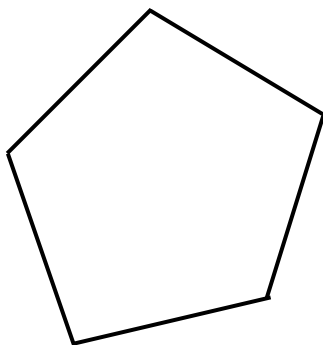
認知及數學結構：

數學上稱邊長都相等的多邊形為等邊多邊形，稱內角的角度都相等的多邊形為等角多邊形，稱邊長都相等且內角的角度都相等的多邊形為正多邊形。

在多邊形當中，只有三角形滿足等邊三角形一定是等角三角形，等角三角形一定是等邊三角形的關係，所以正三角形、等邊三角形、等角三角形是同一個集合。除了三角形外，等邊 n 邊形不一定是等角 n 邊形，等角 n 邊形也不一定是等邊 n 邊形。也就是說，等邊 n 邊形與等角 n 邊形是不同的兩個集合，而正 n 邊形是這兩個集合的交集。

(一)等邊 n 邊形 ($n > 3$) 不一定是等角 n 邊形

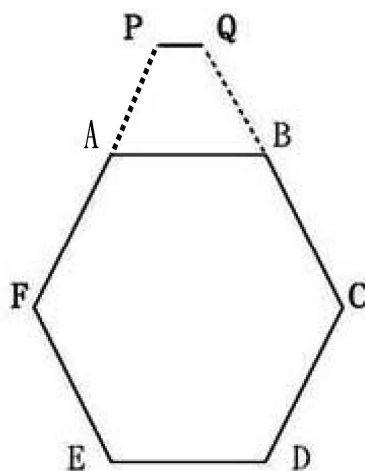
使用 5 根一樣長的竹籤所圍成的 5 邊形一定是等邊 5 邊形，【圖十二】是一個等邊 5 邊形，但是它 5 個內角的角度並不相等，因此，等邊 5 邊形不一定是等角 5 邊形。使用 n 根 ($n > 3$) 一樣長的竹籤所圍成的 n 邊形一定是等邊 n 邊形，我們可以隨意的改變等邊 n 邊形的形狀，讓等邊 n 邊形的 n 個角都不相等，因此，等邊 n 邊形不一定是等角 n 邊形。



【圖十二】

(二)等角 n 邊 ($n > 3$) 不一定是等邊 n 邊形

【圖十三】中 ABCDEF 是一個等邊且等角的正六邊形，延長這個正六邊形的兩個邊 FA 和 CB，在延長線上分別取 P 和 Q 兩個點，使 AB 線段和 PQ 線段平行，則新六邊形 PQCDEF 還是一個等角的六邊形（同位角相等），但是已經不是等邊六邊形。相同的理由，當畫出正 n 邊形 ($n > 3$) 時，也可以仿上述方式，畫出一個等角的 n 邊形，而這個等角 n 邊形不是等邊 n 邊形，因此，等角 n 邊形不一定是等邊 n 邊形。



【圖十三】

主題 2-4：圓

在圓的教材中，理念篇只討論三個部份，第一部份是圓與扇形，第二部份是圓周率，第三部份是與圓有關的工具。

2-4-1：圓與扇形

認知及數學結構：

(一)圓

選定一定點 O ，在平面上與定點 O 的距離是 $r(r > 0)$ 的所有點所成的集合稱為圓，該定點 O 稱為圓的圓心， r 稱為圓的半徑。圓把平面區分成圓 $\{P \mid OP = r\}$ ，圓的內部 $\{P \mid OP < r\}$ ，以及圓的外部 $\{P \mid OP > r\}$ 三個部分，圓和圓的內部合起來的部份稱為圓區域 $\{P \mid OP \leq r\}$ 。圓區域的周界稱為圓周，圓周的長度就是圓的長度，稱為圓周長。

在中文的用語中，並沒有區分圓和圓區域，一個圖形是圓或是圓區域，必須靠前、後文的描述來判斷，但是在英文的用語中，很明確的區分圓和圓區域，如果不強調內部，只談一個圓，英文稱之為「circle」，如果強調圓和圓的內部，英文稱之為「disc」。

(二)半(直)徑與半(直)徑的長度

圓上任一點與圓心所連成的線段稱為半徑，半徑指的是一條線段，日常生活中常將半徑的長度簡稱為半徑，例如將半徑長是5公分的線段簡稱為半徑長5公分，記成 $r=5$ 公分。

直徑也是一條線段，兩條半徑若能連成一條直線段，稱該直線段為直徑，如果直徑的長度是10公分，也簡稱直徑是10公分，記成直徑=10公分。

透過圓內最長的弦來定義直徑時，定義出來的直徑是一條線段；透過直徑是半徑的兩倍(直徑=半徑 $\times 2$)來定義直徑時，定義出來的直徑是長度。教師教學時應澄清線段與線段長的意義。

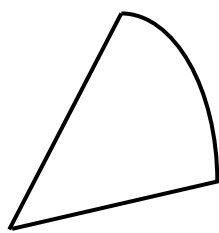
(三)圓弧與弦：

圓上相異兩點可以將圓分割成兩部份，都稱為圓弧，其中比較長的部份稱為優弧，比較短的部份稱為劣弧，如果兩部份一樣長，則稱為半圓。圓上相異兩點所連成的線段稱為弦，直徑是圓中最長的弦，直徑剛好將圓區域分割成全等的兩部份，直徑的兩個端點剛好將圓分割成全等的兩個圓弧。

(四)扇形

扇形是和圓有密切關係的圖形，圓上的一段圓弧，以及該圓弧兩端點和圓心連成的兩條半徑，它們所合成的圖形稱扇形，圓弧大於半圓的扇形稱為優扇形，圓弧小於半圓的扇形稱為劣扇形。

很多學童不理解數學上扇形的意義，誤認為像扇子形狀的圖形就是扇形，【圖十四】是由共端點兩條長度是 r 的線段夾一段圓弧所合成像扇子的圖形，如果該圓弧是半徑 r 的圓弧，該圖形是扇形，如果該圓弧不是半徑 r 的圓弧，該圖形不是扇形。



【圖十四】

2-4-2：圓周率

認知及數學結構：

(一)圓周率

所有的圓都相似，相似圖形的對應邊成比例，因此所有圓的圓周長和直徑長的比值都相等，數學上稱「圓周長：直徑長」的比值為圓周率。透過測量出圓的周長和直徑，再利用「圓周長：直徑長＝圓周長÷直徑長＝圓周率」的方法，所得到的圓周率一定是有理數，因為利用直尺等工具測量出來的長度都是有理數，而「有理數÷有理數」還是有理數，所以國小階段討論的圓周率都是有理數。

當我們利用圓內接正多邊形來逼近圓時，可以得到內接正多邊形的邊長和與圓的直徑長相比的一組數列，而利用圓外接正多邊形來逼近圓時，也可以得到外接正多邊形的邊長和與圓的直徑長相比的一組數列，而這兩組數列各自的比會愈來愈接近，數學上定義的圓周率就是這兩組比值互相接近到任意程度的結果。雖然這兩組數列的比值可以互相任意地接近，但是都無法用小數或分數等有理數來確定圓周率的值，也就是說，圓周率是一個無理數。

(二)如何求圓周率

圓周率是「圓周長：直徑長」的比值，國小階段可以透過測量不同圓的直徑和圓周長，再分別求出「圓周長：直徑長」的比值，幫助學童察覺「圓周長：直徑長」的比值都比3多一點，經驗圓周率的意義。為了讓「圓周長：直徑長」的比值不要差異太大，建議教師選擇直徑超過20公分的圓，因為直徑太小的圓，算出來圓周率的值誤差比較大。

在活動中，很難讓求出來的比值剛好或很接近3.14，因此在國小階段可以選擇3當做圓周率的近似值，如果要選擇3.14當做圓周率近似值，建議教師提供一些與求圓周率相關的文章給學童閱讀，讓學童知道圓周率選擇3.14的意義，並為以後選用無理數 π 記錄圓周率鋪路。

(三)古埃及人如何求圓周率：

如【圖十五】，古埃及人先畫出一個圓，再用繩子複製出圓的圓周和直徑，先以直徑 $2r$ 為單位去測量圓周，發現圓周長 $=2r \times 3 + m$ ， $0 < m < 2r$ ，再以線段 m 為單位去測量直徑，發現直徑長介於 m 長的7倍到8倍之間($m \times 7 < 2r < m \times 8$)，也就是 m 的長在 $\frac{2r}{7}$ 到 $\frac{2r}{8}$

之間。

可以得到圓周率 = 圓周長 : 直徑長 = $(2r \times 3 + m) : 2r = (2r \times 3 + m) \div 2r = 3 + \frac{m}{2r}$ ， $\frac{1}{7} < \frac{m}{2r} < \frac{1}{8}$ ，也就是說， $3\frac{1}{7} < \text{圓周率} < 3\frac{1}{8}$ 。

圓周 $\underline{2r} \quad | \quad \underline{2r} \quad | \quad \underline{2r} \quad | \quad m$

直徑 $\underline{2r} \quad m \times 7 < 2r < m \times 8$

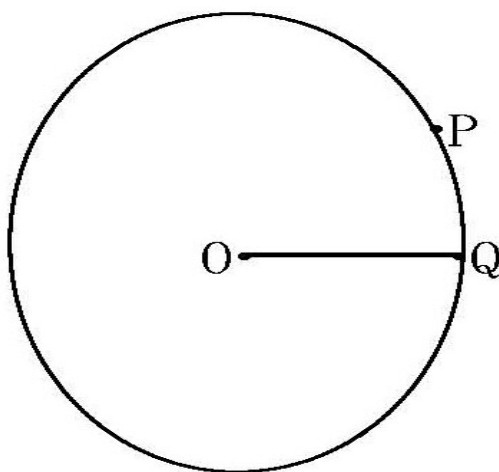
【圖十五】

2-4-3：與圓有關的工具

認知及數學結構：

(一)圓規

如【圖十六】，圓規只能畫出到圓心 O 的距離等於半徑長的點 P ，無法畫出圓的半徑線段 OQ ，但是畫出的圓可以決定一個圓區域。因為圓規只能畫出與圓心的距離是半徑長的點 P ，無法畫出長度是半徑的線段 OQ ，因此國小學童利用圓規畫線段時，常無法掌握兩點距離與線段長度的意義。



【圖十六】

有兩種幫助學童澄清兩點距離與線段長度意義的方法，第一種是在圓規兩腳之間綁上繩子或橡皮筋，學童在畫圓時，幫助學童看到兩腳間的距離，也能看到連接兩腳距離的線段。第二種是

先畫出一條直線段，與學童溝通如何在直線段上畫出長 a 公分的線段，學童先張開圓規的兩腳，在直尺上量出這兩腳的距離是 a 公分，再以直線段的端點 A 為圓心，畫弧和直線段交於 B 點，最後要求學童測量 AB 的長度，幫助學童察覺兩腳的距離為 a 公分時，連接兩腳的線段長也是 a 公分。

(二)角卡

有很多找出一個圓的直徑的方法，例如將圓對折後，折痕就是直徑；透過比對弦長找出最長的弦，最長的弦就是直徑；將三角板直角的頂點放在圓上，連接三角板和圓兩交點的線段就是直徑。找出圓的直徑後，就能測量出直徑的長度。

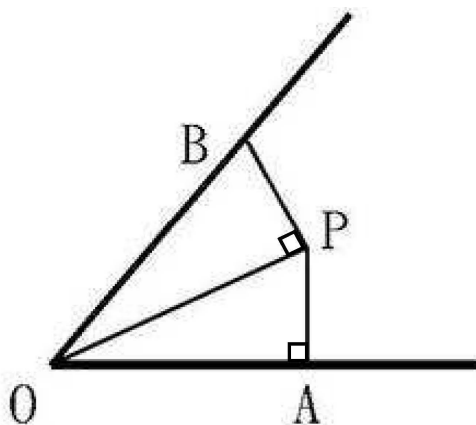
木工有一種測量圓直徑的工具，稱為角卡，如下圖，角卡的形狀是一個角形， OA 線段上有可以描述長度的刻度， $\angle APB = 53$ 度 8 分。只要將圓形的物體放在角卡中，如果圓形物體和 OA 的切點是 A 點， OA 長就是圓的直徑。

角卡的做法及道理都很簡單，教師可以當作圓的補充教材。

【圖十七】中，先做出兩股長比為 $2:1$ 的直角三角形 OPA 和 OPB ，由 PA 及 PB 線段組成的角形就是角卡。當我們將圓形物體放在角卡中，假設切點是 A 、 B ， PA 和 PB 就是半徑，而 $OA = PA \times 2 = 2r$ 就是直徑。

教師只要幫助學生做出角卡即可，不必與學生溝通頂角的角

度是多少，下面簡單的說明為什麼 $\angle AOB = 53$ 度 8 分，三角形 PAO 和 PBO 是全等的直角三角形，兩股長的比 $OA : PA = 2 : 1$ ，可以由三角函數表中查出 $\tan \theta = \frac{1}{2}$ ， $\theta = \angle POA = \angle POB = 26$ 度 34 分， $\angle BOA = \angle POA + \angle POB = 53$ 度 8 分。



【圖十七】

主題 2-1-3：三角形任兩邊之和大於第三邊

授課對象：國小五年級學生

撰寫者：吳欣悅

先備知識：

1. 認識三角形及其構成要素。
2. 能辨認直角、銳角和鈍角三角形。

教學目標：

能知道三角形任兩邊之和大於第三邊。

教學時間：80 分鐘（兩節課）

教學說明：

1. 教師在教此觀念時，最常用的方法是提供不同長度的竹籤，讓學童任意選出三支竹籤來圍成一個三角形，因此有些竹籤的組合可以圍成一個三角形，有些組合則無法圍成，在此情形之下，學童所觀察到的是：三角形較短的兩邊之和必須大於最長邊，才能圍成一個三角形。
2. 當三角形中「較短的兩邊之和大於最長邊」時，則「最長邊及次長邊的和於最短邊」與「最短邊及最長邊的和於次長邊」也一定成立，但是學生卻不易察覺「三角形任兩邊之和大於第三邊」，因為當最長邊及次長邊的和於最短邊，以及最長邊及最短邊的和於次長邊一定會成立，學生不會去討論，也就是說，學生只察覺了「三角形較短兩邊的和於最長邊」時，

才能圍成一個三角形。

3. 學生很容易觀察到「三角形較短兩邊的和於最長邊」的結果，但是，沒有教師的幫助，學生很難自行從「三角形較短兩邊之和於最長邊」的認知，推演到「三角形任兩邊之和於第三邊」。
4. 教師可以透過三角形三個邊中，任意兩邊的相加結果皆於第三邊，幫助學生知道最後只要判斷「三角形較短的兩邊之和於最長邊」，就一定能圍成一個三角形。

教具準備：

(活動一) 竹籤 5 公分、7 公分、16 公分、8 公分、9 公分、12 公分、6 公分、14 公分、20 公分各 1 支，A4 紙 2 張。

(活動三) 竹籤 4 公分、5 公分、7 公分、8 公分、9 公分、11 公分、12 公分、20 公分各 1 支，A4 紙 2 張。

活動一：知道較短兩邊之和於最長邊時可以拼成三角形

活動目標：透過用竹籤拼成三角形的活動，知道較短兩邊之和於最長邊時可以拼成一個三角形。

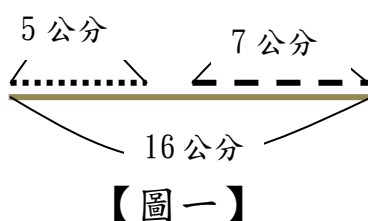
活動流程：

1. 教師將學童分成 A、B、C 三組，每組發給 3 支竹籤，A：(5 公分、7 公分、16 公分)、B：(8 公分、9 公分、12 公分)、C：(6 公分、14 公分、20 公分)，三組竹籤不能彼此交換，請學童將

竹籤組合成三角形。

2. 學童操作之後會發現 A、C 兩組不能組合成三角形。
3. 教師與學童討論 A 組竹籤：

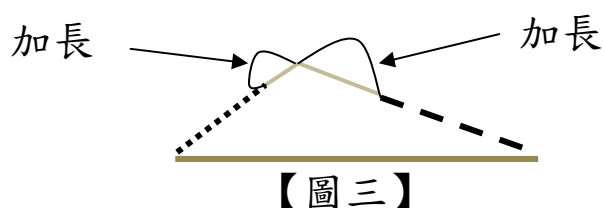
- (1) 發給學童一張空白紙張，讓學生在紙張上操作。
- (2) 將 A 組竹籤 5 公分、7 公分、16 公分，並排如【圖一】並將圖形描下。



- (3) 學童觀察【圖一】可以發現 5 公分和 7 公分合起來小於 16 公分。
- (4) 學童將 5 公分和 7 公分竹籤的兩邊端點與 16 公分竹籤的兩邊端點連接，並描繪如【圖二】，讓學童觀察要如何做才能圍成三角形。

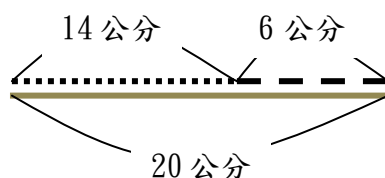


- (5) 學童能觀察出必須延長 5 公分和 7 公分的竹籤如【圖三】，才能形成三角形。



4. 教師讓學童觀察 C 組竹籤，並將結果畫下。

- (1) 先將 6 公分和 14 公分的竹籤與 20 公分竹籤並排如【圖四】並將圖形描畫下來。

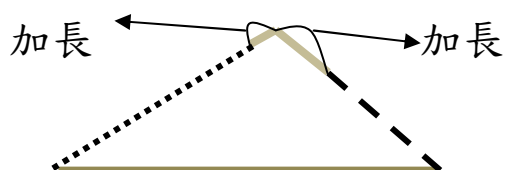


【圖四】

- (2) 將 14 公分和 6 公分竹籤的兩邊端點與 20 公分竹籤的兩邊端點連接，使竹籤形成三角形並描繪如【圖五】，但學童發現【圖五】無法形成三角形，須延長兩邊長度如【圖六】之後才可以圍成三角形。



【圖五】



【圖六】

5. 讓學童將 A、B 兩組竹籤拆散重新組合，並記錄哪些竹籤的組合可以圍成三角形。
6. 學童將可以圍成三角形的邊長，依照由小至大的順序記錄下來：

三角形邊長操作結果表一

組	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
邊長 (cm)	5	5	5	5	5	5	7	7	7	7	8	8	8	9
	7	7	8	8	9	12	8	8	9	12	9	9	12	12
	8	9	9	12	12	16	9	12	12	16	12	16	16	16

學童共可操作出 14 組，教師與學童共同討論原來的 A (5 公分、7 公分、16 公分)、C (6 公分、14 公分、20 公分) 兩組，以及將 A、B (8 公分、9 公分、12 公分) 兩組竹籤重新組合成的 14 組。

7. 學童會發現，較短兩支竹籤的長度和等於或小於最長竹籤長度時，無法圍成三角形；較短兩支竹籤的長度和大於最長竹籤長度時，才可以圍成一個三角形。

活動二：三角形任兩邊之和大於第三邊

活動目標：知道三角形任兩邊和都會大於第三邊。

活動流程：

1. 教師將活動一之活動流程 6 的操作結果分成 A、B、C 組。

三角形邊長操作結果分組表二 A

B

C

組	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
邊長 (cm)	5	5	5	5	5	5	7	7	7	7	8	8	8	9
	7	7	8	8	9	12	8	8	9	12	9	9	12	12
	8	9	9	12	12	16	9	12	12	16	12	16	16	16

(1) 教師以 A 組中的竹籤組合 5 公分、7 公分、8 公分為例，說明 5 公分為最短邊、8 公分為最長邊、7 公分為次長邊， $5+7>8$ ，最短邊加上次長邊長度的和大於最長邊的長度時，可以圍成一個三角形。

最短邊加上次長邊長度的和大於最長邊的長度時($5+7>8$)，最長邊加上次長邊的長度和一定會大於最短邊($8+7>5$)，最長邊加上最短邊的長度和也一定大於次長邊($8+5>7$)。

也就是，三角形任兩邊的長度和都會大於第三邊。

2. 請學生分組檢驗每一組竹籤是否皆有這樣的大小關係。
3. 學生會發現各自負責的 A、B、C 三組，每一組的竹籤都可以將任兩支竹籤的長度相加，而相加的結果皆大於第三邊。
4. 教師總結「活動一」與「活動二」的結果：
 - (1) 「活動一」的結果是：三角形較短兩個邊的長度相加會大於最長邊的長度。
 - (2) 「活動二」的結果是：在「活動一」的結果下，再檢驗任意兩支竹籤的長度和與第三支竹籤的長度關係，發現任兩支竹籤的長度和大於第三邊的長度。
5. 三角形任兩邊的長度和都會大於第三邊。但是在判斷三支竹籤可否圍成三角形時，只要確定較短兩邊之和大於第三邊，就知

道一定可以圍成三角形。

6. 教師接著舉一些三邊都等長，以及有兩邊等長竹籤的例子，幫助學生知道三角形任兩邊的長度和大於第三邊的長度，例如：

(1) 8 公分、8 公分、8 公分→ $(8+8>8)$ 可以圍成一個三角形。

(2) 9 公分、4 公分、3 公分→ $(3+4<9)$ 無法圍成一個三角形。

(3) 8 公分、12 公分、17 公分→ $(8+12>17)$ 可以圍成一個三角形。

(4) 15 公分、25 公分、38 公分→ $(15+25>38)$ 可以圍成一個三角形。

(5) 25 公分、25 公分、50 公分→ $(25+25=50)$ 無法圍成一個三角形。

活動三：四邊形任三邊之和大於第四邊

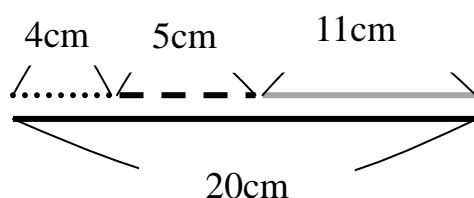
活動目標：透過用竹籤拼成四邊形的活動，知道較短三邊之和大於最長邊時，可以拼成一個四邊形。

活動流程：

1. 將學童分組，每組發給竹籤 4 公分、5 公分、11 公分、20 公分、7 公分、8 公分、9 公分、12 公分各 1 支，A4 紙 1 張。
2. 請學童先拿出 4 公分、5 公分、11 公分、20 公分的竹籤，並將

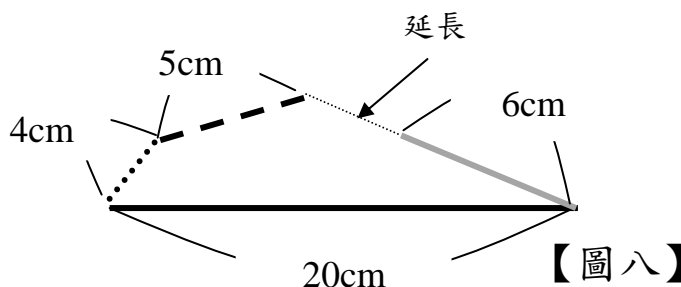
這 4 支竹籤任意拼成一個四邊形。

- 當學童發現無法拼出一個四邊形時，讓他們分組討論無法拼排出四邊形的原因，如果討論不出結果，可以提醒他們參考活動一學到的「三角形任兩邊和都會大於第三邊」如果還是討論不出來，教師可以提醒他們先拿出最長邊，再將其它三邊接起來和最長邊來比較。
- 教師再請學童拿出 4 公分、5 公分、11 公分、20 公分的竹籤排看看，是否能圍成一個五邊形，學童會發現仍然無法排出五邊形。
- 整合前面的結果教師再次說明：將竹籤排放如【圖七】，可以發現當較短 3 支竹籤和與最長竹籤一樣長時，4 支竹籤彼此無法連接形成四邊形。



【圖七】

- 教師請學童以最長的 20cm 竹籤為主，將另外 3 支竹籤與最長竹籤組合如【圖八】，他們可以發現，需延長其中一邊，才能形成四邊形。



【圖八】

7. 因此要圍成四邊形的竹籤組合，必須是較短的三邊之和大於第四邊時才能成立。
8. 學童檢驗 7 公分、8 公分、9 公分、12 公分的竹籤組合，可以發現較短三個邊合起來大於最長邊 $7+8+9>12$ ，所以可以圍成四邊形。再讓學生任意組合此組竹籤，檢查任意組合的三個邊與第四邊的大小關係，結果發現 $7+8+12>9$ 、 $7+9+12>8$ 、 $8+9+12>7$ ，任三邊之和皆大於第四邊，因此只要檢驗最小的三個邊之和大於第四邊，就等於檢查了「任三邊之和大於第四邊」，就能確定此組竹籤可以圍成四邊形。
9. 教師接著舉一些四邊都等長、以及有三邊或兩邊等長竹籤的例子，幫助學生知道四邊形任三邊的長度和大於第四邊。
 - (1) 7 公分、7 公分、7 公分、7 公分 $\rightarrow (7+7+7>7)$ 可以圍成一個四邊形。
 - (2) 6 公分、6 公分、6 公分、10 公分 $\rightarrow (6+6+6>10)$ 可以圍成一個四邊形。
 - (3) 14 公分、14 公分、27 公分、28 公分 $\rightarrow (14+14+27>28)$ 可以圍成一個四邊形。
 - (4) 7 公分、8 公分、9 公分、10 公分 $\rightarrow (7+8+9>10)$ 可以圍成一個四邊形。
 - (5) 3 公分、5 公分、7 公分、17 公分 $\rightarrow (3+5+7<17)$ 無

第三個邊可能是幾公分？（第三邊為整數）（ ）、
（ ）。

(4) 老師將 5 組都可以圍成一個三角形的「3 根竹籤」，借給同學操作，但是同學不小心將竹籤搞混了，只知道每組都有 1 支 8 公分的竹籤，同學排出了五組竹籤如下，老師檢查每一組的竹籤組合之後，發現有兩組竹籤的排列不正確，請你協助將竹籤重新排列成正確的組合：

第一組：3 公分、10 公分、8 公分

第二組：6 公分、7 公分、8 公分

第三組：9 公分、17 公分、8 公分

第四組：20 公分、12 公分、8 公分

第五組：15 公分、16 公分、8 公分

①不正確的兩組三角形邊長組合是哪兩組：

（ ）、（ ）。

②如何將這兩組邊長重新組合調整之後，讓兩組的竹籤皆

可為成三角形：（ ）、

（ ）。

習題二：(配合活動三)

(1) 哪些竹籤的組合可以拼成一個四邊形？

勺：3 公分、3 公分、7 公分、10 公分

ㄅ：5 公分、6 公分、7 公分、8 公分

ㄇ：7 公分、7 公分、7 公分、7 公分

ㄒ：2 公分、5 公分、10 公分、30 公分

ㄎ：2 公分、6 公分、8 公分、12 公分

ㄘ：2 公分、3 公分、4 公分、9 公分

ㄎ：15 公分、15 公分、15 公分、50 公分

ㄎ：18 公分、8 公分、48 公分、58 公分

答：()

- (2) 曉育有 3 支吸管分別是 8 公分、6 公分、5 公分，第 4 支吸管的長度如果是整數公分，最短的吸管會是幾公分，才能拼排成一個四邊形？() 公分。
- (3) 平平有 5 支竹籤，分別是 5 公分、7 公分、10 公分、13 公分、20 公分，請問平平可不可以將這 5 支竹籤圍成一個五邊形？()。
- (4) 亭亭有 5 支竹籤，分別是 3 公分、7 公分、8 公分、9 公分、30 公分，他想要將現有的 5 支竹籤所圍成的五邊形，再加入 1 支竹籤之後，圍出一個六邊形，媽媽提供亭亭另外的 5 支竹籤，分別是 2 公分、3 公分、6 公分、35 公分、68 公分，請問第六支可以是媽媽提供的哪幾支竹籤，讓亭亭可以圍成六邊形？

()

指定作業參考解答：

習題一：

- (1) ①不可以、②可以、③不可以、④可以。
- (2) 13 公分、14 公分、15 公分、16 公分、17 公分。
- (3) 8 公分、10 公分。
- (4) ①第三組、第四組。②(9 公分、12 公分、8 公分)、(20 公分、17 公分、8 公分)。

習題二：

- (1) ㄅ、ㄆ、ㄇ、ㄏ、ㄏ。
- (2) 1 公分。
- (3) 可以。
- (4) 6 公分、68 公分。

教學注意事項：

- (1) 教師於教學時，可以彈性運用身邊的材料作為操作的教具，例如吸管、扣條…等，讓學童進行組合時方便操作。
- (2) 教師在檢驗竹籤是否能圍成一個三角形時，常常只檢驗一種組合，這種組合可能是隨意找出，或只是較短兩邊之和

大於第三邊，因此，本活動的設計是從先看到較短兩邊之和大於第三邊開始，再去檢驗任兩邊組合是否都符合「任兩邊之和大於第三邊」，由此確認，如果要檢驗任三種長度的組合是否能圍成一個三角形時，只要檢驗較短兩邊之和大於第三邊，不需再檢驗其他邊長的組合，即能判斷此三種長度的組合是否能圍成一個三角形。

- (3) 雖然教學活動只有做到四邊形的邊長判斷，判斷四邊形的任三邊邊長和大於第四邊時，能圍成一個四邊形，教師可以運用教學重點再加以延伸，任意 n 邊形的邊長組合下，只要判斷較短的任 $n-1$ 邊的和的大於第 n 邊($n \geq 3$)，就能圍成 n 邊形。
- (4) 習題二中(3)、(4)兩題皆為學習重點之延伸習題，教師可於三個活動進行完畢之後，讓學童透過實際操作挑戰練習。

教學參考資料：

周筱亭等(民95)。國小數學教材分析—幾何。三峽：國家教育研究院。

主題 2-2-1：四邊形的分類與命名

撰寫者：吳欣悅

授課對象：國小四年級學生

先備知識：

1. 已經認識長方形和正方形。
2. 已經知道有四個邊和四個角的圖形就是四邊形。

教學目標：

1. 能知道四邊形中有四個直角的圖形稱為長方形。
2. 能知道四邊形中四個邊等長的圖形，稱為菱形。
3. 能知道四邊形中四個邊等長，而且有四個直角的圖形稱為正方形。
4. 能知道四邊形中有兩組對邊互相平行的圖形稱為平行四邊形。
5. 能知道四邊形中有一組對邊平行另一組對邊不平行的圖形，稱為梯形；一組對邊平行，另一組不平行邊相等的圖形稱為等腰梯形。

教學時間：40 分鐘（一節課）

教學說明：

1. 四邊形有四個邊及四個角，因此可以透過四個邊是否都等長，或四個角的角度是否都相等將四邊形分類。
 - (1) 四個角都是直角的四邊形是長方形。

(2) 四個邊都等長的四邊形是菱形。

(3) 四個角都是直角且四個邊都等長的四邊形是正方形。

2. 四邊形有兩組對邊，因此也可以透過有幾組對邊平行將四邊形分類。

(1) 有兩組對邊平行的四邊形是平行四邊形。

(2) 只有一組對邊平行的四邊形是梯形；不平行的對邊等長的梯形稱為等腰梯形。

3. 因為對角線並不是四邊形的構成要素，因此在國小階段，不透過對角線的關係來命名四邊形。

教具準備：各種不同四邊形的圖卡若干張、三角板、學習單。

活動一：長方形、正方形 與菱形的命名

活動目標：1. 能找出四個角都是直角的四邊形，命名為長方形。

2. 能找出四個邊都等長的四邊形，命名為「菱形」。

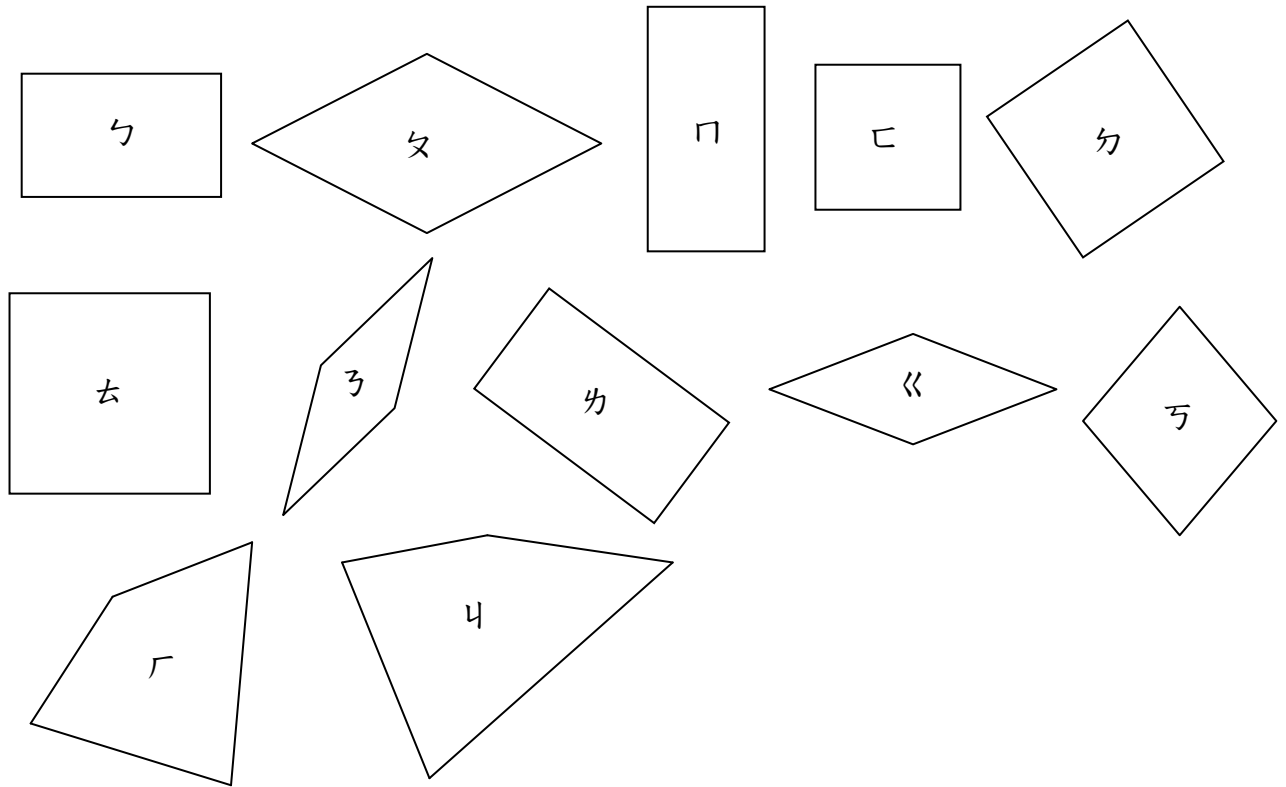
3. 能找出四個角都是直角，且四個邊都等長的四邊形，命名為「正方形」。

活動流程：

1. 教師請學童利用三角板的直角，在如下的圖卡中，找出四個角都是直角的四邊形。

學童找出四邊形勺、冂、匚、勹、去、勹皆有 4 個直角，

將四個角都是直角的四邊形命名為長方形。



2. 教師再請學童利用直尺測量上述四邊形的邊長，找出四個邊都等長的四邊形。

學童找出四邊形夕、匚、夕、去、孑、《、丂的四條邊都等長，將四個邊都等長的四邊形命名為菱形。

3. 教師請學童在長方形及菱形中，找出四個角都是直角且四個邊都等長的四邊形。

學童找出四邊形匚、夕、去的四個角都是直角且四個邊都等長。將四個角都是直角且四個邊都等長的四邊形命名為正方形。

活動二：平行四邊形、梯形與等腰梯形的命名

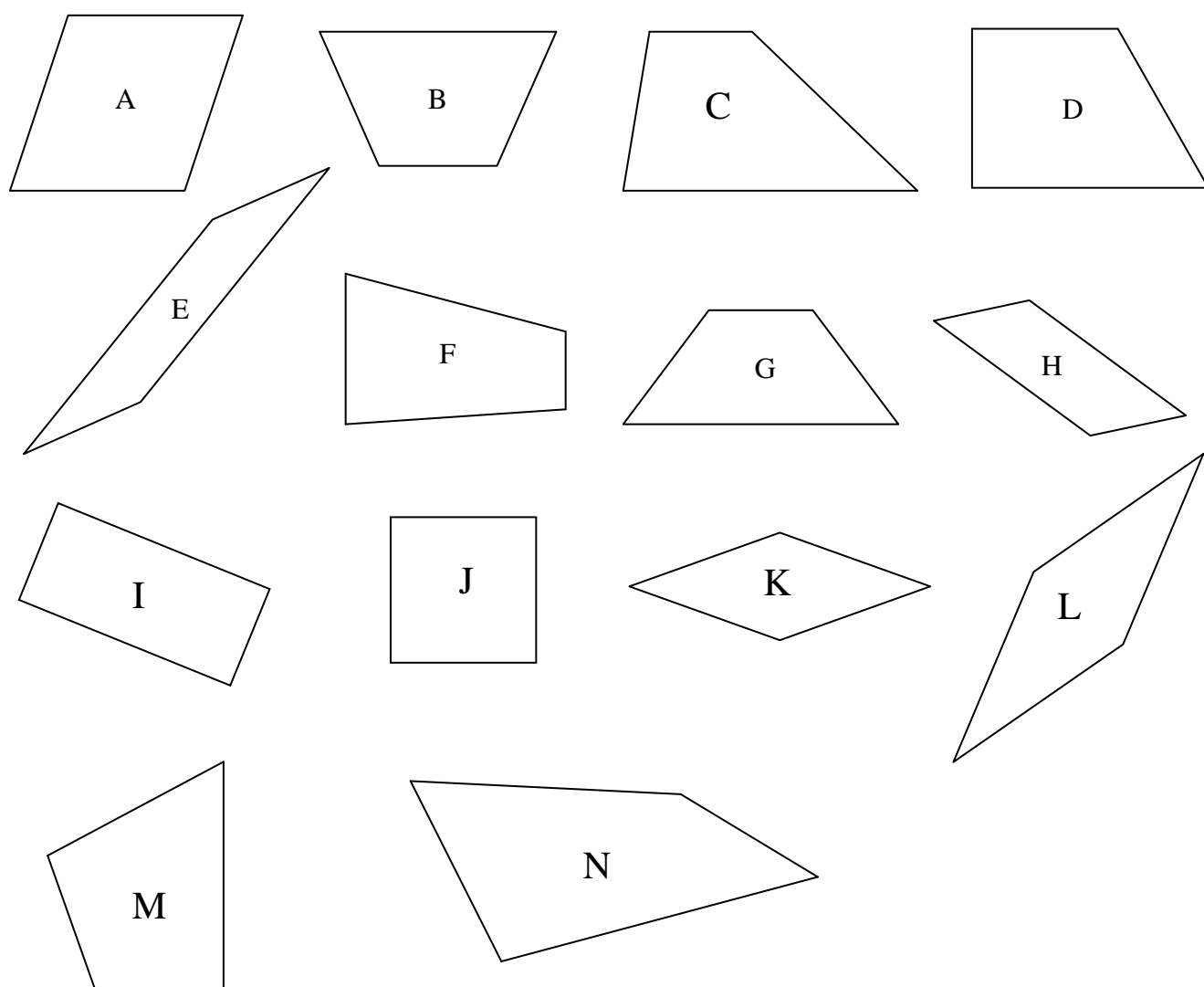
活動目標：(1) 能找出兩組對邊平行的四邊形，命名為平行四邊形。

(2) 能找出只有一組對邊平行的四邊形，命名為梯形。

(3) 能自梯形中找出不平行的對邊等長的梯形，命名為等腰梯形。

活動流程：

1. 教師呈現另一組四邊形，如下圖，並復習如何用一組三角板檢驗對邊是否平行。



2. 請學童找出有兩組對邊平行的四邊形。

學童找出四邊形 A、E、H、I、J、K、L 都有兩組對邊平行。

將有兩組對邊平行的四邊形命名為平行四邊形。

3. 請學童找出只有一組對邊平行的四邊形。

學童找出四邊形 B、C、D、F、G 只有一組對邊平行。

將只有一組對邊平行的四邊形命名為梯形。

4. 再請學童測量平行四邊形 A、E、H、I、J、K、L：

(1) 找出四個角都是直角的平行四邊形：I、J，幫助學生察覺長方形也是平行四邊形。

(2) 找出四個邊都等長的平行四邊形：J、K、L，幫助學生察覺菱形也是平行四邊形。

(3) 找出四個角都是直角，且四個邊都等長的平行四邊形：J，幫助學生察覺正方形也是平行四邊形。

5. 請學童在只有一組對邊平行的四邊形 B、C、D、F、G 中，找出不平行的對邊等長的四邊形。

學童找出梯形 B、F 的不平行對邊等長。

將不平行對邊等長的梯形命名為等腰梯形。

指定作業：

習題一：(配合活動一)

(1) 下面有哪些左邊的說明內容符合右方的圖形？在 () 裡

填入它們的代號：

ㄅ：四個角都是直角。

ㄆ：四個邊等長。

ㄇ：兩組對邊平行。

ㄨ：一組對邊平行。

①  : ()

②  : ()

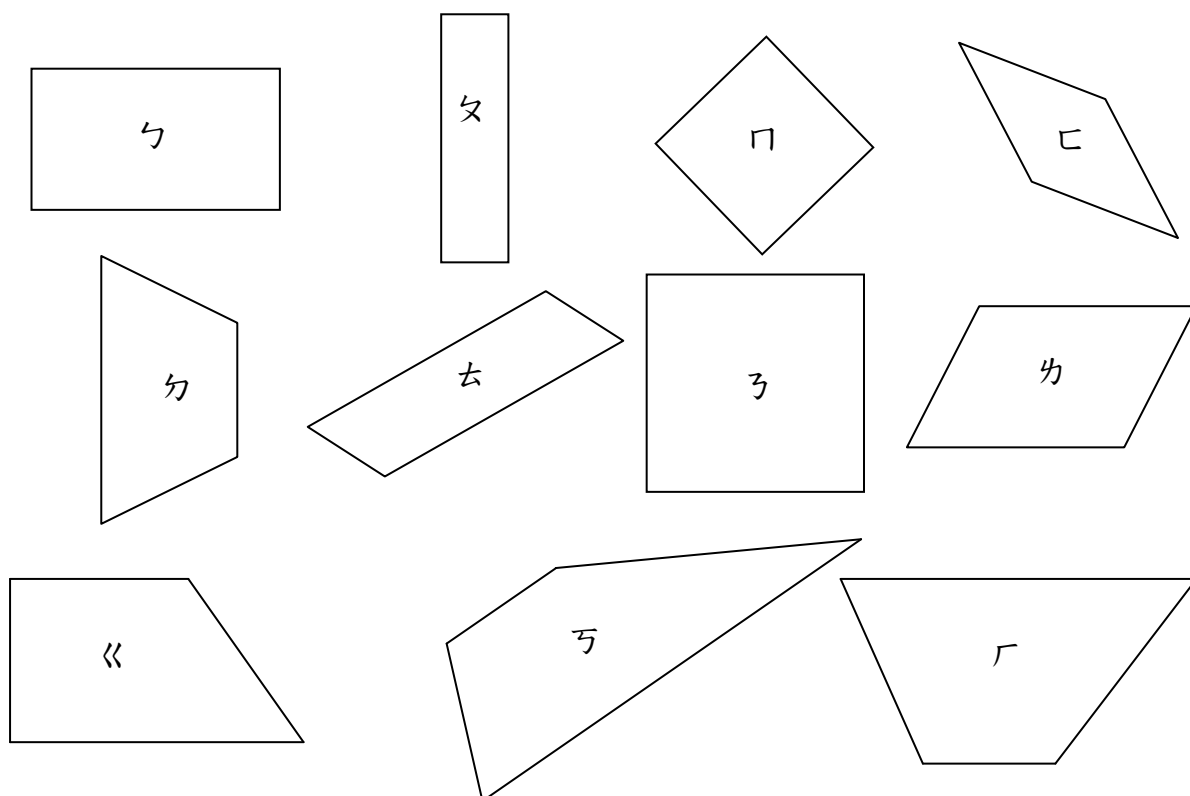
③  : ()

④  : ()

⑤  : ()

(2) 將下面圖形的代號填在適合的圖形後面的括號中 (括號裡

填的每一個圖形代號須不重複)：



- ①長方形：() ②正方形：()
 ③平行四邊形：() ④菱形：()
 ⑤梯形：()

指定作業參考解答：

習題一：

(5) ①ㄅ、ㄇ ②ㄅ、ㄨ、ㄇ ③ㄨ、ㄇ ④ㄇ ⑤ㄥ

(6) ①ㄅ、ㄨ ②ㄇ、ㄋ ③去、ㄨ ④ㄥ ⑤ㄨ、ㄨ、ㄨ、ㄨ

教學注意事項：

1. 教師於教學時，請勿討論圖形之間的包含關係。
2. 活動一，學童只需要知道四個角都是直角的四邊形是長方形；
四個邊都等長的四邊形是菱形；四個角都是直角且四個邊都等長的四邊形是正方形，不必強調正方形包含於長方形與正方形包含於菱形。
3. 活動二，學童只需要知道有兩組對邊平行的四邊形是平行四邊形，不必強調正方形、長方形與菱形包含於平行四邊形。
4. 教師不宜透過「有一組對邊平行的四邊形稱為梯形」的方式命名梯形，因為另一組對邊的情形如果不說明，另一組對邊的情形也有可能是平行，就會與平行四邊形的定義有所混淆，所以

應透過「一組對邊平行，另一組對邊不平行」的方式命名梯形。

教學參考資料：

周筱亭等（民 95）。國小數學教材分析－幾何。三峽：國家教育研究院。

主題 2-3-3：正多邊形

撰寫者：吳欣悅

授課對象：國小五年級學生

先備知識：

1. 已認識長方形、正方形、菱形、平行四邊形、梯形等四邊形。
2. 已認識正三角形、等腰三角形等三角形。

教學目標：

1. 能知道由直線段所圍成的封閉圖形稱為多邊形。
2. 能知道一個多邊形的每個邊都一樣長且每個角都一樣大時，稱為正多邊形。

教學時間：40 分鐘（一節課）

教學說明：

1. 在 $n(n > 3)$ 多邊形中，等邊多邊形不一定是等角多邊形，等角多邊形也不一定是等邊多邊形，必須同時符合等邊及等角，才能稱作正多邊形。
2. 在 $n(n = 3)$ 多邊形中，等邊三角形一定是等角三角形，等角三角形也一定是等邊三角形，所以等邊三角形、等角三角形都是正三角形。

教具準備：量角器、多邊形學習單。

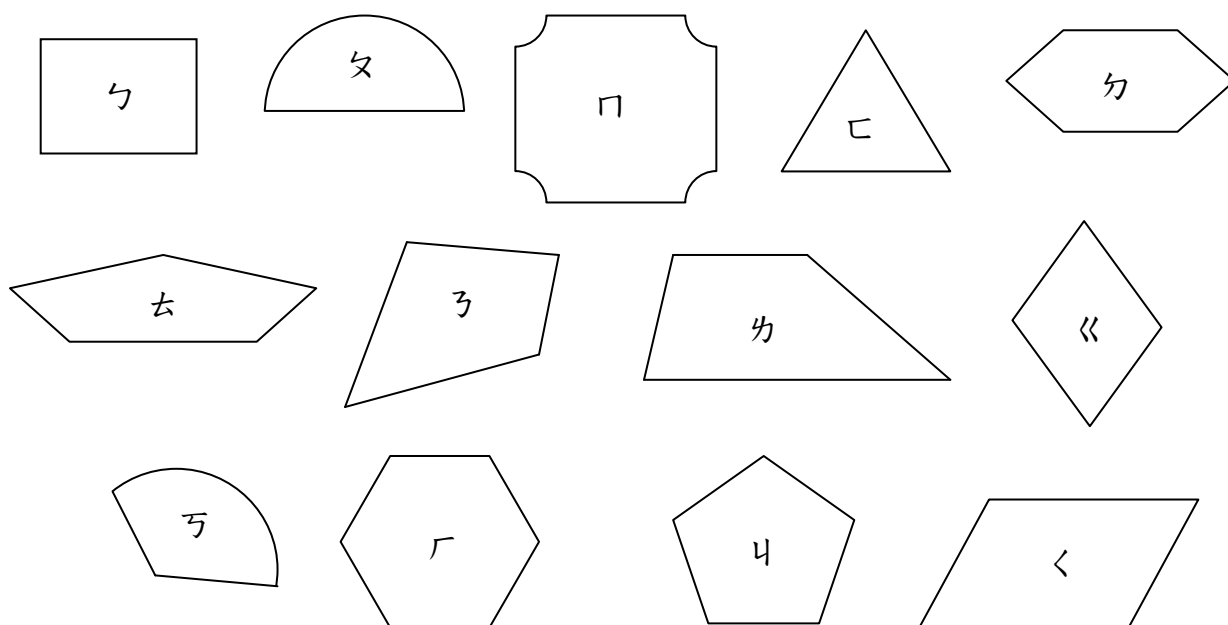
活動一：分辨正多邊形

活動目標：1. 能從各種圖形中分辨出多邊形。

2. 能判斷正多邊形。

活動流程：

1. 請學童判斷，下面哪一個圖形是多邊形。



多邊形：(ㄅ、ㄐ、ㄨ、ㄨ、ㄣ、ㄨ、ㄨ、ㄨ、ㄨ、ㄨ)。

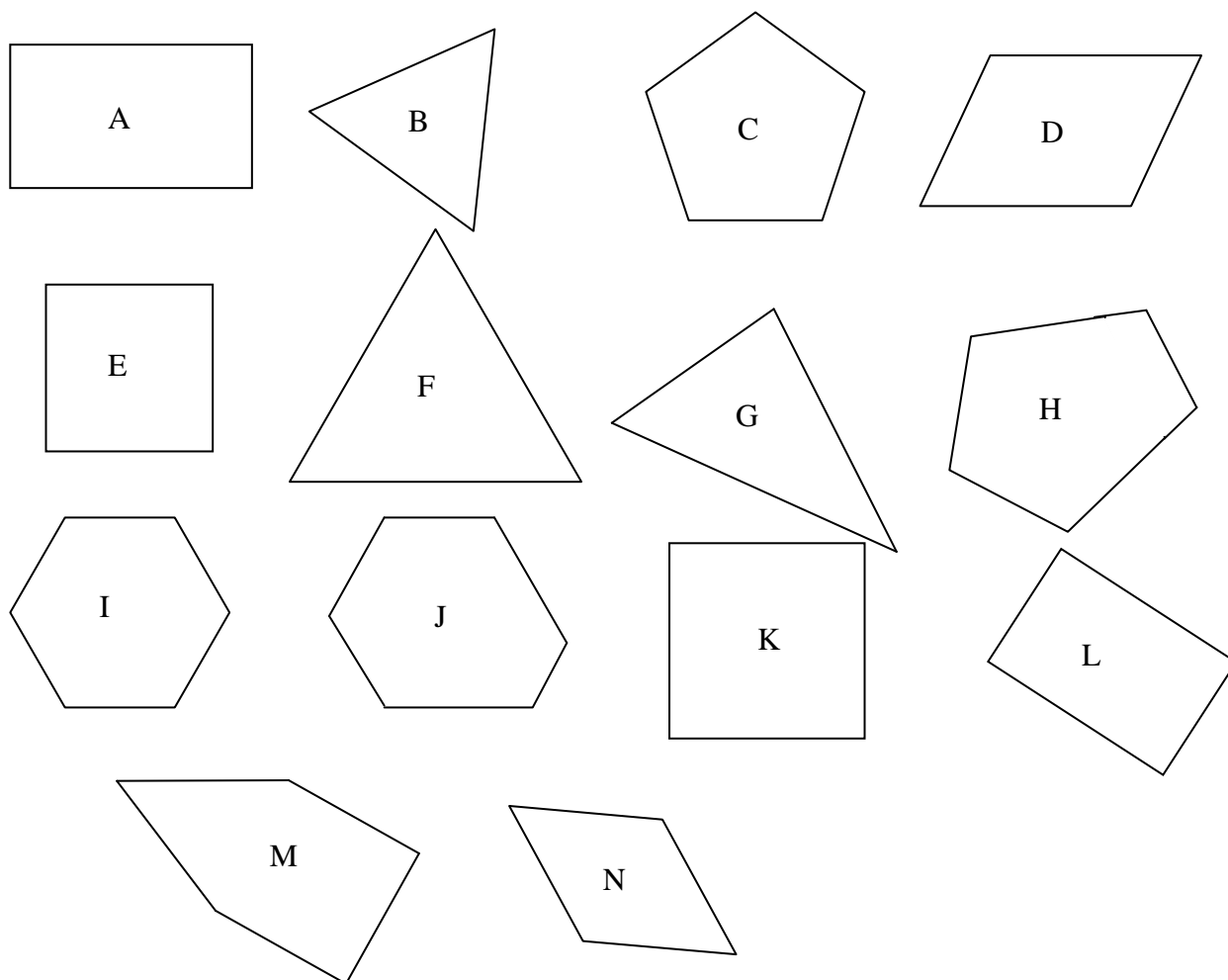
不是多邊形：(ㄨ、ㄇ、ㄨ)。

教師與學童討論分類的依據是什麼？引導學童回答，因為多邊形的邊長必須都是線段，ㄨ、ㄇ、ㄨ的邊有些是線段，有些不是線段，所以ㄨ、ㄇ、ㄨ不是多邊形。

2. 多邊形(ㄅ、ㄐ、ㄨ、ㄨ、ㄣ、ㄨ、ㄨ、ㄨ、ㄨ、ㄨ)如果依照邊的個數來區分，可以分成哪些圖形？

學童可以區分成三角形(ㄩ、ㄋ、ㄣ、ㄨ、ㄨ、ㄨ)、
四邊形(ㄣ、ㄣ)、五邊形(ㄣ、ㄣ)、六邊形(ㄣ、ㄣ)。

3. 讓學童將下面多邊形分類。



(1) 從測量多邊形的角度判斷：學童運用量角器測量圖形的角度，可以發現 A、B、C、E、F、H、I、K、L 這幾個圖形的角度都各自相等。

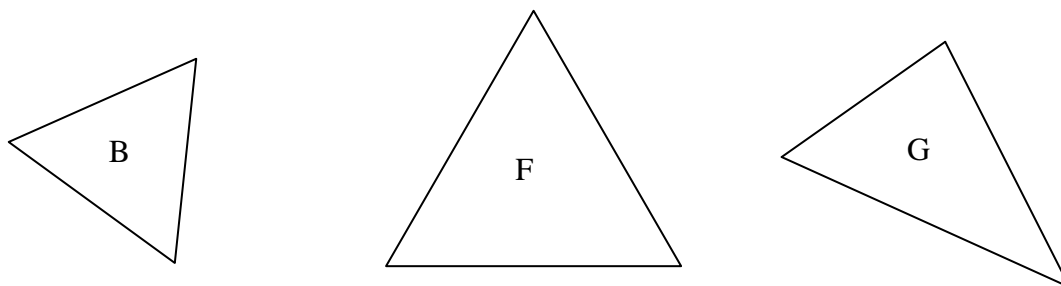
教師向學童說明：這樣的圖形我們稱作等角多邊形。

(2) 學童從測量多邊形的邊長判斷：學童再測量圖形的邊長，可以發現 B、C、E、F、I、K、N 這幾個圖形的邊長都各自相等。

教師向學童說明：這樣的圖形我們稱作等邊多邊形。

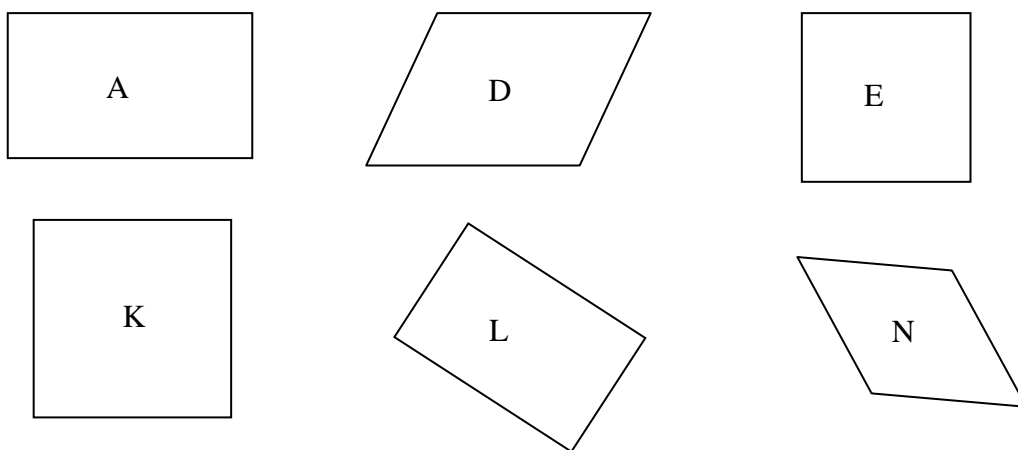
- (3) 請學童觀察等角多邊形和等邊多邊形的異同，可以發現 B、C、E、F、I、K 邊長相等和角度也相等，我們稱這樣的圖形叫做正多邊形。

3. 讓學童觀察三角形 B、F、G。



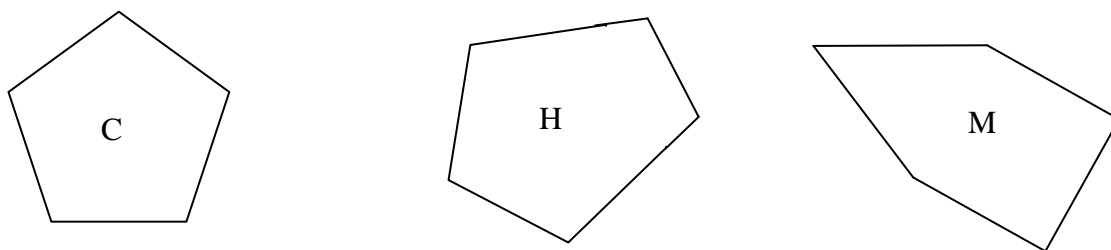
三角形 B、F 為正三角形，它們各自的三個邊長相等、三個角度也相等。

4. 讓學童觀察四邊形 A、D、E、K、L、N。



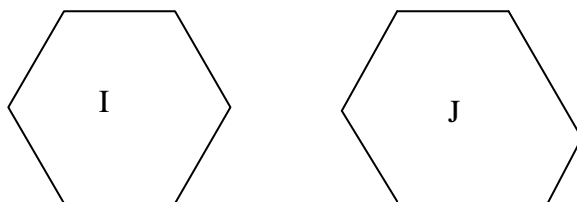
四邊形 A、E、K、L 為等角四邊形；四邊形 E、K、N 為等邊四邊形，四邊形 E、K 的 4 個邊長與四個角皆相等，所以只有 E、K 為正四邊形。

5. 學童觀察五邊形 C、H、M。



五邊形 C、H 為等角五邊形；五邊形 C 為等邊五邊形，五邊形 C 的 5 個邊長與 5 個角皆相等，所以只有五邊形 C 是正五邊形。

6. 學童觀察六邊形 I、J。



六邊形 I、J 為等角六邊形；六邊形 I 為等邊六邊形，六邊形 I 的 6 個邊長與 6 個角皆相等，所以只有六邊形 I 是正六邊形。

7. 因此學童從以上的觀察與說明可以發現：

- (1) 等角多邊形不一定是等邊多邊形；等邊多邊形也不一定是等角多邊形，只有在等角且等邊時才是正多邊形。
- (2) 但是正三角形只要符合邊長相等或角度相等中之一個條件時，即可以稱之為正三角形。

教學說明：

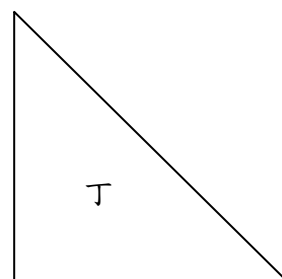
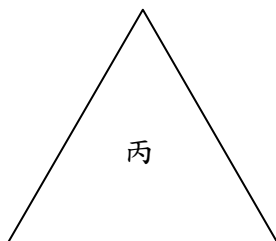
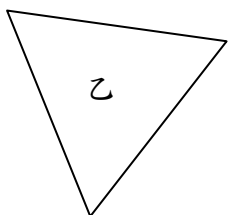
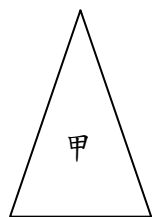
1. 教師在進行多邊形的分類活動中，可以先讓學童分組討論，依照討論出之分類方式再進行分類。

指定作業：

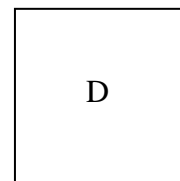
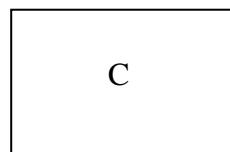
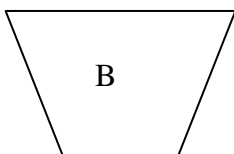
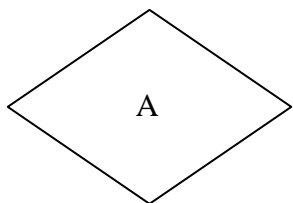
習題一：(配合活動一)

(1) 分辨下列圖形並回答。

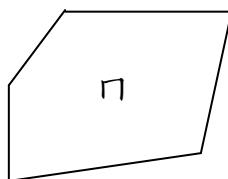
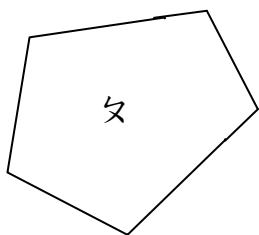
① 哪些是正三角形？ ()



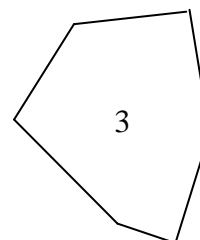
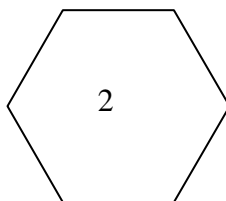
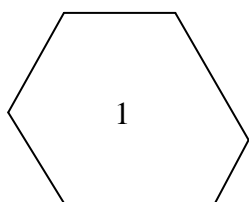
② 哪一個是正四邊形？ ()



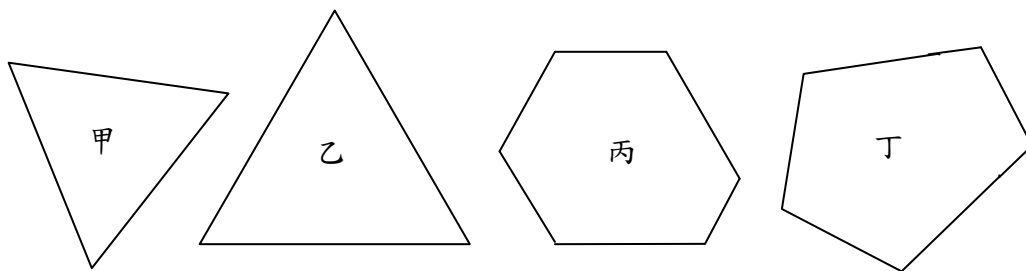
③ 哪一個是正五邊形？ ()



④ 哪一個是正六邊形？ ()



(2) 那些是等角多邊形？ ()



指定作業參考解答：

習題一：

(7) ①乙、丙②D③勺④2

(8) 乙、丙、丁。

教學參考資料：

周筱亭等 (民 95)。國小數學教材分析—幾何。三峽：國家教育研究院。

主題 2-4：圓

撰寫者：房昔梅

主題 2-4-2：圓周率

授課對象：國小六年級學生

先備知識：

知道圓心、圓周、直徑和半徑等名詞及其意義。

教學目標：

1. 透過操作，引導學生認識圓周率大約是 3.14。
2. 透過操作，引導學生認識圓周率大約是 $3\frac{1}{7}$ 。

教學時間：40 分鐘（一節課）

教學說明：

1. 由於較小的圓形物品在實測時容易造成較大的誤差，因此，建議教師請學生準備直徑 20 公分以上的圓形物品為宜。同時應避免飛盤或非平面的鍋蓋；以及質地不夠硬，容易變形的圓形物品，例如：外帶餐碗的蓋子。
2. 如果學生準備的圓形物品在外觀上並無明顯的圓心，建議教師先與學生討論「如何找出圓的直徑長」，例如：以繩子找出圓內最長的距離，或將圓形描在紙上，剪下後對摺…等等，討論後再進行實測。
3. 本單元的活動重點並不在於小數的除法計算，因此在活動中應允許學生使用電算器輔助計算圓周率至小數第三位，再四捨五

入至小數第二位。

教具準備：

- (1) 棉繩（一綑）。
- (2) 1 公尺長的尺（每組一份，直尺、皮尺或布尺皆可）。
- (3) 全開書面紙（二張）。
- (4) 剪刀（每組一把）。
- (5) 大型的實心、硬質平面圓形物品（每組 2 到 3 件）。

活動一：認識圓周率（方法一）

活動目標：透過實測，引導學生認識圓周長大約是直徑長的 3.14 倍。

活動流程：

1. 教師發給每組學生長約 2 公尺的棉繩一條，長 1 公尺的直尺一把（或皮尺、布尺皆可）。請每組學生拿出課前準備的圓形物品，以棉繩複製圓周的長度，並剪下。
2. 教師提問：該如何作出這個圓的直徑？（由於學生帶來的圓形物品多半沒有明顯的圓心，例如：喜餅盒蓋，平面鍋蓋、圓形時鐘…等等），因此，教師需引導學生思考尋找直徑的方法。學生可能會回答：可將大型圓形物品描繪在紙上，剪下後對摺，就可以找出直徑長；或用棉繩直接找出圓內最長的弦，複製後

再測量長度。

3. 教師請各組學生記下測量所得的圓周及直徑長度，用電算器計算結果至小數第三位，再四捨五入至小數第二位。

活動二：認識圓周率（方法二）


活動目標：

透過實測，引導學生認識圓周長大約是直徑長的 $3\frac{1}{7}$ 倍。

活動流程：

1. 教師發給每組學生長約 2 公尺的棉繩一條，請每組學生拿出圓形物品，依活動一的方式作出圓周長和直徑長，並剪下。
2. 請各組學生持複製圓周和直徑的棉繩，依下列步驟進行：
步驟一、將與圓周等長的棉繩貼在黑板上。

圓周 

步驟二、學生手持與直徑等長的棉繩 


比對代表圓周長的棉繩，並逐次作上記號，如下圖。



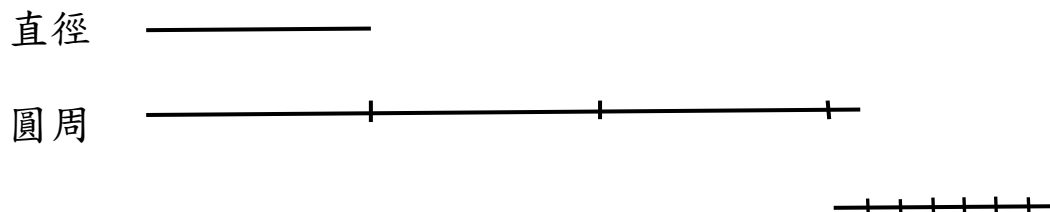
可以發現，以直徑長比對三次之後，圓周長還多出一小段。

- 步驟三、將直徑長貼在黑板上，並剪下比三倍直徑還多的那一小段，用以比對等長於直徑的棉繩，並逐次作出記號，

如右圖。



3. 教師作成結論：



依據以上的操作結果：以直徑長為單位，比對圓周長三次後，再以剩餘的小段棉繩長為單位，大約可以比對直徑 7 次到 8 次；代表圓周長大約是直徑長的 $3\frac{1}{7}$ 到 $3\frac{1}{8}$ 倍左右。

4. 教師發給每位學生一篇共讀資料：圓周率的意義，並歸納本單元教學重點：

- (1) 所有的圓，圓周長比直徑長的比值，稱為圓周率。
- (2) 常用的圓周率表示法有「3.14」和「 $3\frac{1}{7}$ 」二種。
- (3) 通常會把圓周率記成「 π 」，為了計算方便，常選用 3.14 或 $3\frac{1}{7}$ 代表圓周率。

指定作業：

習題一（配合活動一）

在家中找出三件直徑長大於 20 公分的圓形物品，分別複製出圓周長和直徑長，並量出長度後，填寫在下表。

物品名稱	圓周長	直徑長	圓周率（小數第二位）

習題二（配合活動二）

將上題的物品，以活動二的方式，比對出圓周率是多少？

物品名稱	圓周長	直徑長	圓周率（分數）

教學注意事項：

1. 本單元活動以「實測」為主，使用的測量工具會影響實測的準確性，因此教師在要求學生準備實測的圓形物品時，應強調「直徑長大於 20 公分的圓形物品」，且質硬，不易變形為宜。
2. 教師提供學生作出圓周和直徑的長度的工具，以棉線為宜，市面上的尼龍繩過粗，且易分叉，容易造成較大的誤差，影響測量的結果；一般縫衣服的縫線又太細，容易斷且觀察不易，因此建

議使用棉線為宜。

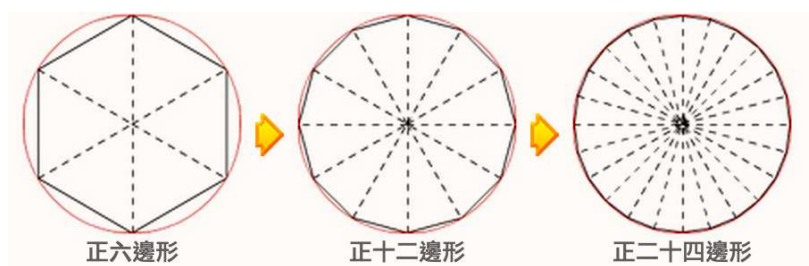
教學參考資料：

周筱亭等（民 95）。國小數學教材分析－幾何。三峽：國家教育研究院。

共讀資料：圓周率的意義

世界的文明古國中，有許多關於圓周率的研究：埃及在西元前 400 年就推算出圓周率等於 3；希臘的歐基里德在西元前 200 年推算出圓周率為 3.14286；而在西元前 100 年，中國的古書「周髀算經」中則記載著「周三徑一」。

魏晉時（大約西元 263 年），數學家劉徽在圓的內部作出正多邊形後發現：圓內接正多邊形的邊數不斷增加時，多邊形的周長會越來越接近圓周長，而多邊形的面積也會越來越接近圓面積。於是，他從正六邊形開始，逐步把邊數加倍：正十二邊形、正二十四邊形，正四十八邊形……，一直到正三〇七二邊形，再比較周長與直徑的關係，算出圓周率等於三點一四一六。劉徽把這個方法叫做『割圓術』。



五代時的數學家祖沖之在劉徽研究的基礎上進一步發展，經過漫長且煩瑣的計算，一直算到圓內接正二四五六邊形，而得到一個結論：圓周率的值介於 3.1415926 和 3.1415927 之間；同時，他還找到了圓周率的比較粗略的數值 $\frac{22}{7}$ 與比較精密的數值 $\frac{355}{113}$ ，一般人通常都採用 $\frac{22}{7}$ ，在需要更精確的計算時才會用到 $\frac{355}{113}$ 。這些研究結果，領先了西方的數學家一千多年。

現在電腦發達，可以在很短的時間之內，就求出圓周率小數點後面幾千、幾萬個位數；但是，古人追求科學真理的熱情與毅力，更值得我們敬佩與學習！

第三章：平面圖形的關係

撰寫者：謝堅

主題 3-1：垂直與平行

3-1-1：兩直線的關係

認知及數學結構：

(一)水平線與鉛垂線

部份學童混淆「水平線」和「平行線」，以及「鉛垂線」和「垂直線」的意義，誤認為「水平線」就是「平行線」，「鉛垂線」就是「垂直線」。水平線和鉛垂線是日常生活中自然存在的一條直線，而平行線和垂直線是描述兩條直線間的關係。

水平線是伴隨著水平面出現的一條虛擬直線，將一杯水平放在桌面上，水面會是水平面，當我們將注意力放在水平面上的邊時，就能觀察到水平線的現象，將一杯水傾斜放置後，更能感覺到水平面及水平線和地面平行的現象。

日常生活中到處都存在鉛垂線，垂吊的燈飾，懸掛燈籠的繩子等都是鉛垂線，我們也可以製作出鉛垂線，將繩子綁上石頭，自然垂下的繩子就是鉛垂線。在同一個地區，水平線和鉛垂線會互相垂直。

民國 82 年頒布的課程標準，以及民國 92 年頒布的課程綱要中，都將水平線及鉛垂線列入國小的教材，他們認為認識水平線及鉛垂線很重要，因為日常生活中經常會利用水平線或鉛垂線來

解決問題。以台東水上流的觀光景點為例，水不可能往上流，我們看到水往上流是受到周遭地形地物的影響，如果拿出一杯水找出水平面及水平線，或將繩子綁上石頭製作出鉛垂線，就能找到該地和水平面所夾的角度，破解水往上流視覺上的假像。

(二)兩直線的關係

有很多將平面上兩直線分類的方法，例如以兩直線交點的個數來分類，可以將兩直線區分為交點個數是 0 個(兩直線互相平行)、交點個數是 1 個，以及交點個數是無限多個(兩直線重合)三類；以是否平行來分類，可以區分為兩直線互相平行和兩直線不互相平行兩類，數學上常將重合的兩直線視為互相平行的兩直線；以是否垂直來分類，可以區分為兩線互相垂直和兩線不互相垂直兩類，重合的兩直線不互相垂直。

我們可以將日常生活中經常見到兩直線的關係區分為下列四類，第一類是兩直線重合；第二類是兩直線互相平行(沒有交點)；第三類是兩直線互相垂直(兩直線相交，且有一個夾角是直角)；第四類是兩直線相交，但夾角不是直角。其中兩直線互相平行及兩直線互相垂直是國小階段教學的重點。

3-1-2：垂直

認知及數學結構：

(一)直角、垂直、90 度

直角是某種角的名字；垂直是兩條直線的關係，兩條直線如果相交，而且有一個夾角是直角，我們稱這兩條直線互相垂直；而 90 度是測量直角所得到的角度。

直角的名稱得自水平方向與鉛垂方向所形成的現象，這種現象在生活周遭隨處可見。透過溝通，學前學童很容易在一堆直角與非直角的圖形中找出直角，當教材開始溝通圖形構成要素時，就能夠引入直角的概念及名詞。

筆者常詢問教師「直角、垂直、90 度」這三個概念的教學順序為何，相當比例的教師無法正確回答。國小階段先引入直角的概念，並利用三角板等工具來檢驗某個角是否為直角；有了直角的概念後，只要引入垂直的定義，學童就能透過夾角是否為直角來檢驗兩直線是否互相垂直；只要引入角度的測量單位「度」以及量角器，學童就會知道直角的角度是 90 度。至於 90 度和垂直，前者是量與實測的教材，後者是幾何的教材，都不是彼此的先備知識，誰先引入、誰後引入都沒有關係。

(二)垂直的定義

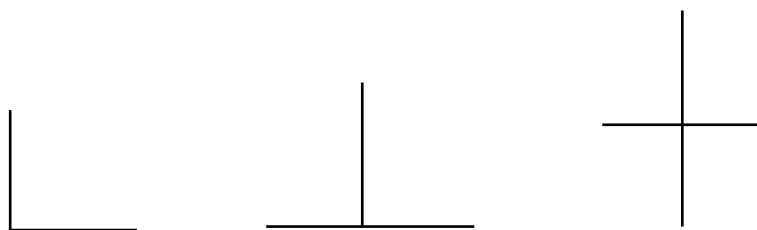
垂直是兩相異直線間的一種關係，平面上，相異兩直線不相交，則稱兩直線互相平行；若相交，且交角中有一個角為直角(其餘三個角也必定是直角)，稱這兩條直線互相垂直。

當學童能掌握甲、乙兩條直線互相垂直的意義後，才能夠理解甲線垂直於乙線，以及乙線垂直於甲線的意義，並解決畫出過線外一點，且和已知線垂直的直線的問題。

(三)垂直教學注意事項：

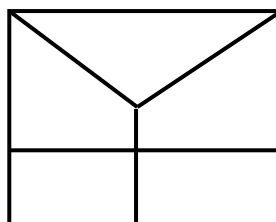
(1)垂直的情境

如【圖一】，平面上存在三種垂直的情境，第一種情境只存在 1 個直角(【圖一】左邊的圖形)；第二種情境存在 2 個直角(【圖一】中間的圖形)，第三種情境存在 4 個直角(【圖一】右邊的圖形)，這三種情境都滿足兩直線互相垂直的關係。



【圖一】

這三種情境經常隱藏在幾何圖形中，如【圖二】中，同時存在這三種情境，建議教師在教學時，這三種情境都要溝通，不能只討論其中一種情境。



【圖二】

(2)沒有交點的兩線是否互相垂直？



【圖三】

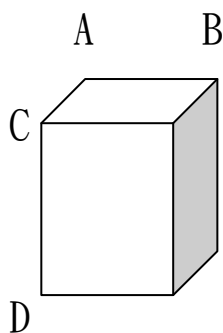
【圖三】左邊和右邊分別呈現兩條沒有交點的線段，教師們常爭議這兩條線段是否互相垂直，下面提出一些說明。

數學上討論平行線與垂直線時，討論的對象都是直線，只要將【圖三】中的線段延長為直線後，一定會相交，如果有一個交角是直角，就稱這兩條直線互相垂直，如果交角不是直角，就稱這兩條

直線不互相垂直。國小階段並沒有區分線段和直線，教材中呈現的都是線段，並稱線段為直線或線。建議教師回到垂直的定義來討論這兩條直線是否垂直，如果判斷兩直線垂直的定義是兩直線相交，且有一個交角是直角，上圖中的兩直線並不垂直，因為這兩直線沒有交角是直角，不滿足兩直線垂直的定義。

教師教學時，可以出現上圖中的問題，並討論這兩條線段是否互相垂直，不論討論的結果是互相垂直或不垂直，只要合理都可以接受。但是，除了自己任課的班級外，在其它較大範圍的評量，例如全校或全縣市的評量時，都不宜出現此類問題。

(3) 正方體中的 AB 邊和 CD 邊是否互相垂直？



【圖四】

很多教師認為【圖四】中 AB 和 CD 兩線互相垂直，理由是高中課本有出現這類問題，答案是兩線互相垂直。國小階段討論垂直時，討論的對象是兩條給定的線段(特例)，【圖四】中 AB 和 CD 這

兩條直線並沒有相交，所以沒有交角是直角，回到垂直的定義，
AB 和 CD 兩線不垂直。

高中階段兩線垂直的定義和國小相同，差別是高中階段討論垂直時，討論的對象是兩類直線(等價類)，我們可以製定一個三維的直角坐標，將 AB 線段的 A 點平移至原點，CD 線段的 C 點也平移至原點，平移後的 AB 和 CD 線段相交於原點，且有一個交角是直角，所以高中課本稱 AB 和 CD 兩線互相垂直。建議教師在評量時，不宜出現此類問題，避免引起爭議。

3-1-3：平行

認知及數學結構：

(一)平行的定義

直觀的看，兩平行線有下面 A 至 E 的性質，這些性質都是等價的關係，可以任意選擇其中一個當作平行線的定義，教師們想想看，國小階段，選用哪一種當做平行線的定義比較恰當，國中階段，是否要重新引入不同的平行線定義。

A：永不相交的兩直線。

B：距離處處相等的兩直線。

C：內錯角（同位角）相等的兩直線。

D：同時垂直於另一條直線的兩直線。

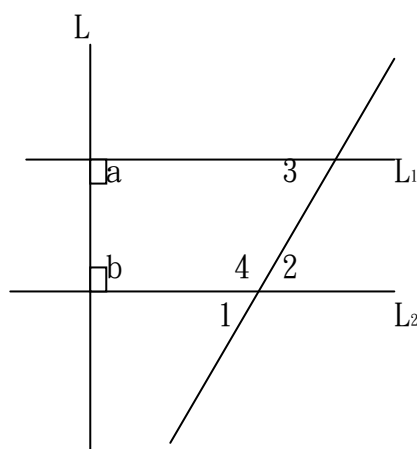
E：透過旋轉，可以轉換成水平線(或鉛垂線)的兩條直線。

部份教師認為選用「永不相交的兩直線」來描述平行線最貼切，因此告訴學童「如果兩條直線永遠不會相交於一點，這兩條直線就是平行線」，這種想法是不切實際的，因為我們無法檢驗兩條直線是否永遠不會相交於一點。

建議選用「同時垂直於另一條直線的兩直線互相平行」當作平行線的定義，因為學童可以利用直尺或三角板來檢驗，而且國中階段很容易延伸此定義，推導出「同位角相等、內錯角相等或同側內角互補，則兩線平行」的定理。

部份教師選用「距離處處相等的兩直線互相平行」當做平行線的定義，這種選法並不恰當，理由是國小階段只引入兩點距離的定義，雖然在求平行四邊形、三角形、梯形面積時，引入了高，但是並沒有引入點到線距離的定義，沒有點到線距離的定義及平行線的定義，無法引入兩平行線距離的意義。

當學童掌握四邊形內角和是 360 度，就能以「同時垂直於另一條直線的兩直線互相平行」為基礎，推導出「兩平行線的同位角相等(內錯角相等或同側內角互補)」，也能推導出「同位角相等(內錯角相等或同側內角互補)，則兩線平行」的定理。



【圖五】

下面透過【圖五】，簡單說明當兩線互相平行時，其同位角相等(內錯角相等或同側內角互補)：

已知 L_1 與 L_2 互相平行，可以得到 $\angle a = \angle b = 90$ 度。

四邊形內角和 360 度，可以得到 $\angle 3 + \angle 4 = 360 - 180 \text{ 度} = 180 \text{ 度}$ ，推出同側內角互補的結果。

$\angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 4 = 180(\text{度})$ ，可以得到 $\angle 1 = \angle 3$ ，推出同位角相等的結果。

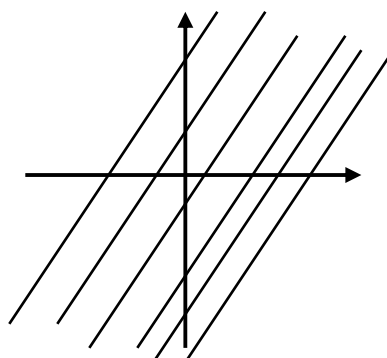
$\angle 2 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 4 = 180(\text{度})$ ，可以得到 $\angle 2 = \angle 3$ ，推出內錯角相等的結果。

國小階段選擇「同時垂直於一直線的兩直線互相平行」當作平行線的定義，國中階段並不需要改變平行線的定義，可以延伸國小平行線的定義，推導出「同位角相等(內錯角相等或同側內角互補)，則兩線平行」的定理，讓學生更容易判斷兩線是否為平行線。國中與國小討論的都是給定兩條直線是否平行的關係。

高中階段開始引入斜率的概念，將所有互相平行的直線都用相同的斜率來表示。可以透過兩點 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 連成一條直線的關係來定義斜率，斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ，也可以透過直線與 x 軸正向的夾角 θ 來定義斜率，斜率 $m = \tan \theta$ 。

例如過 $A(0, 0)$ 與 $B(1, 1)$ ， $C(-1, 0)$ 與 $D(0, 1)$ ， $E(1, 0)$ 與 $F(0, -1)$ 等相異直線 AB 、 CD 、 EF 都兩兩互相平行，這些直線與 x 軸正向的夾角都是 45 度，可以利用 $m = \tan 45^\circ = 1$ 求出它們的斜率都是 1，也可以利用斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 算出它們的斜率都是

1，斜率 $m=1$ 是等價類，所有與 x 軸正向夾角是 45 度直線的斜率都是 1，【圖六】中所有直線的斜率都是 1。



【圖六】

有了斜率的定義後，就能發展出判斷兩線平行($m_1=m_2$ ，則 L_1 平行 L_2)，以及判斷兩線垂直($m_1 \times m_2 = -1$ ，則 L_1 垂直 L_2)的公式。

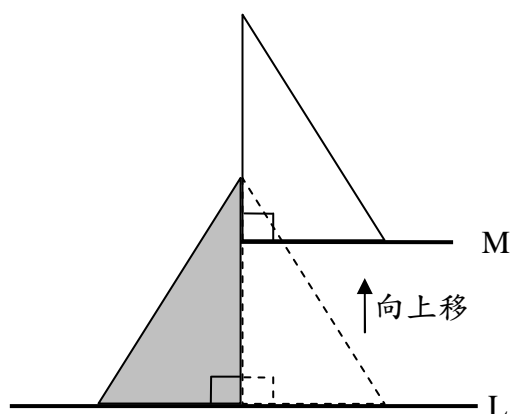
(二)檢驗或畫平行線

學童必須先學會利用三角板檢驗 L 、 M 兩線是否為平行線的方法，才能解決給定一線 L 及線外一點 P ，畫出過 P 點且與 L 平行的直線的問題。

(1)用兩個三角板來檢查兩線是否平行：

以判斷 L 、 M 兩線是否平行為例，如【圖七】，可以先將兩個三角板的邊和 L 線重合，而且這兩個三角板的直角邊也重合，其中的一個三角板不動，另一個三角板往 M 線移動，如果另一個三角板的邊

和 M 線也重合，L 和 M 兩線就互相平行。



【圖七】

(2) 給定一線 L 及線外一點 P，畫出過 P 且平行 L 的直線 M：

學童有用兩個三角板來檢查兩線是否平行的經驗後，教師可

以給定一直線 L 及線外一點 P，要求學童利用兩個三角板，仿

前面的方式，畫出過線外 P 點的平行線 M。

主題 3-2：全等、對稱與相似

3-2-1：全等圖形

認知及數學結構：

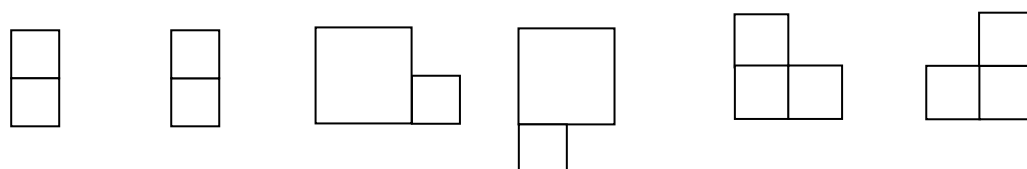
(一)全等的圖形

幾何圖形的基本變換包括平移、旋轉與翻轉(鏡射)。在平面上，將物件延某一固定方向移動到另一位置的現象稱為平移；在平面上，固定一個點，將圖形依順時針或逆時針方向旋轉，使圖形產生位移的現象稱為旋轉；在平面上將圖形翻轉 180 度，使圖形產生位移，此時圖形並沒有改變，而圖形由正面轉為反面稱為翻轉(鏡射)。

全等是兩個圖形間的一種關係，數學上常將這兩個圖形上的圖案排除，使之單純化成為抽象的幾何圖形，如果一個圖形經過平移、旋轉或翻轉(鏡射)運動後，能與另一個圖形處處密合，數學上稱這兩個圖形全等，全等圖形的形狀一樣，而且面積大小也相等。

下面以【圖八】左邊、中間及右邊的圖形為例，概略說明如何幫助學童透過平移、旋轉與翻轉來判斷兩圖形是否全等。在【圖八】

左邊的圖形中，學童只要將左邊的圖形平移至右邊，就能透過疊合的方式知道這兩個圖形全等；在【圖八】中間的圖形中，學童必須先將左邊的圖形平移至右邊，再將左邊的圖形順時針旋轉 90 度，或逆時針旋轉 270 度，才能透過疊合的方式知道這兩個圖形全等；在【圖八】右邊的圖形中，學童將左邊的圖形平移至右邊，不論如何旋轉，這兩個圖形都無法完全疊合，必須將左邊的圖形翻轉，才能透過疊合的方式知道這兩個圖形全等。



【圖八】

(二)全等圖形與圖形形狀的保留概念

部份教師混淆全等圖形與圖形形狀保留概念的意義，誤認為將一個圖形平移、旋轉或翻轉後圖形不變是全等的概念，將一個圖形平移、旋轉或翻轉後圖形不變是圖形形狀的保留概念，而全等是兩個圖形間的等價關係。

學童必須掌握圖形形狀的保留概念，知道一個圖形經過平移、旋轉或翻轉之後形狀不會改變，才能透過直接比較判斷甲圖形和乙圖形是否完全疊合，如果甲圖形和乙圖形完全疊合，稱甲、乙兩圖形全等，如果甲圖形和乙圖形經過平移、旋轉或翻轉後都無法完全疊合，稱甲、乙兩圖形不全等。

當學童掌握兩圖形全等的意義後，才能討論全等圖形是否滿足反身性、對稱性及遞移性。甲圖形和甲圖形全等，所以全等關係滿足反身性；甲圖形和乙圖形全等，乙圖形也會和甲圖形全等，所以全等關係滿足對稱性，甲圖形和乙圖形全等，乙圖形和丙圖形全等，則甲圖形和丙圖形全等，所以全等關係滿足遞移性。

請注意，教學重點是圖形形狀保留概念時，教師提問的重點是「圖形甲經過平移、旋轉或翻轉之後，形狀和大小是否相同」，教學的重點是全等關係時，教師提問的重點是「圖形甲經過平移、旋轉或翻轉之後，和圖形乙是否完全疊合」。上面所提全等關係滿足反身性、對稱性及遞移性，都不是國小階段教學及評量的重點。

(三)全等圖形的迷思概念

部份教師並沒有掌握全等是兩個圖形間關係的意義，在命題或教學時，誤以為全等是某類圖形的性質，下面以問題甲及問題乙為例，幫助教師澄清全等是兩個圖形間關係的意義。

問題甲：一張紙的邊長 AB 是 100 公分，如果將其邊長影印縮小為 80%後，再放大為 120%，則 AB 較原來的邊長增(減)多少公分？

大多數教師或學童的算法是如下：

$$100 \times 80\% = 80 \text{ (縮小 } 80\% \text{ 後變成 } 80 \text{ 公分),}$$

$$80 \times 120\% = 96 \text{ (放大 } 120\% \text{ 後變成 } 96 \text{ 公分),}$$

$$100 - 96 = 4, \text{ 得到比原來邊長減少 } 4 \text{ 公分的答案。}$$

「減少 4 公分」不是正確的答案，正確的答案是「減少 0 公分」。題目甲問的是「AB 較原來的邊長增(減)多少公分」，而原來這張紙的邊長就是 AB，「AB 和 AB 是相同的長度」，所以正確的答案是「減少 0 公分」。

問題甲的命題者可能沒有掌握數學上「關係」的意義，放大與縮小是兩個圖形間的關係，在描述放大(縮小)的關係時，必須同時描述放大(縮小)前以及放大(縮小)後兩個圖形，因此問題甲正確的描述方式如下：「一張紙的邊長 AB 是 100 公分，如果將 AB 影印縮小為 80% 變成 CD 後，再將 CD 放大為 120% 變成 EF，則 EF 較原來的邊長 AB 增(減)多少公分？」。

問題乙：△ABC 中， $\angle A = 35^\circ$ ， $\angle B = 20^\circ$ ，將該三角形放大 2 倍後，

$$\angle C = ?$$

教師和學童們可能都誤認為問題乙的評量重點是相似三角形對應角相等的概念，其實，問題乙的評量重點只是三角形內角和是 180° 的概念。

問題乙中並沒有描述放大 2 倍後新三角形的名稱， $\angle C$ 是原三角形 ABC 的內角，不是新三角形所對應的角，因此，問題乙的原意是「 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=35^\circ$ ， $\angle B=20^\circ$ ， $\angle C=?$ 」，「將該三角形放大 2 倍」只是題目中多餘的資訊。如果評量重點是相似三角形對應角相等的概念，正確的描述方式是「 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=35^\circ$ ， $\angle B=20^\circ$ ，將 $\triangle ABC$ 放大 2 倍後變成 $\triangle DEF$ ，請問 $\angle F=?$ 」。

3-2-2：線對稱圖形

認知及數學結構：

(一)線對稱教學的迷失概念

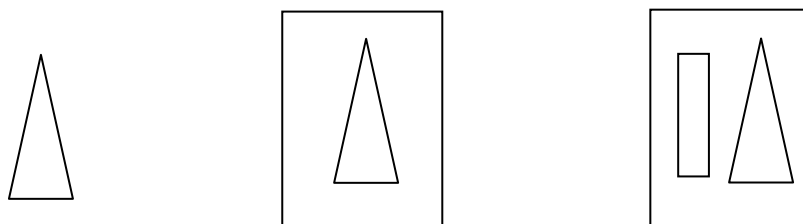
(1)判斷圖形對稱或圖形上圖像對稱的迷思

以判斷等腰三角形是否為線對稱圖形問題為例，【圖九】呈現三種布置等腰三角形圖形的方式：

第一種：如【圖九】左邊的圖形，給定一個等腰三角形的圖卡。

第二種：如【圖九】中間的圖形，給定一張正方形紙張，將等腰三角形畫在給定正方形紙張的正中央。

第三種：如【圖九】右邊的圖形，給定一張正方形紙張，將等腰三角形畫在給定正方形紙張的一邊，另一邊可能還有其它的圖形。



【圖九】

下面分別說明這三種布置等腰三角形圖形的差異。

第一種：對折的對象一定是這個等腰三角形的圖卡，學童可以透過對折後有兩邊圖形完全疊合的現象，判斷該等腰三角

形是對稱圖形。

第二種：對折的對象可能是等腰三角形(略過正方形)；對折的對像也可能是正方形，並將等腰三角形視為正方形紙張中的圖像。

因為正方形和等腰三角形都是線對稱圖形，對折後正方形折線兩邊的圖形會完全疊合，等腰三角形折線兩邊的圖像也會完全疊合，因此對折對像是正方形或等腰三角形的學童都會回答給定的圖形是對稱圖形。

第三種：對折的對像可能是等腰三角形(略過正方形)；對折的對像可也可能是正方形，並將等腰三角形視為正方形中的圖像。

對折對像是等腰三角形學童，會回答給定的圖形是對稱圖形；對折對像是正方形的學童，會因為正方形中等腰三角形的圖像不會重合，回答給定的圖形不是對稱圖形

建議教師先用第一種方式來布題，在與學生溝通評量對象是畫在紙上的等腰三角形後，才能用第二種及第三種方式來布題。

(2) 畫對稱圖形的迷思

國中、小線對稱圖形的教材中，都出現給定一條對稱軸及對稱軸某一邊的圖形，要求學童畫出另一邊圖形的問題，如【圖十】，L 是對稱軸，對稱軸左邊是給定的圖形，要求學童畫出對稱軸右邊的圖形。



【圖十】

教師們常出現下列兩種不同解讀題意的方法，想想看，國小階段，哪一種解讀題意的方法是合理的。

第一種：將左邊的圖形視為圖形甲，要求學童畫出圖形甲對 L 的對稱圖形乙。

第二種：將全部的圖形視為一個線對稱圖形，左邊的圖形只是對稱圖形的一部份，要求學童畫出完整的線對稱圖形。

很多教師混淆「畫出圖形甲對 L 的對稱圖形」與「判斷圖形甲是否為線對稱圖形」的意義，誤以為「畫出圖形甲對 L 的對稱圖形」是對稱圖形的教學重點。下面分別說明「畫出圖形甲對 L

的對稱圖形」與「判斷圖形甲是否為線對稱圖形」的意義。

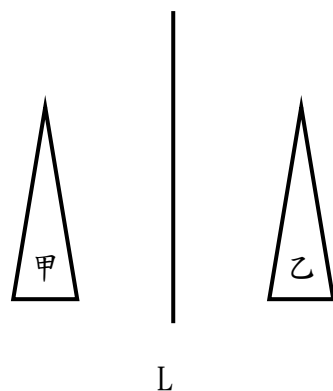
1. 畫出圖形甲對對稱軸 L 的對稱圖形：

數學上先定義 P 點對 L 的對稱點，再透過圖形是點所成集合的概念，定義圖形甲對 L 的對稱圖形乙，下面說明如何畫出圖形甲對 L 的對稱圖形。

給定一個 P 點和一條對稱軸 L，P 點不在對稱軸 L 上，由 P 點往 L 作垂線，垂足為 M，延長 PM 至 Q 點，使得 $PM = MQ$ ，數學上稱 Q 點為 P 點對 L 的對稱點，也稱 P、Q 兩點對稱於 L。延伸上面的定義，如果 R 點在對稱軸 L 上，R 點對 L 的對稱點還是 R。

當我們在紙上操作時，也可以透過以對稱軸為折痕的對折方式，找到 P 點對 L 的對稱點 Q，例如在 P 點上沾一點墨汁，對折後就可以做出對稱點 Q。

給定一個圖形甲和一條對稱軸 L，圖形甲上每一個點對 L 對稱點所成的集合為圖形乙，數學上稱圖形乙為圖形甲對 L 的對稱圖形，也稱圖形甲及圖形乙對稱於 L。【圖十一】中右邊的圖形乙都是左邊圖形甲對 L 的對稱圖形，左邊的圖形甲也都是右邊圖形乙對 L 的對稱圖形，也可以稱圖形甲和圖形乙對稱於 L。



【圖十一】

2. 判斷圖形甲是否為線對稱圖形：

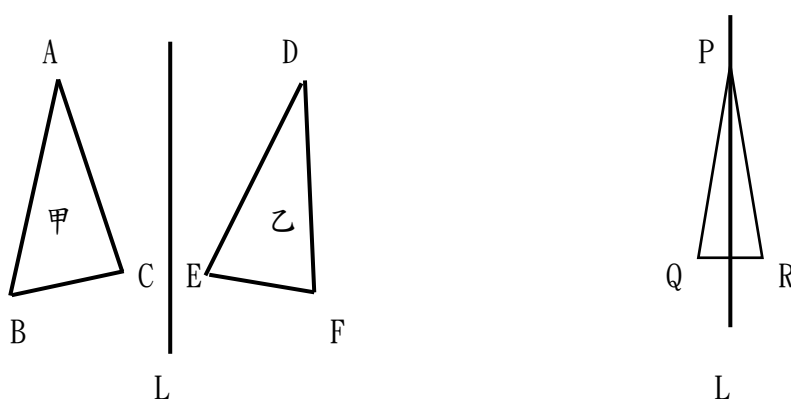
已知一個圖形甲和一條對稱軸L，當我們畫出圖形甲對L的對稱圖形時，發現圖形甲圖對L的對稱圖形也是圖形甲，此時，數學上稱圖形甲是一個線對稱圖形。如【圖十二】，以等腰三角形底邊的中線為對稱軸時，等腰三角形對L的對稱圖形還是自己，我們稱該等腰三角形為線對稱圖形。換句話說，如果某個圖形是線對稱圖形，一定可以找出一條對稱軸L，讓該圖形對L的對稱圖形就是原圖形。



【圖十二】

也可以透過操作的方式，幫助學童判斷某一個圖形是否為線對稱圖形，學童將圖形對折，如果對折後折線兩邊的圖形完全重合，就表示該圖形對折痕的對稱圖形就是自己，所以該圖形就是線對稱圖形，而折痕就是線對稱圖形的對稱軸。

3. 對應點、對應邊、對應角



【圖十三】

【圖十三】左邊的圖形中，左邊的三角形甲對對稱軸L的對稱圖形是三角形乙，三角形乙對對稱軸L的對稱圖形是三角形甲，也就是說，三角形甲和三角形乙對稱於L。

【圖十三】右邊的圖形中，等腰三角形對對稱軸L的對稱圖形是自己，所以圖中的等腰三角形是一個線對稱圖形。

【圖十三】左邊和右邊的圖形中，都會討論到對應點、對應邊與對應角的關係，教師們在教學時應注意他們的差異。【圖十三】

左邊圖形中討論的是甲、乙兩個對應圖形間的關係，【圖十三】右邊的圖形中討論的是等腰三角形本身的對應關係，分別說明如下：

【圖十三】左邊的圖形中先給定 $\triangle ABC$ ，再畫出 $\triangle ABC$ 對 L 的對稱圖形，在畫對稱圖形時，我們會先畫出 A 、 B 、 C 對 L 的對應點 D 、 F 、 E ，再分別連接這三個點，就可以畫出 $\triangle ABC$ 對 L 的對稱圖形 $\triangle DEF$ 。

$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 對稱於 L ，可以討論 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 兩圖形間的對應關係，例如 $\triangle ABC$ 中頂 A 點對 L 的對應點是 $\triangle DEF$ 中的頂點 D ， $\triangle ABC$ 中 AB 邊對 L 的對應邊是 $\triangle DEF$ 中的 DF 邊， $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 對 L 的對應角是 $\triangle DEF$ 中的 $\angle F$ 。

【圖十三】右邊的圖形中是判斷給定的等腰三角形是否為對稱圖形，如果 $\triangle PQR$ 是線對稱圖形，對稱軸是 L ，當我們將三角形沿著 L 邊對折時， Q 點會和 R 點重合， PQ 邊會和 PR 邊重合， $\angle Q$ 會和 $\angle R$ 重合。我們稱 $\triangle PQR$ 中的 Q 點和 R 點是對應點；稱 $\triangle PQR$ 中 PQ 邊和 PR 邊是對應邊，稱 $\triangle PQR$ 中 $\angle Q$ 和 $\angle R$ 是對應角。

國小課程透過對折的方式判斷一個圖形是否為線對稱圖形，因此討論的對應點、對應邊與對應角是【圖十三】右邊圖形的關係，不是【圖十三】左邊圖形中兩個對稱圖形間的關係。

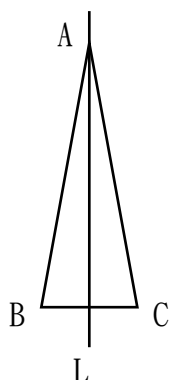
(二)線對稱的教學

(1)線對稱圖形的教學

國小階段對稱圖形教學的重點是「判斷甲圖形是否為線對稱圖形」，以及討論對稱圖形甲中對應點、對應邊及對應角等關係，教師不宜以「畫出甲圖形對L的對稱圖形」當作教學的重點。

教師可以先給定一些好看的圖形，要求學童將圖形對折，如果對折後折線兩邊的圖形完全重合，就稱該圖形是線對稱圖形，而折痕就是線對稱圖形的對稱軸。

以【圖十四】為例，當學童確定【圖十四】中的三角形是線對稱圖形，並找出對稱圖形的對稱軸L之後，就可以開始討論該對稱圖形的對稱關係。如果B點對折後會和C點重合，就稱B點對L的對應(稱)點是C點，也稱B、C兩點對稱於L；如果AB線段對折後會和CD線段重合，就稱AB邊對L的對應(稱)邊是CD，也稱AB、CD兩邊對稱於L；如果 $\angle B$ 對折後會和 $\angle C$ 重合，就稱 $\angle B$ 對L的對應(稱)角是 $\angle C$ ，也稱 $\angle B$ 和 $\angle C$ 兩角對稱於L。

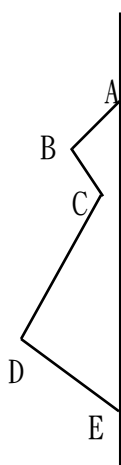


【圖十四】

教師們請注意，國小階段不單獨引入點 A 對 L(對稱軸)的對稱點是點 B，也不引入圖形甲對 L(對稱軸)的對稱圖形是圖形乙，國小階段討論的重點都是某個線對稱圖形，以及該線對稱圖形中的對應關係。

(2)給定線對稱圖形的一部份，要求學童畫出完整的線對稱圖形。

問題：【圖十五】是一個線對稱圖形的一部份圖形，請畫出完整的線對稱圖形。

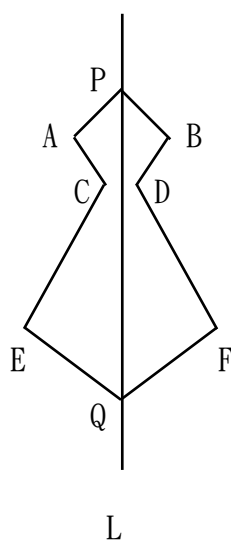


【圖十五】

有兩種解決上面問題的教學方式，第一種是直接告訴學童怎麼畫；第二種是先幫助學童觀察對稱軸是對應點連線垂直平分線的關係，讓學童自行畫出完整的線對稱圖形。下面分別說明這兩種教學方式。

第一種教學方式：

先告訴學童如何畫一個點對 L 的對應點，再要求學童分別畫出 A、C、E 對 L 的對應點 B、D、F，依序連接 P、B、D、F、Q，所得到的封閉圖形(見【圖十六】)就是待答的線對稱圖形。



【圖十六】

第二種教學方式：

建議教師依下列步驟幫助學童自行畫出線對稱圖形。

步驟一：拿出一些線對稱圖形，要求學童觀察，沿著對稱軸對折

後重疊的點，打開後會是互相對應的點，以【圖十六】為例，A、B，C、D，E、F 對折後都會重合，打開後都是互相對應的點。

步驟二：要求學童觀察連接對應點所成的線段 AB、CD、EF 和對稱軸 L 間有什麼關係。

步驟三：幫助學童察覺 L 是線段 AB、CD、EF 的垂直平分線。

國小階段不宜引入垂直平分線的名字，學生只要察覺對稱軸 L 分別垂直於線段 AB、CD、EF，線段 AB、CD、EF 和 L 的交點是它們的中點即可。

步驟四：利用上面的關係，要求學童自己畫出完整的對稱圖形。

3-2-3：相似

認知及數學結構：

(一)相似圖形

設甲、乙分別是由直線段所圍成的多邊形，以甲多邊形為基準，如果乙多邊形的邊數和甲多邊形的邊數一樣，而且乙多邊形每一個邊的邊長，和對應於甲多邊形邊長的比值都是定值 r ，乙多邊形每一個角的角度，和對應於甲多邊形的角度都相等，則乙多邊形的形狀會和甲多邊形的形狀一樣。

當 $r = 1$ 時，乙多邊形和甲多邊形一模一樣，我們說乙多邊形和甲多邊形全等，或說乙多邊形和甲多邊形是全等圖形；當 $r \neq 1$ 時，乙多邊形和甲多邊形的形狀一樣，但是面積的大小不同，我們說乙多邊形和甲多邊形相似，或說乙多邊形和甲多邊形是相似圖形。

而相似圖形又可以依 r 值的不同，區分為放大圖與縮小圖兩種，當 $r > 1$ 時，乙多邊形的面積比甲多邊形大，我們說乙多邊形是甲多邊形的放大圖，當 $0 < r < 1$ 時，乙多邊形的面積比甲

多邊形小，我們說乙多邊形是甲多邊形的縮小圖。

透過影印機放大的倍率，也可以得到邊長是曲線圖形的放大或縮小圖，因為不易與國小學童溝通兩相似圖形對應曲線長的比值或彎曲的程度，因此國小階段不討論有曲線的圖形與其放大或縮小圖的關係，只討論由直線段所圍成的多邊形與其放大或縮小圖對應邊和對應角的關係。

(二)比例尺

在溝通放大圖或縮小圖時，我們習慣將原圖形當作基準量，放大或縮小的圖形當作比較量，例如原圖形是 500 公尺時，縮小圖是 1 公尺，我們會用 $\frac{1}{500} : 1$ ，或用 $\frac{1}{500} : 1$ 的比值 $\frac{1}{500}$ 來溝通看到的是 $\frac{1}{500}$ 倍的縮圖；原圖形是 1 微米時，放大圖是 1000 微米，我們會用 $1000 : 1$ ，或 $1000 : 1$ 的比值 1000 來溝通看到的是 1000 倍的放大圖。

上面討論的是用同單位的比或比值來溝通，也可以用不同單位的比或比值來溝通。例如原圖形是 1 公里時，縮小圖是 1 公尺，

我們會用 1 公尺：1 公里，或用 1 公尺：1 公里的比值 1 公尺/公里來溝通原圖形上是 1 公里時，縮圖是 1 公尺；有時也用畫出線段圖 1 公分代表實際長度是 1 公里的方式來溝通。

主題 3-1-2：線與線的垂直

撰寫者：詹婉華

～線與線的垂直關係

授課對象：國小四年級學生

先備知識：

1. 認識圖形中的直角。
2. 知道角是由兩條直線和一個頂點所構成的。
3. 能比較角的大小。
4. 知道三角形有三個邊、三個角。

教學目標：

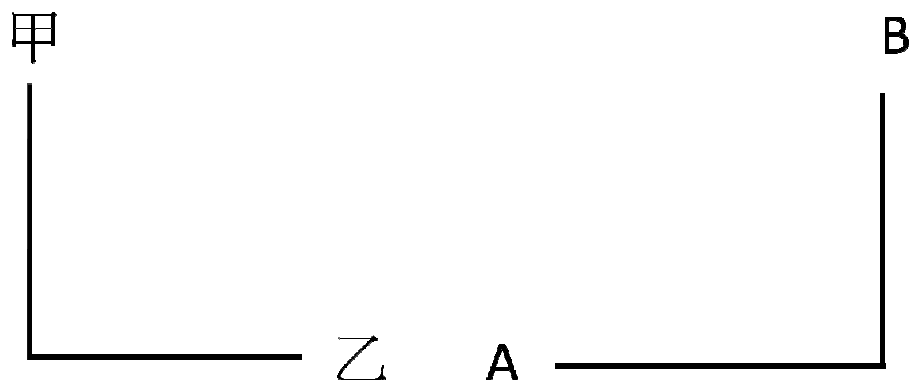
1. 認識三角板的直角。
2. 能用三角板的直角檢驗一個角是否為直角。
3. 由相交兩直線有一個夾角為直角，認識垂直。
4. 能用三角板的直角來檢驗相交的兩條直線是否垂直。

教學時間：40 分鐘（一節課）

教學說明：

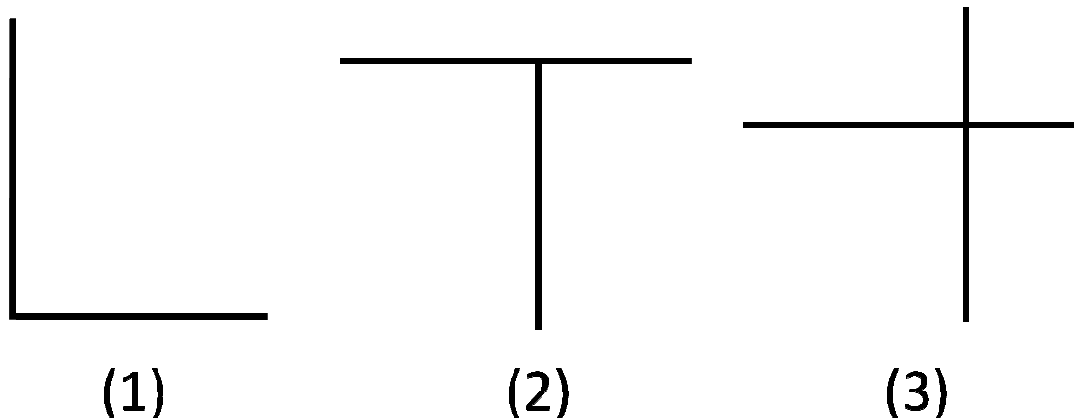
1. 「鉛垂線」是指某一條直線，「垂直線」是指兩條直線間有互相垂直的關係，然而部分學童並不了解「鉛垂線」和「垂直線」兩者的差異，也不了解「垂直線」包含了兩條直線。本教學活動在學童認識三角板中的直角後，讓他們利用三角板量測出兩條直線的夾角為直角，來認識「垂直」的意義。

2. 在學童認識三角板中的直角時，宜先畫出如下圖的垂直線，讓他們知道兩條直線有一個夾角為直角時，這兩條直線互相垂直。

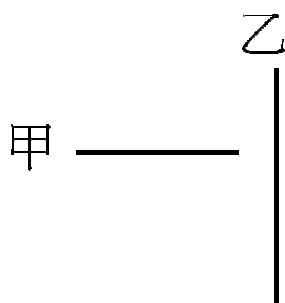


【直線甲和直線乙互相垂直，直線A和直線B互相垂直】

3. 兩條直線互相垂直的情形有下列三種，教學的情境應包含此三種。



4. 小學階段並不區分線段、直線、射線的差異，所以關於不相交的兩條線段（如下圖）是否互相垂直，不在本教學活動中討論。



5. 至於直角的角度是 90 度，不在本教學活動進行，等學童學會運用量角器測量出角的角度時，才進行直角的角度是 90 度的連結。
6. 本教學活動重點：(1) 認識三角板中的直角，並運用三角板的直角找出生活中常見的直角。(2) 由相交兩直線有一個夾角為直角，認識垂直的意義。(3) 用三角板的直角檢驗相交的兩直線是否互相垂直。

教具準備：

三角板一付、學習單。

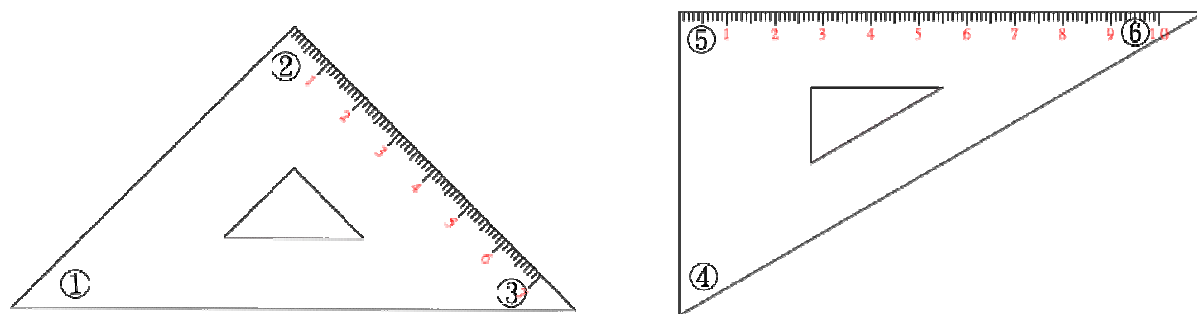
活動一：認識三角板上的直角，並用三角板的直角找出生活中常見的直角

活動目標：

1. 從比較三角板的角，認識三角板上的直角。
2. 運用三角板的直角找出生活中常見的直角。

活動流程：

1. 教師讓學童拿出一付三角板，並將各角標記如【圖一】。



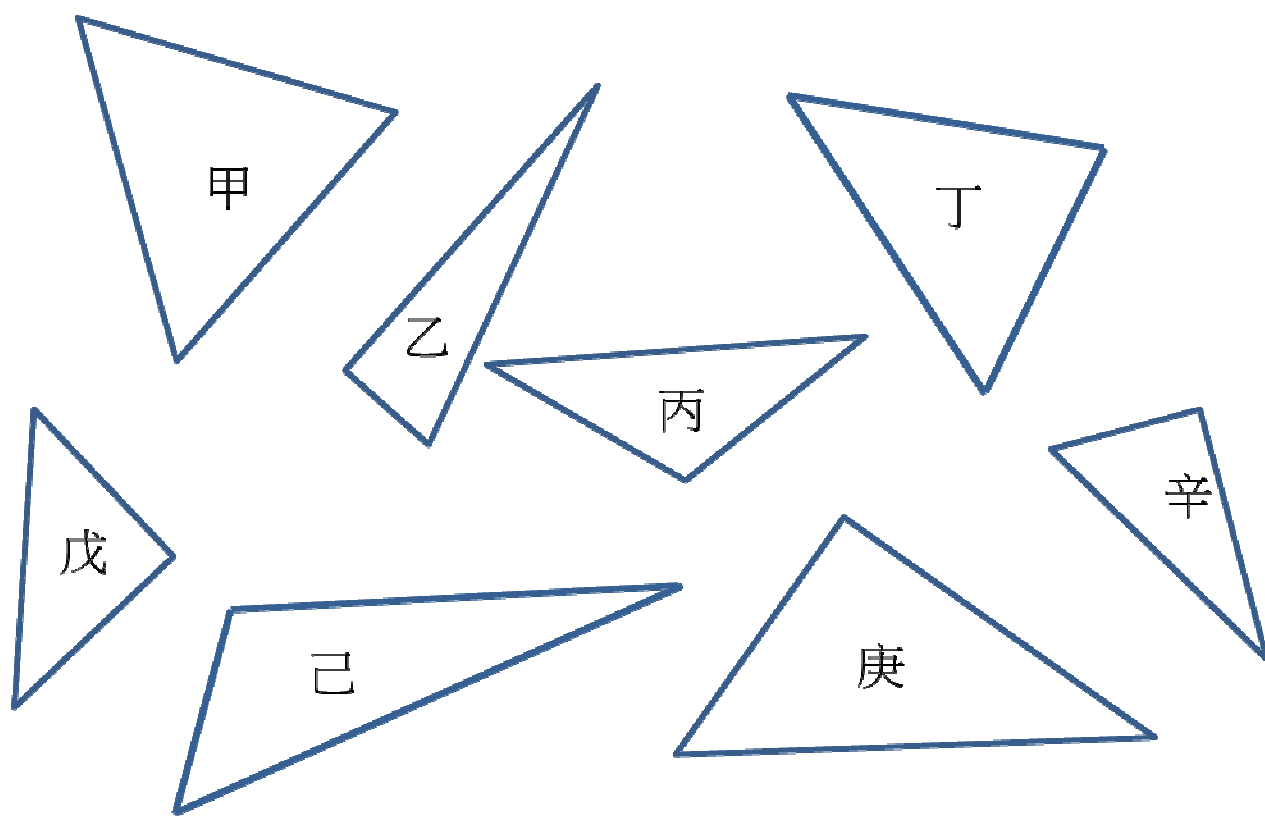
【圖一】

教師提問：這兩個三角板有沒有一樣大的角？讓學童進行操作比較後，請學童發表，學童會指出角 2 和角 5 一樣大。

2. 教師說明：在三角板中，角 2 和角 5 一樣大，像這樣的角，我們稱為「直角」。讓學童指出三角板上的直角並說出「直角」。

3. 教師說明標示直角的方法，發下有不同三角形圖形的學習單如

【圖二】，讓學童運用三角板的直角，找出有直角的三角形，並標記出直角。



【圖二】

4. 請學童上台說明找出直角的方法，以及哪些三角形有直角，學童會發現三角形乙、戊、庚、辛都有直角。

5. 讓學童運用三角板的直角，找出生活用品或教室中的直角，如：

課本、簿子、學習單、窗戶、黑板……等，並發表結果。

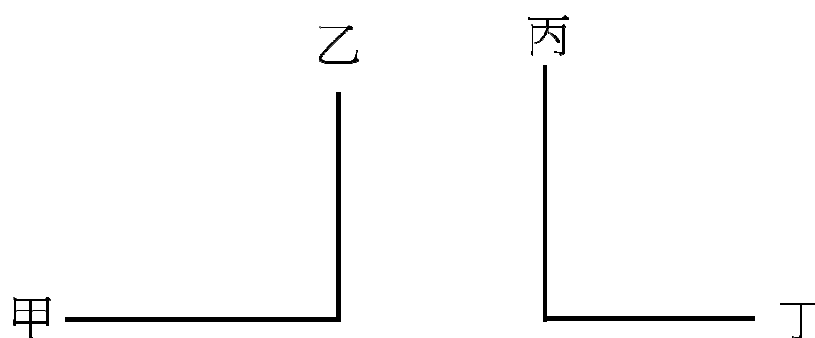
活動二：認識兩直線垂直的意義並檢驗兩直線是否垂直

活動目標：

1. 用三角板的直角檢驗相交兩條直線的夾角是否為直角。
2. 由相交的兩條直線有一個夾角為直角，認識垂直的意義。
3. 用三角板的直角檢驗相交的兩條直線是否互相垂直。

活動流程：

1. 教師在黑板上畫下互相垂直的兩條直線，如【圖三】。

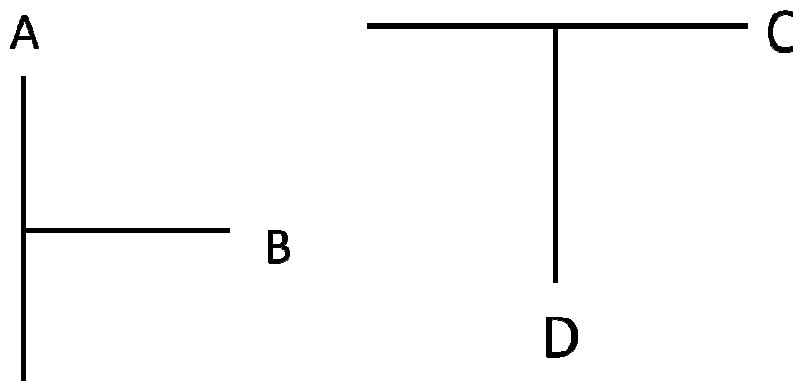


【圖三】

2. 請學童上台用三角板的直角檢驗兩條直線的夾角是否為直角，

在學童檢驗出直線甲和直線乙的夾角為直角，及直線丙和直線丁的夾角為直角後，教師說明：當兩條直線相交，有一個夾角是直角時，我們會說這兩條直線互相垂直。所以，甲、乙兩條直線互相垂直，也就是直線甲垂直於直線乙，直線乙也垂直於直線甲。丙、丁兩條直線互相垂直，也就是直線丙垂直於直線丁，直線丁也垂直於直線丙。

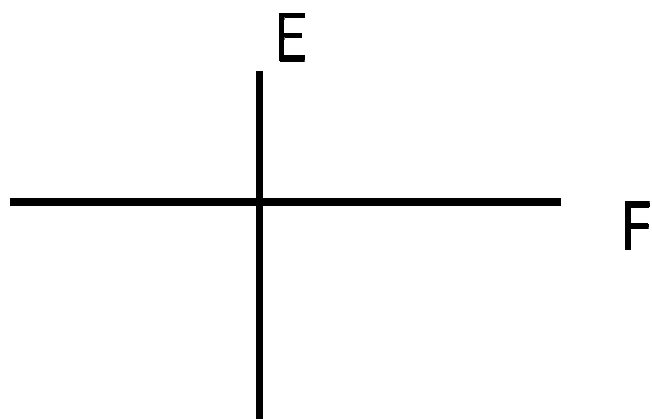
3. 在黑板上畫互相垂直的兩條直線，如【圖四】。



【圖四】

4. 讓學童用三角板的直角檢驗直線 A 與直線 B 的某個夾角是直角，確認直線 A 與直線 B 互相垂直，再讓學童用三角板的直角檢驗直線 A 與直線 B 的另一個夾角，學童會發現另一個夾角也是直角。教師說明：相交的兩條直線，其中一個夾角是直角，這兩條直線互相垂直。而這兩條互相垂直的直線，另一個夾角也會是直角。
5. 學童用三角板的直角檢驗直線 C 與直線 D 的一個夾角是直角，確認直線 C 與直線 D 互相垂直，再檢驗直線 C 與直線 D 的另一個夾角，他們會發現另一個夾角也是直角。
6. 在黑板上畫互相垂直的兩條直線，如【圖五】。學童用三角板的直角檢驗直線 E 與直線 F 的某個夾角為直角，確認直線 E 與直線 F 互相垂直，再讓學童用三角板的直角檢驗直線 E 與直線 F 的另外三個夾角，學童會發現這三個夾角也是直角。教師說明：

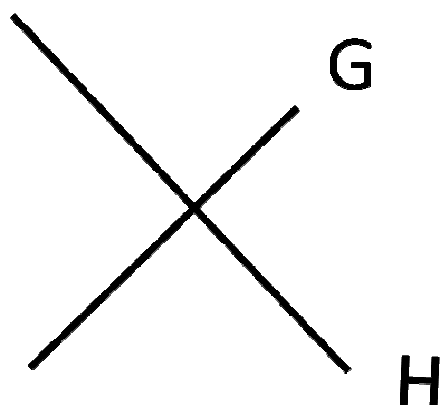
相交的兩條直線，其中一個夾角是直角時，這兩條直線互相垂直。而這兩條互相垂直的直線，另外的三個夾角也會是直角。



【圖五】

7. 配合【圖三】、【圖四】、【圖五】，教師說明：當相交兩條直線有一個夾角是直角時，這兩條直線互相垂直。

8. 在黑板上畫下互相垂直的直線G與直線H，如【圖六】。請學童上台運用三角板檢驗這兩條直線其中的一個夾角是否為直角。

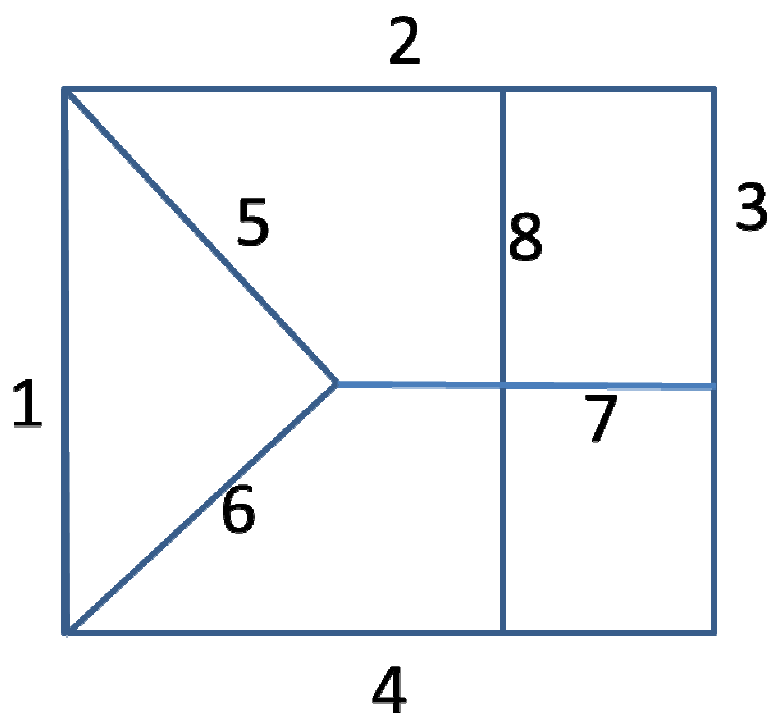


【圖六】

9. 在學童檢驗出直線G和直線H其中的一個夾角為直角後，提問：直線G和直線H是否互相垂直？說說看，你怎麼知道的？學童

會回答：直線 G 和直線 H 互相垂直，因為直線 G 和直線 H 的一個夾角是直角。學童檢驗直線 G 和直線 H 的其他夾角，會發現直線 G 和直線 H 的其他夾角也都是直角。

10. 發下學習單如【圖七】並說明圖形是由八條直線組成的，讓學童運用三角板的直角先標出圖形中的直角，再找出兩組互相垂直的直線。在黑板上張貼和學習單一樣的圖形，請學童上台發表哪兩條直線互相垂直。



【圖七】

11. 教師從兩條直線互相垂直的三種情形，帶領學童找出【圖七】中互相垂直的兩直線。

(1) 如【圖三】的情形：直線 1 和直線 2 互相垂直、直線 1 和直

線 4 互相垂直、直線 3 和直線 2 互相垂直、直線 3 和直線 4 互相垂直、直線 5 和直線 6 互相垂直。

(2)如【圖四】的情形：直線 2 和直線 8 互相垂直，線 4 和直線 8 互相垂直，直線 7 和直線 3 互相垂直。

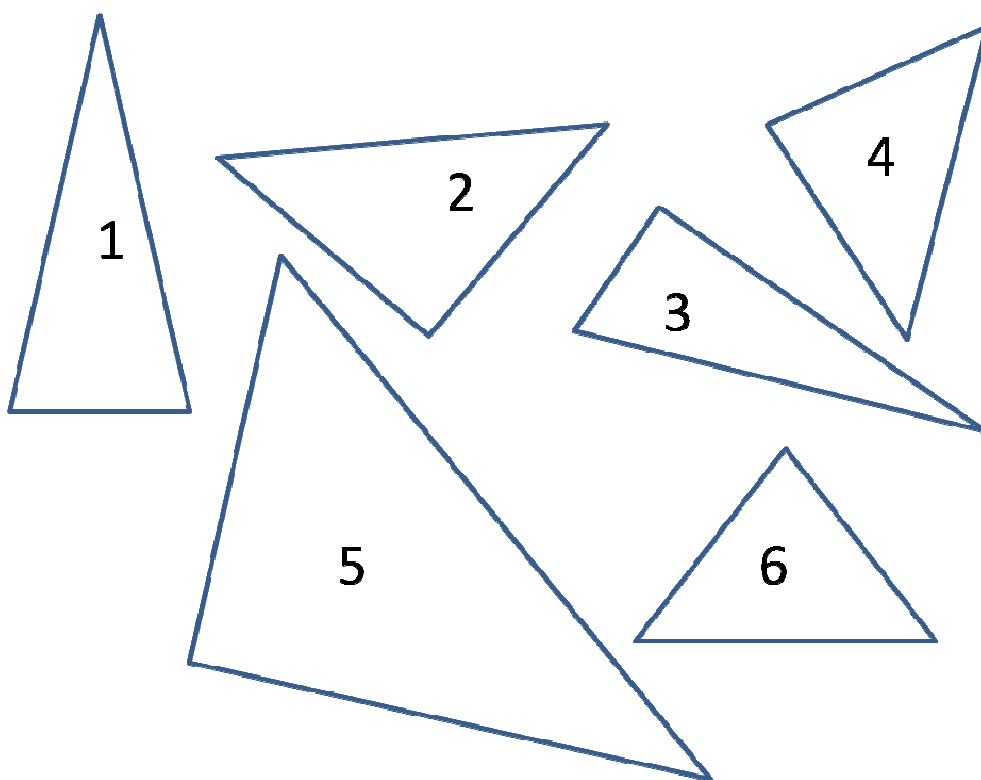
(3)如【圖五】的情形：直線 7 和直線 8。

11. 教師利用圖形中互相垂直的兩條直線，總結說明：因為兩條直線有一個夾角是直角，所以它們互相垂直。

指定作業：

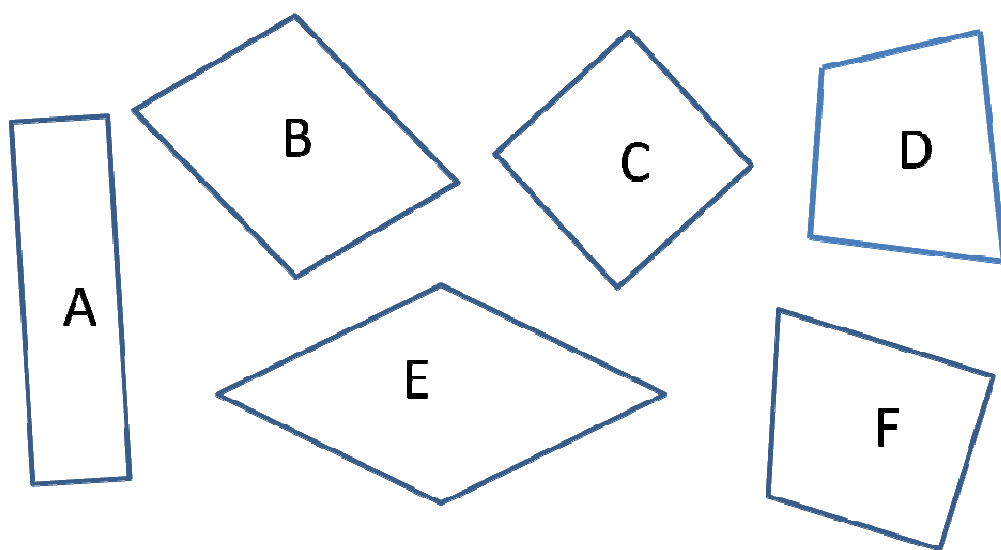
習題一（配合活動一）

1. 下列哪些三角形有直角？用三角板量量看，並標出直角。



答：有直角的三角形是()。

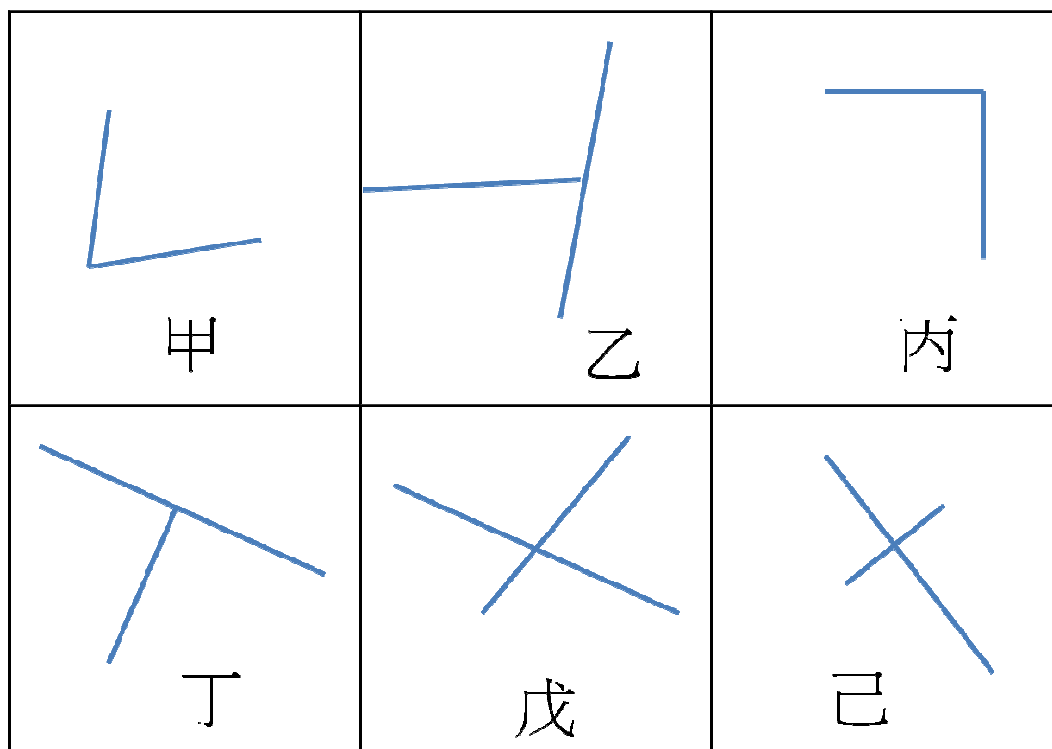
2. 下面哪些四邊形有直角？用三角板量量看，並標出直角。



答：有直角的四邊形是()。

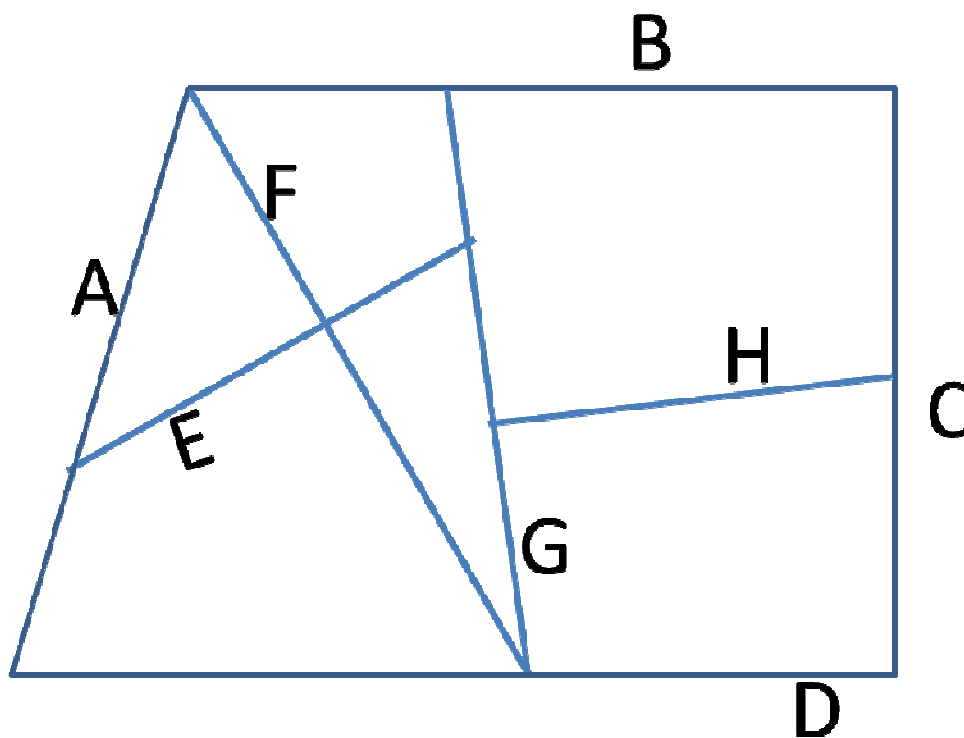
習題二（配合活動二）

1. 下面哪幾組的兩條直線互相垂直？



答：()。

2. 下圖是由直線 A、B、C、D、E、F、G、H 組合而成的，找出兩組互相垂直的直線。

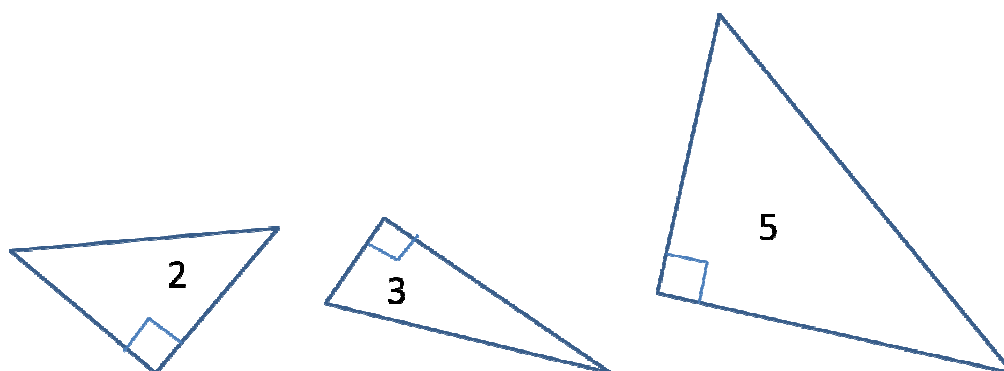


答：()。

指定作業參考解答：

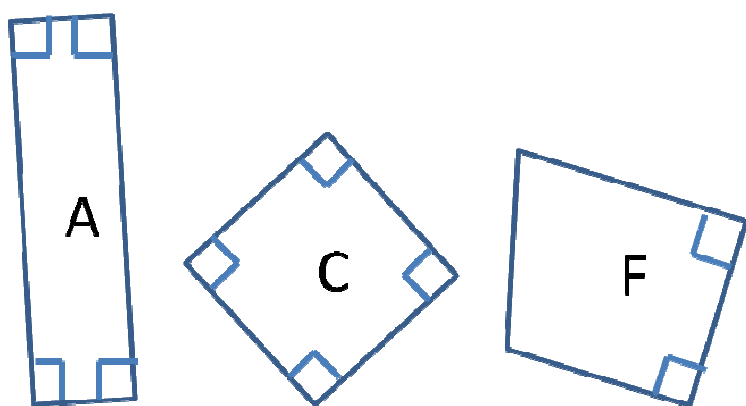
習題一

1.



2, 3, 5。

2.



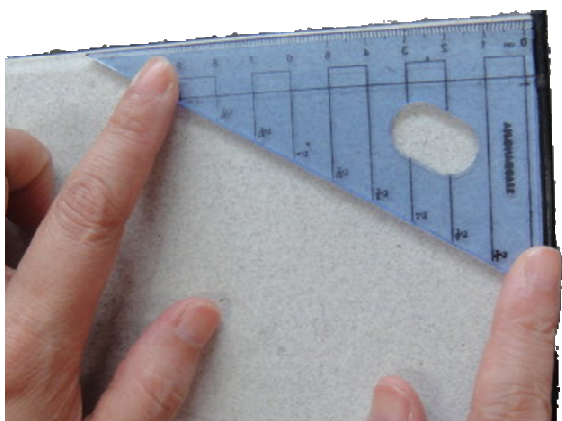
A, C, F。

習題二

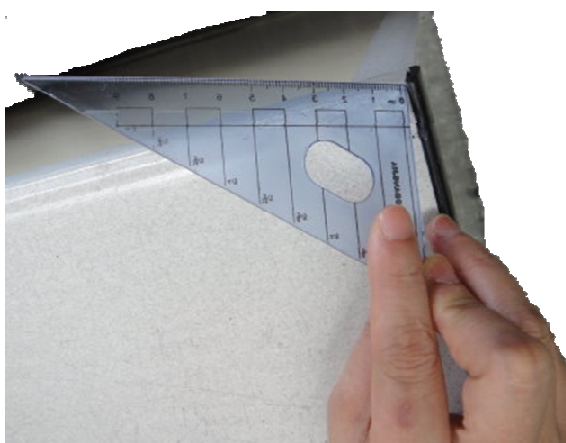
1. 丙、丁、己。
2. 直線 B 與直線 C 互相垂直、直線 C 與直線 D 互相垂直、直線 E 與直線 F 互相垂直、直線 G 與直線 H 互相垂直。

教學注意事項：

1. 要求學童標出直角時，教師應指導他們使用「直角記號」標出直角。
2. 活動一讓學童運用三角板的直角檢驗生活物品中的直角，宜注意學童檢驗時，是否將三角板緊貼於物體表面，如【圖八】，再測量平面的兩邊是否垂直，以免他們只是用三角板直角的頂點來檢驗物品的頂端，如【圖九】，而非在同一平面上檢驗兩條直線是否垂直。



【圖八】



【圖九】

3. 進行活動二，讓學童運用三角板測量圖形中哪兩條直線互相垂直時，須先說明教學活動二【圖七】的八條直線的起點及終點，且不宜要求他們找出所有互相垂直的直線。教師應在共同討論時，依兩直線互相垂直的三種情形，帶領學童逐一找出所有互相垂直的直線。

教學參考資料：

周筱亭等(民 95)。國小數學教材分析—幾何。三峽：國家教育研究院。

主題 3-1-3：線與線的平行

～線與線的平行關係

授課對象：國小四年級學生

先備知識：

1. 認識直角。
2. 能用三角板的直角檢驗相交的兩直線是否垂直。

教學目標：

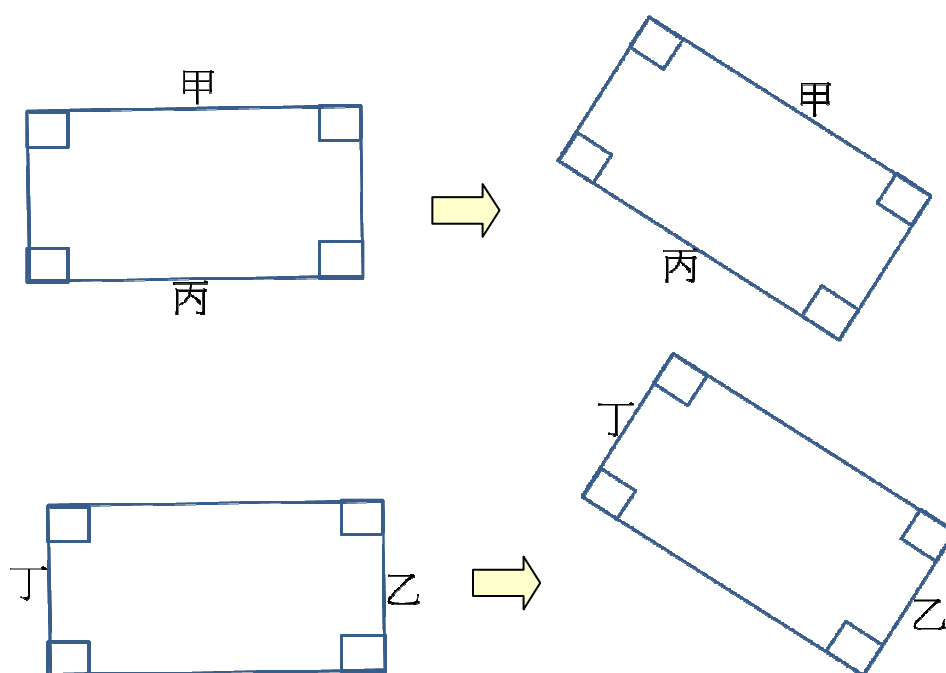
1. 能由兩直線同時垂直另一條直線，知道兩直線互相平行。
2. 能用兩個三角板的直角檢驗兩直線是否平行。
3. 能用兩個三角板，畫出通過直線外一點和該直線平行的直線。

教學時間：40 分鐘（一節課）

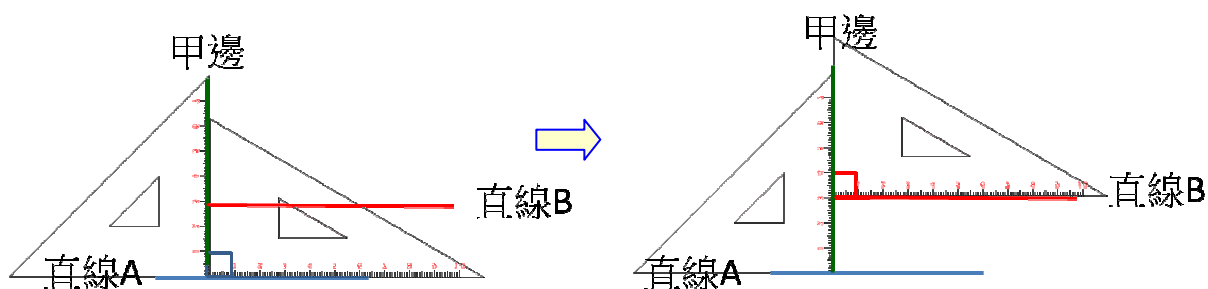
教學說明：

1. 在國小階段，有些教師會用「永不相交的兩直線」來描述平行線，然而我們很難實際檢驗出兩條直線是否永遠不會相交於一點。如果用「同時垂直於另一條直線的兩直線互相平行」定義平行，學童便可以利用直尺或三角板來檢驗二直線是否平行。
2. 生活中常見的窗戶、地磚中，可以看到許多的垂直現象和平行現象。所以，在學童知道垂直的意義後，可以讓他們藉由觀察窗戶和地磚的直線互相垂直的情形，了解「兩條直線同時和另一條直線垂直時，這兩條直線互相平行」。

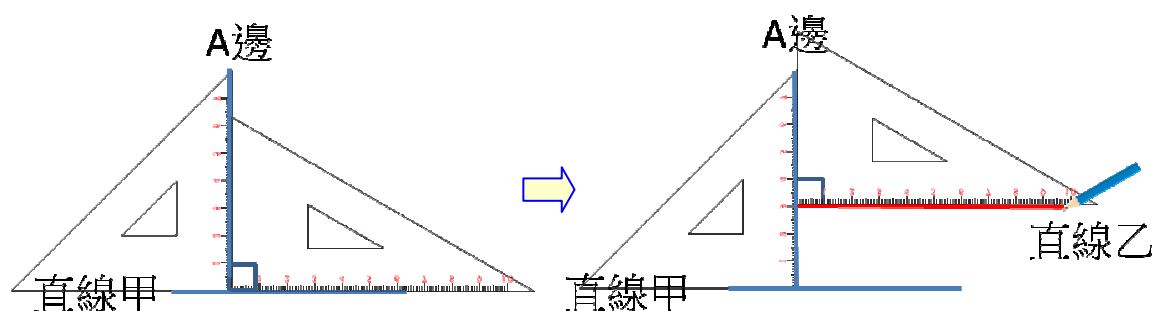
3. 在生活中，學童看到的平行線常常是兩條「水平線」或兩條「鉛直線」，教師在教學中應舉一些不是兩條「水平線」或兩條「鉛直線」的平行線例子。我們可以運用長方形圖形（如下圖），讓學童了解只要兩條直線同時垂直於另一條直線時，這兩條直線互相平行。



4. 當學童學習檢驗兩條直線是否平行時，可以由三角板的直角（如下圖），讓他們看到直線 A 與三角板的甲邊垂直，直線 B 也與三角板的甲邊垂直，因為直線 A 和直線 B 同時垂直於三角板甲邊，所以直線 A 和直線 B 互相平行。



5. 在學童學習畫平行的線時，可以由三角板的直角（如下圖），讓他們看到直線甲與三角板的A邊垂直，也可以畫出的和三角板A邊垂直的直線乙，因為直線甲和直線乙同時垂直於三角板的A邊，則直線甲和直線乙互相平行。



6. 本教學活動重點：(1)從生活中的物品，了解平行的意義，並用兩個三角板的直角檢驗兩直線是否平行。(2)能用兩個三角板，畫出通過直線外一點和該直線平行的直線。

教具準備：

三角板一付、學習單。

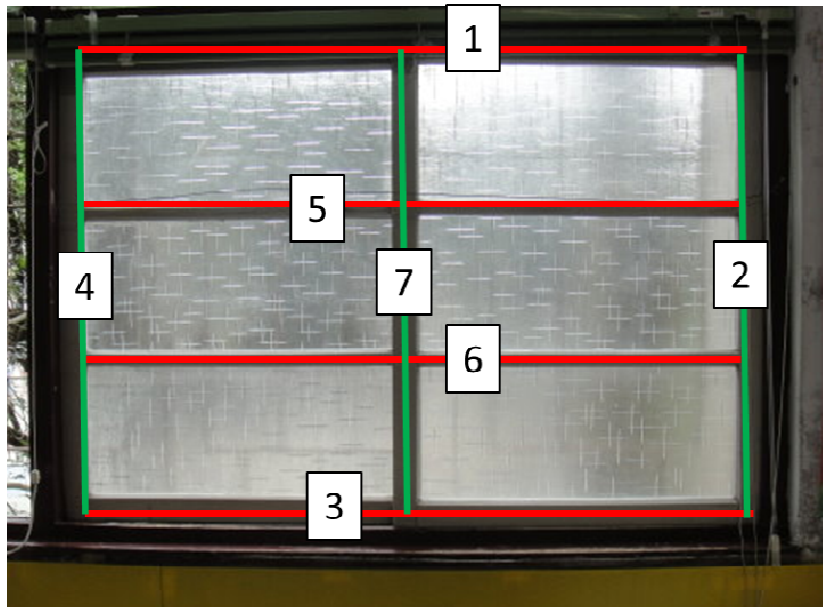
活動一：知道平行的意義，並檢驗兩直線是否平行

活動目標：

1. 瞭解平行的意義。
2. 能用兩個三角板的直角檢驗兩條直線是否互相平行。

活動流程：

1. 教師指著教室內的窗戶如【圖一】，引導學童為窗戶的各邊命名，讓他們說出互相垂直的邊。

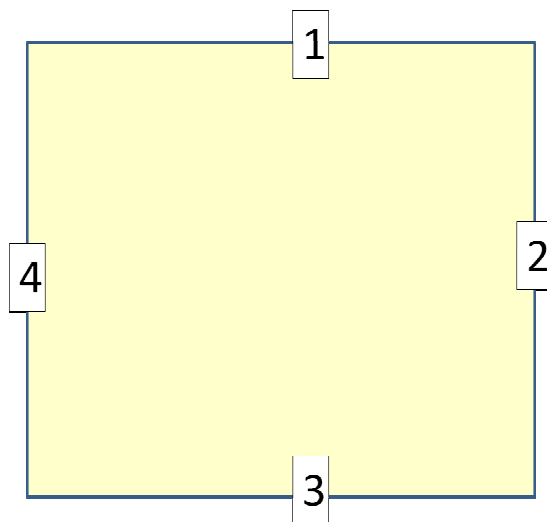


【圖一】

(1)命名窗戶的各邊為邊1~邊7。

(2)說出邊1和邊2互相垂直、邊2和邊3互相垂直、……。

2. 教師在黑板上畫下窗戶外框的圖形如【圖二】，說明：直線1和直線3都垂直於直線2，我們稱直線1和直線3互相平行。

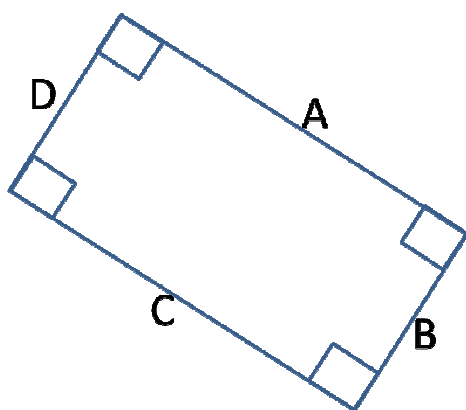


【圖二】

3. 教師帶領學童找出圖形中互相平行的線，並說明方法，如：因為直線2和直線3互相垂直，直線4和直線3也互相垂直，所以

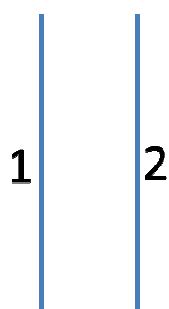
直線 2 和直線 4 互相平行。

4. 在黑板上畫一個長方形並標示直角與各直線代號如【圖三】後，問學童：直線 A 和直線 C 是否互相平行？直線 B 和直線 D 是否互相平行？當學童無法確認兩條直線互相平行時，教師提醒學童當兩條直線同時和某一條直線垂直時，這兩條直線就是互相平行。

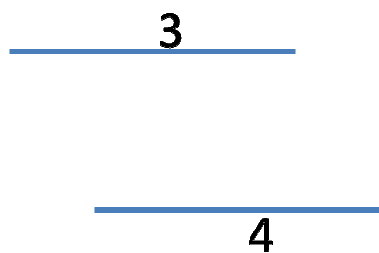


【圖三】

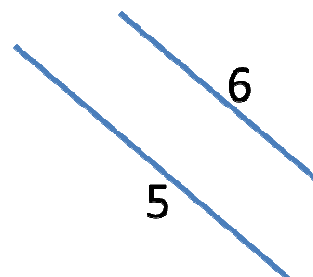
4. 在黑板上畫三組兩條互相平行的線如【圖四】，帶領學童學習用三角板檢驗各組的兩條直線是否互相平行。



甲組



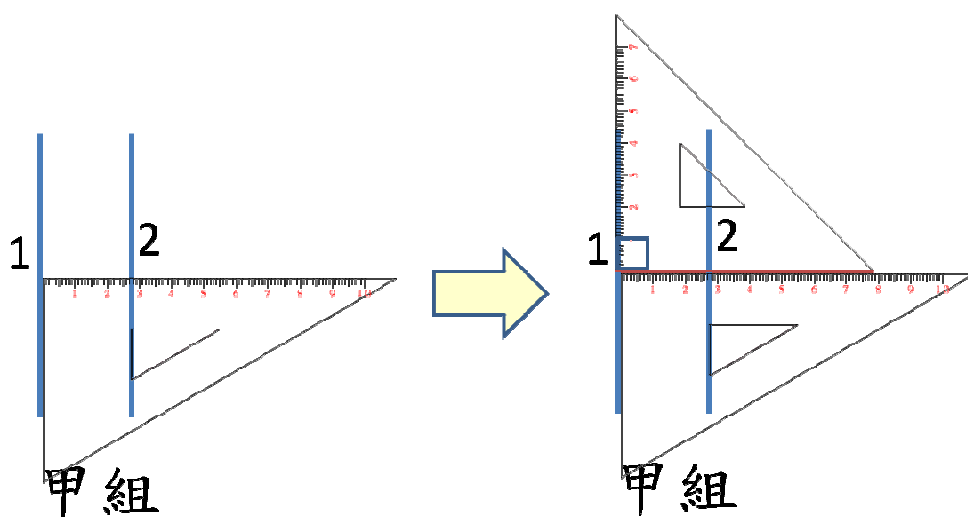
乙組



丙組

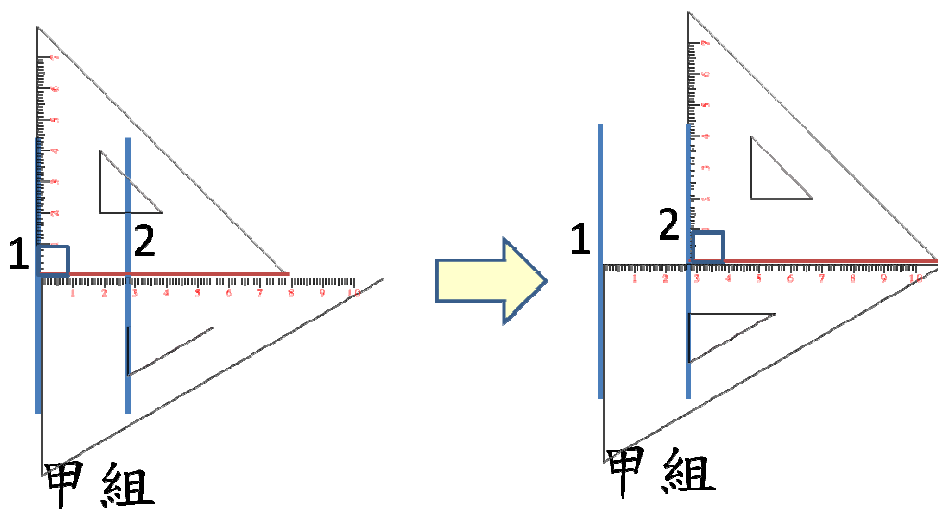
【圖四】

(1)如【圖五】，將三角板直角的一邊緊貼直線 1，再將另一個三角板直角的一邊緊貼於第一個三角板，另一邊緊貼直線 1，讓學童確認直線 1 與第二個三角板直角的一邊互相垂直。



【圖五】

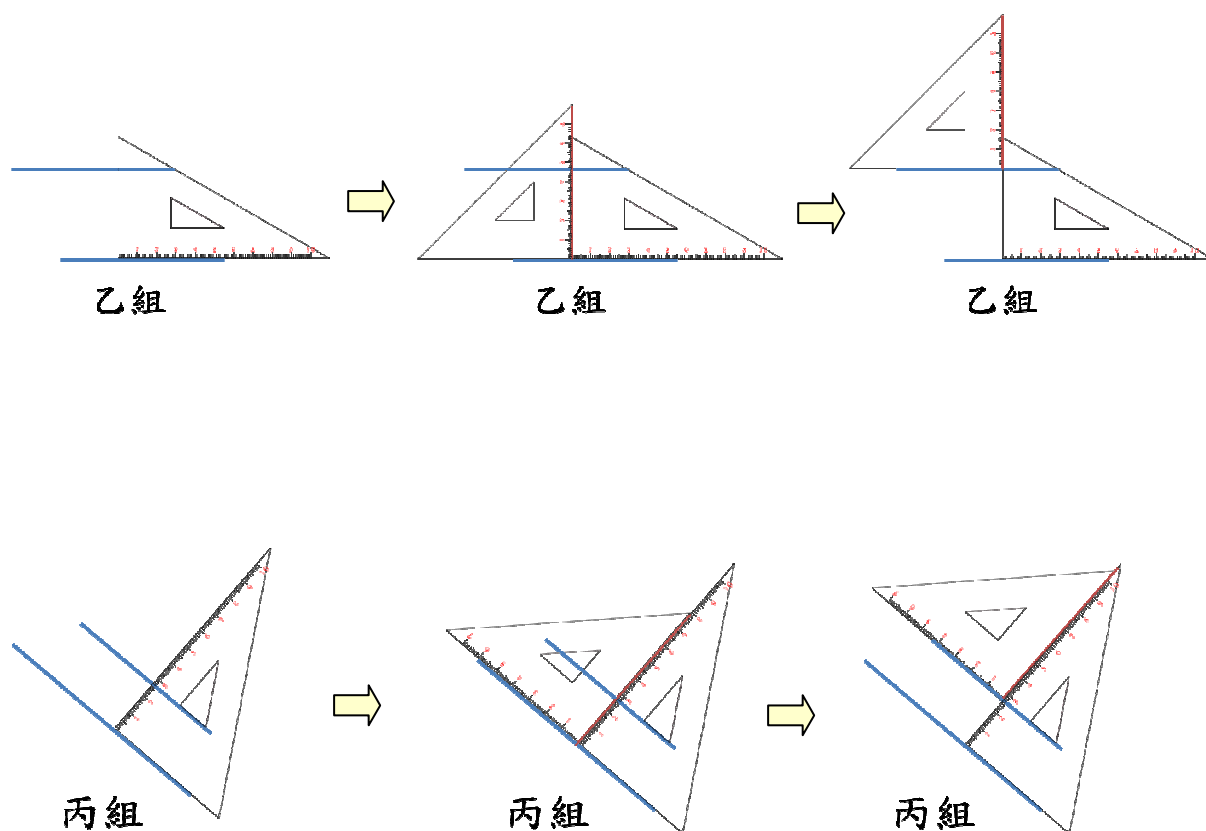
(2)如【圖六】，固定第一個三角板，將第二個三角板緊貼第一個三角板並向直線 2 移動，直到第二個三角板直角的另一邊貼合直線 2。



【圖六】

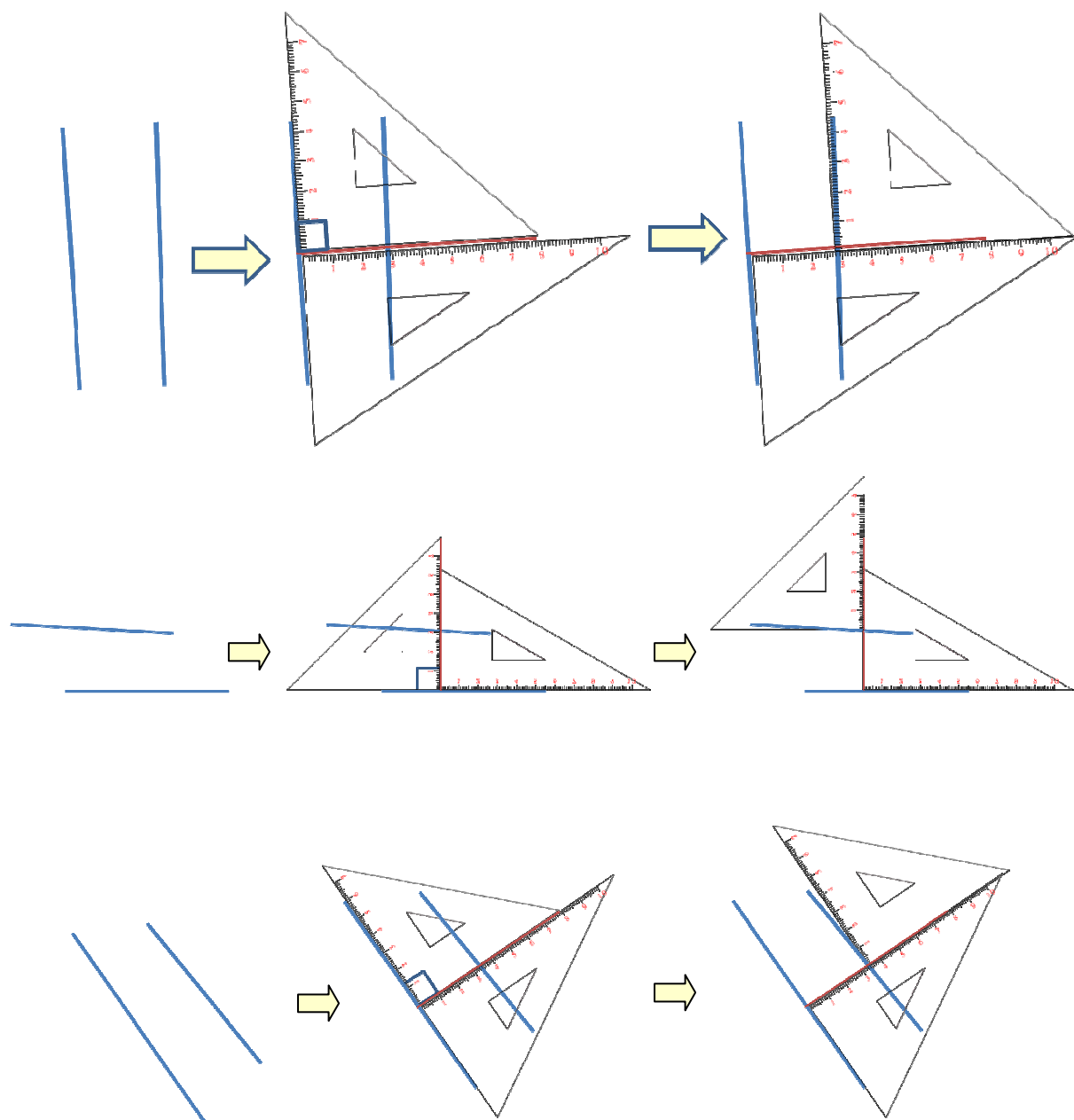
(3)讓學童確認直線 1 和直線 2 同時垂直第二個三角板直角的其中一邊，所以直線 1 和直線 2 互相平行。

(4)如檢驗甲組的方法，讓學童用三角板確認乙組、丙組的兩條直線互相平行，如【圖七】。



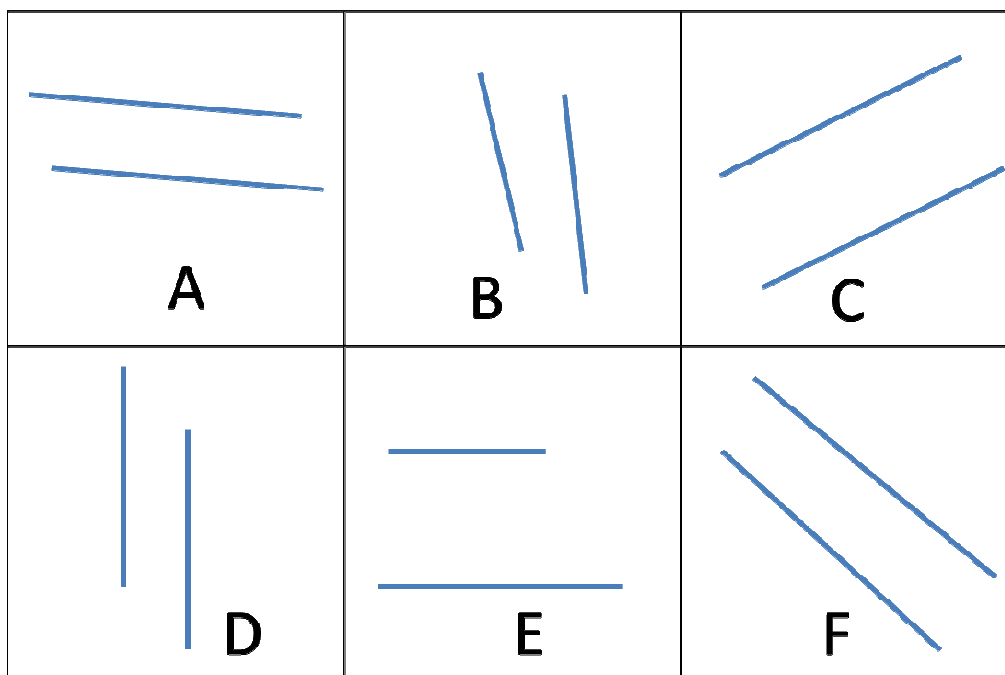
【圖七】

5. 畫兩條看起來互相平行，但非互相平行的直線如【圖八】，先問學童：這兩條直線有沒有互相平行？再引導學童用三角板檢驗出兩條直線不是互相平行後，讓學童了解不能以直觀的方式來判斷兩條直線是否平行。



【圖八】

6. 發下學習單如【圖九】，讓學童用三角板檢驗各組的兩條直線是否平行。學童用三角板檢驗出 A、C、D、E 四組的兩條直線互相平行，B、F 兩組的兩條直線不互相平行。



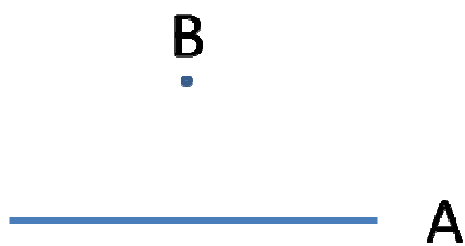
【圖九】

活動二：用三角板畫出平行的線

活動目標：能用兩個三角板，畫出通過直線外一點和該直線平行的直線。

活動流程：

1. 教師在黑板上畫直線 A 及點 B 如【圖十】，問學童：畫一條通過 B 點的直線，且這條直線要和直線 A 互相平行，要如何畫？讓學童發表想法。

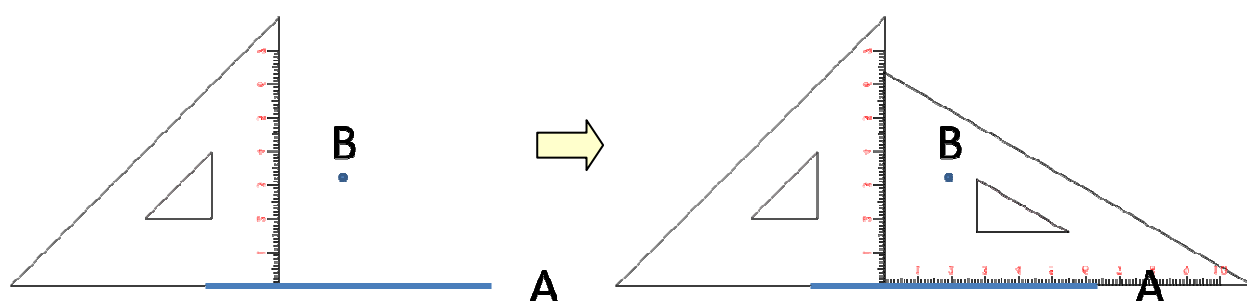


【圖十】

2. 告知學童：我們可以用三角板，檢驗兩直線是否互相平行，同樣的，也可以用三角板畫下通過B點且平行於直線A的線。

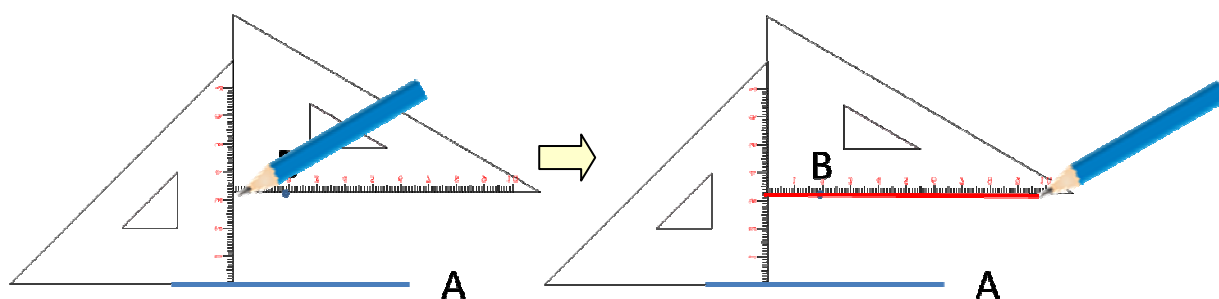
3. 教師示範畫出與直線A平行且通過B點的直線，並讓學童上台操作三角板，確認兩條直線互相平行。

(1)如【圖十一】，將一個三角板直角的其中一邊緊貼直線A，再將另一個三角板直角的其中一邊緊貼第一個三角板，另一邊對齊直線A。



【圖十一】

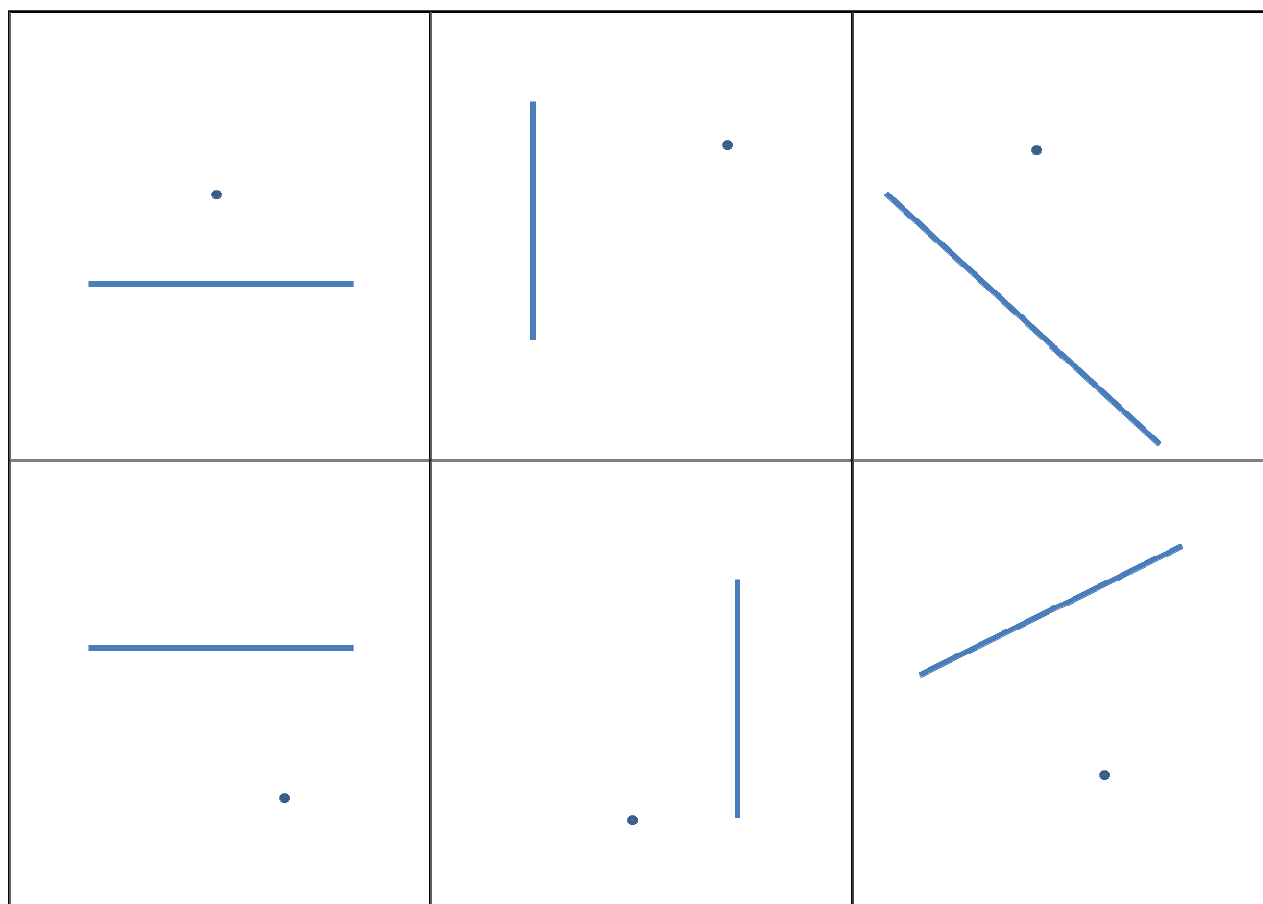
(2)如【圖十二】，第二個三角板緊貼第一個三角板並向上移動至點B的位置，用鉛筆沿著第二個三角板的直角邊，畫出通過B點的直線。



【圖十二】

(3)讓學童上台操作三角板，確認通過B點的直線和直線A互相平行。

4.發下學習單如【圖十三】，讓學童用三角板畫出各個格子裡通過特定點和另一條直線平行的直線。請能正確畫出直線的學童上台畫出他的畫法。



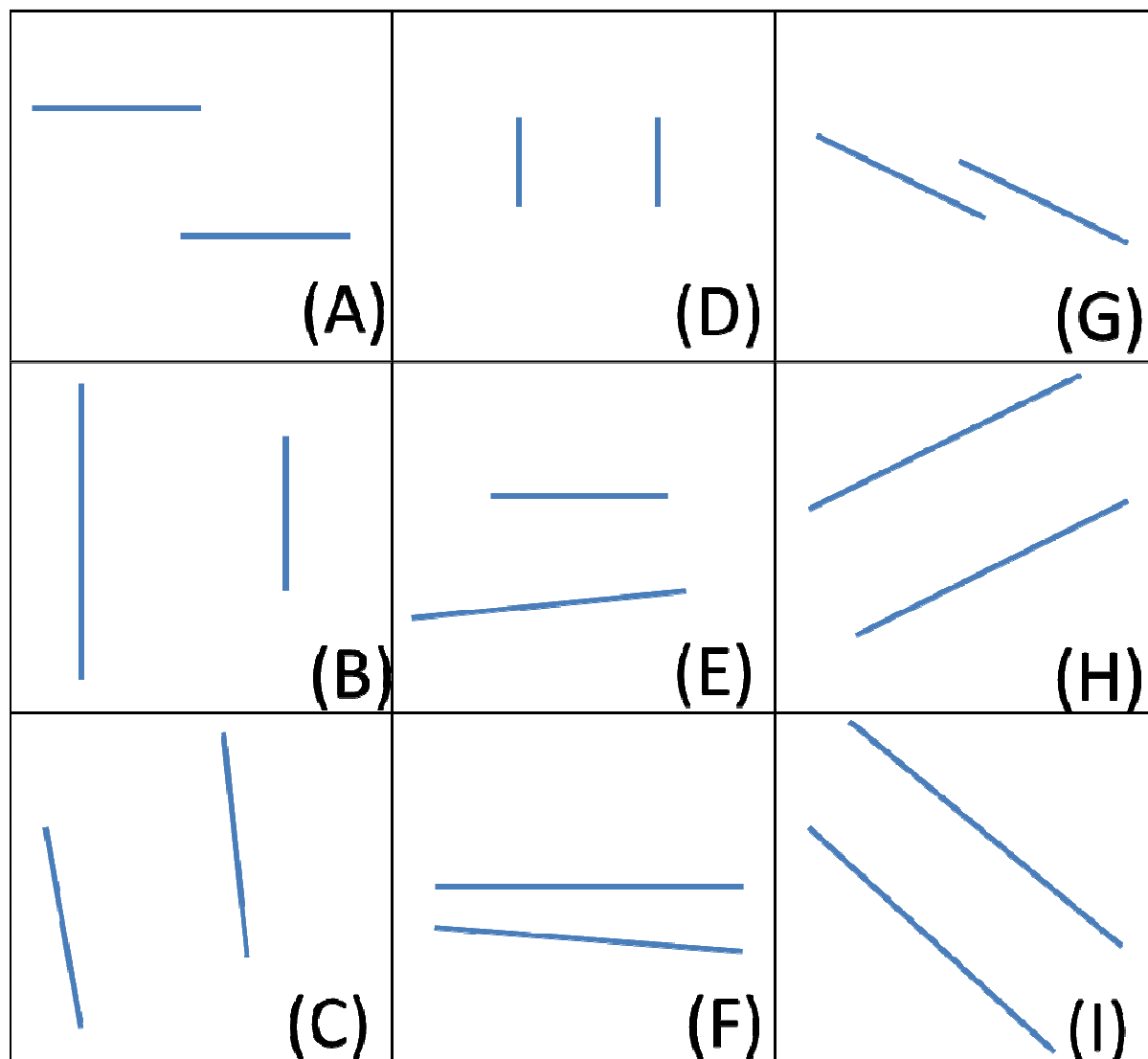
【圖十三】

5.學童畫好後交換學習單，並操作三角板的直角檢查同學所畫的直線是否正確。

指定作業：

習題一（配合活動一）

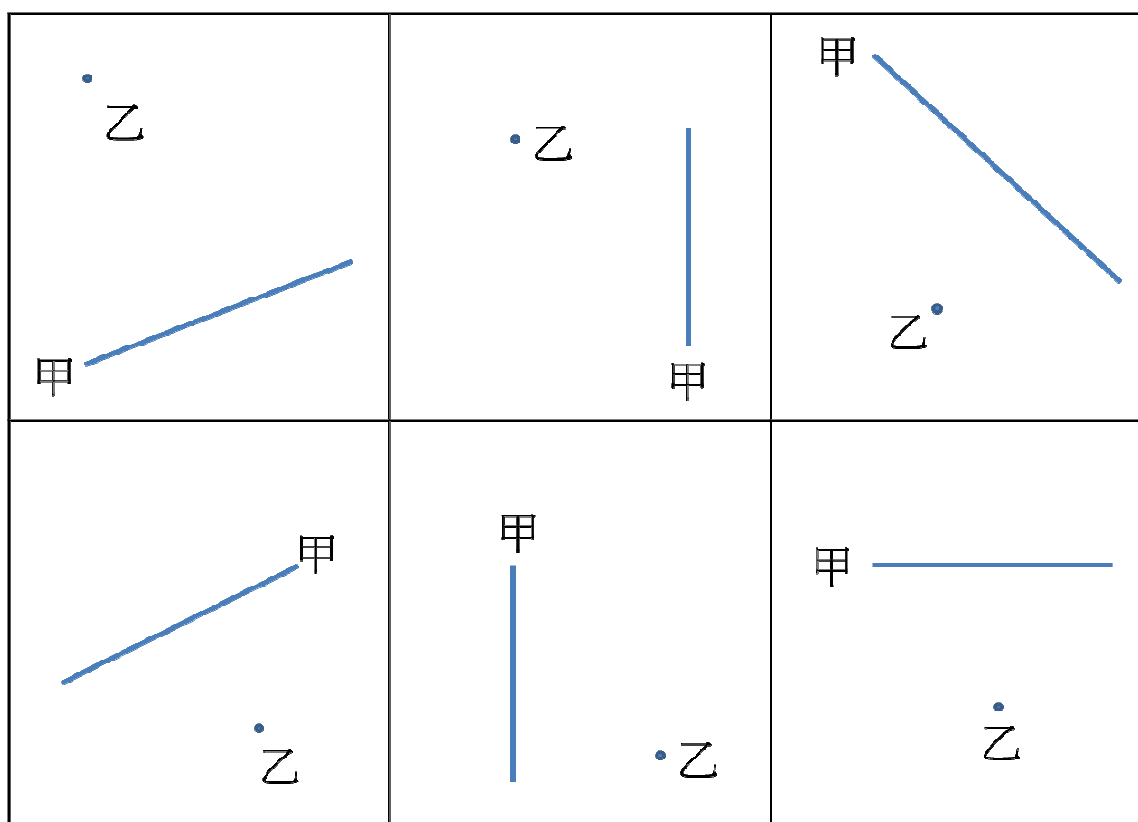
1. 下列各圖中，哪幾組的兩條直線互相平行？



答：()

習題二 (配合活動二)

1. 畫出各小圖中，通過乙點且平行於直線甲的直線。

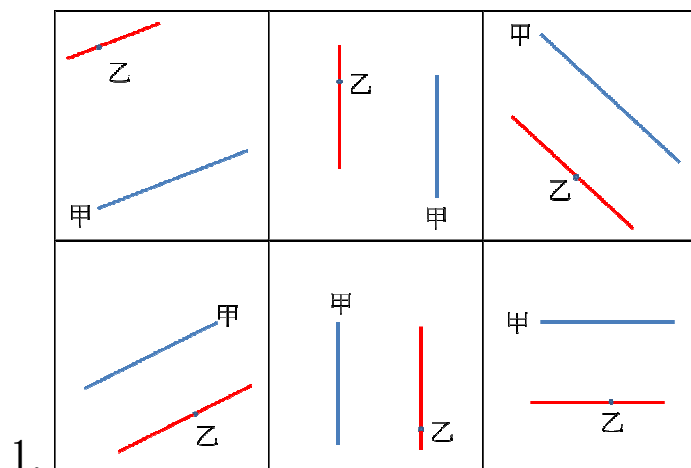


指定作業參考解答：

習題一

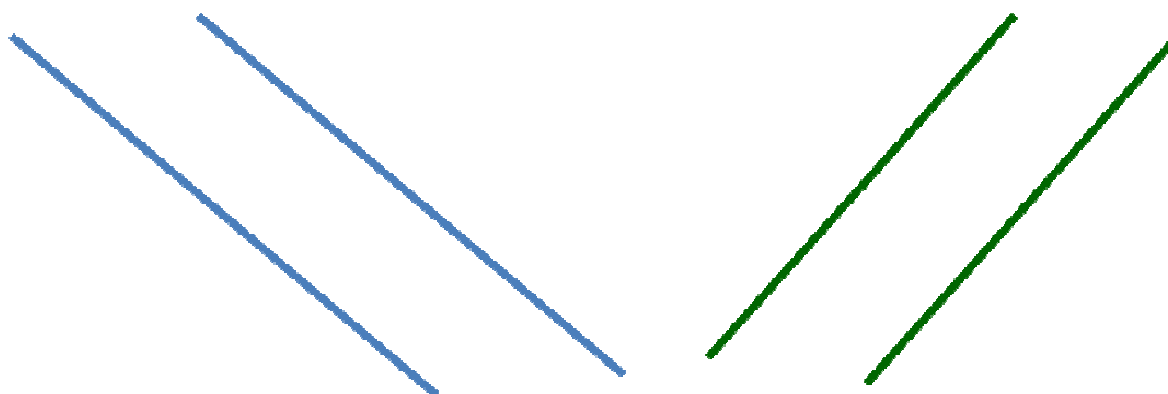
1. A、B、D、G、H

習題二

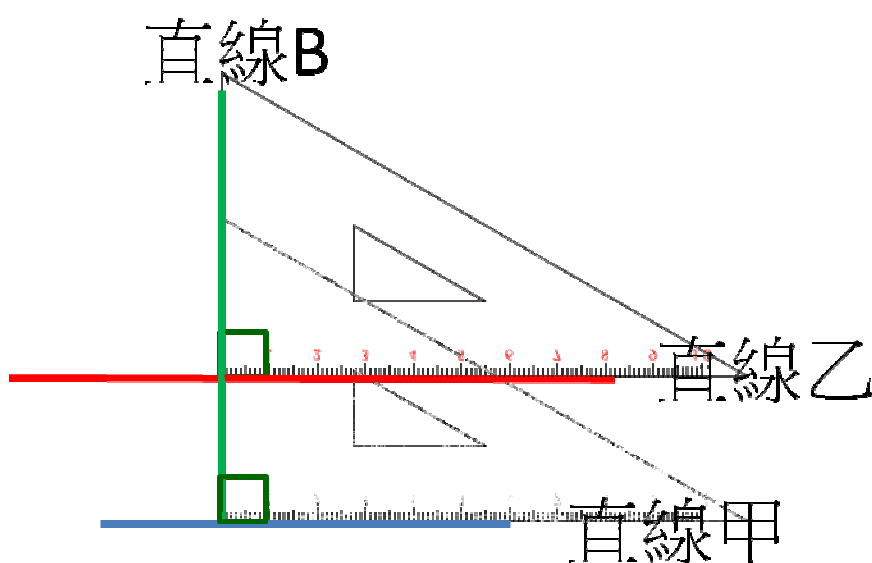


教學注意事項：

1. 生活中的平行現象常常是兩條水平線及兩條鉛直線，所以，在透過生活中常見的物品，讓學童了解平行的意義後，仍應利用不同的兩條互相平行的線（如下圖），讓他們體會平行的意義。



2. 活動一用三角板檢驗兩條直線甲、乙是否平行時，因為不畫出兩條直線的垂直線，在操作過程中，需確認學童知道檢驗的方法是把三角板直角的其中一邊當作垂直於直線甲的直線B，如果直線B也和直線乙互相垂直，才能確認直線甲、乙互相平行。



5. 進行活動一時，若學童對於從三角板中找出和直線甲、乙互相垂直的線感到困難時，則應畫出一條與直線甲垂直的直線 B，再用三角板的直角檢驗出直線 B 和直線乙互相垂直後，確認直線甲、乙互相平行。

教學參考資料：

周筱亭等(民 95)。國小數學教材分析－幾何。三峽：國家教育研究院。

主題 3-2-1：正方形的平面鋪設

撰寫者：魏慶雲

授課對象：國小二年級學生

先備知識：

1. 能辨認、描述及分類簡單圖形。
2. 能依指示進行拼圖。

教學目標：

1. 能拼出指定數量方塊的所有圖形。
2. 能辨識相同的圖形，並說明理由。

教學時間：80 分鐘(二節課)

教學說明：

1. 「動手做」一直是在低年級的教學中不可或缺的一種歷程，學生在操作中感知，在操作中習得，也在操作中增加了學習的興趣。本單元期待，讓學生藉由實物的操作，能夠更加了解經過平移、旋轉與翻轉後的平面幾何圖形與原圖間的全等關係。
2. 當使用的方塊數增加，拼出圖形的變化也相形複雜。此時，如何在許多拼出的圖形中，分辨出屬於旋轉、翻轉後的圖形，進行歸納統整的歷程中，往往也能藉此激發孩子的邏輯思考，提昇表達與組織的能力。
3. 當使用的方塊數增加後，學童不易判斷哪些拼出來的圖形全等，教師應將圖形甲平移、旋轉或翻轉，透過直接比較，幫助

學童理解當圖形甲和圖形乙能完全疊合時，圖形甲和圖形乙全等。

4. 全等是與教師溝通的名詞，國小中、低年級教學時，可用「形狀一模一樣」等語詞進行溝通。

教具準備：

西卡紙(裁成 5cm 見方，四個角均打洞，每生 5 片)

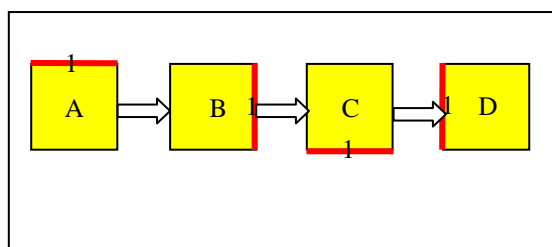
固定環(每生 8 個)

活動一：找出相同的圖形

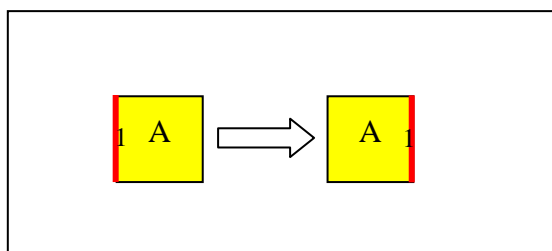
活動目標：能利用正方形教具，找出使用 1 片、2 片、3 片教具所能拼出的所有圖形。

活動流程：

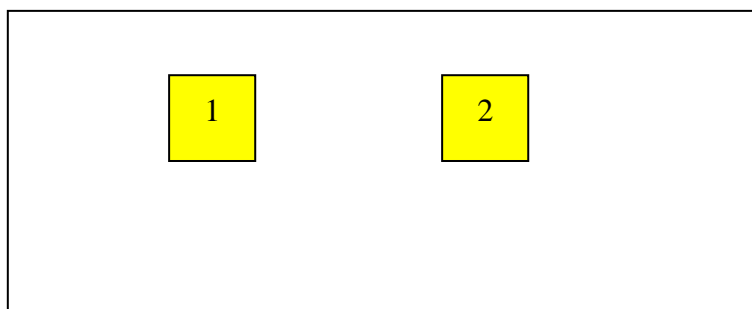
1. 教師在黑板上展示一個正方形，並將方塊方向的改變，讓學生判斷圖形是否與原來的一致。



2. 和學生討論為什麼旋轉過後圖形是一樣的。
3. 教師提問：「那麼把方塊翻過來，圖形會不會和原來的一樣呢？」



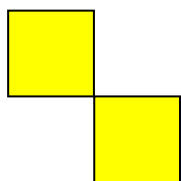
4. 與學生共同討論翻轉後圖形相同的理由。
5. 教師在黑板上展示 2 片正方形方塊。



6. 教師提問：「請問 1 號跟 2 號方塊一模一樣嗎？」
7. 若學生回答：「一模一樣」則繼續提問：「怎麼知道的呢？」
8. 請學生上台說明二片方塊形狀相同的理由，學生可能回答：
將 1 號方塊平移到 2 號方塊上，發現可以完全疊合。
9. 教師接著提問：「把方塊的方向改變，形狀會不會不同？」
10. 教師提問：「用一片方塊可以拼出幾種不同的形狀？」
11. 引導學生說出：「一片方塊不管怎麼轉，怎麼翻，形狀都會和原來相同。」
12. 結論：「一片方塊只能排出一種圖形。」
13. 接著在黑板上展示二片方塊，並說明拼圖時的限制：
 - (1). 每 2 個方塊間必須至少有一個邊連在一起。

(2). 如果轉過來、翻過去以後，形狀會一樣的算是同一種。

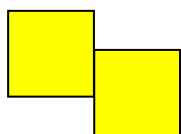
14. 先在黑板上拼出：



與學生討論為何這種形式不符合規定條件。

引導學生說出：這 2 片方塊間只有一點點連在一起，跟規定的不一樣。

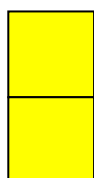
再在黑板上拼出：



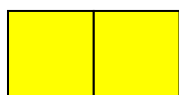
討論為何這種形式不符合規定條件，以引導學生說出：這 2 片方塊間連在一起的邊不完整。

15. 發給每位學生二片方塊，請學生拼出所有的形式。

16. 觀察學生拼出的結果，並討論以下二種圖形是否一樣？為何一樣？



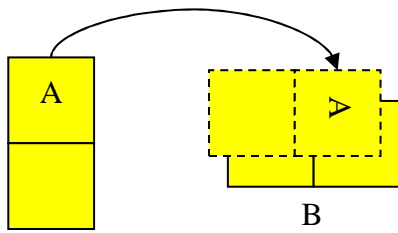
A



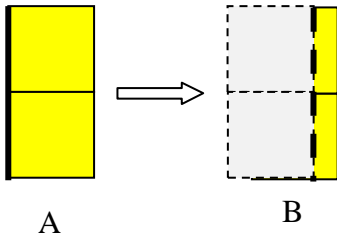
B

17. 為了讓學生確實了解二種圖形是相同的，可以將其中一組與另

一組平移、旋轉後重疊，以進行直接比較。



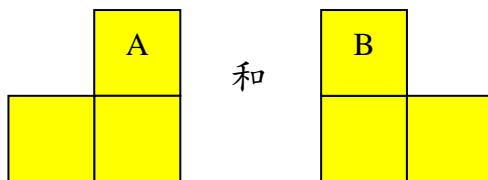
18. 再試試看將圖形翻轉後是不是一樣。



19. 結論：「用二個方塊，雖然拼出看起來不一樣的圖形，但實際上這些圖形是全等的。」

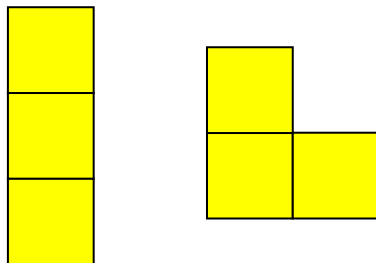
20. 發給每位學生 3 片方塊，請學生拼出所有形式。

21. 討論： 一不一樣？為什麼？



22. 引導學生發現：A 翻過來就和 B 的圖形一樣了。

23. 在學生操作後進行討論，並得出結論：3 片方塊能拼出的圖形只有二種



活動二：相同圖形的辨識

活動目標：能辨識經過旋轉、翻轉後會相同的圖形。

活動流程：

1. 根據活動一的結果整理出：

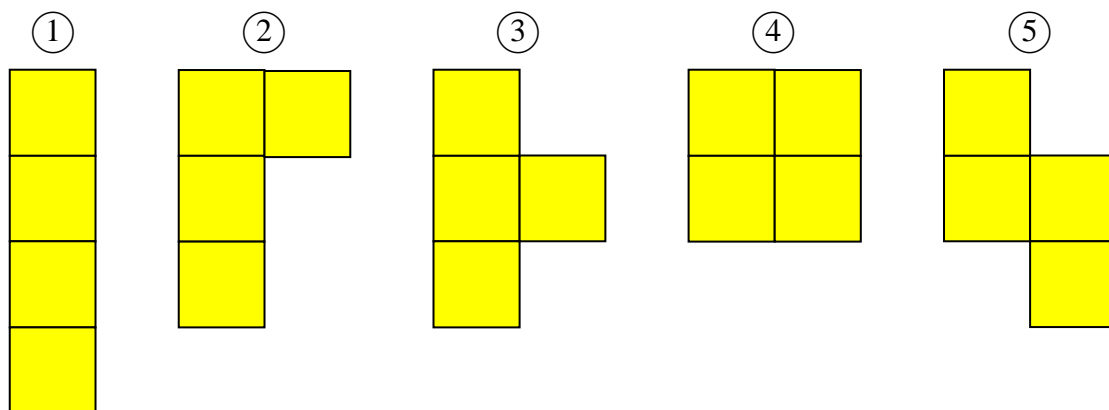
- (1). 使用 1 片方塊能拼出的圖形有一種。
- (2). 使用 2 片方塊能拼出的圖形有一種。
- (3). 使用 3 片方塊能拼出的圖形有二種。

2. 將學生分組

- (1). 每組發給 8 片方塊
- (2). 各組需在 3 分鐘內排出各用 4 片方塊的二種不同圖形
- (3). 將每組的圖型展示在黑板上
- (4). 共同討論各組排出的圖形中有哪些是一樣的
- (5). 再討論還有沒有其它沒被排出來的圖形？

3. 教師提問：「使用 4 片方塊能拼出的不同圖形共有幾種？」

4. 根據學生拼出的結果進行討論，找出重複的圖形，最後整理出 4 片方塊可以拼出的圖形共有以下幾種：



5. 獲得結論：用 4 片方塊可以拼出 5 種不同的圖形。

6. 進行討論：用什麼方法可以比較快的找出所有圖形？
7. 觀察已經拼出的圖形，進行歸納，以找出有效的方式。

例如(教師可視學生表現進行統整)：

- (1). 4片排成一排，有一種圖形。
- (2). 3片排成一排，另外一片可以放在第一格，或是第二格，共二種圖形。

此時教師可提問：為什麼另外一片不能放在第三格？

以引導學生說出：放在第三格的圖形會和放在第一格的圖形一樣。

- (3). 2片排成一排，另外2片並排在旁邊，有從第一格開始，和從第二格開始二種圖形。
- (4). 此時可討論下列問題：

如果另外2片是橫放在旁邊，可不可以？為什麼？

如果第一排只排1片方塊，有沒有不同的形狀出現？為什麼？

8. 每組發給20片方塊，進行討論，找出四種5片方塊拼成的不同圖形。
9. 在學生討論的過程中隨時提醒他們是否出現了重複的圖形。
10. 請各組學生至黑板上展示所有拼出的結果。
11. 將各組學生展示出的圖形中加以整理，讓相同的圖形只留下一

組。

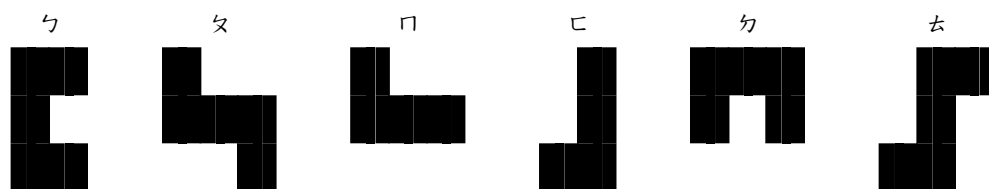
12. 師生共同討論這些圖形可以如何歸類。

13. 5 片方塊應可拼出 12 種不同的圖形，若學生未能將所有圖形找出，可以引導學生根據歸類方式慢慢找出。

指定作業：

習題一

把下列圖形中一樣的找出來：



習題二

用 5 個方塊排出 4 種不一樣的圖形。

指定作業參考解答：

習題一

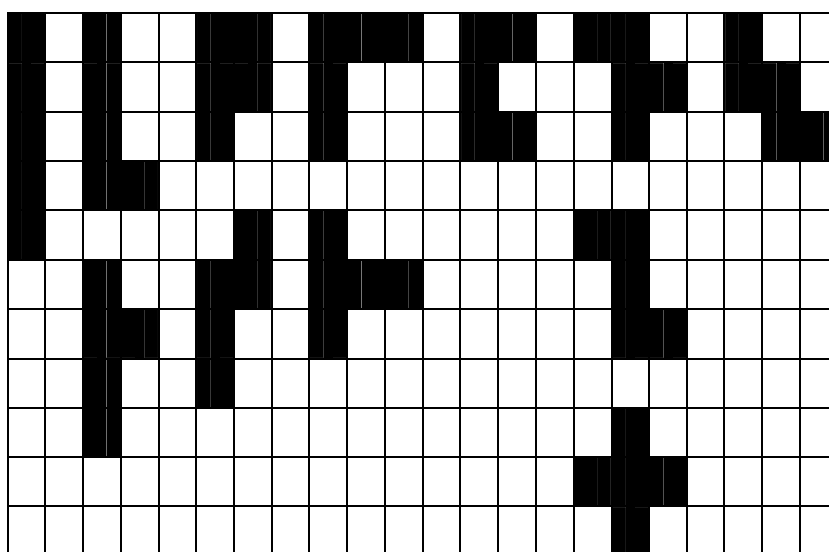
ㄅ和ㄆ、ㄆ和ㄆ、ㄇ和ㄏ

教學注意事項：

1. 平面圖形中的「角」、「邊」等名詞在二年級剛出現，學生對定義及使用未必能很精準，因此教學中無妨使用學生熟悉的方式表達，如：「瘦瘦的」、「直直的」、「只有一點點」……等。
2. 本單元聚焦於圖案的形狀，希望讓學生體會圖形形狀不變的保

留概念及圖形全等的概念，讓學生知道圖形經過旋轉、翻面後，除了方向改變，外形並沒有不同。也就是讓學生明白物體在空間中的位置改變，是不影響它原來的形狀。

3. 五片方塊拼成的圖形稱為五連方塊，五連方塊可以拼成下列 12 種形狀：



4. 教學中無須要求學生將所有五連方塊的圖形完全找出來，僅需將教學重點聚焦於圖形經由平移、旋轉及翻轉後是否相同的辨認。
5. 在活動二的流程 8 中，因考量二年級學生學習能力，在一節課的教學中，若找出更多種不同的圖形時間恐不夠。但教師可視學習情況自行增減。

參考資料：

周筱亭等（民 95）。國小數學教材分析—幾何。三峽：國家教育研究院。

主題 3-2-2：全等與對稱

撰寫者：房昔梅

～線對稱

授課對象：國小五年級學生

先備知識：

認識平面圖形的構成要素與性質。

教學目標：

1. 認識對摺後，摺線兩側會完全疊合的圖形稱為「線對稱圖形」。
2. 認識線對稱圖形中的對稱軸、對應點、對應邊和對應角。
3. 察覺在線對稱圖形中，對稱軸與對應點的連線互相垂直，且對稱軸平分對應點的連線。
4. 給定線對稱圖形的對稱軸及部份圖形，能作出完整的線對稱圖形。

教學時間：40 分鐘(一節課)

教學說明：

1. 建議教師提供的線對稱圖形內部不要有圖案，且以單一顏色為宜，活動一中，發給學生的是等腰三角形圖卡；活動二中，發給學生的是正六邊形圖卡。因為國小階段是透過對摺的方式檢驗圖形是否為線對稱圖形，如果將圖形印在紙張上，學生透過對摺較易判斷紙張是否為對稱圖形，不易判斷紙張上的圖形是否為對稱圖形。
2. 當線對稱圖形的對稱軸超過一條時，教師在溝通對應點、對應

邊或對應角之前，應先與學生溝通好以何者為對稱軸，使討論更明確有效。

3. 教師引導學生以對摺方式認識「線對稱圖形」時，圖形中包含曲線無妨，但在介紹對應點、對應邊和對應角，及給定對稱圖形的對稱軸及部份圖形，要求學生畫出完整線對稱圖形時，應避免出現曲線，以免增加學習的困擾。

教具準備：

- (1) 線對稱圖片。
- (2) 畫有對稱軸及部份圖形的線對稱圖形。
- (3) 三角板及直尺

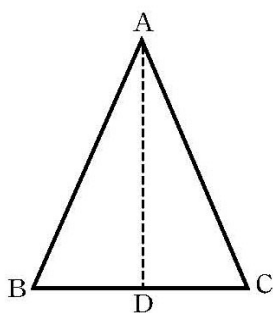
活動一：認識線對稱圖形的對稱軸、對應點、對應邊和對應角

活動目標：(1) 認識線對稱圖形。

- (2) 認識線對稱圖形中的對稱軸、對應點、對應邊和對應角。

活動流程：

1. 教師發給每位學生圖卡一張，請學生將圖卡對摺後打開，並用鉛筆畫出摺痕（如【圖一】）。



【圖一】

2. 教師首先引導學生觀察【圖一】：對摺後，摺線兩側的圖形是否完全疊合？接著命名：像這類對摺後，摺線兩側會完全疊合的圖形，稱為「線對稱圖形」。

3. 教師請學生將對摺後的紙張打開，並且說明：圖形中的這條摺線AD，稱為圖形的「對稱軸」。

4. 教師提問：對摺後，哪兩個點會互相重疊？引導學生回答：對摺後B點和C點會互相重疊。接著教師說明：對摺後會重疊的點稱為「對應點」，B點和C點是對應點。

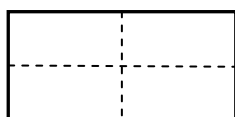
教師說明：對摺後，A點和A點也會互相重疊，所以A點和A點也是對應點。

5. 教師接著提問：對摺後，哪些邊會互相重疊？引導學生回答：對摺後，AB邊和AC邊會互相重疊。接著教師說明：對摺後會互相重疊的邊稱為「對應邊」，AB邊和AC邊是對應邊。

教師說明：對摺後，BD邊和DC也會互相重疊，所以BD邊和DC

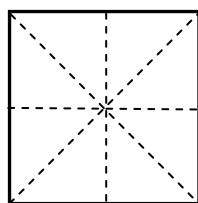
邊也是對應邊。

6. 教師繼續提問：對摺後，哪些角會互相重疊？引導學生回答：對摺後，角 B 和角 C 會互相重疊。教師接著說明：對摺後會互相重疊的角稱為「對應角」；角 B 和角 C 是對應角。
7. 教師發給每位學生一張長方形紙，請學生分別以長寬對摺後打開，再用筆畫出摺痕（如【圖二】）。引導學生察覺：長方形有二條對稱軸。



【圖二】

8. 教師再發給每位學生一張正方形色紙，請學生分別以邊長及對角對摺後打開，畫出摺痕（如【圖三】）。引導學生察覺：正方形有四條對稱軸。



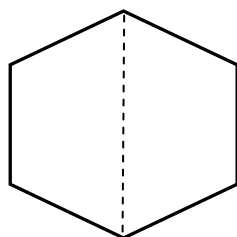
【圖三】

活動二：認識線對稱圖形中，對稱軸會垂直平分對應點的連線

活動目標：透過測量，察覺線對稱圖形中，對稱軸會垂直平分對應點的連線。

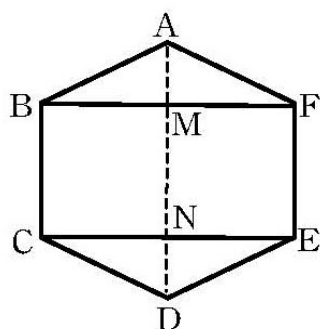
活動流程：

1. 教師發給每位學生圖卡一張，請學生對摺後打開（如【圖四】）。



【圖四】

2. 請學生拿出鉛筆和直尺，畫出對應點的連線，及對應點的連線與對稱軸的交點（如【圖五】）。



【圖五】

3. 教師請學生拿出三角板檢查對稱軸和對應點的連線是否垂直。
- 4 教師再請學生檢查對稱軸是否平分對應點的連線。
5. 教師歸納結論：在線對稱的圖形中，對稱軸與對應點的連線互相垂直，且對稱軸會平分對應點的連線。如【圖五】中：AD 垂直 BF 和 CE，同時 BM 和 FM 等長、CN 和 EN 等長。

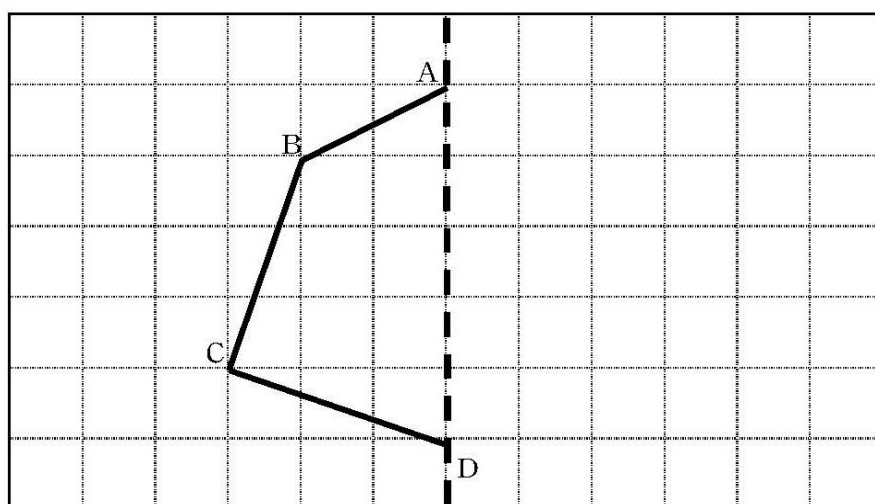
活動三：繪製線對稱圖形

活動目標：已知線對稱圖形的對稱軸及圖形的部份，畫出完整的線對稱圖形。

活動流程：

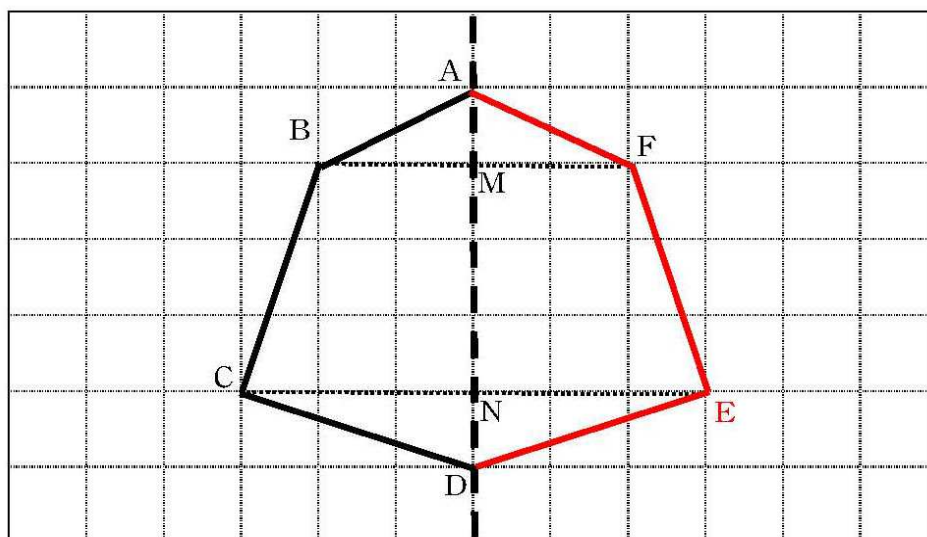
1. 教師發給每位學生圖卡一張（如【圖六】），並說明：

這是一個線對稱圖形，虛線部份是對稱軸。現在圖形少了一部份，有什麼方法可以完成這個圖形呢？想一想，該從哪裡開始畫？引導學生思考：只要找出圖形中各轉折點的對應點，再把這些點連起來就可以畫出完整的線對稱圖形（如【圖七】）



【圖六】

2. 教師接著提問：該怎麼找出各轉折點的對應點呢？引導學生思考：由轉折點作出垂直於對稱軸的線，並量出長度，再延長這條線至對稱軸的一側，量出同樣的長度，就可以確定該轉折點的對應點位置。



【圖七】

3. 教師以圖七為例作說明：先找出轉折點 B，由 B 點作出垂直於對稱軸的線，確定長度為 2 個格線後，將線延長至對稱軸另一側的 2 個格線位置，就可以確定 B 點的對應點 F 點的位置。再用同樣的方法找出轉折點 C 的對應點 E，最後將這些轉折點連起來，就可以畫出完整的線對稱圖形。

4. 教師提問：怎麼知道畫出來的圖形對不對呢？如果學生回答：只要將圖形對摺檢查，確認對應點、對應邊和對應角是不是完全疊合，就可以確定圖形是不是線對稱圖形。教師追問：假設圖形在黑板上，或牆上，不方便對摺檢查時，還有其他方法可以檢查嗎？

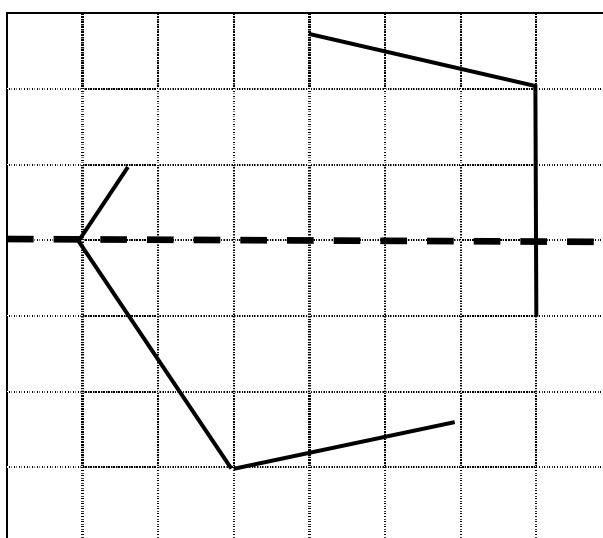
引導學生回答：可以用三角板檢查對稱軸和對應點的連線是否垂直，以及對應點的連線是不是被對稱軸平分。

例如：AD 是否與 BF 互相垂直；AD 是否與 CE 垂直；BM 和 MF

是否等長，以及 CN 和 NE 是否等長。

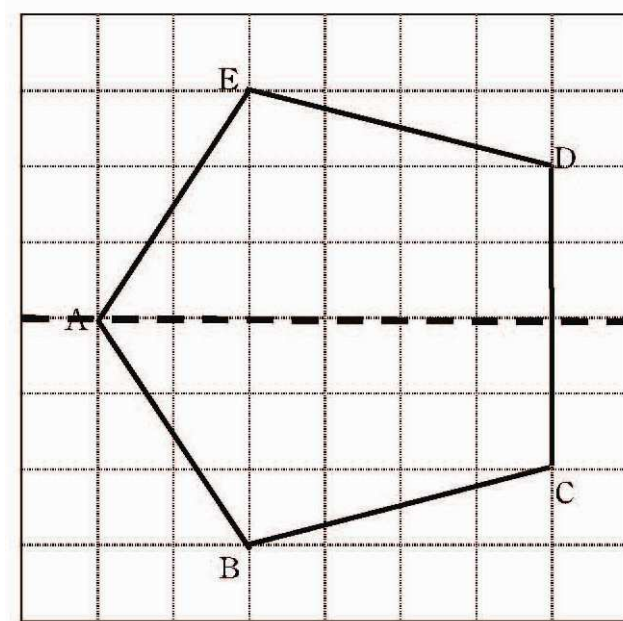
5. 教師發給學生另一張圖卡（如圖八），並重新布題：

圖中是一個已經標示了對稱軸的線對稱圖形，但是圖形缺少了一部份，有什麼方法可以完成這個圖形呢？說說看！



【圖八】

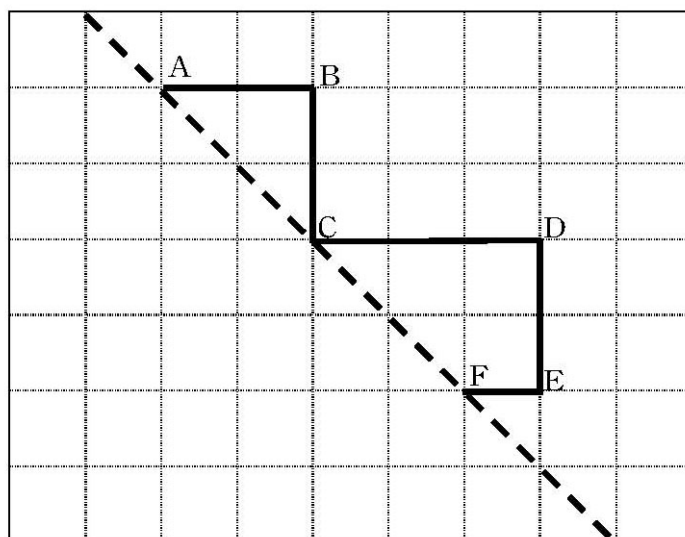
6. 引導學生察覺：圖形中對稱軸的兩側各有一個明確的轉折點，只要分別找出這兩個轉折點的對應點，再把各轉折點連起來，就可以畫出完整的線對稱圖形（如圖九）。



【圖九】

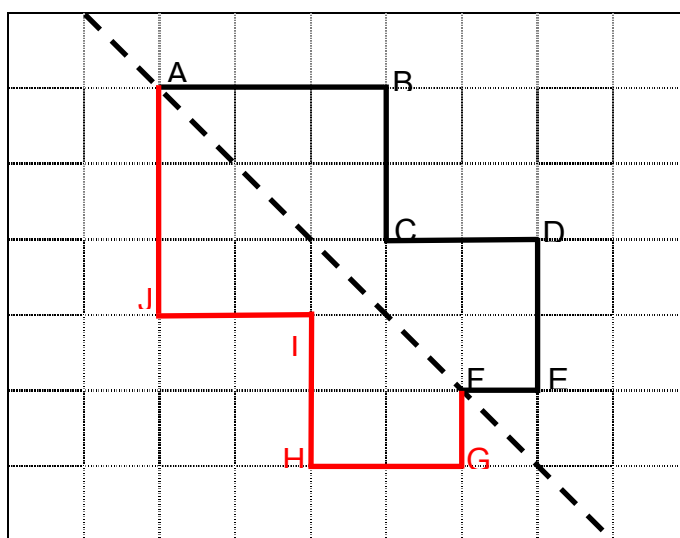
教師可以引導學生將各轉折點標上代號後再說明。以圖九為例：
先仿上題，找出 B 點的對應點 E，再找出 D 點的對應點 C，將
各轉折點連接起來，就可以畫出完整的線對稱圖形。

7. 教師發給每位學生第三張圖卡（如圖十），並提問：這是一個線對稱圖形，虛線為對稱軸。這個圖形缺少了一部份，想一想，可以怎樣完成這個線對稱圖形呢？說說看！



【圖十】

8. 教師提示：想一想，應該從哪裡開始畫？學生回答：由於 A 點和 F 點正好在對稱軸上，所以只要找出 B 點、C 點、D 點和 E 點的對應點，再把找出來的各點連接起來，就可以畫出完整的線對稱圖形（如圖十一）。



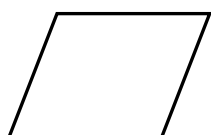
【圖十一】

指定作業：

習題一（配合活動一）

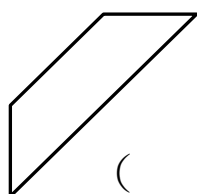
下列圖形中，哪些是線對稱圖形？在（ ）中打「✓」。

(1)



()

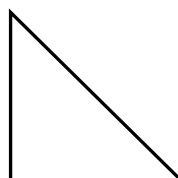
(2)



()

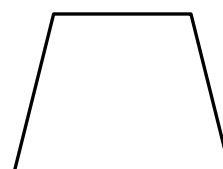
()

(3)



()

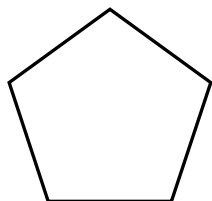
(4)



習題二（配合活動一）

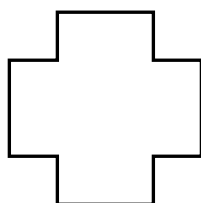
畫出下列線對稱圖形中的對稱軸，並寫出對稱軸的數量。

(1)



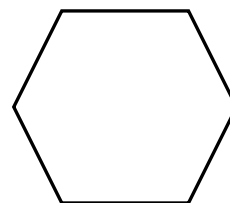
() 條

(2)



() 條

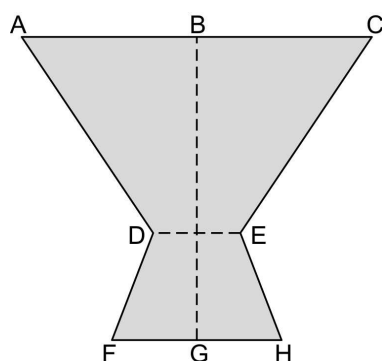
(3)



() 條

習題三（配合活動二）

1. 看圖回答問題：



- (1) 點 C 的對稱點是點 ()。
- (2) 邊 AD 的對稱邊是邊 ()。
- (3) 線段 FG 和線段 () 等長。
- (4) 線段 DF 和線段 () 等長。
- (5) 對稱軸是線段 ()。
- (6) 線段 AB 和線段 () 等長。

2. 完成下面表格

特性 \ 形體	是否為線對稱圖形	有幾條對稱軸
①正三角形		
②平行四邊形		
③菱形		
④長方形		
⑤正方形		
⑥等腰梯形		

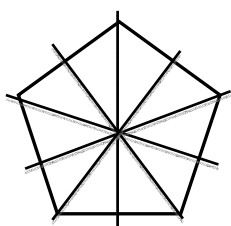
指定作業解答：

習題一（配合活動一）

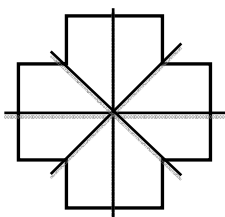
(2) (3) (4)

習題二（配合活動一）

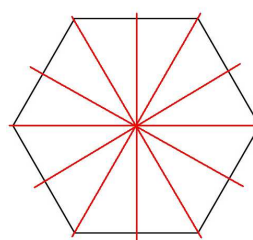
(1) 5 條



(2) 4 條



(3) 6 條



習題三（配合活動二）

1. 看圖回答問題：

(1) A (2) C E (3) H G (4) E H (5) B G (6) C B

2. 完成下面表格

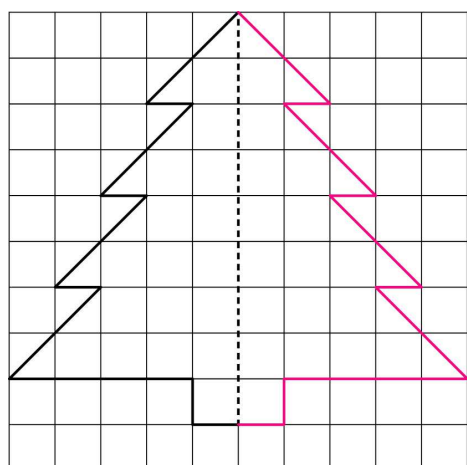
- ① 是，3 條；
- ② 不是，0 條；
- ③ 是，2 條；
- ④ 是，2 條；
- ⑤ 是，4 條；
- ⑥ 是，1 條

習題四（配合活動三）

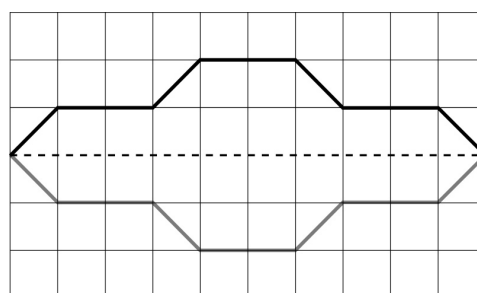
畫出下列線對稱圖形的另一半：

(1)

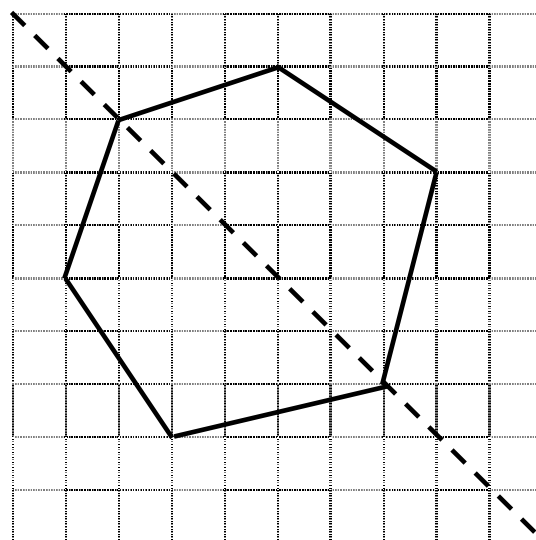
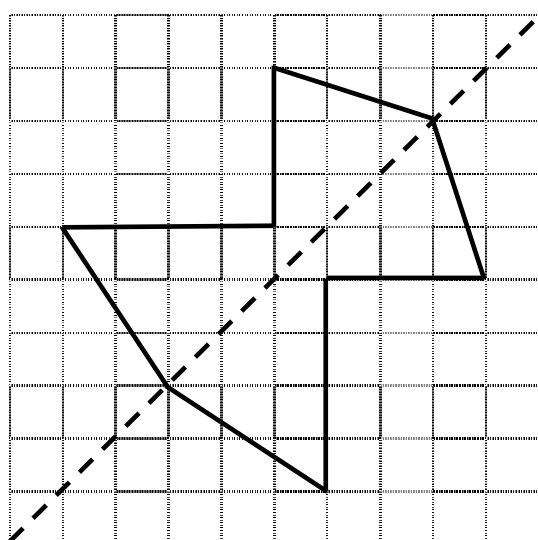
(2)



(3)



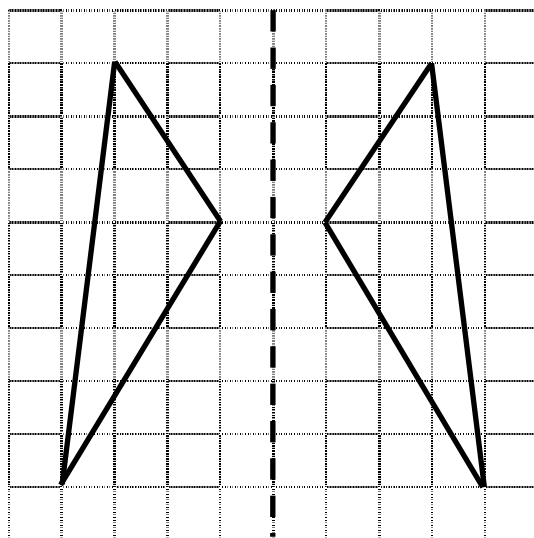
(4)



教學注意事項：

1. 本單元討論的線對稱圖形以簡單的幾何平面圖形為主，並不包括圓形。因為圖形中的每一條直徑都是對稱軸，很難讓學生了解：圓形有「無限多條對稱軸」的概念，因此若有學生問起，只要說明：圓形有很多條對稱軸，簡單帶過即可，不宜深入討論。

2. 本單元討論的是「一個圖形」的對稱，因此，不宜出現對稱軸兩側各有一圖形，且不依附在對稱軸中的情形，(如圖十二)：



【圖十二】

教學參考資料：

周筱亭等(民95)。國小數學教材分析—幾何。三峽：國家教育研究院。

主題 3-2-3：相似

撰寫者：房昔梅

～放大圖、縮小圖與比例尺

授課對象：國小五年級學生

先備知識：認識全等圖形。

教學目標：

1. 能依據兩圖形對應邊是否成比例且對應角是否相等的關係，判斷兩圖形是否互為放大、縮小圖。
2. 能夠繪製給定圖形的放大及縮小圖。
3. 認識不同表示方法的比例尺。
4. 能夠依據地圖上的比例尺，透過量出地圖上甲、乙兩點間的長度，計算出甲、乙兩地實際的距離；也能透過已知甲、乙兩地的距離，計算出地圖上甲、乙兩點間的長度。


教學時間：80 分鐘(二節課)

教學說明：

1. 活動一的重點是透過影印機將圖形放大二倍（或縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍）後，察覺圖形中所有邊長都放大2倍（或縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍），且各對應角都相等的過程，認識放大及縮小圖。
2. 學生在方格紙上製作放大或縮小圖時，對於成水平或鉛垂的邊長，比較容易掌握；若邊長不是水平或鉛垂線，較容易產生角度的偏差。因此建議教師在指導作圖時，先由鉛垂和水平的邊

長著手，較不易發生錯誤。同時，在作圖完成後，應指導學生用尺和量角器作檢查，確認圖形是否正確。

3. 比例尺的作用是溝通地圖上的長度和實際距離的關係。常見用

圖表示不同單位的放大縮小關係，如：
或用比和比值表示，例如：「 $\frac{1}{10000} : 1$ 」、「 $\frac{1}{10000}$ 」。

這些都表示地圖上1公分的長度，相當於實際距離100公尺或10000公分。

4. 無論以比或比值表示比例尺，教師都應指導學生掌握「以基準量作為比的後項」的原則。說法則為：實際範圍是地圖的10000倍放大圖，而地圖是實際範圍的 $\frac{1}{10000}$ 倍縮小圖。

教具準備：

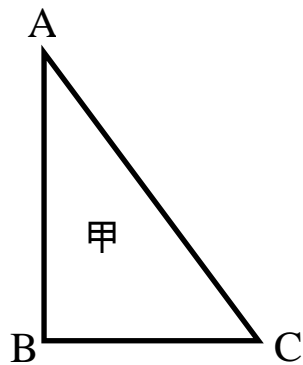
- (1) 方格紙。
- (2) 大型地圖。
- (3) 鉛筆、橡皮擦、直尺、量角器（每位學生一份）。

活動一：認識放大縮小圖

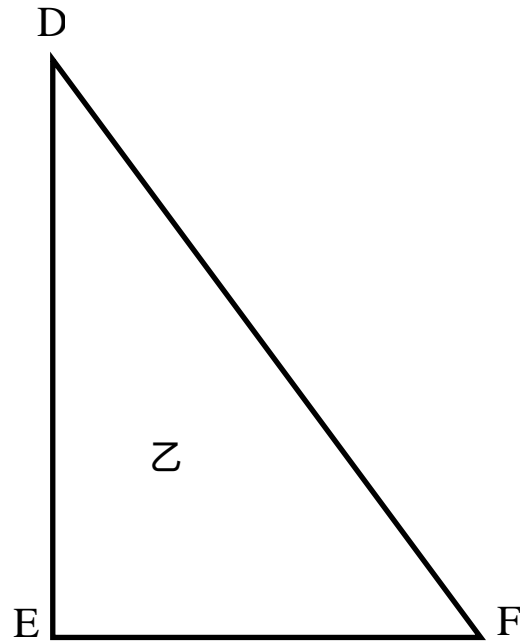
活動目標：引導學生認識「對應邊長成比例」及「對應角相等」的二個圖形，互為放大和縮小圖。

活動流程：

1. 教師出示甲圖和乙圖，見【圖一】和【圖二】並提問：老師用影印機把甲圖放大成乙圖。拿出量角器和直尺量一量，完成下面的表格。並說說看：你發現了什麼？



【圖一】



【圖二】

角度	角A	角B	角C
度	30度	90度	60度

角度	角D	角E	角F
角	30度	90度	60度

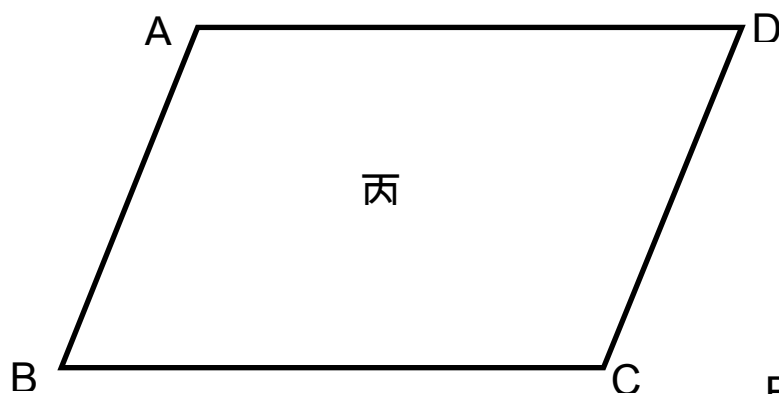
邊長	邊AB	邊BC	邊AC
公分	4公分	3公分	5公分

邊長	邊DE	邊EF	邊DF
公分	8公分	6公分	10公分

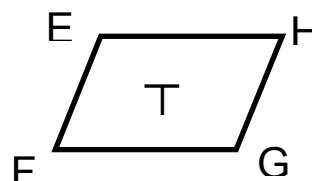
2. 引導學生回答：角A=角D，角B=角E，角C=角F。邊DE的長是邊AB的2倍，邊EF的長是邊BC的2倍，邊DF的長是邊AC的2倍。

3. 教師繼續出示丙圖和丁圖，見【圖三】和【圖四】並提問：

老師用影印機把丙圖縮小成丁圖，拿出量角器和直尺量一量，完成下面的表格。並說說看：你發現了什麼？



【圖三】



【圖四】

角度	角A	角B	角C	角D
度				

角度	角E	角F	角G	角H
度				

邊長	邊AB	邊BC	邊CD	邊DA
----	-----	-----	-----	-----

邊長	邊EF	邊FG	邊GH	邊HE
----	-----	-----	-----	-----

4. 引導學生回答：角A=角E，角B=角F，角C=角G，角D=角H。

邊EF的長是邊AB的 $\frac{1}{3}$ 倍，邊FG的長是邊BC的 $\frac{1}{3}$ 倍，邊GH的長是邊CD的 $\frac{1}{3}$ 倍，邊HE的長是邊DA的 $\frac{1}{3}$ 倍。

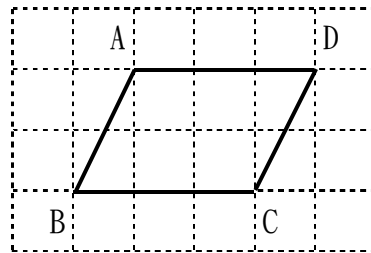
3. 教師歸納結論：在甲、乙兩個圖形中，對應角都相等，乙圖的對應邊長都是甲圖的2倍，我們稱乙圖是甲圖的「2倍放大圖」。在丙、丁兩個圖形中，對應角都相等，丁圖的對應邊長都是丙圖的 $\frac{1}{3}$ 倍，我們稱丁圖是丙圖的「 $\frac{1}{3}$ 倍縮小圖」。

活動二：繪製放大和縮小圖。

活動目標：依圖形邊長的比例關係，繪製放大和縮小圖。

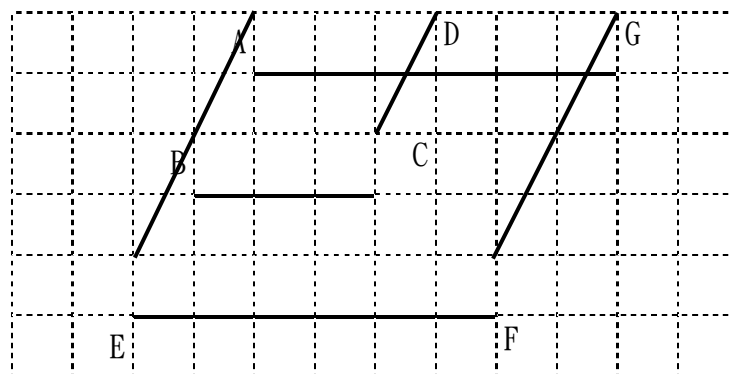
活動流程：

1. 教師布題：在方格紙上，畫出【圖五】的2倍放大圖



【圖五】

2. 引導學生回答：先在方格紙上，作出 AE 邊是 AB 邊的 2 倍，EF 邊是 AD 邊的 2 倍，接著過 E 點畫出和 BC 平行的直線，過 F 點畫出和 DC 平行的直線，兩線相交於 G，得到四邊形 AEFG 就是【圖五】的 2 倍放大圖，見【圖六】。



【圖六】

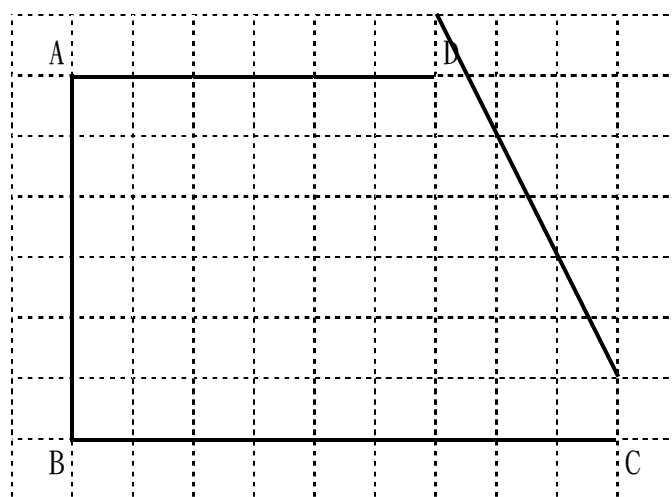
3. 教師提問：要怎麼確認畫出來的圖是不是正確呢？引導學生回

答：可以用尺量乙圖的邊長，確定是不是甲圖各邊長的 2 倍。

並且拿量角器，量乙圖和甲圖的對應角，確定是不是一樣大。

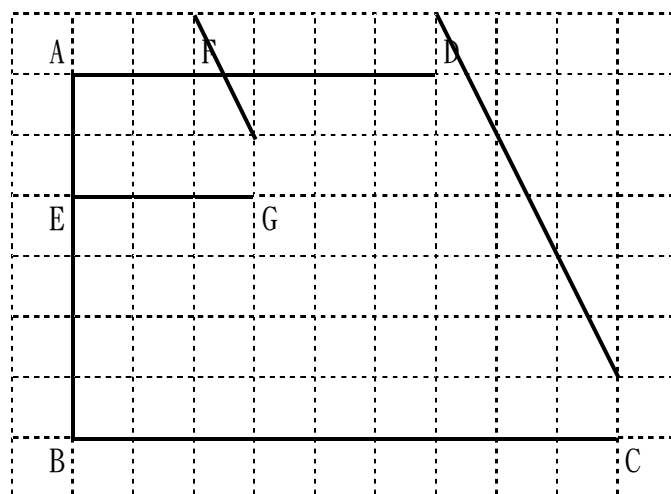
4. 教師歸納：只要檢查乙圖和甲圖對應邊長的比是否都是 2:1，以及對應角的角度是否相等，就可以確認畫出來的是不是正確的 2 倍放大圖。

5. 教師布題：怎樣可以畫出【圖七】中梯形 ABCD 的 $\frac{1}{3}$ 倍縮小圖？



【圖七】

引導學生回答：先作出 AE 邊是 AB 邊的 $\frac{1}{3}$ 倍，AF 邊是 AD 邊的 $\frac{1}{3}$ 倍，EG 邊是 BC 邊的 $\frac{1}{3}$ 倍，再把 FG 連起來，得到的梯形 AEGF 就是梯形 ABCD 的 $\frac{1}{3}$ 倍縮小圖，如【圖八】。



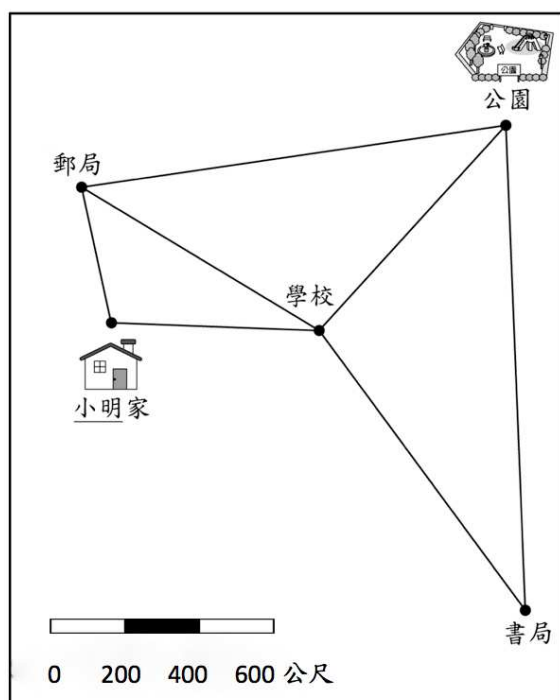
【圖八】

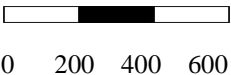
活動三：認識比例尺。

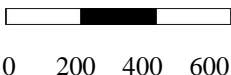
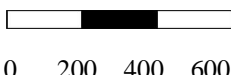
活動目標：認識比例尺的表示方式及其意義。

活動流程：

1. 下面是學校附近的平面圖。

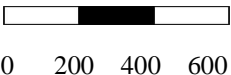


有的地圖用  表示地圖上的長度和實際距離的關係；有的地圖用「1：20000」或「 $\frac{1}{20000}$ 」來表示地圖上的長度和實際距離的關係。說說看：這三種記法，表示的意思一樣嗎？

2. 引導學生回答： 表示地圖上的 1 公分是實際距離的 200 公尺，用比的方式可以記成「1 公分：200 公尺」。地圖上的 1 公分是實際距離的 200 公尺，也可以說地圖上的 1 公分是實際距離的 20000 公分，也可以記成「1 公分：20000 公分」，所以  和「1：20000」的意思是一樣的。而「1：20000」的比值是「 $\frac{1}{20000}$ 」，因此我知道：這三種記法代表相同的比例關係。

3. 教師說明： 也可以畫成  公尺

4. 教師布題：學校到書局，地圖上長 6 公分，實際的距離是多少公尺？

學生甲：由  我知道地圖上的 1 公分代表實際距離 200 公尺，所以地圖上 6 公分的長度就是實際距離 1200 公尺。

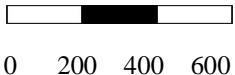
$$1 \text{ 公分} : 200 \text{ 公尺} = 6 \text{ 公分} : 1200 \text{ 公尺}$$

學生乙：因為 $1 : 20000 = 6 : 120000$ ，所以我知道地圖上的 6

公分等於實際距離 120000 公分，也就是 1200 公尺。

學生丙：由比值 $\frac{1}{20000} = \frac{6}{(\quad)}$ ，可以算出括號是 120000 公分，也就是 1200 公尺。

5. 教師重新布題：小明騎車從家裡出發到運動中心，一共騎了 2500 公尺，在上面那張地圖上的長度是幾公分？

學生甲：由  我知道地圖上的 1 公分代表實際距離 200 公尺；所以實際距離 2500 公尺，在地圖上是 $2500 \div 200 = 12.5$ （公分）。

$$1 \text{ 公分} : 200 \text{ 公尺} = 12.5 \text{ 公分} : 2500 \text{ 公尺}$$

學生乙：我把 2500 公尺想成 250000 公分，由比例尺「1 : 20000」，
 $1 : 20000 = (\quad) : 250000$ ， $250000 \div 20000 = 12.5$
 我知道實際 2500 公尺的距離，在地圖上是 12.5 公分。

學生丙：我也是把 2500 公尺想成 250000 公分，由比例尺「 $\frac{1}{20000}$ 」，
 $250000 \times \frac{1}{20000} = 12.5$ ，我知道實際 2500 公尺的距離，
 在地圖上是 12.5 公分。

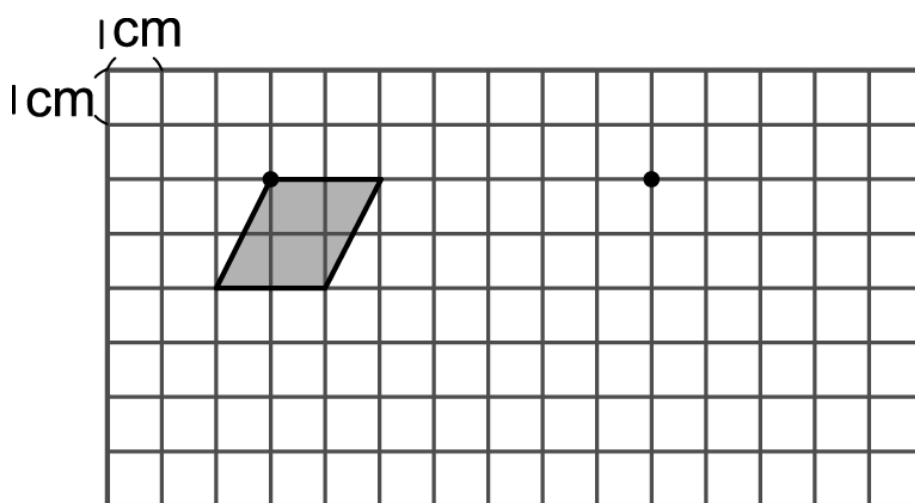
6. 教師布題：比例尺  1500 公尺 用比和比值表示，各是多少？

引導學生回答： 2 公分 : 1500 公尺
 $= 1 \text{ 公分} : 750 \text{ 公尺}$
 $= 1 \text{ 公分} : 75000 \text{ 公分}$

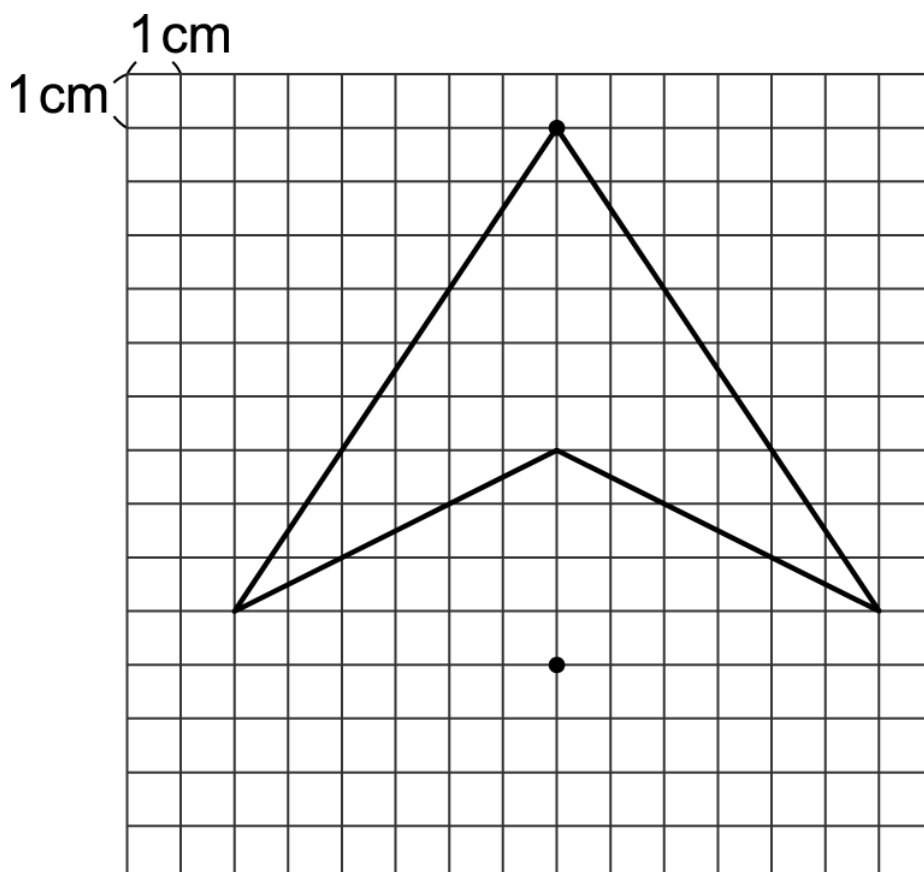
所以，用比的方式可以記成「1 : 75000」，比值是「 $\frac{1}{75000}$ 」

指定作業：

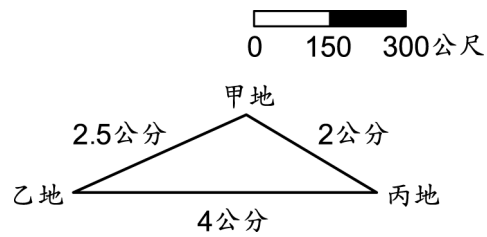
一、畫出圖形的2倍放大圖（配合活動一）



二、畫出圖形的 $\frac{1}{3}$ 倍縮小圖（配合活動一）

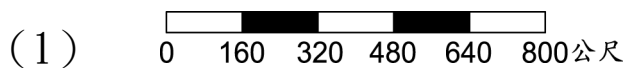


三、下圖是甲、乙、丙三地的平面圖：

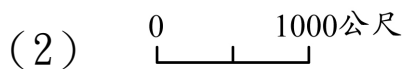


- (1) 地圖上長 1 公分，代表實際的距離是 () 公尺。
- (2) 它是實際長度的 () 倍縮小圖。
- (3) 從甲地到乙地的實際距離是 () 公尺；
 乙地到丙地的實際距離是 () 公尺；
 甲地到丙地的實際距離是 () 公尺。

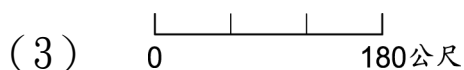
四、把下列比例尺用比和比值的方式表示：（配合活動二）



比：() 比值：()



比：() 比值：()



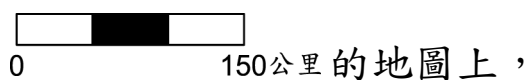
比：() 比值：()



比：() 比值：()

五、在比例尺 $0 \frac{\quad}{\quad} 100$ 公里的地圖上，甲、乙兩地間的長度是 4.5 公分。甲、乙兩地的實際距離是幾公里？（配合活動二）

六、丙、丁兩地的實際距離是 650 公里，在比例尺



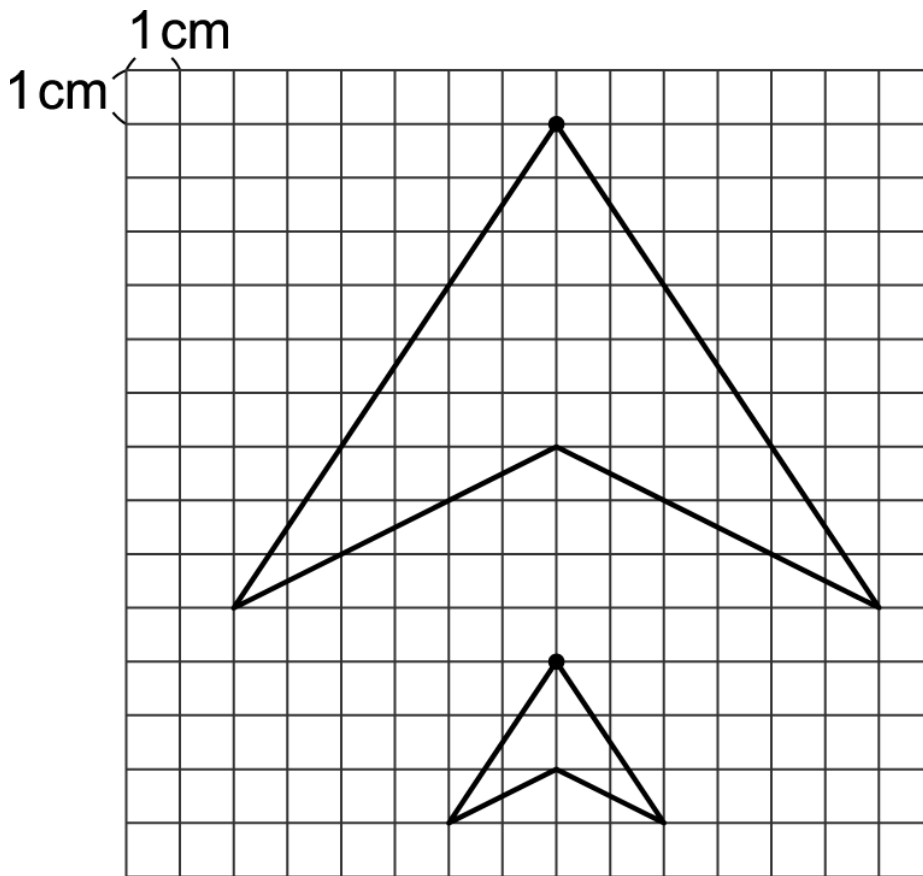
丙、丁兩點間的長度是幾公分？（配合活動二）

指定作業解答：

一、畫出圖形的2倍放大圖（配合活動一）



二、畫出圖形的 $\frac{1}{3}$ 倍縮小圖（配合活動一）



三、(1) 150 ; (2) $\frac{1}{15000}$; (3) 375 ; 600 ; 300

四、(1) 比 : (1 : 16000) 比值 : ($\frac{1}{16000}$)

(2) 比 : (1 : 50000) 比值 : ($\frac{1}{50000}$)

(3) 比 : (1 : 6000) 比值 : ($\frac{1}{6000}$)

(4) 比 : (1 : 500000) 比值 : ($\frac{1}{500000}$)

五、225 公里

六、13 公分

教學注意事項：

1. 一般的室內裝潢設計圖，因為未標明各區域的名稱，且難以溝通點與點之間的距離，因此並不適合比例尺的教學。
2. 教師可以提供教室的實際長寬，並請學生實測出教師及學生用的課桌椅尺寸，引導學生分組合作設計教室內課桌椅的排列方式。
3. 活動二使用的地圖，並非學生熟悉，建議教師可以選擇當地的地圖作為教材，較符合學生的生活經驗，學生對於實際距離也會比較有感覺。

教學參考資料：

周筱亭等（民95）。國小數學教材分析一比（含線段圖）。三峽：國家教育研究院。

第四章：立體圖形

撰寫者：謝堅

主題 4-1：柱體

空間中兩個全等且互相平行的封閉平面區域，以及在全等關係下，連接這兩個平面區域周界對應點的所有直線段，它們所圍成的形體稱為柱體。其中全等且互相平行的兩個封閉平面區域稱為柱體的底，底依擺放的位置區分為上底及下底，底以外的其餘表面稱為柱體的側面。

柱體以其底面的形狀來命名，如果其底面是多邊形區域，則稱為角柱，如果其底面是圓區域，則稱為圓柱，在柱體的教材中，理念篇只簡單的討論角柱及圓柱，分別說明如下。

4-1-1：角柱：

認知及數學結構：

(一) 正方體及長方體

日常生活中最常見的柱體是正方體、長方體及圓柱，因此，國小階段先引入正方體及長方體，最後才引入柱體，並將正方體與長方體視為四角柱的一種。

(1) 正方體：

正方體是空心的，它是由六個全等的正方形所圍成，正方體可以將空間分割成正方體、正方體內部及正方體外部三個部份。討論正方體的體積時，討論的對象是正方體及正方體內

部合起來的區域；討論正方體的展開圖時，討論的對象是正方體，正方體的展開圖也是由六個全等的正方形所組成，展開圖並不是剝皮圖，剝皮之後還剩下正方體的內部，將正方體展開後，並沒有剩下任何東西。

(2)長方體：

長方體也是空心的，它是由三組全等的長方形所圍成。長方體相鄰的面互相垂直，相對的面互相平行。

(二)直角柱及斜角柱

數學上透過角柱底面多邊形的形狀來命名角柱，底面是 n 邊形區域的柱體稱為 n 角柱，例如底面是三邊形區域的柱體稱為三角柱，底面是六邊形區域的柱體稱為六角柱。

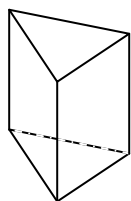
角柱可以區分為直角柱及斜角柱二類，而正角柱是底面為正多邊形的直角柱，分別說明如下：

直角柱：角柱的側面和上底及下底垂直，稱該角柱為直角柱，直角柱的側面是長方形。如果直角柱的上底和下底是正多邊形，稱這些直角柱為正角柱。

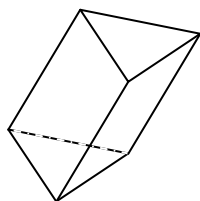
斜角柱：角柱的側面和上底及下底不垂直，稱該角柱為斜角柱，斜角柱的側面是平行四邊形(不是長方形)。

下面的【圖一】、【圖二】、【圖三】都是三角柱，其中【圖一】是直三角柱、【圖二】是斜三角柱、【圖三】是正三角柱。在國小

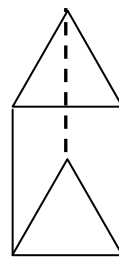
階段討論的對象都是直角柱，並不討論斜角柱，因此國小幾何教材將直角柱稱為角柱。



【圖一】



【圖二】



【圖三】

(三)角柱的教學

國小一至五年級角柱討論的對象是正方體及長方體，一至三年級的教學重點是認識角柱的構成要素頂點、邊及面，並能點數它們的個數；四、五年級的教學重點是認識邊與面的性質以及關係，以正方體為例，學童知道正方體有六個全等的面，以及12條等長的邊，相鄰的面都互相垂直，相對的面都互相平行；學童也能算出正方體的體積、表面積及邊長的和。

六年級開始擴充討論的範圍，開始引入角柱，角柱的教學重點不只是認識角柱的構成要素頂點、邊、面，以及知道上、下底，側面等名詞，學童還要察覺構成要素之間的關係，建議教師教學時應幫助學生察覺下列的性質。

(1)察覺上、下兩底的性質及對應的關係

1. 上、下兩個底面是全等的多邊形區域

2. 上、下兩個底的周界所對應的邊互相平行
3. 上、下兩個底面互相平行

(2) 察覺側面的性質及對應的關係

1. 側面都是長方形區域
2. 側面的邊(上、下底對應點的連線)的長度都等長
3. 側面的邊，分別垂直於上、下兩個底面
4. 側面的邊都互相平行
5. 側面和上底及下底都互相垂直。

4-1-2：圓柱

認知及數學結構：

(一)直圓柱及斜圓柱

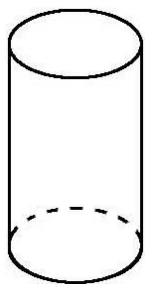
數學上透過角柱底面多邊形的形狀來命名，類比角柱的命名方式，底為圓區域的柱體稱為圓柱。

可以將圓柱區分為直圓柱和斜圓柱兩類，因為可以將圓視為邊數 n 趨近於無限大的正 n 邊形，因此沒有引入正圓柱名稱的需求，分別說明如下：

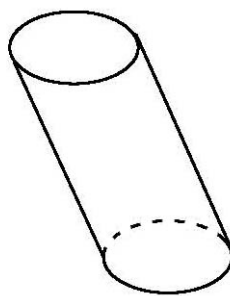
直圓柱：上、下兩個底面圓心的連線垂直於兩個底面，稱該圓柱為直圓柱。

斜圓柱：上、下兩個底面圓心的連線不垂直於兩個底面，稱該圓柱為斜圓柱。

下面的【圖四】是直圓柱，【圖五】是斜圓柱。國小階段討論的對象都是直圓柱，並不討論斜圓柱，因此國小幾何教材將直圓柱稱為圓柱。



【圖四】



【圖五】

(二)圓柱的教學

國小低年級就引入圓柱，此時的教學重點是認識圓柱，並不討論圓柱的構成要素，也不討論構成要素間的關係；高年級再次引入圓柱，此時的教學重點不只是認識圓柱的構成要素，以及知道上、下底，側面等名詞，學童還要察覺構成要素之間的關係，建議教師教學時應幫助學生察覺下列的性質。

(1)察覺上、下兩底的性質及對應的關係

1. 上、下兩個底面是全等的圓區域
2. 上、下兩個底面互相平行
3. 上、下兩個底面圓心的連線垂直於兩個底面

(2)察覺側面的性質及對應的關係

1. 側面上，同時垂直於上、下兩個底面的線段都等長
2. 側面上，同時垂直於上、下兩個底面的線段都平行

國小階段不討論曲面和平面的垂直關係，因此不討論側面和上下兩個底面互相垂直的關係。

(3)察覺圓柱和圓柱展開圖的關係

1. 切割側面的直線和底面垂直時，展開圖是長方形；切割側面的直線和底面不垂直時，展開圖是平行四邊形。
2. 側面展開圖的長邊(長方形)或底邊(平行四邊形)是底面圓區域的圓周，寬邊(長方形)或高(平行四邊形)是上、下兩

個底面的距離。

國小階段不討論兩平行平面的距離，可以利用「同時垂直於上、下兩個底面的線段」來替代。

主題 4-2：錐體

空間中一個封閉的平面區域，以及不在此平面區域上的一個點，連接此給定的點與平面區域周界上任意點的所有直線段，所圍成的形體稱為錐體。決定此錐體的平面圖形稱為錐體的底，底面外的那一個給定點，稱為錐體的頂點，底面以外的錐體表面，稱為錐體的側面。

錐體也以底面的形狀來命名，如果其底面是多邊形的區域，則稱為角錐，如果其底面是圓區域，則稱為圓錐，在錐體的教材中，理念篇只簡單的討論角錐及圓錐，分別說明如下。

4-2-1：角錐

認知及數學結構：

數學上透過底面多邊形區域的形狀來命名角錐，底面是 n 邊形區域的錐體稱為 n 角錐，例如底面是三角形區域的錐體稱為三角錐，底面是五邊形區域的錐體稱為五角錐。

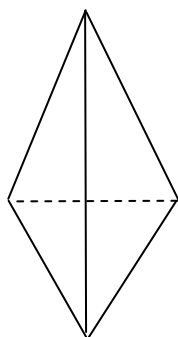
數學上無法仿角柱的方類方式，將角錐區分成直角錐和斜角錐兩類。數學上只有討論角錐和正角錐，其中正角錐是滿足特定條件的角錐，分別說明如下：

正角錐：因為正多邊形內切圓圓心及外接圓的圓心共點，因此將底面是正多邊形區域，其側面都是等腰三角形區域，而

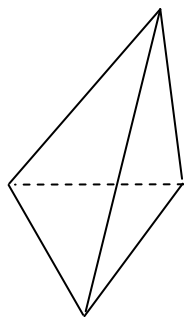
頂點到底面正多邊形外接圓(內切圓)圓心的連線和底面垂直的角錐，稱為正角錐。

角錐：不是正角錐的角錐，都稱為角錐。

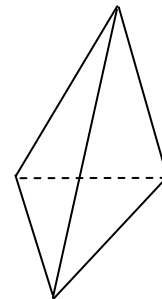
下面的【圖六】、【圖七】、【圖八】都是三角錐，【圖六】中三角錐的底面是正三角形區域，其側面都是等腰三角形區域，而頂點到底面正三角形外接圓圓心的連線一定會和底面垂直，一般稱這種角錐為正角錐。【圖七】中三角錐的底面也是正三角形區域，其側面不是等腰三角形區域，而頂點到底面正三角形外接圓圓心的連線不會和底面垂直，【圖八】中三角錐的底面是三邊都不等長的三角形區域，側面都不是等腰三角形區域。



【圖六】



【圖七】



【圖八】

國小數學課程所討論的錐體都是正角錐，其底面都是正多邊形區域，而頂點到底面正多邊形外接圓圓心的連線都會和底面垂直。

如果教材只討論角錐的一般性質，並不刻意的區分正角錐或

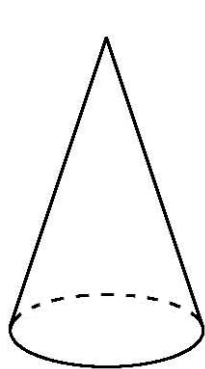
斜角錐，「錐體的側邊都是三角形」，「錐體的側邊都交於同一點」，上述這些性質都是角錐的特徵。如果教材只討論正角錐的一般性質，「錐體的側邊都是等腰三角形」，「錐體的側邊都交於同一點」，上述這些性質都是正角錐的特徵，當學童進行完角錐的各種活動後，應該要察覺到這些性質。

一個三角錐有 4 個頂點，其中不在底面上的那一個頂點，是決定錐體的頂點，而底面三角形區域的三個頂點，是形成角錐後產生的頂點，國小學童並不討論角錐是如何產生的，只討論給定的角錐有哪些性質，因此國小教材定義尖尖的點就是角錐的頂點，將這四個點都稱為頂點，並不區分這些頂點不同的意義。

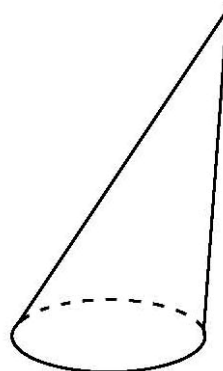
4-2-2：圓錐

認知及數學結構：

底面為圓形的錐體稱之為圓錐，和圓柱一樣，圓錐也可以區分為直圓錐和斜圓錐兩類，下面的【圖九】是直圓錐，【圖十】是斜圓錐，直圓錐頂點到底面圓心的連線會垂直於底面，而斜圓錐頂點到底面圓心的連線不會垂直於底面，多數國小教材只討論直圓錐，並稱直圓錐為圓錐。



【圖九】



【圖十】

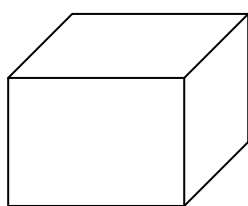
主題 4-3：視圖、透視圖與展開圖

4-3-1：視圖與透視圖

認知及數學結構：

(一)視圖

直觀的說，眼睛看到的立體圖形，或照相機照出來的立體圖形就是視圖，【圖十一】是一個長方體的視圖，在視圖中，我們只能看到 3 個面，9 條邊以及 7 個頂點。



【圖十一】

為了幫助學生實測日常生活中幾何形體的面積或體積，部份教師常畫出沒有數據的幾何圖形，例如畫出三角形，或畫出長方體的視圖，要求學生自己找出三角形的底邊及對應高，或找出長方體的長邊、寬邊和高邊，先實測它們的長度，再代入三角形面積公式算出其面積，或代入長方體體積公式算出其體積。

平面上畫出的平面圖形不會失真，教師要求學生透過實測平面圖形邊的長度，計算畫出平面圖形的面積是合理的命題。但是

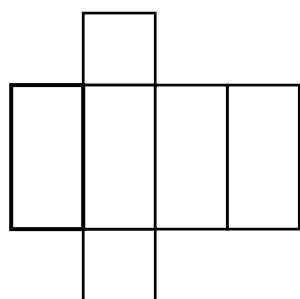
在平面上畫立體的視圖，畫出的立體視圖中，部份的長度及角度會失真，以上圖為例，只有正面的長方形與立體的長方形全等，右側的面也是長方形，但是測量出的四角都不是直角，測量出上、下邊的長度，與原立體的長度也不相等。建議教師評量立體的體積時，應要求學生實測立體的邊長來計算體積，不可以實測立體的視圖來計算體積。

(二)透視圖與燈籠骨架圖

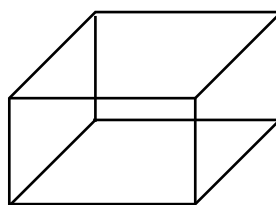
以長方體為例，長方體有 6 個面，12 條邊以及 8 個頂點，數學上常透過長方體的展開圖討論面與面的關係，透過長方體的燈籠骨架圖討論邊與邊的關係。

【圖十二】就是長方體的展開圖，展開圖是由六個面組成的，沿著邊可以摺成一個長方體；

【圖十三】就是長方體的燈籠骨架圖，燈籠骨架圖是由 12 條邊組成的，長方體的六個面並不存在。

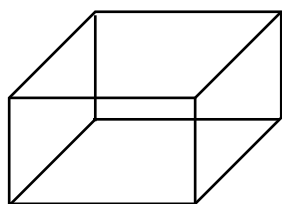


【圖十二】

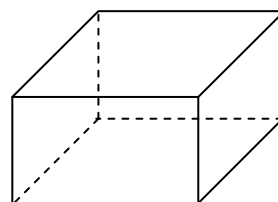


【圖十三】

長方體的視圖中看不到所有的邊，在視圖上以虛線描出長方體所有看不見的邊即為透視圖，只要將透視圖中的虛線都改為實線，立體的透視圖就是燈籠骨架圖，【圖十四】是燈籠骨架圖，【圖十五】是透視圖。



【圖十四】



【圖十五】

因為視圖特別強調對應邊的等長與平行關係，因此國小呈現的視圖，其正面都是正方形或長方形。在描繪視圖前，先幫助學童察覺對應邊等長與平行的關係，只要從頂點做出與同組的其他邊的平行線至公共頂點即可由視圖獲得透視圖。

教師可以將立體與立體的燈籠骨架圖併置，幫助學童將立體的視圖改記成透視圖。也可以將燈籠骨架圖的面用透明的紙糊上，變成一個立體，再幫助學童看著糊上透明紙的立體，分別畫出立體視圖及透視圖。

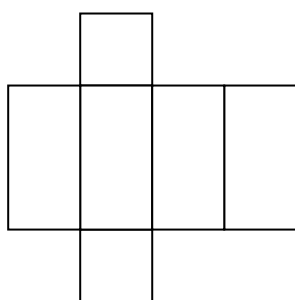
4-3-2：角柱和角錐的展開圖

認知及數學結構：

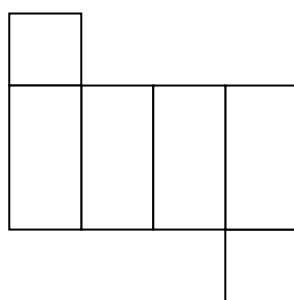
在理論上來說，立體的表面是無法展開的，因為立體只是一個形狀，並沒有厚度，只能透過拓印的方式，依其各面的相關位置，在平面將各個面拓印下來。為了能較具體地呈現立體各面展開的可能相對位置，國小教材所討論的立體展開圖，是將立體想像成其內部是空心的，用紙做的模型，可以沿著此模型面的邊緣將其剪開。

剪出角柱和角錐的展開圖時，必須滿足剪開後相連的面保留有共同的邊，每一個面至少保留有一個邊和其它的面相連，所有的面要連結成一整塊，可以攤平成一個平面區域，而且可以再沿著相鄰的邊，摺回成原來的立體等這些條件。角柱和角

錐可以有很多的展開方式，下面的【圖十六】和【圖十七】，分別是四角柱兩種不同的展開圖。



【圖十六】



【圖十七】

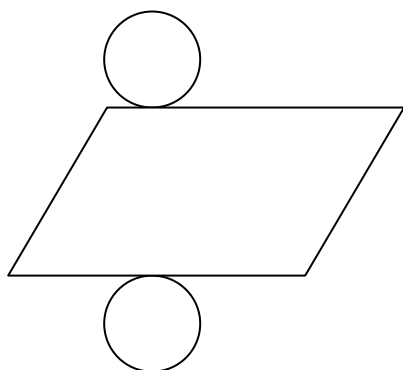
4-3-3：圓柱和圓錐的展開圖

認知及數學結構：

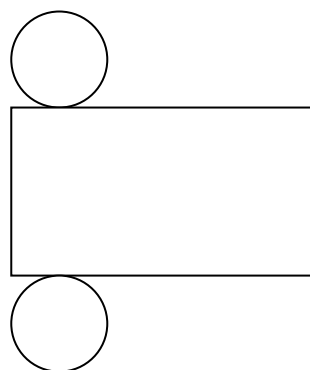
(一)圓柱的展開圖

圓柱和圓錐的底面是平面，側面是曲面，而其底部的圓周是曲線，因此圓柱和圓錐展開的方式和角柱與角錐不同。如果要讓展開後整個表面都能平攤在平面上，其底面的周界和側面理論上只能有一個點相連接，無法和角柱與角錐一樣，保持一個直的邊

相連接，【圖十八】和【圖十九】都是圓柱的展開圖，它們可以透過下列方式剪出：先將兩個底面沿著圓周剪開，使其分別和側面只保持一個理想化的連接點，再就側面上兩個底的邊緣各選定一個點，將這兩個點連接起來，如果這兩個點的連線和底面的邊緣不垂直，沿著這條線剪出來的展開圖是【圖十八】，圓柱的側邊展開成平行四邊形區域，如果這兩點的連線和底的邊緣垂直，沿著這條線剪出來的展開圖是【圖十九】，圓柱側邊展開成長方形區域，習慣上，國小都選擇【圖十九】當做圓柱的展開圖。



【圖十八】



【圖十九】

(二)圓錐的展開圖

圓錐展開圖剪開的方法和圓柱類似，先將底面和側面沿著底的邊緣剪開，使底面和側面只保持一個理想化的連接點，接著在底的邊緣上找一點，將這點和頂點連接起來，沿著這條線就能將側面剪成一個扇形。

直圓錐展開圖中扇形所夾的角度，和直圓錐底面的半徑以及頂點到底面圓周上任意點的距離（簡稱側邊長）有關係，假設一個直圓錐底面的半徑是 r ，側邊的長是 a ，那麼該直圓錐展開圖中的扇形區域，其半徑是 a ，弧長是 $2\pi r$ ，假設該展開圖中扇形的夾角是 θ 度，因為扇形的弧長和以 a 為半徑的圓周長滿足「 $2\pi r : 2\pi a = \theta : 360$ 」的關係，因此可以得到「 $\theta = 360 \times r \div a$ 」的結果。

學童不易理解上述公式，因此國小教材只要求學童能剪出直圓錐的展開圖，並不要求學童畫出直圓錐的展開圖。教師畫直圓錐展開圖的時候應該注意，當 $2r = a$ 時， θ 會等於 180 度，所畫出的扇形是一個半圓，當 $2r > a$ 時， θ 會大於 180 度，所畫出的扇形會是一個優扇形（比半圓大），當 $2r < a$ 時， θ 會小於 180 度，所畫出的扇形才是一個劣扇形。

主題 4-3-1：立方體堆疊

撰寫者：魏慶雲

授課對象：國小三年級學生

先備知識：

1. 能辨認、描述及分類簡單圖形。
2. 能描繪簡單圖形。

教學目標：

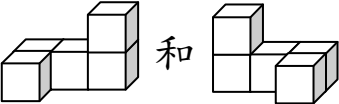
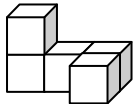
1. 能利用正方體依指示進行堆疊。
2. 能辨識堆疊結果是否相同，並說明理由。
3. 能依圖示做出相同的形體。

教學時間：80 分鐘(二節課)

教學說明：

1. 本單元希望學生能夠利用立方體進行堆疊，並且能辨識經過旋轉、翻轉後形體是否相同。

2. 有些相似的形體，乍看之下似乎一樣，但事實上卻屬於空間中的不同象限。這樣的情形在二維的平面裡不會產生，是三維空間特有的現象，如：

如： 和  無論如何旋轉、翻轉

都不會是相同的形體。因此必須利用教學中學生的親自操作，方能建構實際的認知進而進行區辨。

3. 平面圖形的立體化也是本單元教學的重點之一，希望學生從立

方體堆疊的平面圖形，實際的堆疊出立體形體。

4. 經過操作的教學，學生可以認知到某些立方體雖然被遮擋但確實存在，因為若沒有底層立方體的支撐，則上層的立方體無法安放。因此教學評量將以平面的圖形，讓學生計數有多少立方體的方式呈現，以檢驗學生的空間概念。
5. 教學過程中，會先只用一個立方體來建立學生形體不變的保留概念，再用二個立方體來建立形體全等的意義。


教具準備：

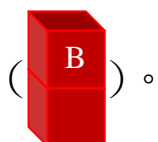
立方塊、木板(擺放學生拼出的圖形用)、白色積木

活動一：立方體堆疊的練習

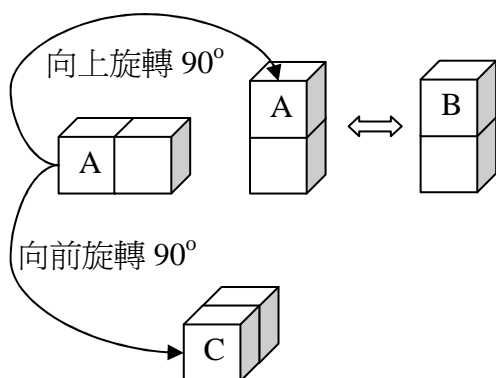
活動目標：能自行做出 1 個、2 個、3 個、4 個立方體的堆疊。

活動流程：

1. 教師展示 1 個立方體，並隨意的前後、上下、左右的翻轉這個立方體，請學生觀察此立方體形體的改變。
2. 得出結論：無論如何翻轉，外形看起來都會一樣。
3. 教師說明：「如果翻過來、轉過去以後長得一樣，我們就說它們的『形體』一樣。」
4. 教師接著展示 2 個立方體，並堆疊出形體 A () 及形體 B

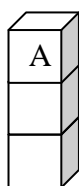


5. 提問：「形體 A 和形體 B 堆疊出來的形體一樣嗎？為什麼？」
6. 將形體 A 向上旋轉 90° ，可以發現與形體 B 相同，甚至將形體 A 往前旋轉，還可以形成形體 C 的模樣。這時我們說 A、B、C 的形體都一樣。

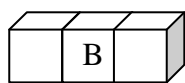


7. 得到結論，2 個立方體只可以堆疊出的形體都會一樣。
8. 接著進行 3 個立方體堆疊的競賽活動。
 - (1). 將學生分為四組進行比賽
 - (2). 每組發下 15 顆立方體
 - (3). 限時 2 分鐘
 - (4). 使用 3 個立方體堆疊
 - (5). 每組需拼出二種不一樣的圖形
 - (6). 時間到後可至其他各組觀摩
9. 教師展示三種形體：

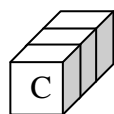
形體 A



形體 B



形體 C



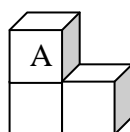
10. 提問：「形體 A、形體 B 和形體 C 的形體相同嗎？」

11. 經由實際操作，可以發現將形體 A 向右旋轉 90° 後即與形體 B 相同，而形體 B 往前旋轉 90° 後也與形體 C 相同。

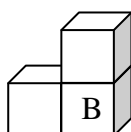
12. 得到結論：「形體 A、形體 B 和形體 C 是相同的形體。」

13. 教師再展示：

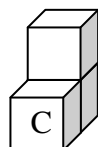
形體 A



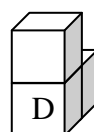
形體 B



形體 C



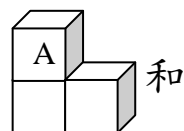
形體 D



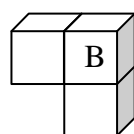
14. 提問：「形體 A、形體 B、形體 C 和形體 D 的形體相同嗎？」

15. 利用實際操作，讓學生發現 A、B、C、D 間經過旋轉都可以成為相同的形體。

16. 若立方體間可以黏合，也可以讓學生嘗試比較：

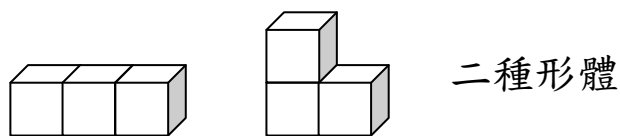


和



等之間的關係。

17. 教師歸納：3 個立方體只能堆出



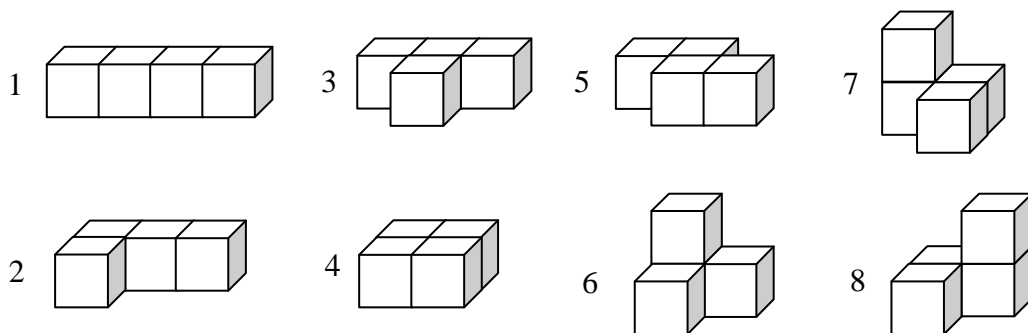
18. 請各組拼出三種 4 個立方體的不同圖形。

19. 請學生將各組完成的圖形展示在講台

20. 全體學生進行觀察，找出形體相同的圖形。

21. 形體相同的只留下一組。

22. 教師展示 4 個正方體應可堆疊出以下八種形體：



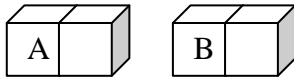
與學生的作品進行比對。

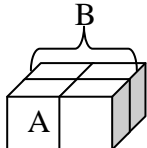
23. 教師提問：「第 7 與第 8 為何不是相同的圖形？為什麼？」請學生實際排一排並比較一下。

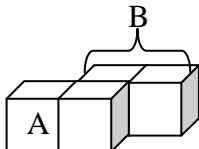
24. 統整與歸納方式(可依學生反應進行調整)

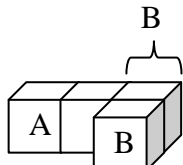
(1). 一層：4 個(一種)、3+1 個(二種)、2+2 個(二種)

(2). 二層：基本圖形  +1(三種)

25. 教師提問：「在 2+2 () 的狀態下，B 組可以

重疊在 A 組後面(), 也可以錯開一個立方體

() 的方式排列, 但為什麼我們沒有使用把 B 組和 A

組垂直的方式() 排列呢? 」

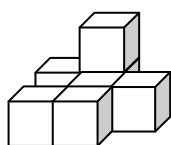
26. 引導學生發現：B 組和 A 組垂直的方式與 3+1 的形體相同。

活動二：依圖示做出相同的形體

活動目標：能將平面的圖形立體化，做出相同的形體。

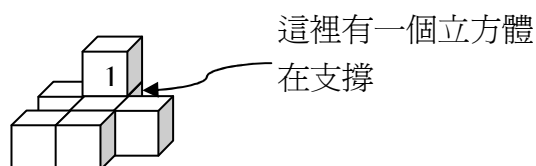
活動流程：

1. 將學生分組
2. 每組發給 20 個小積木
3. 請各組在五分鐘內堆疊出四種用 5 個立方體堆出的不同形體。
4. 各組觀察，找出有沒有相同的形體。
5. 依學生拼出的形體進行歸納，如：一層、二層……等。
6. 每位學生發給 20 個白色小積木。
7. 展示如下的圖形，請學生用小積木堆疊出相同的形體：

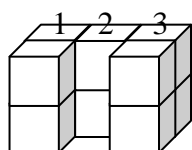


8. 計算堆疊出這個形體需要幾個方塊。

9. 討論為何立方體 1 能安放在第 2 層，並得出結論：因為下層有一個立方體的支撐。



10. 展示第 2 個圖形，請學生用小積木堆疊出相同的形體：



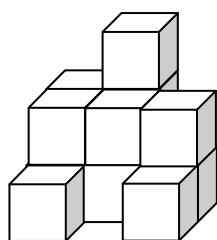
11. 教師提問：「立方體 1、3 為什麼可以放在立方體 2 的旁邊？」

12. 引導學生說出：「因為它們的下面都有一個立方體排在那邊。」

13. 結論：「有些地方雖然我們看不到，但是如果上層有立方體，就可以判斷下面一樣有立方體在那邊。」

14. 學生二個人一組，先由一個人堆疊出一個形體，另一個人仿製出相同的形體，並計算使用了幾個小積木，再交換練習。

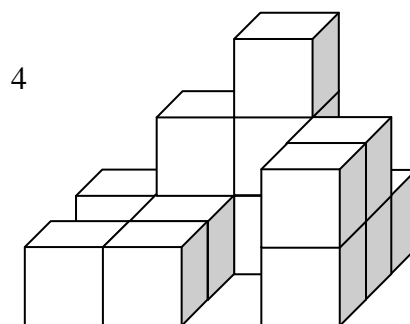
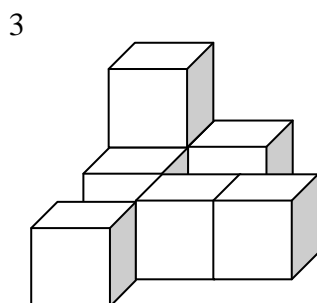
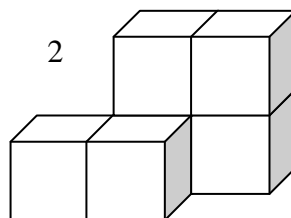
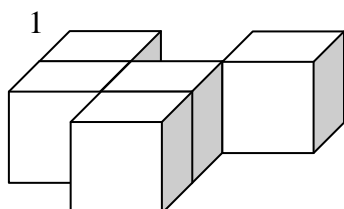
15. 展示第 3 個圖形，請學生直接由圖片上判斷是由幾個小立方體排成的：



指定作業：

習題一

算一算，下面的圖形中，各有幾個積木？



指定作業參考解答：

習題一

(1)、5 個，(2)、6 個，(3)、7 個，(4)、14 個。

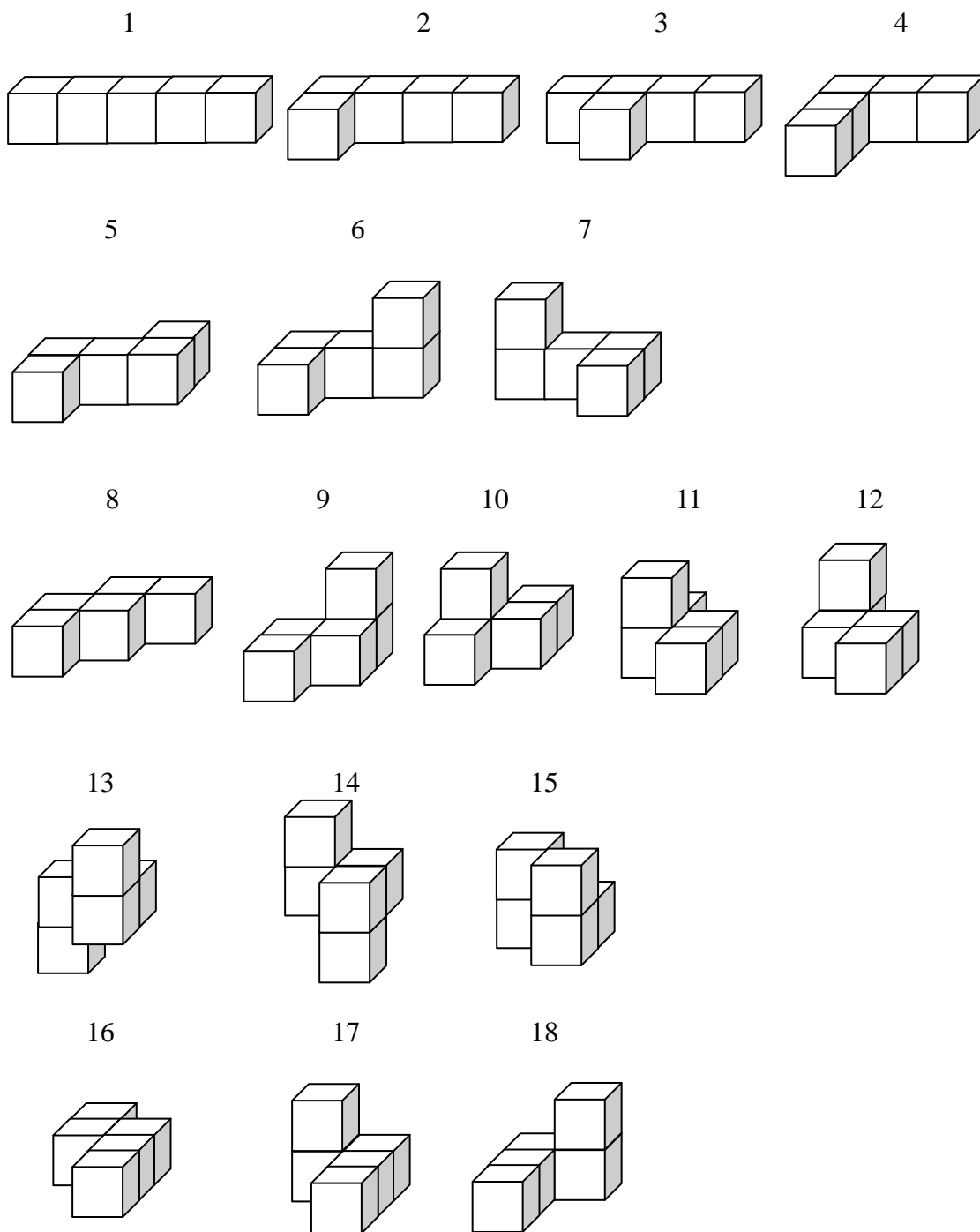
教學注意事項：

(1) 立方體堆疊會因為空間的象限因素，產生較多的變化，教學中一方面可以讓學生觀察同一個形體，經過旋轉、翻轉會有哪此不同的呈現。另一方面也需要讓學生體會到：「一個立方體，放在另外一組形體的前面和放在後面相對應的位置所構

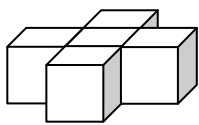
成的形體，看起來儘管相似，但實際上卻不一樣。」

(2) 立方體堆疊的教學必須實際操作教具，才容易產生理解，讓學生得以從平面圖形過度到立體形體。

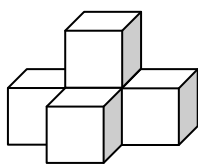
(3) 5 個立方體可以排出 29 種不同的形體：



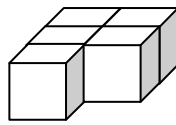
19



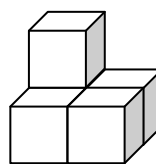
20



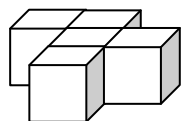
21



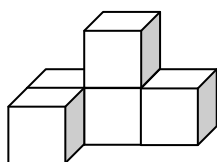
22



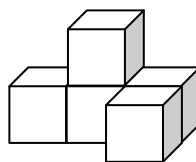
23



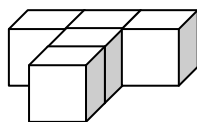
24



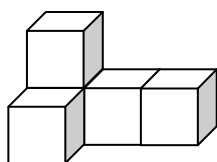
25



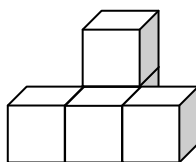
26



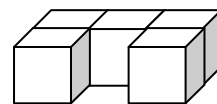
27



28



29



* 上列形體中，第 13、14 個形體，若僅以堆疊而不黏合的方式，是無法固定的。

教學參考資料：

周筱亭等（民 95）。國小數學教材分析—幾何。三峽：國家教育研究院。

主題 4-3-2：立方體展開圖

授課對象：國小四年級學生

先備知識：

1. 能依指示繪製圖形。
2. 具備圖形平移、旋轉與翻轉後形狀不變的保留概念。
3. 知道一個圖形平移、旋轉與翻轉後可以和另一個圖形完全疊合表示兩圖形全等。

教學目標：

1. 能繪製出 10 種不同的六連方塊。
2. 能有系統的討論六連方塊的分類方式。
3. 能敘述出可以成為立方體展開圖的六連方塊的現象。

教學時間：80 分鐘(二節課)

教學說明：

1. 本單元是延續二年級「正方形的平面鋪設」及三年級「立方體堆疊」。
2. 一個正方形只有一種圖形，二個相同正方形只能拼成一種圖形，三個相同正方形只能拼成 2 種圖形，四個相同正方形只能拼成 5 種圖形，但五個相同的正方形卻能夠拼出 12 種不同的圖形，由五片方塊拼成的圖形稱為五連方塊，同樣的，六連方塊的變化必然更複雜而多樣。本單元希望帶領學生討論如何有

系統的將六連方塊的圖形加以分類，過程之中不見得需要窮盡所有的圖形，主要是讓學生練習有系統的歸納觀察結果。

3. 六連方塊可以拼出很多圖形，學生不易判斷圖形中有哪些是全等的圖形，教師應讓學生將拼出的圖形平移、旋轉及翻轉後和其他圖形直接比較，以判斷兩個圖形間是否全等。
4. 六連方塊的圖形並非全部都能折成立方體，在那麼多種不同的圖形中，本單元讓學生經由操作後，討論在哪些現象下能夠折成立方體，在哪些狀況下一定不能折成立方體。

教具準備：

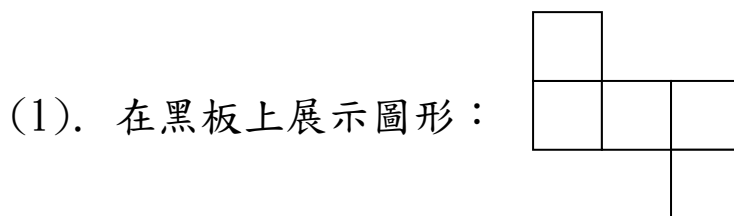
立方塊、5*6 正方格繪圖紙、立方體紙盒(學生自備)

活動一： 找出六連方塊的圖形

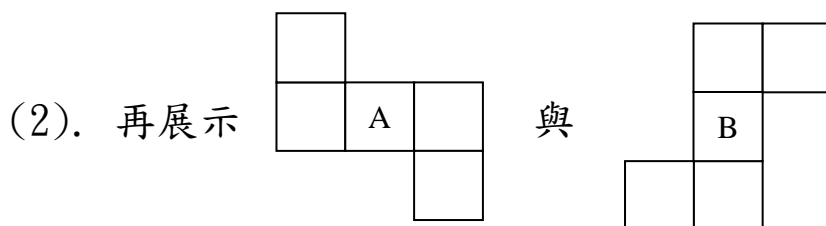
活動目標：能找出 10 種不同的六連方塊圖形。

活動流程：

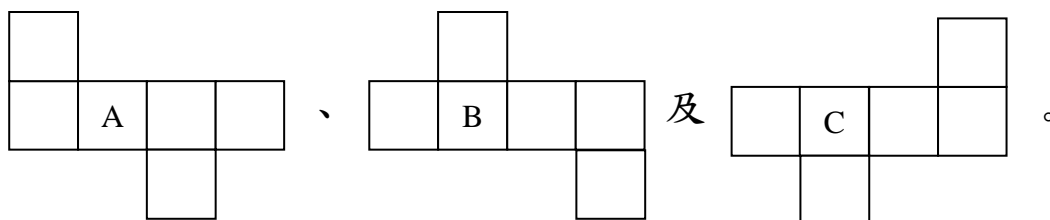
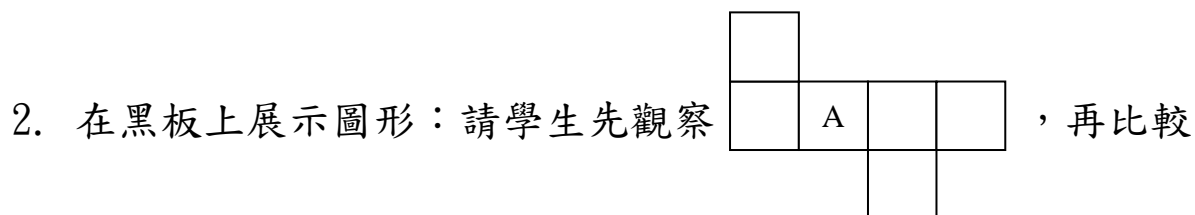
1. 教師先複習五連方塊的圖形，以說明規則。



說明這是由五個正方形所組成的圖形，其中任何二個正方形都有一個邊連在一起。



說明圖形 A 順時針旋轉 90° 後，會與圖形 B 相同，這樣就稱圖形 A 與圖形 B 是相同的圖形。



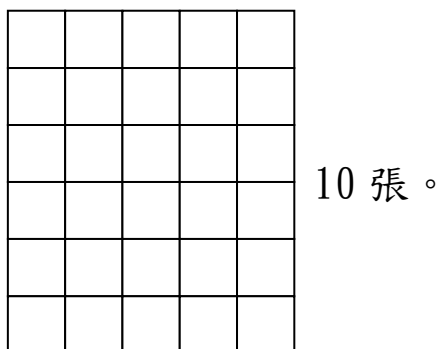
3. 引導學生說出六連方塊的定義，如下：

(1). 圖形 A 是用六個正方形組成的

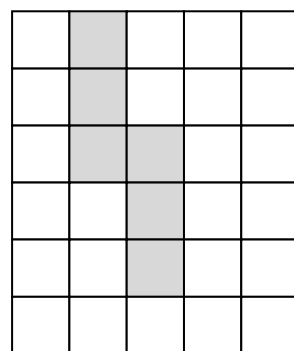
(2). 圖形 A 中的每二個正方形之間一定有一個邊是共用的

(3). 圖形 B 和圖形 A 旋轉 180° 後會相同，圖形 C 和圖形 A 翻轉後會相同，所以圖形 A、圖形 B、圖形 C 是相同的圖形。

4. 將學生分組，每組學生發下每格邊長為 2CM 的 5×6 方格紙



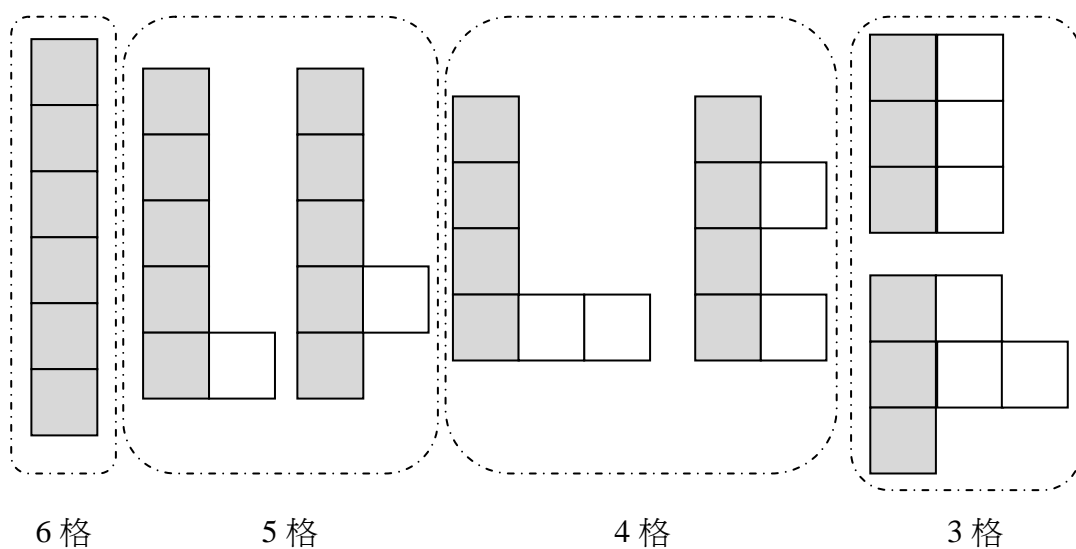
5. 請每組畫出 10 個不同的六連方塊圖形，如：



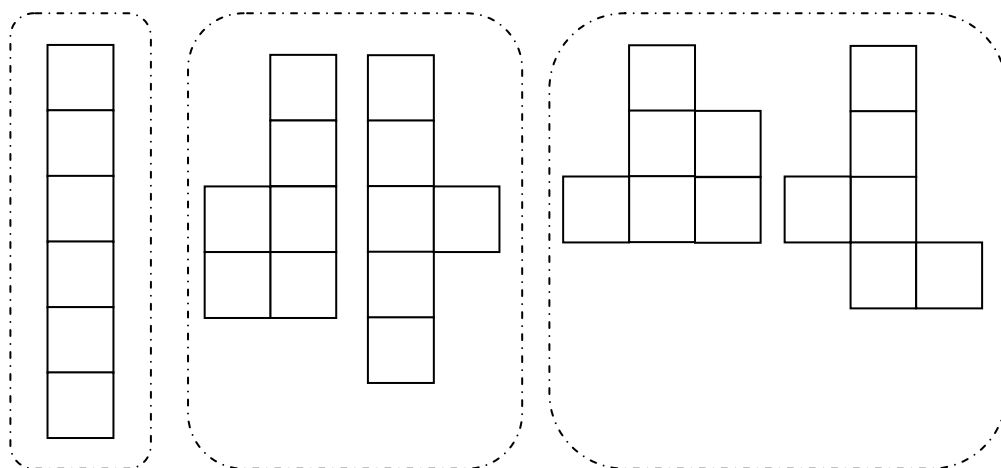
6. 將每組的成果展示在黑板上，比較彼此的圖形，並將相同的剔除。

7. 利用剩下的相異圖形，討論可以將這些圖形如何分組，例如

(1). 利用最多格部分，如：6 格、5 格、4 格、3 格。



(2). 利用分成的排數：一排、二排、三排。



一排

二排

三排

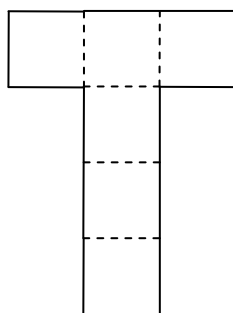
8. 討論：為何老師發下的是 5×6 的方格紙，而不是 6×6 的方格紙？
9. 引導學生說出：因為最多是六個正方形排成一直線，只需要長或寬其中一邊有 6 格就可以了。

活動二：立方體的展開圖

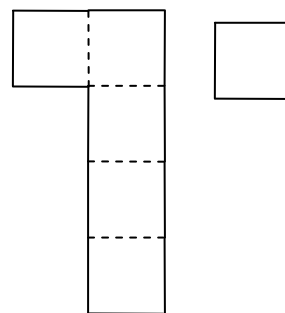
活動目標：找出能成為立方體展開圖的六連方塊圖形。

活動流程：

- 請學生將帶來的立方體紙盒取出，沿著面與面的連接處剪開。
須提示學生：每個面必須有一邊與其他面連著(圖一)，不可以單獨分開(圖二)。

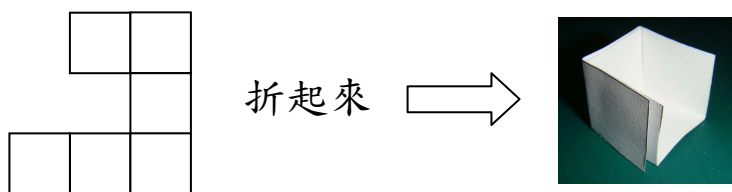


圖一：六面相連

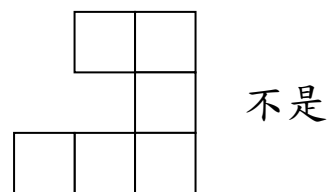


圖二：有些面分離了

2. 請學生觀察剪開後的形狀，並說明：這就是立方體的展開圖。
3. 請學生互相觀察其他人的立方體展開圖，看看大家的展開圖形狀都一樣嗎？
4. 教師提問：
 - (1). 大家看看，每個人剪開的展開圖的形狀都一樣嗎？
 - (2). 雖然展開圖的形狀不太一樣，但是有哪些共同點？
 - * 引導學生發現每個展開圖都恰好包含六個正方形的面
 - (3). 所有的六連方塊都可以成為立方體的展開圖嗎？
5. 請各組同學將該組所畫的 10 個六連方塊圖形剪下。
6. 將剪下的六連方塊圖形折疊起來，如：



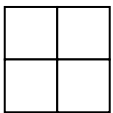
發現有些面重疊，有些面沒有，也就是說：



立方體的展開圖。



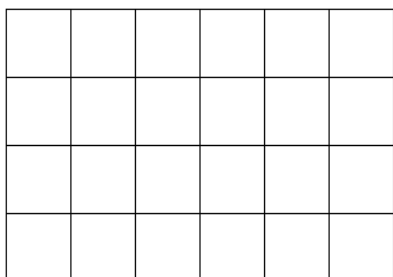
所以  是立方體的展開圖。

7. 將各組可以成為展開圖及無法成為展開圖的分別展示在黑板上。
8. 依學生做出的結果討論成為立方體展開圖的現象有哪些，如：
 - (1). 六個正方形排在一列的不能成為立方體的展開圖。
 - (2). 五個正方形排在一列的不能成為立方體的展開圖。
 - (3). 四個正方形排在一列，另二個排在這四個正方形的同一邊的，不能成為立方體的展開圖。
 - (4). 只要有四個正方形排在一起，另外二個正方形在這四個的兩邊的，不管那二個排在什麼位置，都可以成為立方體的展開圖。
 - (5). 只要有  圖形出現的一定不能成為立方體的展開圖。
 - (6). ……

指定作業：

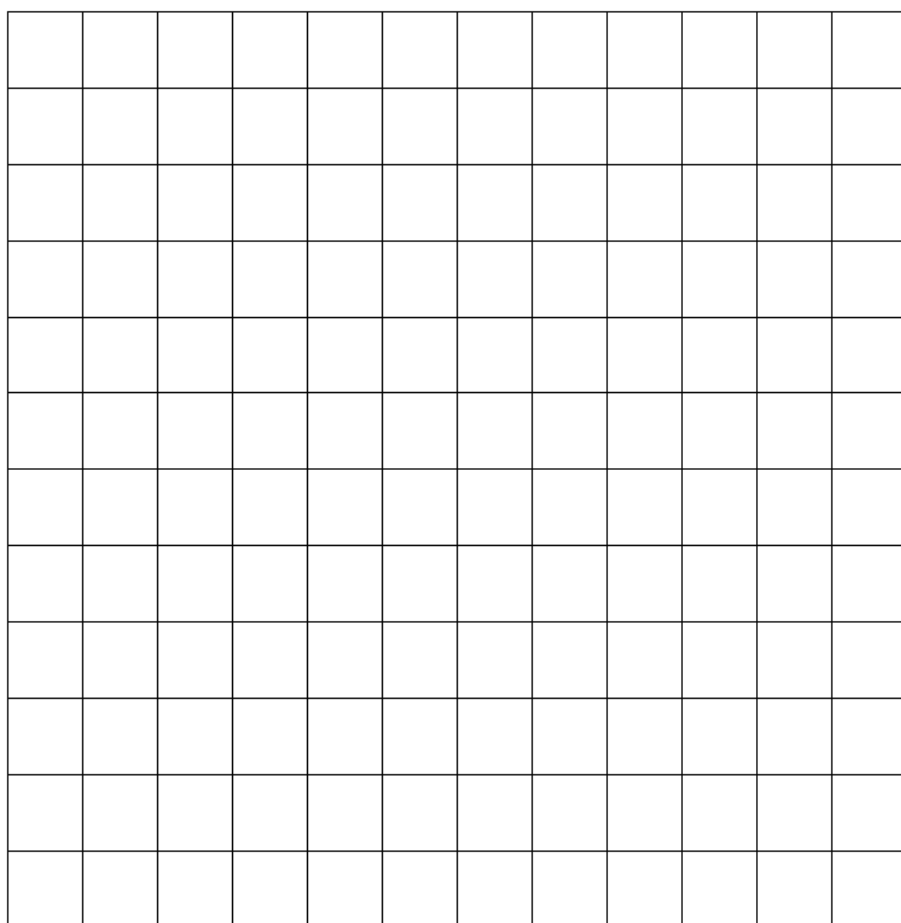
習題一

利用下面的方格紙，最多可以畫出幾個不同的六連方塊圖形？



習題二

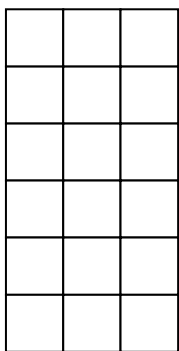
利用下面的方格紙，畫出 10 個以上不同的六連方塊圖形？



指定作業參考解答：

習題一

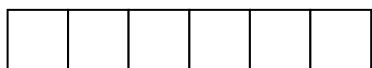
4 個，如：



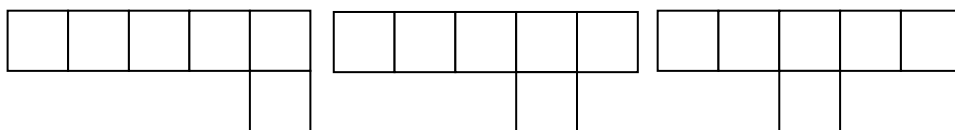
來畫出所有六連方塊中的任一個圖形。

(2) 以下六連方塊圖形的分類方式提供參考：

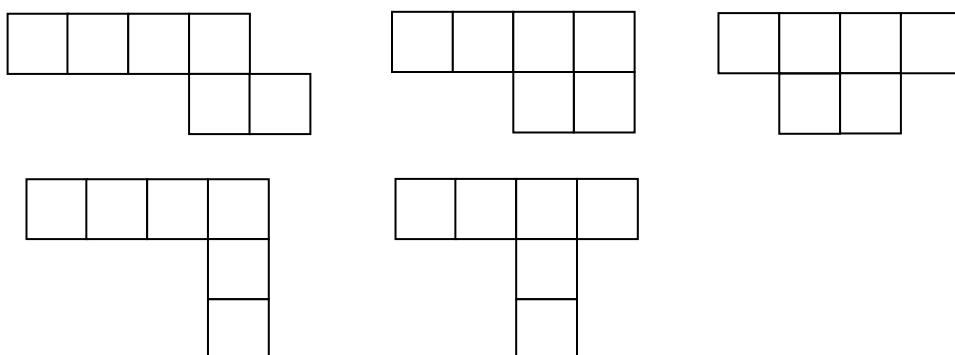
* 6 個 (一種)



* 5+1 個 (三種)

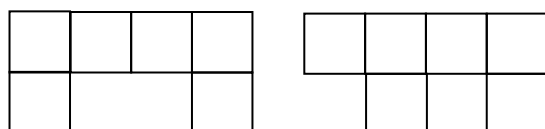


* 4+2 個 (五種)

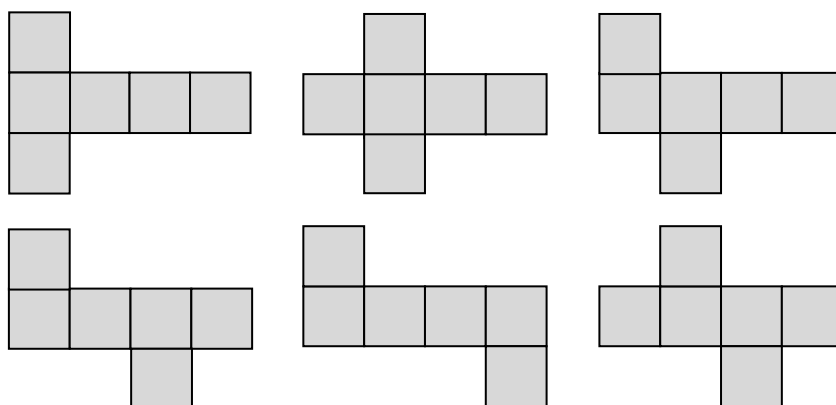


* 4+1+1 個

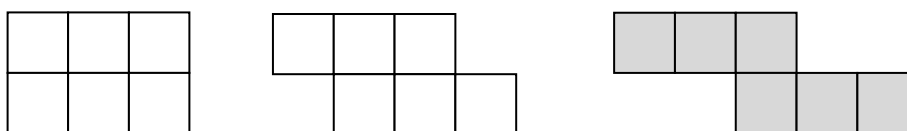
■ 同側 (二種)



■ 異側 (六種)

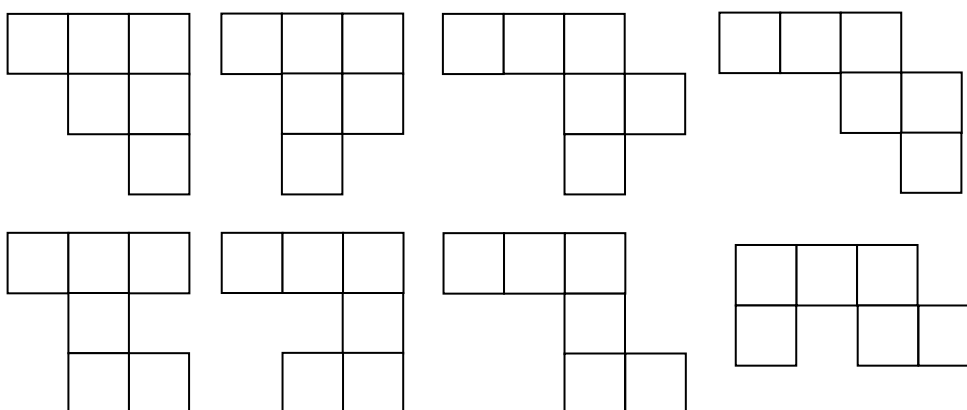


* 3+3 個 (三種)

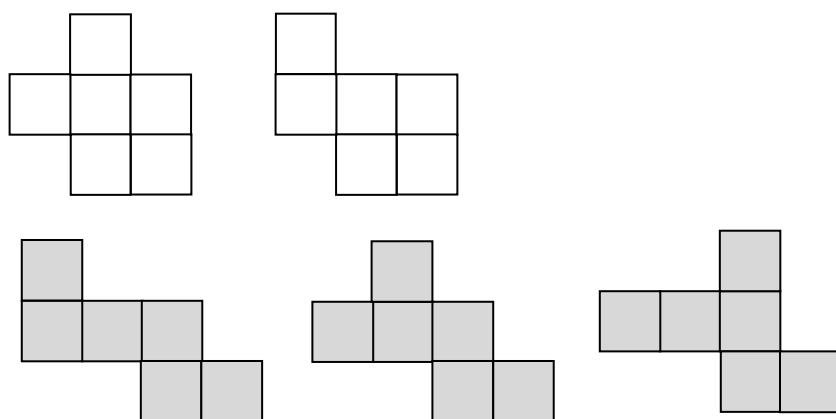


* 3+2+1 個

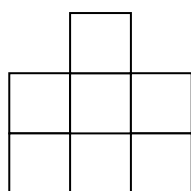
■ 同側 (八種)



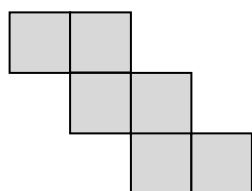
■ 異側 (五種)



* 3+1+1+1 個 (一種)



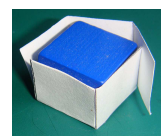
* 2+2+2 個 (一種)



(3) 上列圖形中，有灰階塗滿的 11 種，可以成為立方體的展開圖。

(4) 當學生在折疊六連方塊驗證其是否為立方體的展開圖時，若

操作上不方便，可以利用小方塊協助，如：



。但若如

此操作時，必須提醒學生，只要看外面，因為展開圖不包含內部。

(5) 活動一之流程 5，因六連方塊共有 35 種不同圖形，為兼顧能

有足夠的圖形數量以供討論，及學生找相異圖形的困難度，故訂 10 個，教師可依上課狀況自行調整。

教學參考資料：

周筱亭等（民 95）。國小數學教材分析－幾何。三峽：國家教育研究院。

第五章：立體圖形的關係

撰寫者：謝堅

主題 5-1：空間的垂直關係

5-1-1：線與線的垂直

認知及數學結構：

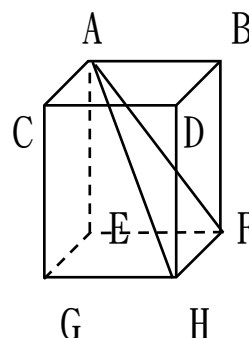
(一)兩相異直線的關係

在同一個平面上的兩相異直線，可以透過交點的個數，將這兩直線區分成交點個數為 0 個，以及交點個數為 1 個兩部份。其中交點個數為 0 個的兩直線一定互相平行；交點個數為 1 個的兩直線，可以透過所夾的角是否為直角，區分成兩直線互相垂直(夾角是直角)，以及兩直線不垂直(夾角不是直角)兩部份。

在空間中的兩相異直線，也可以透過交點的個數，將這兩直線區分成交點個數為 0 個，以及交點個數為 1 個兩部份。其中交點個數為 0 個的部份，又可以區分成兩直線互相平行，以及兩直線歪斜兩部份；而交點個數為 1 個的部份，可以透過兩直線所夾的角是否為直角，區分成兩直線互相垂直，以及兩直線不垂直兩部份。

【圖一】是正方體，正方體中直線 AB 及 CD，直線 AB 及 EF，以及直線 AB 及 GH 都沒有交點，它們都是平行線，互相平行的直線一定共平面，也就是說，它們會在同一個平面上；而直線 AB 及 CG，直線 AB 及 EG，以及直線 AB 及 CH 都沒有交點，它們都是歪

斜線，歪斜線一定不共面，也就是說，歪斜的兩直線不會在同一個平面上。



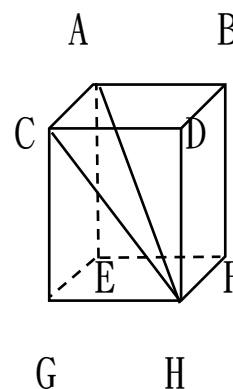
【圖一】

正方體中直線 AB 及 AC，直線 BA 及 BD，以及直線 AE 及 EG 都有一個交點，而且它們的夾角都是直角，它們都互相垂直，而直線 AB 及 AH，直線 AE 及 AH，以及直線 AH 及 CH 都有一個交點，但是它們的夾角都不是直角，它們都不垂直。

(二)線與線的垂直關係

空間中兩相異直線如果相交，這兩條直線一定共平面，因此在立體圖形中，只要兩直線有交點，就可以延伸平面中兩直線互相垂直的定義，透過夾角是否為直角來判斷空間的兩相交直線是否垂直。在【圖二】的正方體中，直線 AB 和 AC 的交點是 A，且 $\angle BAC$ 是直角，所以 AB 和 AC 兩直線互相垂直，相同的理由，直線 AB 和 AE，直線 AB 和 BF，直線 BD 和 BF，以及直線 CD 和 DH 都

有交點，且它們的夾角是直角，所以它們也互相垂直。



【圖二】

空間中的兩直線交點個數為 0 個，可能是平行線，也可能是歪斜線，因為兩歪斜線沒有交點，國小階段不討論兩歪斜線是否垂直，上圖二的正方體中，直線 AB 和 CG，以及直線 AH 和 CG 並沒有交點，因此沒有交角，回到平面中兩線互相垂直的定義，直線 AB 和 CG，以及直線 AH 和 CG 等，它們都不會互相垂直。

高中階段討論的對象是兩類直線(等價類)，我們可以畫出一個三維的直角坐標，將上圖正方體中 AB 線段的 A 點平移至原點，CG 線段的 C 點平移至原點，平移後的 AB 和 CG 兩線段相交於原點，且其夾角是直角，所以高中階段稱 AB 和 CG 兩線互相垂直。當我們將下圖正方體中 AB 線段的 A 點平移至原點，CH 線段的 C 點平移至原點，平移後的 AB 和 CH 線段相交於原點，但是其夾角不是直角，所以高中階段稱 AB 和 CH 兩線不垂直。

5-1-2：線與面的垂直

認知及數學結構：

(一)直線與平面的關係

在空間中的一條直線與一個平面，也可以透過交點的個數，將它們區分成交點個數為 0 個，交點個數為 1 個，以及交點個數為 ∞ 個三部份。其中交點個數為 0 個時，直線和平面互相平行；交點個數為 ∞ 個時，直線包含於平面；交點個數為 1 個時，可以透過所夾的角是否為直角，區分成直線和平面互相垂直(夾角是直角)，以及直線和平面不垂直(夾角不是直角)兩部份。

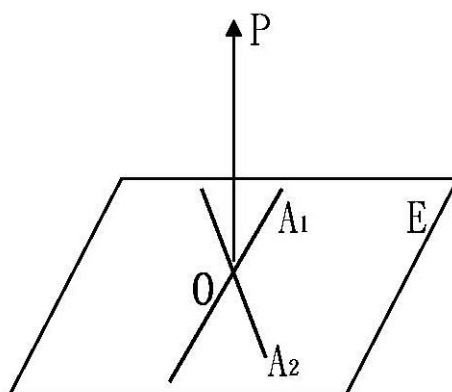
(二)平面的法向量

數學上稱與平面垂直的向量為該平面的法向量，【圖三】中的 OP 向量就是平面 E 的法向量，如果 $A_1、A_2、\dots、A_n$ 是平面上任意的點，且這些點不共線，過 O 點在平面上畫 $OA_1、OA_2、\dots、OA_n$ 等直線，這些直線和法向量 OP 一定互相垂直。

國小學生無法理解法向量的意義，可以利用與法向量重合的直線來討論直線與平面的垂直關係。如果在平面 E 上畫 $OA、OB$ 兩條直線，其中 $A、O、B$ 三點不共線，如果 OA 和 OB 都和 OP 直線垂直，稱直線 OP 和平面 E 互相垂直。

可以延伸平面上兩直線夾角的意義，透過與平面垂直法向量

的想法，將 E 、 F 兩個平面法向量的夾角，定義為 E 、 F 兩個平面的夾角；將 E 平面法向量與直線 L 夾角的補角，定義為平面 E 和直線 L 的夾角，當 E 、 F 兩個平面的夾角是直角時，稱 E 、 F 這兩個平面互相垂直。當 E 平面法向量與直線 L 的夾角是直角時，稱平面 E 和直線 L 互相垂直。



【圖三】

(三)檢驗直線和平面是否垂直

如果向量 OP 是平面 E 的法向量，直線 OP 垂直於平面 E ， A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_n 等是平面 E 上任意的點，且 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_n 不共線， OA_1 、 OA_2 、 \dots 、 OA_n 等直線一定都會垂直於直線 OP 。如果向量 OP 不是平面 E 的法向量， A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_n 等是平面 E 上任意的點，且 A_1 、 A_2 、 \dots 、 A_n 不共線，一定可以找到一個點 A_0 ，滿足直線 OA_0 垂直於直線 OP ，而其它的直線 OA_1 、 OA_2 、 \dots 、 OA_n 都不垂直於 OP 。

教師常要求學生利用三角板來檢驗直線與平面是否互相垂直，例如給定一個平面 E 及一條直線 OP ， O 在平面 E 上，用三角板檢驗 OP 是否垂直於平面 E 時，如果在平面上找到一點 A ，使得 $\angle AOP = 90$ 度，並不能保證直線 OP 垂直於平面 E ，必須找到相異的 A 、 B 兩點， A 、 O 、 B 三點不共線，且 $\angle AOP = \angle BOP = 90$ 度，才能保證直線 OP 垂直於平面 E 。

如果用正方體替代三角板來檢驗時，只要正方體的底面在平面 E 上，一個側面的邊和直線 OP 完全重合，就能保證直線 OP 垂直於平面 E 。

5-1-3：面與面的垂直

認知及數學結構：

(一)平面與平面的關係

在空間中的兩相異平面，也可以透過兩平面是否相交，將兩相異平面區分成沒有相交以及有相交兩個部份，兩平面如果沒有相交，這兩個平面一定互相平行，兩平面如果相交，它們的交集會是一條直線，並形成一個兩面角，可以透過所夾的兩面角是否為直角，將相交的兩平面區分成互相垂直(兩面角是直角)，與不垂直(兩面角不是直角)兩部份。

兩相異平面如果相交，其交集是一條直線，這兩個平面所夾的角稱為兩面角，教室中兩面牆壁所夾的角，地板與一面牆壁所夾的角都是兩面角，國小階段只要討論兩個相異平面是否互相垂直，不宜引入兩面角的概念與名詞。

(二)角柱與角錐的面與平面的關係

數學上的面向四面八方無限的延伸，而角柱或角錐的面是封閉的多邊形區域。在檢驗角柱或角錐的底面和側面是否互相垂直時，常將角柱或角錐的底面平放在桌面上來檢驗，當底面在桌面上時，無法檢驗底面和側面是否互相垂直，只能檢驗桌面和側面

是否互相垂直，許多學童無法掌握角柱或角錐的底面與桌面之間的包含關係，不知道角柱的側面和桌面互相垂直時，角柱的側面也和底面互相垂直。

下面以長方體(四角柱)為例，建議教師依下列四個步驟，幫助學童掌握角柱或角錐的底面與桌面是同一個平面：

步驟一：製作只有上底和下底是空的，而側面都存在的長方體燈籠骨架模型，將下底平放在桌面上。

步驟二：幫助學童察覺：燈籠骨架模型的底面都在桌面上，底面和桌面都是同一個平面，底面和桌面重合。

步驟三：幫助學童察覺：燈籠骨架模型側面的邊和桌面互相垂直時，側面的邊和底面也會互相垂直。

步驟四：拿出一個四角柱(長方體)，要求學童檢驗側面和桌面是否互相垂直，幫助學童類推出當四角柱(長方體)的側面和桌面互相垂直時，側面和底面也會互相垂直。

(三)檢驗兩平面是否互相垂直

數學上透過法向量的概念，定義兩個相交平面所形成兩面角的夾角就是它們法向量的夾角，假設 E 及 F 是兩個相異平面，

L 與 M 是和法向量 E 和 F 重合的直線，如果 L 和 M 的夾角是直角，我們稱 E 與 F 兩個平面互相垂直。

國小學童無法掌握法向量的意義，下面提出兩種方便國小學童檢驗兩平面是否互相垂直的方法：

第一種方法：

假設 E 、 F 是兩相異平面，它們的交集是直線 L ，可以在直線 L 上任取一點 P ，先在平面 E 上畫 PA 直線垂直於 L ，接著在平面 F 上畫 PB 直線垂直於 L ，如果 PA 和 PB 兩直線互相垂直，我們稱平面 E 和平面 F 互相垂直，如果 PA 和 PB 兩直線不垂直，我們稱平面 E 和平面 F 不垂直。

教師宜提醒學童，不可以過 P 點任意在平面 E 及平面 F 上畫兩直線，任意畫出的兩直線是否互相垂直，並無法判斷這兩個平面是否互相垂直，必須畫出的兩直線都和直線 L 垂直，且畫出的兩直線互相垂直，才能確定平面 E 及平面 F 互相垂直。

第二種方法：

當學生已經察覺正方體(長方體)相鄰的面互相垂直，就能夠以正方體(長方體)為檢驗兩平面是否互相垂直的工具。拿出一個

正方體，讓正方體的底面在平面 E 上面，如果正方體的另一面與平面 F 緊密的結合，我們稱平面 E 和平面 F 互相垂直；如果正方體的另一面與平面 F 無法緊密的結合，我們稱平面 E 和平面 F 不垂直。

注意事項：

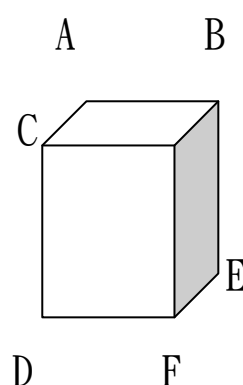
- (1) 無法直接檢驗大廳中的柱體的側面和底面是否互相垂直，因為摸不到也找不到柱體的底面，但是可以檢驗柱體的側面和地面是否互相垂直。
- (2) 不易直接檢驗鐵櫃的側面和底面是否互相垂直，因為搬動鐵櫃很困難，但是可以利用鐵櫃的底面包含於地面的關係，透過檢驗鐵櫃的側面和地面是否互相垂直，也可以得到鐵櫃的側面和底面是否互相垂直的答案。

主題 5-2：空間的平行關係

5-2-1：線與線的平行

認知及數學結構：

平行的兩條直線一定共平面，因此只要延伸平面上兩直線互相平行的定義，就能判斷空間中的兩直線是否平行。在【圖四】的正方體圖形中，可以找到一條直線 L ，讓 AB 和 DF 同時垂直於 L ，因此 AB 和 DF 兩直線互相平行，相同的方式可以知道，直線 AC 和 EF ，直線 BE 和 CD 也互相平行。



【圖四】

因為定義直線與平面的平行關係，對空間直線與平面相關問題的解題並沒有幫助，因此數學上並沒有給直線與平面的平行下定義，國小階段也不討論空間中直線與平面的平行關係。

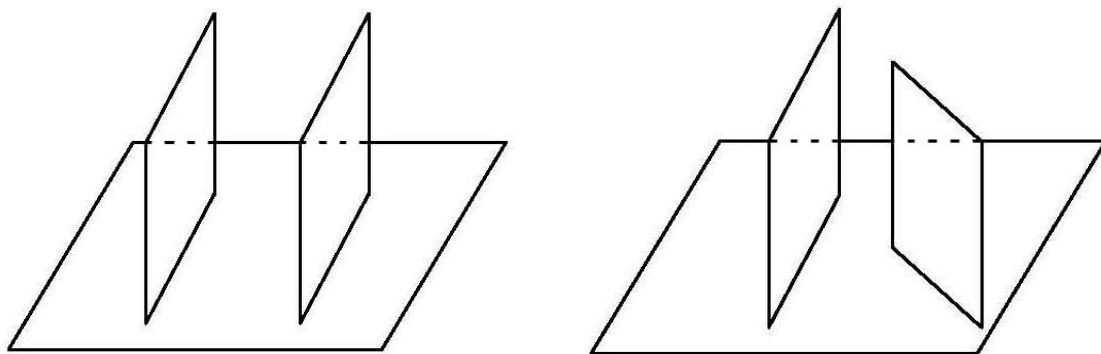
5-2-2：面與面的平行

認知及數學結構：

(一)兩平面互相平行的意義

平面上以「同時垂直於另一條直線的兩條直線互相平行」，當做兩直線互相平行的定義，部份教師延伸平面上兩直線互相平行的定義，以「空間中，同時垂直於另一個平面的兩個平面互相平行」，當做兩平面互相平行的定義，這是不正確的定義方式，如

【圖五】左邊的圖形，我們可以在桌面上垂直擺放兩張圖畫紙，這兩張圖畫紙同時和桌面垂直，而【圖五】右邊圖中的兩張圖畫紙互相平行，但是圖中的兩張圖畫紙不平行。



【圖五】

相異兩個平面 E 與 F ，如果平面 E 與平面 F 的法向量相等，數學上稱平面 E 與平面 F 互相平行，也可以延伸平面上兩直線互相平行的定義，以「空間中，同時垂直於一直線的兩平面互相平

行」，當做兩平面互相平行的定義。

(二)檢驗兩平面是否互相平行

只要分別找出和 E 、 F 兩平面互相垂直的直線段，再檢驗這兩條線段是否互相平行，就知道 E 、 F 這兩個平面是否互相平行。教師也可以將一個平面 E 平放在地面上，或甲設平面 E 是地面，先做出和地面互相垂直的直線，再判斷該直線是否也和另一個平面 F 互相垂直，或做出和 F 互相垂直的直線，再判斷該直線是否也和地面互相垂直。

主題 5-3：頂點、邊與面個數的關係

5-3-1：立體的頂點、邊和面

認知及數學結構：

(一)角柱與角錐的頂點、邊與面

部份教師常透過「邊所圍起來的封閉區域是面」、「邊和邊相交的點是頂點」、「面和面相交的直線是邊」，來說明角柱或角錐面、頂點和邊的意義，這是不合理的說法，上面說法中透過邊來定義面及頂點，透過面來定義邊，但是卻沒有先定義邊與面。

較合理的說法是指出角柱或角錐頂點、邊和面的特徵，幫助學生自行抽象出它們的意義，例如拿出一些角柱及角錐，說明這些立體中都有尖尖的地方，被敲到的時候會痛，稱這些尖尖的點為頂點；這些立體中都有平平的區域，摸起來和桌面一樣光滑，稱這些平平的區域為面，這些立體中的面和面之間都有突然轉彎的部份，稱面與面轉彎處所形成的直線為邊。

(二)圓柱與圓錐的頂點、邊與面

國小階段只討論角柱及角錐的頂點、面與邊，並不討論圓柱與圓錐的頂點、面與邊，建議教師不宜評量圓錐及圓柱頂點、邊及面個數的問題，以免引起爭議。

圓柱有上底、下底及側面等三個面，圓柱的上底及下底，可以延伸角柱及角錐面的意義，也稱之為面；圓柱側面展開時是一

個平面，但是圍成圓柱時並不是平平的面，而是曲面，因此在國小階段不討論圓柱的側面是否為面，也不討論圓柱有多少個面。圓柱上底及下底和側面所形成的邊界都是一個圓，不是直直的線段，因此在國小階段不討論圓柱上底及下底和側面的交線是否為邊，也不討論圓柱有多少條邊。

圓錐有一個頂點，可以延伸角柱及角錐頂點的意義，也稱之為頂點。圓錐有底面及側面等兩個面，圓錐的底面，可以延伸角柱及角錐底面的意義，也稱之為底面；圓錐側面展開時是一個扇形，但是圍成圓錐時不是平平的面，因此在國小階段不討論圓錐的側面是否為面，也不討論圓錐有多少個面。圓錐底面和側面所形成的邊界是一個圓，不是直直的線段，因此在國小階段不討論圓錐底面和側面的交線是否為邊，也不討論圓錐有多少條邊。

5-3-2：角柱、角錐的頂點、邊與面的個數關係

認知及數學結構：

國小低年級階段就開始引入簡單的立體圖形，例如正方體、長方體與圓柱，與並認識正方體、長方體的頂點、邊與面等構成要素。學生能夠指認立體圖形的頂點、邊與面，並點數它們的個數，但是不必理解它們與立體圖形間的關係。

國小高年級引入更多的立體圖形，例如角柱、角錐、圓柱及圓錐等，此時教學重點不只是指認出頂點、邊與面等構成要素，還必須利用這些構成要素來描述幾何形體的特徵與性質。國小高年級除了點數頂點、邊與面的個數之外，還可以討論它們之間的關係。

(1)角柱中面、頂點與邊的個數

當學生知道角柱的意義，並認識角柱的頂點、邊與面後，教師可以先要求學生回答較熟悉四角柱(長方體)的頂點、邊與面的個數，檢查學生是否能掌握角柱頂點、邊與面的意義，再要求學生完成下面的【圖表一】，並要求學生嘗試找出頂點、邊與面個數間的關係。

	三角 柱	四角 柱	五角 柱	六角 柱	七角 柱	八角 柱
面	5	6	7	8	9	10
頂 點	6	8	10	12	14	16
邊	9	12	15	18	21	24

【圖表一】

學生完成【圖表一】後，可能發現「這些角柱邊的個數最多、面的個數最少」、「這些角柱邊的個數都是頂點個數的 $\frac{3}{2}$ 倍」等關係。

教師接著提問三角柱的面、頂點和邊的個數，和三角柱名稱中的「3」是否有關係，幫助學生察覺，三角柱面的個數是「 $3+2$ 」、頂點的個數是「 3×2 」、邊的個數是「 3×3 」。教師可以再提問四角柱的面、頂點和邊的個數，和四角柱名稱中的「4」是否有關係，檢查學生是否能寫出四角柱面的個數是「 $4+2$ 」、頂點的個數是「 4×2 」、邊的個數是「 4×3 」，最後要求學生完成下面的【圖表二】。

	三角 柱	四角 柱	五角 柱	六角 柱	七角 柱	八角 柱
面	$3+2$	$4+2$	$5+2$	$6+2$	$7+2$	$8+2$
頂 點	3×2	4×2	5×2	6×2	7×2	8×2
邊	3×3	4×3	5×3	6×3	7×3	8×3

【圖表二】

當學生完成上面的【圖表二】之後，教師可以要求學生將上面的【圖表二】改記成【表二】，如果學生無法改記成【表二】，教師可以先將上面的【圖表二】改記成【表一】，再幫助學生利用變數的想法，將【表一】改記成【表二】。

【表二】中 n 的範圍是 $3\sim 8$ 的整數，教師也可以擴充【表二】中 n 的範圍至所有的正整數，幫助學生得到 n 角柱面的個數是 $n+2$ 個，頂點的個數是 $n\times 2$ 個，邊的個數是 $n\times 3$ 個， n 是大於或等於 3 的正整數，並將【表二】改記成【表三】。

表一：

幾角柱	面的個數	頂點的個數	邊的個數
3	$3+2$	3×2	3×3
4	$4+2$	4×2	4×3
5	$5+2$	5×2	5×3
6	$6+2$	6×2	6×3
7	$7+2$	7×2	7×3
8	$8+2$	8×2	8×3

表二：

幾角柱	面的個數	頂點的個數	邊的個數
n	$n+2$	$n\times 2$	$n\times 3$
$n=3、4、5、6、7、8$			

表三：

幾角柱	面的個數	頂點的個數	邊的個數
n	$n+2$	$n\times 2$	$n\times 3$
$n=3、4、5、6、7、8、\dots$			
$(n \text{ 大於或等於 } 3, n \text{ 是正整數})$			

(2)角錐中面、頂點與邊的個數

當學生知道角錐的意義，並認識角錐的頂點、邊與面後，教師可以先要求學生回答較熟悉三角柱(四面體)的頂點、邊與面的個數，檢查學生是否能掌握角柱頂點、邊與面的意義，再要求學生完成下面的圖表三，並要求學生嘗試找出頂點、邊與面個數間的關係。

	三角錐	四角錐	五角錐	六角錐	七角錐	八角錐
面	4	5	6	7	8	9
頂點	4	5	6	7	8	9
邊	6	8	10	12	14	16

【圖表三】

學生完成【圖表三】後，可能發現「邊的個數最多」、「面的個數和頂點的個數一樣多」、「」等關係。

教師接著提問三角錐的面、頂點和邊的個數，和三角錐名稱中的「3」是否有關係，幫助學生察覺，三角錐面的個數是「 $3+1$ 」、頂點的個數也是「 $3+1$ 」、邊的個數是「 3×2 」。教師可以

再提問四角錐的面、頂點和邊的個數，和四角錐名稱中的「4」是否有關係，檢查學生是否能寫出四角錐面的個數是「 $4+1$ 」、頂點的個數是「 $4+1$ 」、邊的個數是「 4×2 」，最後要求學生完成下面的【圖表四】。

	三角錐	四角錐	五角錐	六角錐	七角錐	八角錐
面	$3+1$	$4+1$	$5+1$	$6+1$	$7+1$	$8+1$
頂點	$3+1$	$4+1$	$5+1$	$6+1$	$7+1$	$8+1$
邊	3×2	4×2	5×2	6×2	7×2	8×2

【圖表四】

當學生完成上面的【圖表四】之後，教師可以要求學生將上面的【圖表四】改記成【表五】，如果學生無法改記成【表五】，教師可以先將上面的【圖表四】改記成【表四】，再幫助學生利用變數的想法，將【表四】改記成【表五】。

【表五】中 n 的範圍是 $3\sim 8$ 的整數，教師也可以擴充【表五】中 n 的範圍至所有的正整數，幫助學生得到 n 角錐面的個數是 $n+1$ 個，頂點的個數也是 $n+1$ 個，邊的個數是 $n\times 2$ 個， n 是大於或等於 3 的正整數，並將【表五】改記成【表六】。

表四：

幾角錐	面的個數	頂點的個數	邊的個數
3	$3+1$	$3+1$	3×2
4	$4+1$	$4+1$	4×2
5	$5+1$	$5+1$	5×2
6	$6+1$	$6+1$	6×2
7	$7+1$	$7+1$	7×2
8	$8+1$	$8+1$	8×2

表五：

幾角錐	面的個數	頂點的個數	邊的個數
n	$n+1$	$n+1$	$n \times 2$
$n=3、4、5、6、7、8$			

表六：

幾角錐	面的個數	頂點的個數	邊的個數
n	$n+1$	$n+1$	$n \times 2$
$n=3、4、5、6、7、8、\dots$			
(n 大於或等於 3, n 是正整數)			

(3) 尤拉公式

n 角柱面的個數是 $n+2$ 個，頂點的個數是 $n \times 2$ 個，邊的個數是 $n \times 3$ 個， n 角錐面的個數是 $n+1$ 個，頂點的個數也是 $n+1$ 個，邊的個數是 $n \times 2$ 個，角柱和角錐都滿足「頂點的個數 + 面的個數 = 邊的個數 + 2」的關係，並稱該關係為尤拉公式。

國小學生無法掌握未知數運算的意義，無法透過未知數的運算「 $(n+2) + (n \times 2) = (n \times 3) + 2$ 」，以及「 $(n+1) + (n \times 1) = (n \times 2) + 2$ 」，得到「頂點的個數 + 面的個數 = 邊的個數 + 2」的關係，如果教師要幫助學生得到尤拉公式的關係，必須回到表一及表四，學生在數字的情境中，應該能發現「頂點的個數 + 面的個數 = 邊的個數 + 2」的關係。

主題 5-1-3：面與面的垂直

撰寫者：詹婉華

～面與面的垂直關係

授課對象：國小六年級學生

先備知識：

1. 知道在同一平面上，兩條直線互相垂直、平行的意義。
2. 知道立體形體的構成要素。

教學目標：

1. 認識面與面互相垂直的關係。
2. 檢驗兩平面是否互相垂直。

教學時間：40 分鐘（一節課）

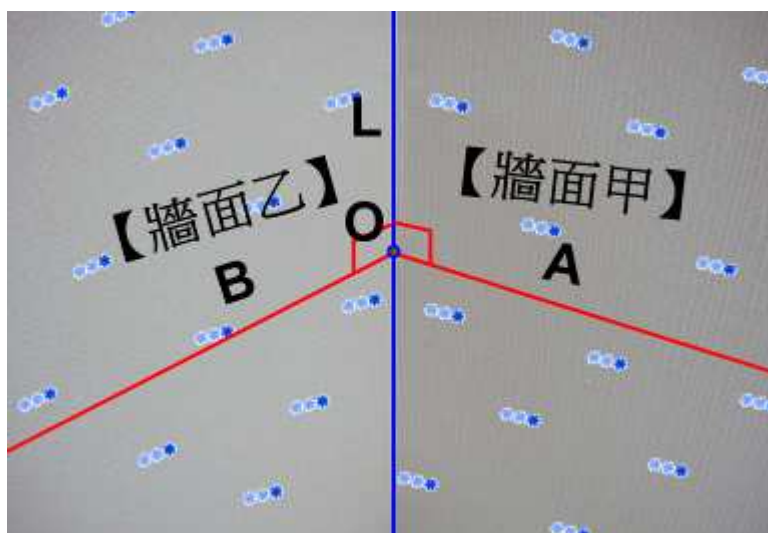
教學說明：

1. 相異且相交的兩個平面，它們的交集為一條直線，而這兩個平面所夾的角，稱為兩面角，如：教室中相鄰的兩個牆面所夾的角、地板與一個牆面所夾的角，都是兩面角。但在國小階段，只討論相異的兩個平面是否互相垂直，不進行兩面角的概念與名詞的教學。
2. 在數學上，兩個平面的夾角，就是這兩個平面的法向量的夾角（參見理念篇 5-1-3：面與面的垂直）。例如，平面 A 與平面 B 是相異且相交的兩個平面，且直線甲是 A 的法向量，直線乙是 B 的法向量，當直線甲與直線乙的夾角是直角時，則平面 A 與

平面 B 互相垂直。

3. 國小階段的學童無法理解法向量的意義，宜由生活中常見的牆面，讓他們了解兩平面互相垂直的意義。方法如下：

- (1) 相鄰的兩個牆面甲、乙，相交於直線 L。
- (2) 在直線 L 上取一點 O，於牆面甲畫直線 OA 垂直於直線 L。
- (3) 接著在牆面乙畫直線 OB 垂直於直線 L。
- (4) 用三角板的直角量出直線 OA 與直線 OB 互相垂直。
- (5) 若直線 OA 與直線 OB 互相垂直，則牆面甲與牆面乙互相垂直。



4. 當學童確認相鄰的兩個牆面互相垂直後，將正方體或長方體緊貼兩面牆，讓他們找出正方體或長方體中互相垂直的兩個面。
5. 在確認正方體、長方體中互相垂直的兩個平面後，可運用正方體或長方體來檢驗兩個平面是否互相垂直，本教學活動中，使用長方體為檢驗的工具。
6. 本教學活動重點：(1) 由生活中相交的兩個牆面，認識面與面

的垂直關係。(2)用長方體檢驗兩個平面是否互相垂直。

教具準備：

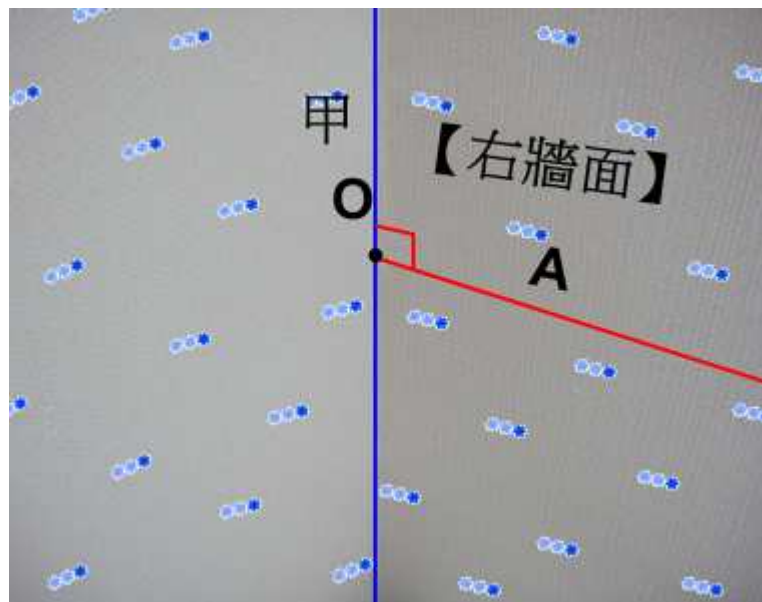
三角板、長方體、三角柱、五角柱、六角柱、三角錐、四角錐、五角錐。

活動一：認識面與面的垂直關係

活動目標：由生活中相交的兩個牆面，認識面與面的垂直關係。

活動流程：

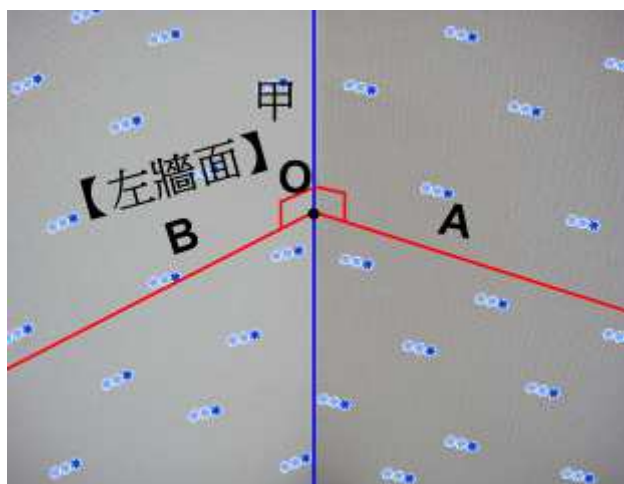
1. 教師讓學童觀察教室的牆面，請他們指出相鄰的兩面牆相連接的邊，並稱此邊為邊甲。接著在右邊的牆面，畫一條通過O點和邊甲垂直的直線A如【圖一】，並讓學童用三角板的直角，確認邊甲和直線A互相垂直。



【圖一】

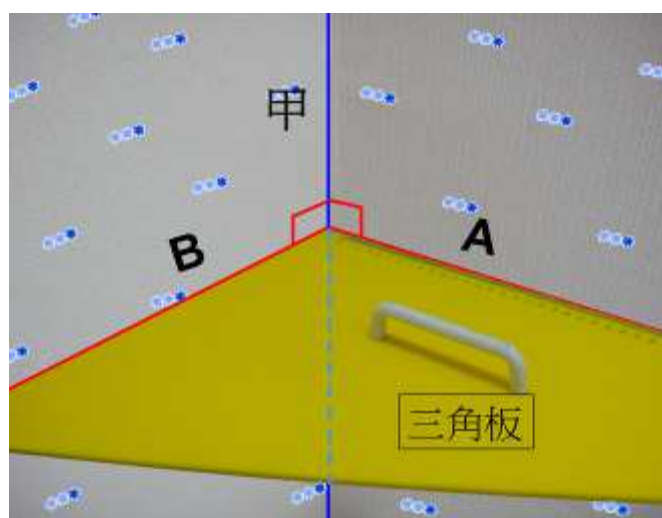
2. 接著在左邊的牆面，畫一條通過O點和邊甲垂直的直線B如【圖

二】，並讓學童用三角板的直角，確認邊甲和直線 B 互相垂直。



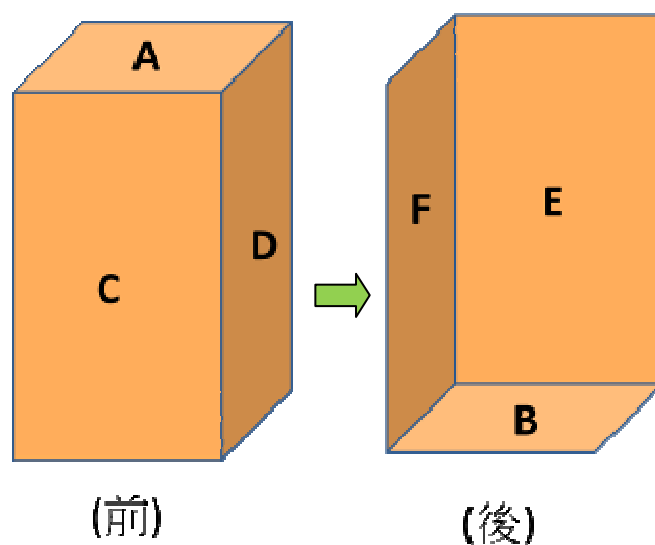
【圖二】

3. 教師說明：如果直線 A 和直線 B 互相垂直，則這兩個牆面也會互相垂直。接著將三角板的一個直角邊對齊並貼合直線 A，學童會看到三角板的另一個直角邊會與直線 B 貼合如【圖三】，提問：直線 A 和直線 B 互相垂直嗎？學童可由操作的結果，回答：直線 A 和直線 B 互相垂直。再問：這兩個牆面互相垂直嗎？學童可由直線 A 和直線 B 互相垂直，回答：兩個牆面互相垂直。



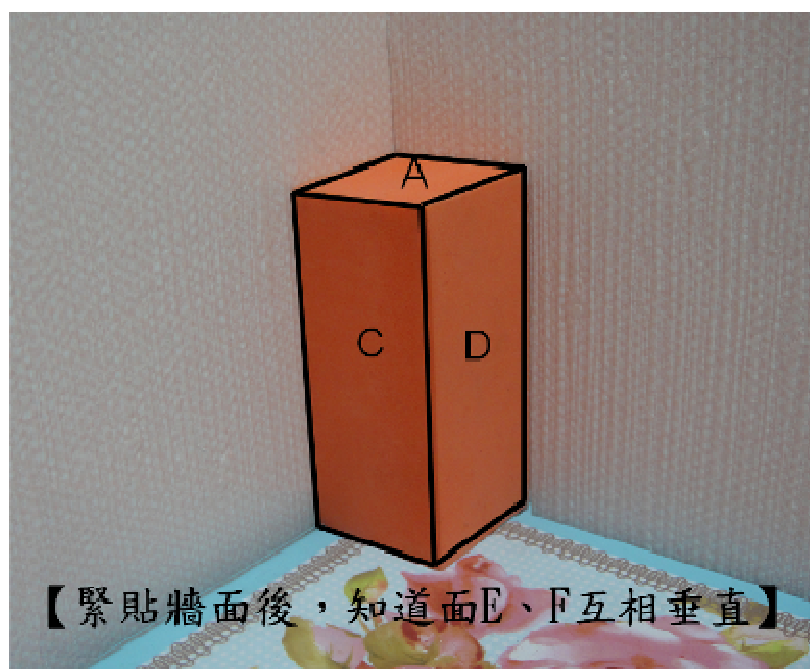
【圖三】

4. 教師拿出一個長方體，和學童依上、下、前、右、後、左的方向，一起標出六個面的代號—A、B、C、D、E、F如【圖四】。



【圖四】

5. 將長方體放在地面，長方體會緊貼於牆角如【圖五】，學童由之前所學過的兩個牆面互相垂直的意義，了解長方體中的面E和面F互相垂直。



【圖五】

6. 教師讓學童翻轉長方體後放置於牆角，長方體會緊貼於牆角的兩個牆面，讓學童嘗試找出長方體中互相垂直的面。

活動二：檢驗兩個平面是否垂直

活動目標：用長方體檢驗角柱及角錐中的兩個平面是否互相垂直。

活動流程：

1. 教師拿出長方體，複習長方體中互相垂直的面(見【圖四】)

學童會知道長方體的每一個面會和另外四個面互相垂直。

(1)面 A：和面 C、面 D、面 E、面 F 垂直。

(2)面 B：和面 C、面 D、面 E、面 F 垂直。

(3)面 C：和面 A、面 B、面 D、面 F 垂直。

(4)面 D：和面 A、面 B、面 C、面 E 垂直。

(5)面 E：和面 A、面 B、面 D、面 F 垂直。

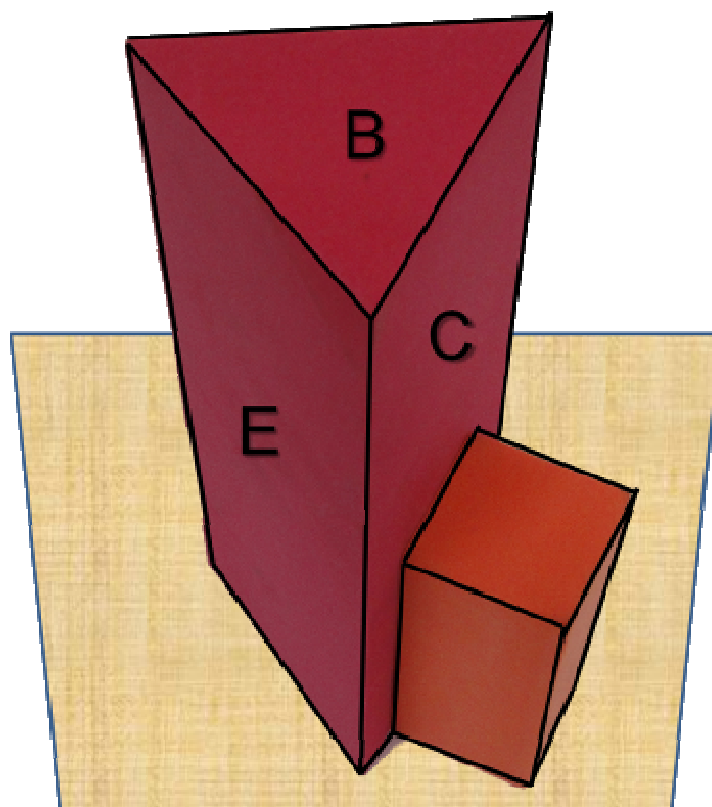
(6)面 F：和面 A、面 B、面 C、面 E 垂直。

2. 學童也會發現，長方體互相垂直的面，有一邊會相連。

3. 讓學童拿出三角柱(見【圖六】)，並用 A、B 標示底面，C、D、E 標示側面，引導他們用長方體找出三角柱中互相垂直的面。

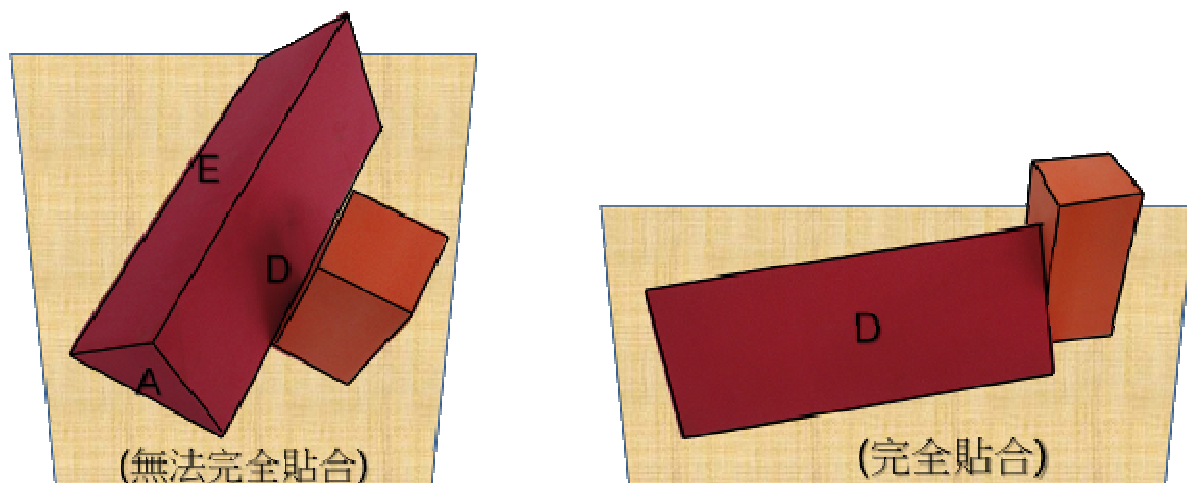
(1)將三角柱的底面 A 貼在桌上，讓學童確認桌面和底面 A 在同一個平面，將長方體放在桌面上，貼近三角柱後不移動長方體，長方體的側面完全與三角柱的側面 C 完全貼合，讓學童

確認長方體側面和側面 C 在同一個平面，如【圖六】。



【圖六】

- (2)長方體的側面與桌面互相垂直，所以三角柱的底面 A 和側面 C 也互相垂直。
- (3)仿(1)的方法，長方體的側面也能與三角柱的側面 D、側面 E 完全貼合。
- (4)長方體的側面與桌面互相垂直，所以三角柱的底面 A 和側面 D、側面 E 也互相垂直。
- (5)將三角柱的側面 C 貼在桌上，仿(1)的方法，長方體的側面無法與三角柱的側面 D、側面 E 完全貼合，但可和三角柱的底面 A、底面 B 完全貼合，如【圖七】。



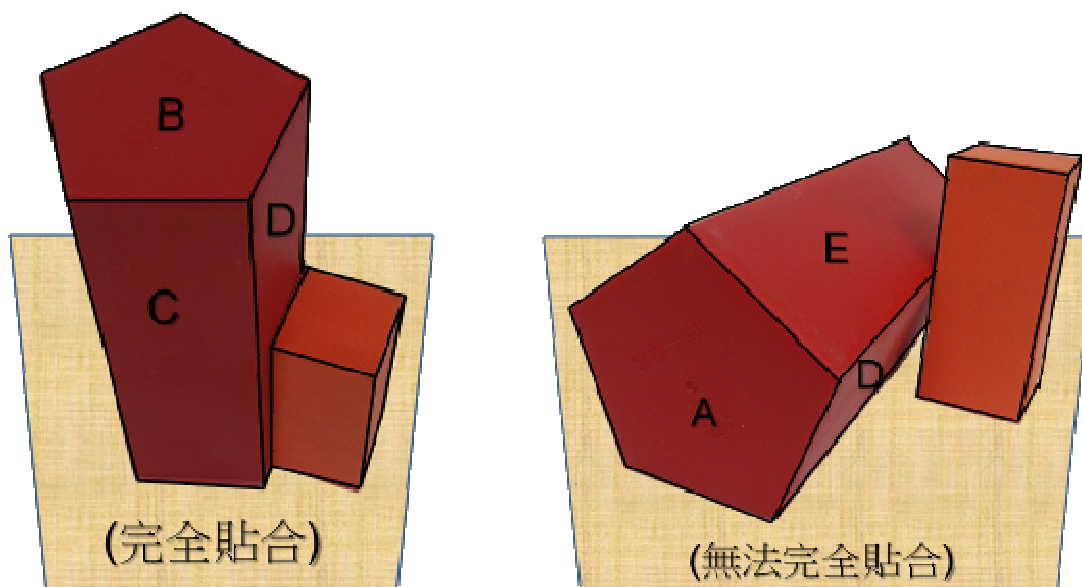
【圖七】

(6)三角柱的側面與底面互相垂直，側面與側面不互相垂直。

4. 仿活動流程 3，帶領學童用長方體找出五角柱、三角錐、四角錐互相垂直的面。

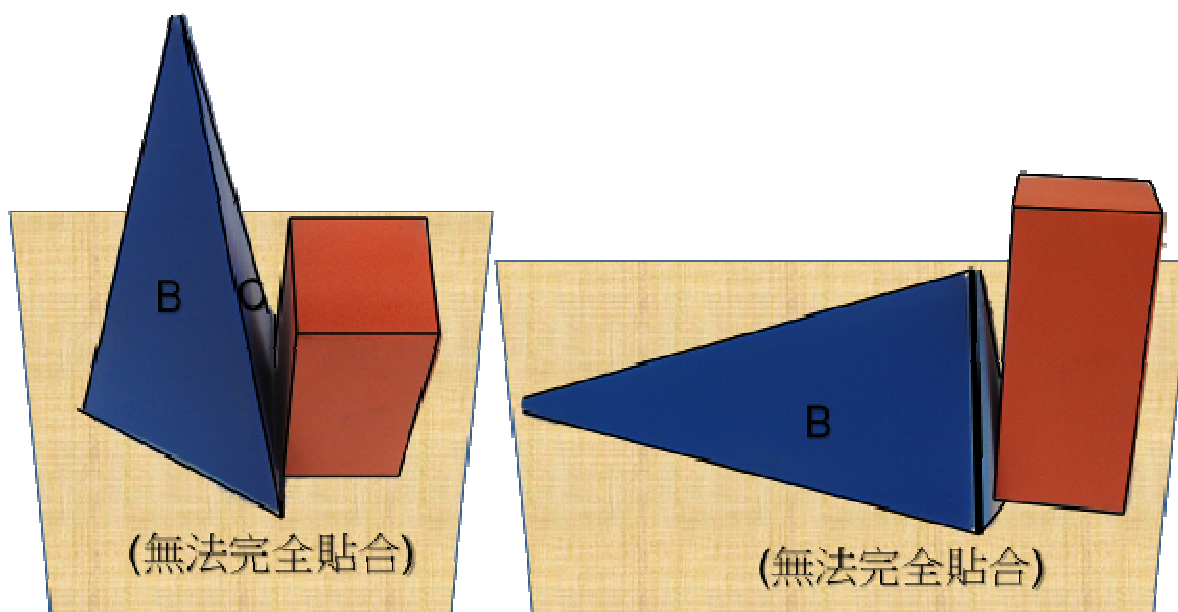
(1)五角柱的側面與底面互相垂直，側面與側面不互相垂直，如

【圖八】。



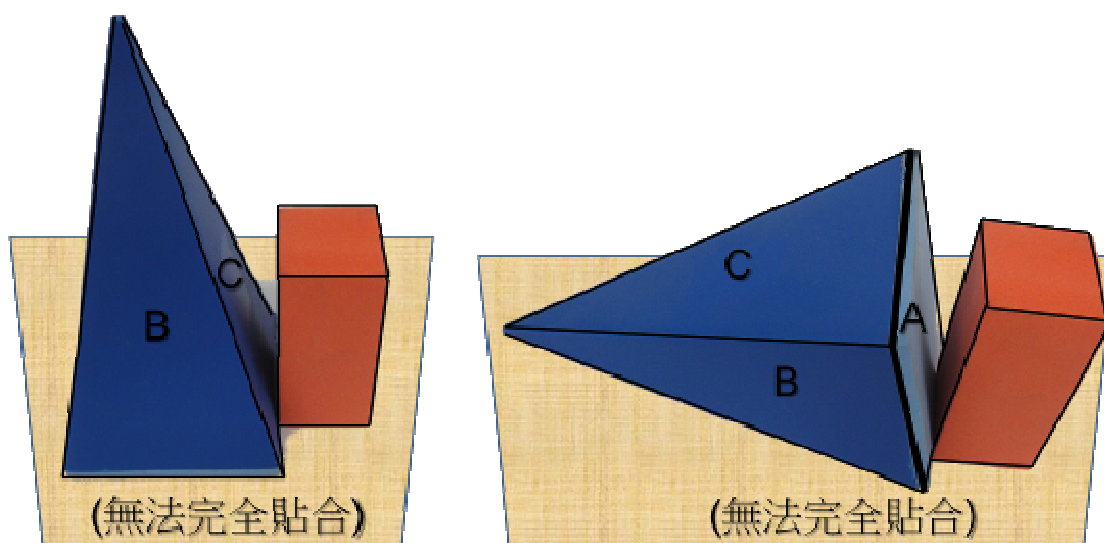
【圖八】

(2)三角錐無互相垂直的面，如【圖九】。



【圖九】

(3)四角錐無互相垂直的面，如【圖十】。



【圖十】

6. 讓學童拿出六角柱、五角錐，用長方體找出互相垂直的面。
7. 學童上台發表操作的結果，他們會發現：角柱有互相垂直的面，角錐無互相垂直的面。

指定作業：

習題一（配合活動一）



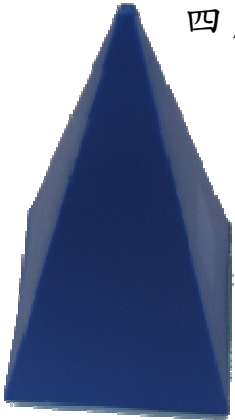
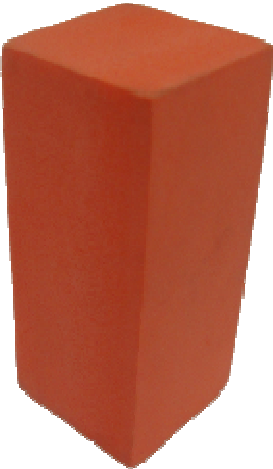


1. 拿出如下圖的物品，用長方體實際檢查這些物品，哪些物品有互相垂直的面？



答：()

習題二（配合活動二）

1. 拿出如下圖的角柱及角錐，用長方體實際檢查這些角柱、角錐，
 哪些有互相垂直的面？

<p>(1)  五角柱</p>	<p>(2)  三角柱</p>
<p>(3)  四角錐</p>	<p>(4)  四角柱</p>
<p>(5)  五角錐</p>	<p>(6)  六角柱</p>

答：()

指定作業參考解答：

習題一

1. 茶包盒、餅乾盒、魔術方塊、橡皮擦

習題二

1. 五角柱、三角柱、四角柱、六角柱

教學注意事項：

1. 活動一，畫兩面牆相連直線的垂直線時，教師宜提醒學童，不可以只過 O 點在平面甲及平面乙任意的畫上直線，所畫出的直線必須和兩面牆相連的直線垂直，才能透過畫出的兩條直線是否互相垂直，來判斷平面甲與平面乙是否互相垂直。
2. 活動二，檢驗角柱或角錐是否有互相垂直的面時，柱體與錐體需完全平放在桌面上，長方體貼近角柱或角錐時，也必須完全平放在桌面上，以免因移動角柱、角錐及長方體，影響檢驗結果。
3. 活動二，角柱、角錐只討論某兩個平面是否互相垂直，不討論角柱的某一平面和哪些平面互相垂直。

教學參考資料：

周筱亭等(民 95)。國小數學教材分析—幾何。三峽：國家教育研究院。

主題 5-2-2：面與面的平行

～面與面的平行關係

授課對象：國小六年級學生

先備知識：

1. 知道在同一平面上，兩條直線互相垂直、平行的意義。
2. 知道立體形體的構成要素。

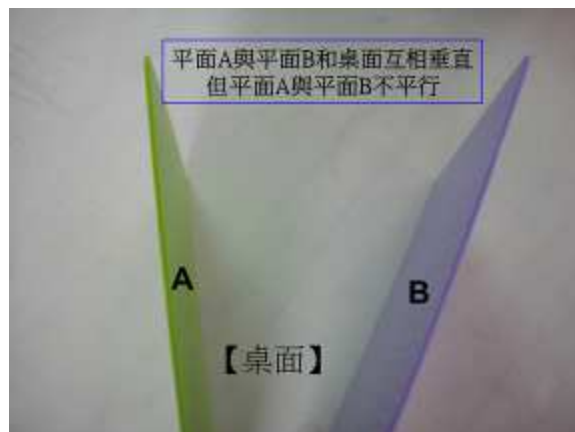
教學目標：

1. 認識面與面的平行關係。
2. 檢驗兩平面是否互相平行。

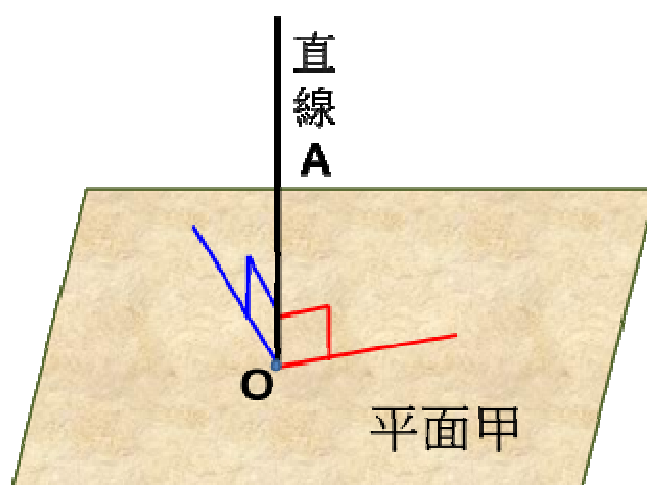
教學時間： 40 分鐘（一節課）

教學說明：

1. 「在同一平面上，兩條直線同時垂直於另一條直線，則兩條直線互相平行」的想法，不可延伸為「兩個平面同時垂直於另一個平面，則兩平面互相平行」，因為當兩個平面同時垂直於另一個平面，這兩個平面可能不會互相平行（如下圖）。



2. 在數學上，當兩個相異平面的法向量相等時，這兩個平面互相平行（參見理念篇 5-2-2：面與面的平行）。因此，空間中兩個相異的平面同時垂直於一條直線時，這兩個平面互相平行。
3. 檢查一個平面甲是否垂直於一條直線 A，應在這個平面甲上，由直線 A 與平面甲相交的一點 O，畫兩條不共線的直線，若這兩條直線都與直線 A 垂直，則直線 A 與平面甲互相垂直(如下圖)。



4. 我們可以利用三角板的直角檢驗一條直線是否和一個平面互相垂直。用三角板檢驗長棍（代表直線）是否和桌面（代表平面）垂直的方法如下：
- (1) 先將三角板直角的一邊貼緊長棍，看直角的另一邊是否貼緊桌面。
 - (2) 當三角板直角的另一邊貼緊桌面時，讓三角板的一邊仍然貼緊長棍，以長棍為軸心，再旋轉三角板。
 - (3) 旋轉後若三角板的另一邊依然貼緊於桌面，則長棍與桌面互相垂直。

相垂直（如下圖）。



(1)

(2)

(3)

6. 本教學活動重點：(1)由生活中的事物，認識面與面的平行關係。(2)用長棍與三角板檢驗兩個平面是否互相平行。

教具準備：

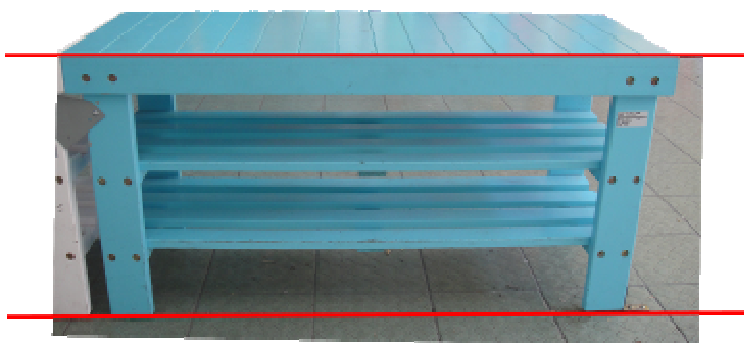
長棍、三角板、長方體、三角柱、五角柱、六角柱、三角錐、四角錐、五角錐。

活動一：認識面與面的平行關係

活動目標：由生活中地面與椅面、桌面與椅面的關係，認識面與面的平行關係。

活動流程：

1. 教師讓學童回想兩條直線互相平行的意義，他們需知道「同時垂直於另一條直線的兩直線互相平行」。
2. 讓學童蹲下，觀察椅面和地面如【圖一】，指著椅面提問：椅面和地面看起來像不像是兩個平行的面？讓學童發表想法。

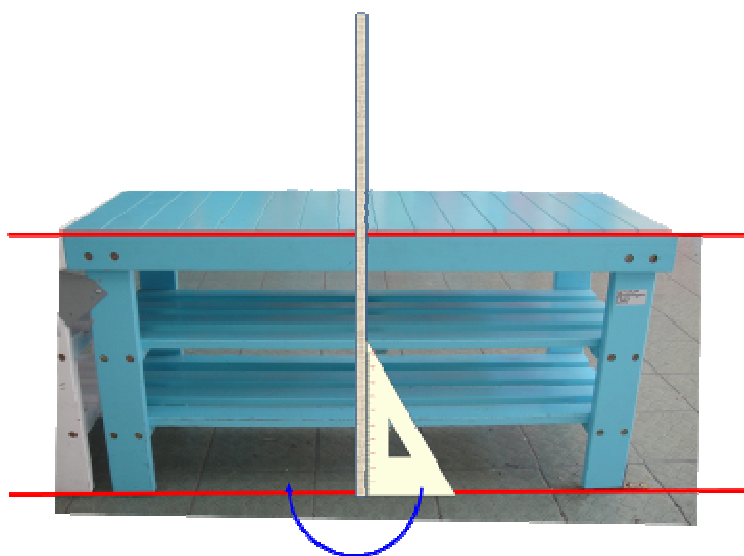


【圖一】

3. 教師說明：如果地面和椅面同時垂直於一條直線，則地面與椅面互相平行。

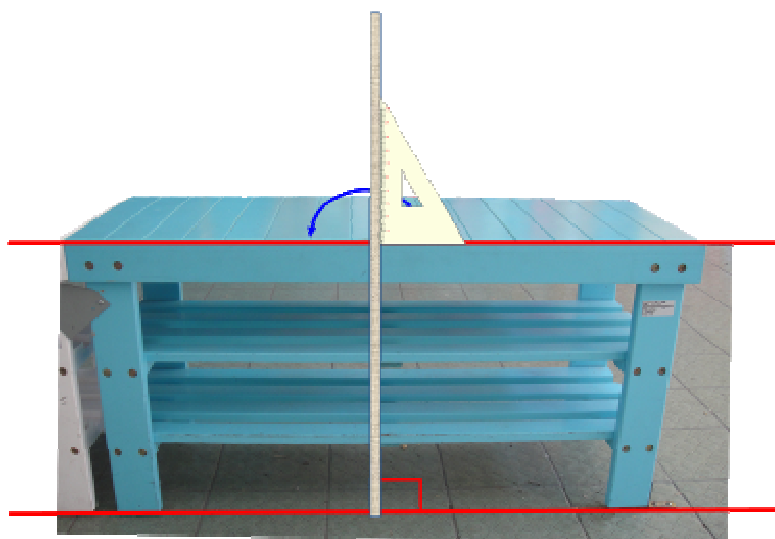
4. 操作長棍與三角板，讓學童確認地面與椅面互相平行。

(1) 先將長棍一端放於地面並將三角板的一個直角邊緊貼於地面，再將長棍與三角板直角的另一邊貼合，不移動長棍，讓三角板貼著地面旋轉，並觀察長棍是否依然與三角板直角的另一邊貼合。旋轉三角板後，當直角的一邊貼合地面，另一邊仍然貼合長棍時，則長棍與地面互相垂直，如【圖二】。



【圖二】

(2)仿(1)的作法，操作長棍與三角板，將三角板的一個直角邊緊貼於椅面，確認長棍與椅面垂直，再讓學童看到長棍與椅面也互相垂直，如【圖三】。



【圖三】

5. 教師指著長棍及地面和椅面，將長棍當成直線，說明：這一條直線同時垂直於這兩個平面，所以這兩個平面互相平行，如【圖四】。



【圖四】

6. 教師將椅子放在桌子上，提問：怎麼知道椅面和桌面是否平行？

學童可由之前的經驗說出：用長棍和三角板檢驗看看，如果長棍同時和桌面及椅面垂直，則椅面和桌面互相平行。

7. 讓學童用長棍和三角板檢驗，他們會發現長棍同時垂直於椅面和桌面，所以椅面和桌面互相平行，如【圖五】。



【圖五】

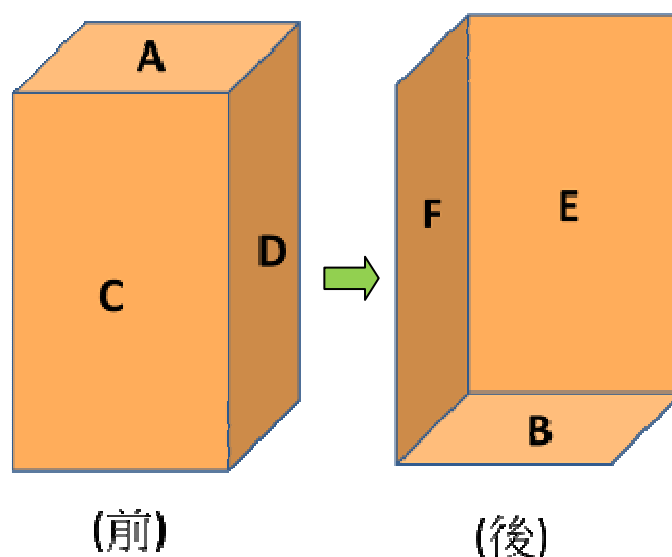
8. 教師說明：兩個平面同時垂直於另一條直線時，這兩個平面互相平行。

活動二：檢驗兩個平面是否平行

活動目標：用長棍與三角板檢查兩個平面是否同時垂直於長棍，來檢驗角柱及角錐中，兩個平面是否互相平行。

活動流程：

1. 教師拿出一個長方體，和學童依上、下、前、右、後、左的方向，一起標出六個面的代號—A、B、C、D、E、F，如【圖六】。



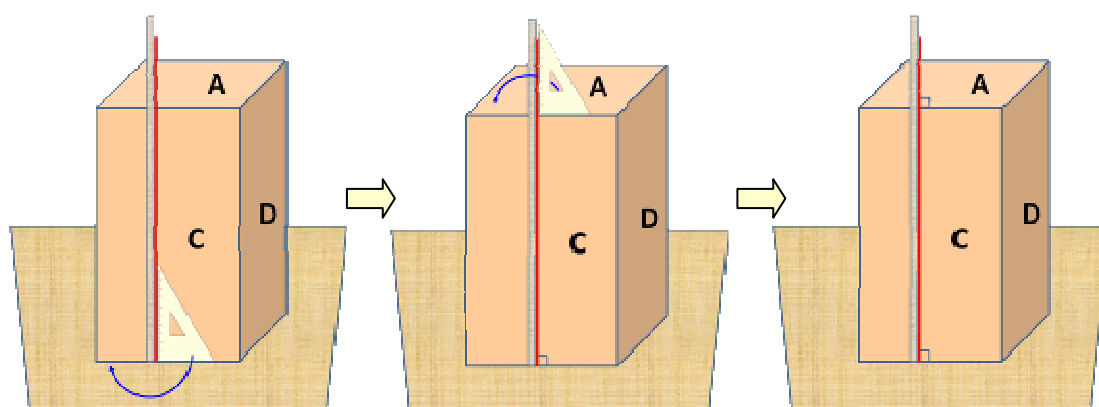
【圖六】

2. 問學童：這個長方體，有哪些面是互相平行的？學童會回答：

面 A 和面 B 平行，面 C 和面 E 平行，面 D 和面 F 平行。

3. 將長方體放於桌面上，用長棍貼著面 C，讓學童確認面 B 和桌面在同一平面，操作三角板，看到長棍同時垂直於面 A 和面 B 如

【圖七】，教師指著長棍並說明：當兩個平面和同一條直線垂直時，這兩個平面互相平行。

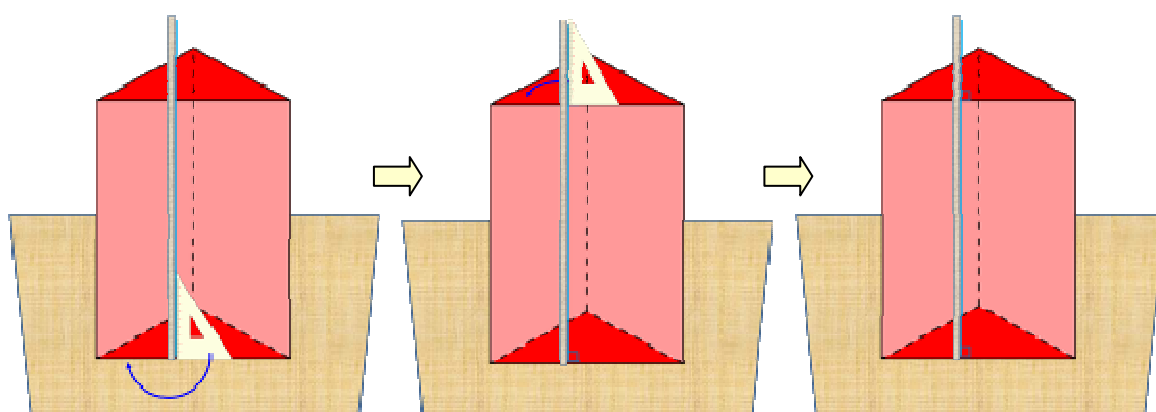


【圖七】

4. 將長方體翻轉後，再放置於桌上，並操作三角板，讓學童看到

長棍也同時垂直於面 C 和面 E、面 D 和面 F，所以，面 C 和面 E 互相平行，面 D 和面 F 互相平行。

5. 拿出三角柱放於桌面上，操作長棍和三角板，學童看到長棍同時垂直於兩底面如【圖八】，讓他們確認三角柱的兩個底面互相平行。



【圖八】

6. 將三角柱翻轉後，再放置於桌面上，並用長棍和三角板檢驗是否還有其他同時垂直於長棍的兩個平面，學童會發現三角柱只有兩個底面互相平行。

7. 讓學童拿出五角柱、六角柱、三角錐、四角錐、五角錐，五角錐，依活動流程 3 及 4 的方式，操作用長棍和三角板，找出各形體中互相平行的面。

(1) 五角柱：底面 A 與底面 B 平行。

(2) 六角柱：底面 A 與底面 B 平行，側面 C 與側面 F 平行，側面 D 與側面 G 平行，側面 E 與側面 H 平行。

(3) 三角錐、四角錐、五角錐皆無平行的面。

8. 學童上台發表操作的結果，他們會發現：角柱的兩個底面互相平行；長方體、六角柱的側面有互相平行的面，三角柱、五角柱的側面無互相平行的面；角錐皆無互相平行的面。

指定作業：

習題一（配合活動一）



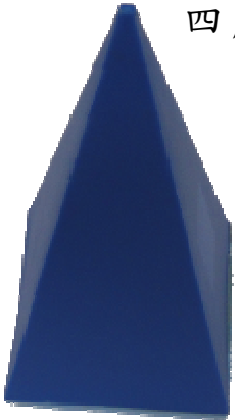
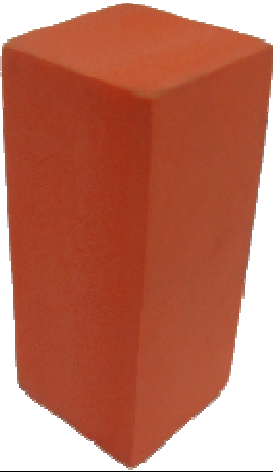


1. 拿出如下圖的物品，用長棍和三角板實際檢查看看，哪些物品有互相平行的面？

 <p style="text-align: center;">【茶包盒】</p>	 <p style="text-align: center;">【餅乾盒】</p>
 <p style="text-align: center;">【魔術方塊】</p>	 <p style="text-align: center;">【橡皮擦】</p>

答：()

習題二（配合活動二）

1. 拿出下列各角柱及角錐，用長棍和三角板實際檢查，它們各有幾組互相平行的面？

<p>(1) 五角柱</p> 	<p>(2) 三角柱</p> 
<p>(3) 四角錐</p> 	<p>(4) 四角柱</p> 
<p>(5) 五角錐</p> 	<p>(6) 六角柱</p> 

答：()

指定作業參考解答：

習題一

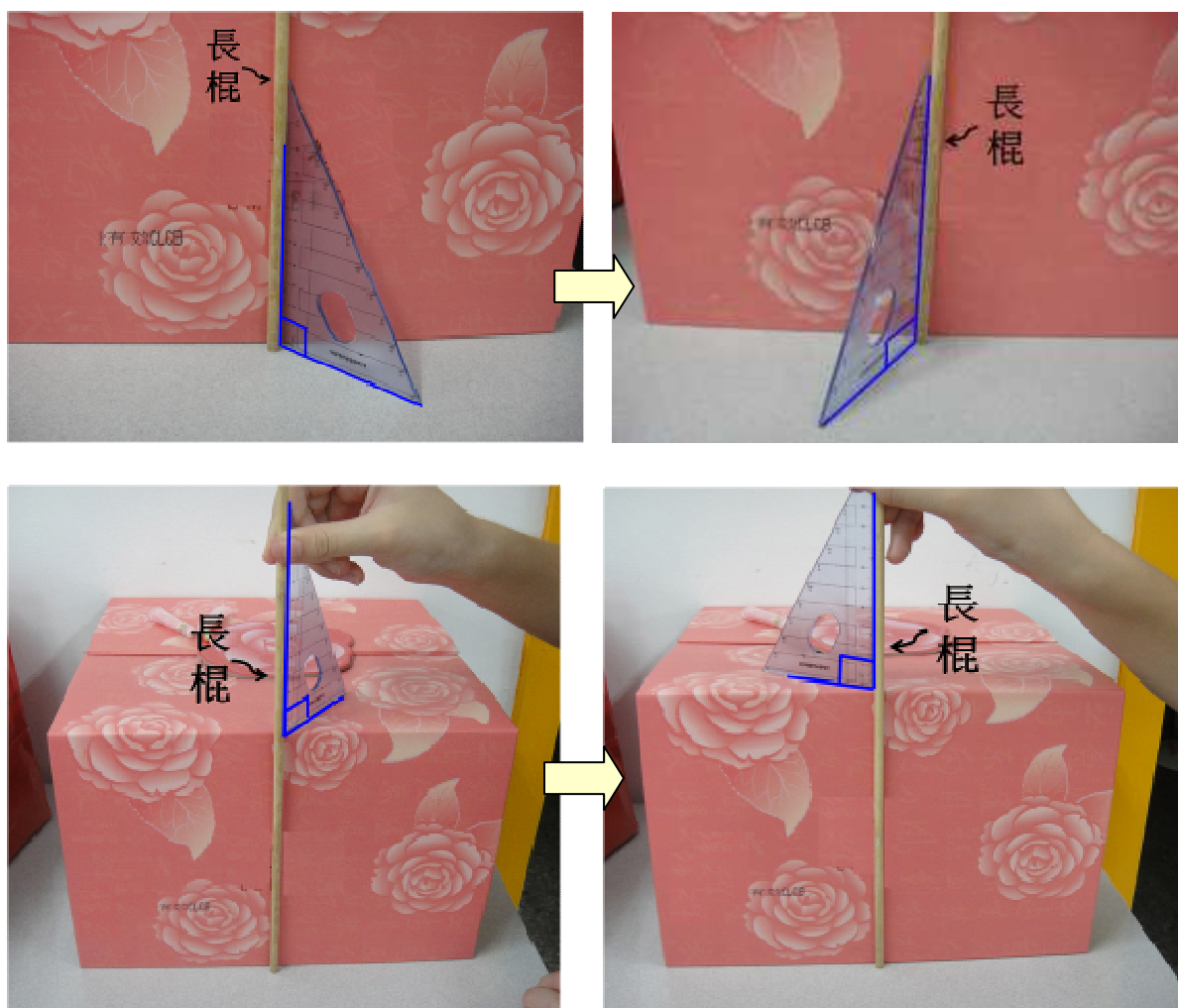
1. 茶包盒、餅乾盒、魔術方塊、橡皮擦

習題二

1. 五角柱 1 組、三角柱 1 組、四角錐 0 組、四角柱 3 組
五角錐 0 組、六角柱 4 組

教學注意事項：

1. 利用三角板的直角檢驗長棍是否與平面垂直時，三角板的直角最少要在平面上不共線的兩條直線上進行檢驗，且檢驗的結果皆為三角板直角的一邊緊貼於長棍，另一邊緊貼於平面時，才可確認長棍與平面互相垂直。
2. 活動二，檢驗長棍是否垂直於上下兩個底面時，應先確認學童能將下底面與桌面視為同一個平面，再操作長棍，讓長棍與桌面互相垂直，並用三角板檢驗長棍是否和桌面互相垂直，當長棍與桌面互相垂直時，長棍與下底面也互相垂直。接著檢驗長棍是否與上底面互相垂直，此時不可移動長棍，只能操作三角板，以免影響檢驗結果（如下圖）。



教學參考資料：

周筱亭等(民 95)。國小數學教材分析—幾何。三峽：國家教育研究院。

主題 5-3-2：角柱、角錐的頂點、邊與面的個數關係

授課對象：國小六年級學生

先備知識：

1. 認識角柱及其構成要素。
2. 認識角錐及其構成要素。

教學目標：

1. 能用 n 角柱的 n 為變數，描述角柱之頂點、邊及面的個數。
2. 能用 n 角錐的 n 為變數，描述角錐之頂點、邊及面的個數。
3. 能知道角柱與角錐的頂點、邊及面的個數都滿足「頂點個數 + 面的個數 = 邊的個數 + 2」的關係。

教學時間：80 分鐘（二節課）

教學說明：

1. 柱體及錐體的構成要素包括：頂點、邊、面。學童應透過觀察、觸摸柱體、錐體來認識頂點、邊、面，如：柱體、錐體中，尖尖的點稱為「頂點」；摸起來平平的區域稱為「面」；面和面之間轉彎部分所形成的直線稱為「邊」。
2. 關於角柱、角錐的頂點、邊、面的個數，應先讓學童記錄不同角柱及角錐的頂點、邊、面的個數，再讓他們用角柱、角錐底面的邊的個數來描述角柱和角錐的頂點、邊及面的個數。
3. 當學童能用底面的邊的個數來描述角柱和角錐的頂點、邊及面

的個數，要進一步幫助學童以變數的想法，來描述頂點、邊及面的個數，以角柱為例：先以 n 代表 3 角柱、4 角柱、5 角柱的 3、4、5，則 3 角柱、4 角柱、5 角柱的頂點個數，可記為 $n \times 2$ 、邊個數可記為 $n \times 3$ 、面的個數可記為 $n + 2$ ，再引導他們了解 n 可以是任何大於 3 的正整數。

4. 角柱及角錐都滿足「頂點的個數 + 面的個數 = 邊的個數 + 2」的關係，數學上稱該關係為尤拉公式。但在國小階段，只進行角柱、角錐的頂點、邊、面的個數，滿足「面的個數 + 頂點的個數 - 邊的個數 = 2」的教學活動，不介紹「尤拉公式」這個名詞，且不做任何課後評量。
5. 本教學活動只討論面是平面及邊是直線的柱體及錐體，不包含圓柱及圓錐。
6. 本教學活動重點：(1) 觀察角柱模型，用角柱底面的邊數描述頂點、邊及面的個數，並用 n 角柱的 n 為變數來描述角柱頂點、邊及面的個數。(2) 觀察角錐模型，用角錐底面的邊數描述頂點、邊及面的個數，並用 n 角錐的 n 為變數來描述角錐頂點、邊及面的個數。(3) 由觀察不同角柱、角錐之頂點、邊及面的個數，知道角柱、角錐的頂點、邊、面的個數，滿足「面的個數 + 頂點的個數 - 邊的個數 = 2」。

教具準備：

1. 學習單、三角柱、四角柱、五角柱、六角柱、八角柱的模型。
2. 學習單、三角錐、四角錐、五角錐、六角錐、八角錐的模型。

活動一：由角柱底面的邊數，找出頂點、邊及面的個數

活動目標：1. 觀察角柱模型並記錄各角柱頂點、邊及面的個數。

2. 用角柱底面的邊數描述頂點、邊及面的個數。

3. 用 n 角柱的 n 為變數來描述角柱頂點、邊及面的個數。

活動流程：

1. 請學童拿出三角柱、四角柱、五角柱、六角柱的模型，並發下學習單，如【表一】。

柱體名稱	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數

【表一】

2. 教師拿起三角柱，問：這是什麼形體？學童會回答：三角柱。

再問：三角柱的底面是什麼形狀？三角柱有幾個面？幾個頂點？幾個邊？以確認學童知道三角柱的底面形狀，及面、頂點、邊的意義和個數，再引導他們依序完成學習單，如【表二】。

柱體名稱	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數
三角柱	三角形	5	6	9
四角柱	四邊形	6	8	12
五角柱	五邊形	7	10	15
六角柱	六邊形	8	12	18

【表二】

3. 完成學習單後，讓學童發表想法，他們會發現不論是幾角柱，它們都是：面的個數最少、邊的個數最多。

4. 讓學童用角柱底面形狀的邊數描述面、頂點、邊的個數，並修改學習單。

(1) 提問：三角柱的底面有幾個邊？學童會回答：3 個，再問：三角柱共有幾個面？幾個頂點？幾個邊？面的個數、頂點個數、邊的個數和三角柱底面的邊數「3」有什麼關係？引導學童發現三角柱面的個數是「 $3+2$ 」、頂點的個數是「 3×2 」、邊的個數是「 3×3 」。修改學習單中三角柱面、頂點、邊的個數的資料。

(2) 提問：四角柱的底面有幾個邊？學童會回答：4 個，再問：四角柱共有幾個面？幾個頂點？幾個邊？面的個數、頂點個數、邊的個數和四角柱底面的邊數「4」有什麼關係？引導學童發現四角柱面的個數是「 $4+2$ 」、頂點的個數是「 4×2 」、邊的個數是「 4×3 」。修改學習單中四角柱面、頂點、邊的個數的資料。

(3) 讓學童修改學習單中六角柱的資料，如【表三】。

柱體名稱	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數
三角柱	三角形	$3+2$	3×2	3×3
四角柱	四邊形	$4+2$	4×2	4×3
五角柱	五邊形	$5+2$	5×2	5×3
六角柱	六邊形	$6+2$	6×2	6×3

【表三】

(4)教師在黑板上張貼學童完成的學習單，由三角柱的「3」、四角柱的「4」、五角柱的「5」、六角柱的「6」，引導他們發現面的個數都是「幾」角柱的「幾」加2，頂點的個數都是「幾」角柱的「幾」乘以2，邊的個數都是「幾」角柱的「幾」乘以3。

(5)讓學童使用「n」角柱來代替「幾」角柱，n可以等於3，可以等於4，也可以等於5、6。

5. 引導學童記錄： $n=3, 4, 5, 6$ n角柱：面的個數= $n+2$ 、頂點的個數= $n\times 2$ 、邊的個數= $n\times 3$ 。

6. 問學童：如果n等於8，是幾角柱？學童會回答：8角柱。讓學童用算式算出8角柱面、頂點、邊的個數，他們會算出8角柱：面的個數是 $8+2=10$ 、頂點的個數是 $8\times 2=16$ 、邊的個數是 $8\times 3=24$ ，所以8角柱有10個面、16個頂點、24個邊。

7. 讓學童拿出8角柱，檢驗8角柱是否有10個面、16個頂點、24個邊。教師說明：只要是角柱都可以用「n角柱：面的個數= $n+2$ 、頂點的個數= $n\times 2$ 、邊的個數= $n\times 3$ 」，算出這個角柱面的

個數、頂點的個數和邊的個數。

8. 問學童：如果 $n=10$ ，能不能算出 10 角柱的面、頂點、邊的個數？學童能算出 10 角柱：面的個數是 $10+2=12$ 、頂點的個數是 $10\times 2=20$ 、邊的個數是 $10\times 3=30$ ，所以 10 角柱有 12 個面、20 個頂點、30 個邊。
9. 學童算出 $n=7, 9, 11$ ，各角柱的面、頂點、邊的個數時，逐漸了解不論 n 是哪一個整數（大於 3），都可以用同樣的方法算出 n 角柱的面、頂點、邊的個數。

活動二：由角錐底面的邊數，找出頂點、邊及面的個數

- 活動目標：1. 觀察角錐立體模型並記錄各角錐頂點、邊及面的個數。
2. 用角錐底面的邊數描述頂點、邊及面的個數。
3. 用 n 角錐的 n 為變數來描述角錐頂點、邊及面的個數。

活動流程：

1. 教師請學童拿出三角錐、四角錐、五角錐、六角錐的模型，並發下學習單如【表四】。

錐體名稱	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數

【表四】

2. 教師拿起三角錐，問學童：這是什麼形體？學童會回答：三角錐。再問：這個三角錐的底面是什麼形狀？三角錐共有幾個面？幾個頂點？幾個邊？以確認學童知道三角錐的底面形狀，及面、頂點、邊的意義，再引導他們依序完成學習單，如【表五】。

錐體名稱	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數
三角錐	三角形	4	4	6
四角錐	四邊形	5	5	8
五角錐	五邊形	6	6	10
六角錐	六邊形	7	7	12

【表五】

3. 讓學童完成學習單後發表想法，他們會發現：這些角錐，面的個數和頂點個數一樣多、邊的個數最多。
4. 讓學童用角錐底面形狀的邊數描述角錐面、頂點、邊的個數，並修改學習單。
- (1) 提問：三角錐的底面有幾個邊？學童會回答：3個，再問：

三角錐共有幾個面？幾個頂點？幾個邊？面的個數、頂點個數、邊的個數和三角錐底面的邊數「3」有什麼關係？引導學童發現面的個數是「 $3+1$ 」、頂點的個數是「 $3+1$ 」、邊的個數是「 3×2 」。修改學習單中三角錐面、頂點、邊的個數的資料。

(2) 提問：四角錐的底面有幾個邊？學童會回答：4個，再問：四角錐共有幾個面？幾個頂點？幾個邊？面的個數、頂點個數、邊的個數和四角錐底面的邊數「4」有什麼關係？引導學童發現面的個數是「 $4+1$ 」、頂點的個數是「 $4+1$ 」、邊的個數是「 4×2 」。修改學習單中四角錐面、頂點、邊的個數的資料。

(3) 讓學童修改學習單中五角錐和六角錐的資料，如【表六】。

錐體名稱	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數
三角錐	三角形	$3+1$	$3+1$	3×2
四角錐	四邊形	$4+1$	$4+1$	4×2
五角錐	五邊形	$5+1$	$5+1$	5×2
六角錐	六邊形	$6+1$	$6+1$	6×2

【表六】

(4) 教師在黑板上展示學童完成的學習單，由三角錐的「3」、四角錐的「4」、五角錐的「5」、六角錐的「6」，引導他們發現面的個數都是「幾」角錐的「幾」加1，頂點的個數都是「幾」角錐的「幾」加1，邊的個數都是「幾」角錐的「幾」乘以2。

(5) 引導學童用「 n 」角錐來代替「幾」角錐， n 可以等於3，可

以等於 4，也可以等於 5、6……。

5. 引導學童記錄： $n=3, 4, 5, 6$ n 角錐：面的個數 $=n+1$ 、頂點的個數 $=n+1$ 、邊的個數 $=n \times 2$ 。
6. 問學童：如果 n 等於 8，是幾角錐？學童會回答：8 角錐。要學童用算式算出 8 角錐面、頂點、邊的個數，他們會算出 8 角錐：面的個數是 $8+1=9$ 、頂點的個數是 $8+1=9$ 、邊的個數是 $8 \times 2=16$ ，所以 8 角錐有 9 個面、9 個頂點、16 個邊。
7. 讓學童拿出 8 角錐，檢驗 8 角錐是否有 9 個面、9 個頂點、16 個邊。教師說明：只要是角錐都可以用「 n 角錐：面的個數 $=n+1$ 、頂點的個數 $=n+1$ 、邊的個數 $=n \times 2$ 」，算出這個角錐的面的個數、頂點的個數、邊的個數。
8. 問學童：如果 $n=10$ ，能不能算出 10 角錐的面、頂點、邊的個數？學童能算出 10 角錐：面的個數是 $10+1=11$ 、頂點的個數是 $10+1=11$ 、邊的個數是 $10 \times 2=20$ ，所以 10 角錐有 11 個面、11 個頂點、20 個邊。
9. 學童算出 $n=12, 13, 14$ ，各角錐的面、頂點、邊的個數時，逐漸了解，不論 n 是哪一個整數（大於 3），都可以用同樣的方法算出 n 角錐的面、頂點、邊的個數。

活動三：角柱、角錐的頂點、邊及面的個數關係

活動目標：由觀察角柱、角錐的頂點、邊及面的個數，知道角柱、

角錐頂點、邊及面的個數，滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」。

活動流程：

1. 教師在黑板上展示柱體之頂點、邊、面個數的表格，如【表七】。

提問：想一想，從表格中角柱的頂點、邊、面的個數，可以發現它們之間有什麼關係？學童發表想法。

柱體名稱	頂點的個數	邊的個數	面的個數
三角柱	3×2	3×3	$3 + 2$
四角柱	4×2	4×3	$4 + 2$
五角柱	5×2	5×3	$5 + 2$
六角柱	6×2	6×3	$6 + 2$
八角柱	8×2	8×3	$8 + 2$

【表七】

2. 以三角柱、四角柱、五角柱的頂點、邊、面的個數，分別是3、4、5的幾倍，引導學童發現柱體的「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」。

(1) 問學童：三角柱邊的個數是3的幾倍？頂點的個數是3的幾倍？學童會回答：三角柱邊的個數是3的3倍，頂點的個數是3的2倍，接著引導學童說出三角柱面的個數是3的1倍+2。讓他們發現三角柱面的個數是 $3 \times 1 + 2$ ，頂點的個數是 3×2 ，面和頂點的個數加起來是 $3 \times 3 + 2$ ，邊的個數是 3×3 ，三

角柱面的個數和頂點個數的和，與邊的個數差 2，也就是 $3 \times 3 + 2 - 3 \times 3 = 2$ 。

(2) 問學童：四角柱邊的個數是 4 的幾倍？頂點的個數是 4 的幾倍？學童會回答：四角柱邊的個數是 4 的 3 倍，頂點的個數是 4 的 2 倍，接著引導學童說出四角柱面的個數是 4 的 1 倍 + 2。讓他們發現四角柱面的個數是 $4 \times 1 + 2$ ，頂點的個數是 4×2 ，面和頂點的個數加起來是 $4 \times 3 + 2$ ，邊的個數是 4×3 ，四角柱面的個數和頂點的個數的和，與邊的個數差 2，也就是 $4 \times 3 + 2 - 4 \times 3 = 2$ 。

(3) 問學童：五角柱邊的個數是 5 的幾倍？頂點的個數是 5 的幾倍？學童會回答：五角柱邊的個數是 5 的 3 倍，頂點的個數是 5 的 2 倍，接著引導學童說出五角柱面的個數是 5 的 1 倍 + 2。讓他們發現五角柱面的個數是 $5 \times 1 + 2$ ，頂點的個數是 5×2 ，面和頂點的個數加起來是 $5 \times 3 + 2$ ，邊的個數是 5×3 ，五角柱面的個數和頂點的個數的和，與邊的個數差 2，也就是 $5 \times 3 + 2 - 5 \times 3 = 2$ 。

(4) 引導學童發現三角柱、四角柱、五角柱都符合「面的個數 + 頂點的個數 - 邊的個數 = 2」。

3. 問學童：其他角柱面的個數加上頂點的個數和邊的個數相差多少？學童會發現其他的角柱都是「面的個數 + 頂點的個數 - 邊

的個數 $=2$ 」。

4. 讓學童列出 7 角柱、9 角柱、10 角柱、11 角柱、12 角柱的頂點、邊、面的計算方式，問學童：它們是不是也都是「面的個數+頂點的個數-邊的個數 $=2$ 」？學童發現這些角柱也是「面的個數+頂點的個數-邊的個數 $=2$ 」，教師說明：所有的角柱的「面的個數+頂點的個數-邊的個數 $=2$ 」。
5. 教師提問：角錐也都是「面的個數+頂點的個數-邊的個數 $=2$ 」嗎？展示錐體頂點、邊、面個數的表格，如【表八】。學童會發現角錐也是「面的個數+頂點的個數-邊的個數 $=2$ 」。

錐體名稱	面的個數	頂點的個數	邊的個數
三角錐	3+1	3+1	3×2
四角錐	4+1	4+1	4×2
五角錐	5+1	5+1	5×2
六角錐	6+1	6+1	6×2
八角錐	8+1	8+1	8×2

【表八】

6. 讓學童列出 10 角錐、11 角錐、12 角錐、13 角錐、14 角錐的頂點、邊、面的計算方式，問學童：是不是也是「面的個數+頂點的個數-邊的個數 $=2$ 」？學童發現這些角錐也是「面的個數+頂點的個數-邊的個數 $=2$ 」，教師說明：所有的角錐的「面的個數+頂點的個數-邊的個數 $=2$ 」。

7. 教師在黑板上寫「面的個數 + 頂點的個數 - 邊的個數 = 2」。教師說明：雖然角柱和角錐的頂點、邊、面的個數計算方法不同，但不論是角柱或是角錐，它們面的個數加上頂點的個數減掉邊的個數都會等於 2。

指定作業：

習題一（配合活動一）

1. 十二角柱有幾個邊、幾個頂點、幾個面？先寫出算法再回答。

答：()

2. 有一個角柱，總共有 15 個面，它是幾角柱？有幾個頂點、幾個面？先寫出算法再回答。

答：()

3. 有一個角柱，總共有 48 個邊，它是幾角柱？有幾個頂點、幾個面？先寫出算法再回答。

答：()

習題二（配合活動二）

1. 十五角錐有幾個邊、幾個頂點、幾個面？先寫出算法再回答。

答：()

2. 有一個角錐，總共有 9 個面，它是幾角錐？有幾個頂點、幾個邊？先寫出算法再回答。

答：()

3. 有一個角錐，總共有 36 個邊，它是幾角錐？有幾個頂點、幾個邊？先寫出算法再回答。

答：()

習題三（配合活動一、活動二）

1. 完成下表。

形體名稱 (角柱或角錐)	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數
	三角形		$3 \times 2 = 6$	
四角錐		$4 + 1 = 5$		
	六邊形			$6 \times 3 = 18$
六角錐	六邊形	$6 + 1 = 7$		
	九邊形		$9 + 1 = 10$	
十角柱		$10 + 2 = 12$		

指定作業參考解答：

習題一

1. $12 \times 3 = 36$ ， $12 \times 2 = 24$ ， $12 + 2 = 14$ ，36 個邊，24 個頂點，14 個面

2. $15 - 2 = 13$ ， $13 \times 2 = 26$ ， $13 \times 3 = 39$ ，13 角柱，26 個頂點，39 個邊

3. $48 \div 3 = 16$ ， $16 \times 2 = 32$ ， $16 + 2 = 18$ ，16 角柱，32 個頂點，18 個面

習題二

1. $15 \times 2 = 30$ ， $15 + 1 = 16$ ， $15 + 1 = 16$ ，30 個邊，16 個頂點，16 個面

2. $9 - 1 = 8$ ， $8 \times 2 = 16$ ， $8 + 1 = 9$ ，8 角錐，16 個頂點，9 個邊

3. $36 \div 2 = 18$ ， $18 + 1 = 19$ ， $18 + 1 = 19$ ，18 角錐，19 個頂點，19 個面

習題三

1.

形體名稱 (角柱或角錐)	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數
三角柱	三角形	$3+2=5$	$3\times 2=6$	$3\times 3=9$
四角錐	四邊形	$4+1=5$	$4+1=5$	$4\times 2=8$
六角柱	六邊形	$6+2=8$	$6\times 2=12$	$6\times 3=18$
六角錐	六邊形	$6+1=7$	$6+1=7$	$6\times 2=12$
九角錐	九邊形	$9+1=10$	$9+1=10$	$9\times 2=18$
十角柱	十邊形	$10+2=12$	$10\times 2=20$	$10\times 3=30$

教學注意事項：

- 以 n 代表底面邊的個數（或頂點的個數）時，應讓學童了解 n 不是只等於某一個數，而是一個變數，所以在教學活動中，必須讓學童能記錄「 $n=3, 4, 5, 6, \dots$ 」。以角柱為例，讓學童先記錄頂點的個數為 $n\times 2$ 、邊的個數為 $n\times 3$ 、面的個數為 $n+2$ 後，再知道 n 可以等於 3、4、5、……。
- 在學童知道角柱、角錐的頂點、邊、面的個數，滿足「面的個數 + 頂點的個數 - 邊的個數 = 2」後，教師可在課堂上進行相關的延伸教學活動，如下：
 - (1) 疊合三角柱、三角錐或五角柱、五角錐(如下圖)，讓學童記錄此複合形體的頂點、邊、面的個數，並引導他們發現此複

合形體的頂點、邊、面的個數，同樣滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」。

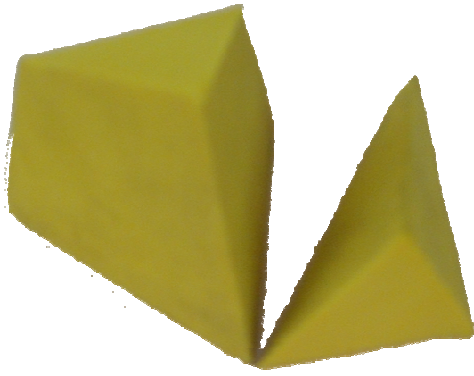


(三角柱+三角錐)

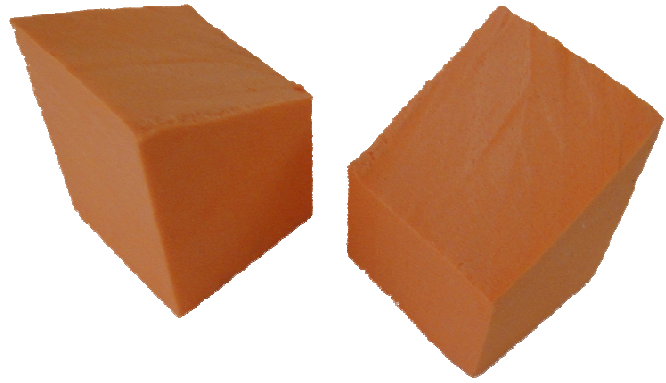


(五角柱+五角錐)

(2)切割三角錐或四角柱(如下圖)，讓學童記錄切割後各形體的頂點、邊、面的個數，並引導他們發現切割後各形體的頂點、邊、面的個數，同樣滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」。



(切割三角錐)



(切割四角柱)

4. 關於尤拉公式的教學活動及延伸教學活動僅在課堂上進行，不宜進行課後評量。

教學參考資料：

周筱亭等(民 95)。國小數學教材分析—幾何。三峽：國家教育研究院。

數學領域教材原型研發編輯計畫－試教教學活動設計

一、教學主題：三角形任兩邊長之和大於第三邊

二、教學年級：五年級

三、教學者：臺北市文昌國民小學 吳欣悅教師

四、教學目標：能知道三角形任兩邊長之和大於第三邊。

五、教學的重點：能透過拼排竹籤，發現任兩支竹籤之和大於第三支竹籤的長時，可以排成一個三角形。

六、活動目標：

【活動一】透過竹籤拼成三角形的活動，知道較短兩邊長之和大於最長邊時可以拼成一個三角形。

【活動二】能知道三角形任兩邊長之和大於第三邊。

七、教學說明：

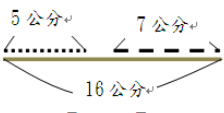

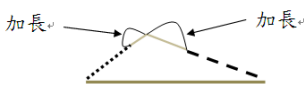
1. 教師在教此觀念時，最常用的方法是提供不同長度的竹籤，讓學童任意選出三支竹籤來圍成一個三角形，因此有些竹籤的組合可以圍成一個三角形，有些組合則無法圍成，在此情形之下，學童所觀察到的是：三角形較短的兩邊之和必須大於最長邊，才能圍成一個三角形。
2. 當三角形中「較短的兩邊之和大於最長邊」時，則「最長邊及次長邊的和於最短邊」與「最短邊及最長邊的和於次長邊」也一定成立，但是學生卻不易察覺「三角形任兩邊之和大於第三邊」，因為當最長邊及次長邊的和於最短邊，以及最長邊及最短邊的和於次長邊一定會成立，學生不會去討論，也就是說，學生只察覺了「三角形較短兩邊的和於最長邊」時，才能圍成一個三角形。
3. 學生很容易觀察到「三角形較短兩邊的和於最長邊」的結果，但是，沒有教師的幫助，學生很難自行從「三角形較短兩邊之和大於最長邊」的認知，推演到「三角形任兩邊之和大於第三邊」。
4. 教師可以透過三角形三個邊中，任意兩邊的相加結果皆大於第三邊，幫助學生知道最後只要判斷「三角形較短的兩邊之和大於最長邊」，就一定能圍成一個三角形。

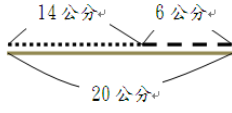

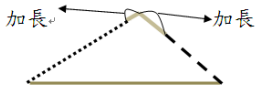
八、教學準備：竹籤 5 公分、7 公分、16 公分、8 公分、9 公分、12 公分、6 公分、14 公分、20 公分各 1 支，A4 紙 40 張、3 張學單。

九、教學活動設計：

【活動一】三角形較短兩邊長之和大於第三邊

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
讓學童將 ABC 三組竹籤組成三角形。	1. 教師將學童分組，每組發給 A、B、C 三組竹籤。 A：5 公分、7 公分、16 公分 B：8 公分、9 公分、12 公分 C：6 公分、14 公分、20 公分 三組竹籤不能彼此交換，請學童將竹籤組成三角形。	* 教師觀察學童的操作過程，並請學童於嘗試過後，將 A、B、C 三組竹籤留在桌上，讓同學觀察操作結果。 (1) 學童能看到三組操作結果只有 B 組的竹籤可以拼成一個三角形。	◎學童能參與操作。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>討論 A 組竹籤。</p>	<p>2. 教師與學童討論 A 組竹籤。</p>	<p>(2) 讓學童從操作中知道 A、C 兩組不能拼成三角形。</p> <p>*發下 A4 紙張讓學童將操作結果畫在紙上如【圖一】，並測量竹籤長度。</p>  <p>【圖一】</p> <p>(1) 教師提示學童於描繪時，可以將最長的竹籤擺在下方之後，再加以繪製。</p> <p>(2) 學童觀察【圖一】可以發現 5 公分和 7 公分合起來小於 16 公分。</p> <p>(3) 學童將 5 公分和 7 公分竹籤的兩邊端點與 16 公分竹籤的兩邊端點連接，移動竹籤，發現無法圍成三角形，並將其中一種情況在紙張上描繪如【圖二】。</p>  <p>【圖二】</p> <p>(4) 讓學童討論要如何做才能圍成三角形。</p> <p>(5) 學童嘗試從【圖二】上畫出兩邊竹籤的延長線，如【圖三】。</p>  <p>【圖三】</p>	<p>◎能知道 A、C 兩組不能拼成三角形。</p> <p>◎能操作竹籤並繪製出【圖一】。</p> <p>◎能繪製出竹籤不能圍成三角形的一種情況。</p> <p>◎能畫出兩邊竹籤的延長線。</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>討論 C 組竹籤。</p>	<p>3. 教師與學童討論 C 組竹籤。</p>	<p>*發下 A4 紙張讓學童將操作結果畫在紙上如【圖四】，並測量竹籤長度。</p>  <p>【圖四】</p> <p>(1) 教師提示學童於描繪時，可以將最長的竹籤擺在下方之後，再加以繪製。</p> <p>(2) 學童觀察【圖四】可以發現 14 公分和 6 公分合起來小於 20 公分。</p> <p>(3) 學童將 14 公分和 6 公分竹籤的兩邊端點與 20 公分竹籤的兩邊端點連接，移動竹籤，發現無法圍成三角形，並將其中一種情況在紙張上描繪如【圖五】。</p>  <p>【圖五】</p> <p>(4) 讓學童討論要如何做才能圍成三角形。</p> <p>(5) 學童嘗試從【圖五】上畫出兩邊竹籤的延長線，如【圖六】。</p>  <p>【圖六】</p>	<p>◎能操作竹籤並繪製出【圖五】。</p> <p>◎能畫出兩邊竹籤的延長線。</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
學童觀察 A 組竹籤，任兩邊兩兩相加與第三邊作比較。	2. 教師學童觀察 A 組竹籤。	<p>*教師說明 A 組的竹籤排列中 5 公分、7 公分、8 公分為例，5 公分為最短邊、8 公分為最長邊、7 公分為次長邊，讓學童將 3 個邊長兩兩相加與第三邊做比較。</p> <p>*學生發表相加的結果： (1) $5+7>8$，最短邊加上次長邊長度的和大於最長邊的長度時，可以圍成一個三角形。 (2) $8+7>5$ 最長邊加上次長邊的長度和一定會大於最短邊。 (3) $8+5>7$ 最長邊加上最短邊的長度和也一定大於次長邊。 學童可以發現任意組合比大小的結果，三角形任兩邊的長度和都會大於第三邊。</p>	◎能發表觀察的結果。
檢驗 B、C 竹籤邊長的大小關係。	3. 請各組學生檢驗 B、C 竹籤是否皆有這樣的大小關係。	*學生會發現 B、C 兩組，每一組的竹籤都可以將任兩支竹籤的長度相加，而相加的結果皆大於第三邊。	
教師總結「活動一」與「活動二」的結果。	4. 教師總結「活動一」與「活動二」的結果。 5. 三角形任兩邊的長度和都會大於第三邊。但是	<p>*教師說明。 (1)「活動一」的結果是：三角形較短兩個邊的長度相加會大於最長邊的長度。 (2)「活動二」的結果是：在「活動一」的結果下，再檢驗任意兩支竹籤的長度和與第三支竹籤的長度關係，發現任兩支竹籤的長度和大於第三邊的長度。</p>	

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>教師布題，讓學童學習判斷竹籤任兩邊的長度和大於第三邊的長度。</p>	<p>在判斷三支竹籤可否圍成三角形時，只要確定較短兩邊之和大於第三邊，就知道一定可以圍成三角形。</p> <p>6. 教師接著舉一些三邊都等長，以及有兩邊等長竹籤的例子，幫助學生知道三角形任兩邊的長度和大於第三邊的長度，例如：</p> <p>(1) 8 公分、8 公分、8 公分</p> <p>(2) 9 公分、4 公分、3 公分</p> <p>(3) 8 公分、12 公分、17 公分</p> <p>(4) 15 公分、25 公分、38 公分</p> <p>(5) 25 公分、25 公分、50 公分</p>	<p>*學童回答</p> <p>(1) $(8+8>8)$ 可以圍成一個三角形。</p> <p>(2) $(3+4<9)$ 無法圍成一個三角形。</p> <p>(3) $(8+12>17)$ 可以圍成一個三角形。</p> <p>(4) $(15+25>38)$ 可以圍成一個三角形。</p> <p>(5) $(25+25=50)$ 無法圍成一個三角形。</p>	<p>◎能判斷邊長的組合是否能圍成一個三角形。</p>

九、教學注意事項：

- (1) 教師於教學時，可以彈性運用身邊的材料作為操作的教具，例如吸管、扣條…等，讓學童進行組合時方便操作。
- (2) 教師在檢驗竹籤是否能圍成一個三角形時，常常只檢驗一種組合，這種組合可能是隨意找出，或只是較短兩邊之和大於第三邊，因此，本活動的設計是從先看到較短兩邊之和大於第三邊開始。
- (3) 學童在操作竹籤時，可以任意擺放竹籤的方向。

- (4) 教師讓學童操作 A、B 兩組竹籤時，只需在 5 分鐘的時間內盡量操作出可圍成三角形的竹籤組合，不需要將全部組合全部找出，當教師和學童在操作時再將所有組合的結果說明即可。

組	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
邊長 (cm)	5	5	5	5	5	5	7	7	7	7	8	8	8	9
	7	7	8	8	9	12	8	8	9	12	9	9	12	12
	8	9	9	12	12	16	9	12	12	16	12	16	16	16

數學領域教材原型研發編輯計畫－試教教學活動設計

一、教學主題：比例尺

二、教學年級：六年級

三、教學者：國北教大實小 房昔梅教師

四、教學目標：認識不同表示方法的比例尺，並能依據地圖上的比例尺，透過量出地圖上甲乙兩點間的長度，計算出甲乙兩地實際的距離；也能透過已知甲乙兩地的距離，計算出地圖上甲乙兩點間的長度。

五、教學的重點：認識三種比例尺的表示方法，及在生活上的應用。

六、活動目標：

【活動一】：認識不同表示方法的比例尺。

【活動二】：能夠依據地圖上的比例尺，透過量出地圖上甲乙兩點間的長度，計算出甲乙兩地實際的距離；也能透過已知甲乙兩地的距離，計算出地圖上甲乙兩點間的長度。

七、教學說明：

1. 比例尺的作用是溝通地圖上的長度和實際距離的關係。常見用圖表示不同單位的放大縮小



關係，如：



或用比和 0 100 200 300 公尺 比值表示。例如：「 $\frac{1}{10000} : 1$ 」、「 $\frac{1}{10000}$ 」。

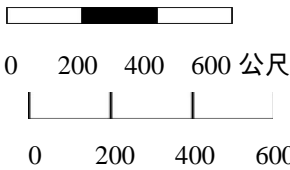
這些都表示地圖上 1 公分的長度，相當於實際距離 100 公尺或 10000 公分。

2. 無論以比或比值表示比例尺，教師都應指導學生掌握「以基準量作為比的後項」的原則。說法則為：實際範圍是地圖的 10000 倍放大圖，而地圖是實際範圍的 $\frac{1}{10000}$ 倍縮小圖。


八、教學活動設計：


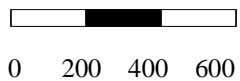
【活動一】：認識不同表示方法的比例尺。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
認識不同表示方法的比例尺	<p>1. 教師揭示一張學校附近的平面圖。(如附件一)</p> <p>2. 教師提問：這是一張縮小後的地圖，有的地圖用</p>  <p>0 200 400 600 公尺</p> <p>表示地圖上的長度和實際距離的關係；說說看：這個圖代表什麼意思？</p> <p>3. 教師追問：地圖上的1公分是實際距離的200公尺，用比的方式怎麼記？</p> <p>4. 教師提問：地圖上1公分，是實際距離的200公尺，也可以說地圖上1公分，和實際距離幾公分一樣長？用比的方式記記看。</p> <p>5. 教師說明：「1公分：20000公分」，也可以記成1：20000。用比值怎麼記呢？</p> <p>6. 教師作結論：所以，</p>  <p>0 200 400 600 公尺</p> <p>、「1：20000」和「$\frac{1}{20000}$」都是比例尺的表示方式。</p>	<p>1. 引導學生認識地圖上的比例尺，與生活經驗結合。</p> <p>2. 引導學生回答：這個圖表示地圖上的1公分是實際距離的200公尺，</p> <p>3. 引導學生回答：用比的方式記成「1公分：200公尺」</p> <p>4. 引導學生回答：地圖上1公分，是實際距離的200公尺，也可以說地圖上1公分，代表實際距離20000公分；用比的方式記成「1公分：20000公分」。</p> <p>5. 引導學生回答：1：20000用比值可以記成$\frac{1}{20000}$。</p> <p>6. 引導學生了解：這三種記法，表示的意思都一樣。一般常用的比例尺表示方式有「圖示」、「比」和「比值」三種。</p>	<p>◎能注意比例尺。</p> <p>◎能解讀圖示比例尺的意義。</p> <p>◎記成比的形式。</p> <p>◎能正確換算單位。</p> <p>◎能將比的形式記成比值。</p> <p>◎能理解比例尺有三種表示方式，且代表的意義相同。</p> <p>◎知道不同</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	 <p>和</p> <p>0 200 400 600 公尺</p> <p>0 200 400 600 公尺</p> <p>的意思是一樣的，都表示地圖上的1公分是實際距離的200公尺。</p>		<p>的圖示方式代表相同的意義。</p>

【活動二】：能夠依據地圖上的比例尺，透過量出地圖上甲乙兩點間的長度，計算出甲乙兩地實際的距離；也能透過已知甲乙兩地的距離，計算出地圖上甲乙兩點間的長度。

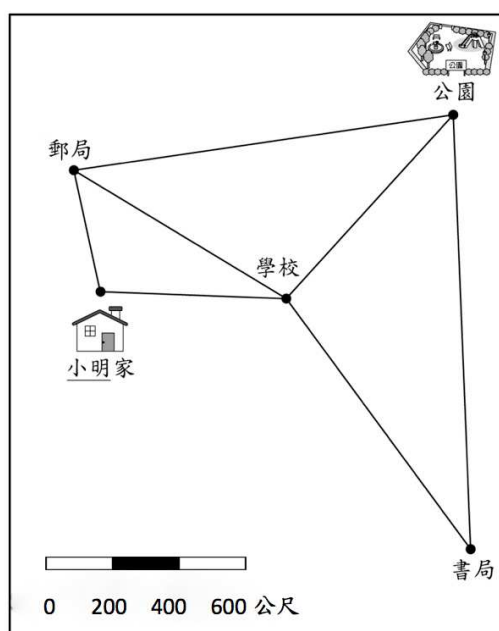
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>能夠依據地圖上的比例尺，透過量出地圖上甲乙兩點間的長度，計算出甲乙兩地實際的距離；也能透過已知甲乙兩地的距離，計算出地圖上甲乙兩點間的長度。</p>	<p>1. 教師揭示地圖（附件一），同時布題：學校到書局，地圖上長6公分，實際距離是多少公尺？</p> <p>想一想，把你的做法記下來：</p> <p>2. 教師追問：有沒有同學有不同的做法？</p> <p>3. 教師追問：有沒有同學用比值的方法做？</p>	<p>1. 部份學生透過圖示回答：由圖示</p>  <p>0 200 400 600 公尺</p> <p>我知道地圖上的1公分代表實際距離200公尺，所以地圖上6公分的長度就是實際距離1200公尺。</p> $1 \text{ 公分} : 200 \text{ 公尺}$ $= 6 \text{ 公分} : 1200 \text{ 公尺}$ <p>2. 部份學生透過比的方去解題：因為 $1 : 20000 = 6 : 120000$，所以我知道地圖上的6公分等於實際距離120000公分，也就是1200公尺。</p> <p>3. 由比值 $\frac{1}{20000} = \frac{6}{()}$，可以算出括號是120000公分，也就是1200公尺。</p>	<p>◎ 能透過圖示，了解比例尺代表的意義。</p> <p>◎ 能將比例尺記成比的形式。</p> <p>◎ 能將比例尺記成比值的形式。</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>4. 教師重新布題：<u>小明</u>騎車從家裡出發到運動中心，一共騎了 2500 公尺，在上面那張地圖上的長度是幾公分？想一想，把你的作法記下來。</p> <p>5. 同學們有不同的作法嗎？</p> <p>6. 教師重新布題：比例尺</p>  <p>0 1500公尺 用比和比值表示，各是多少？</p>	<p>4. 學生甲：由圖示</p>  <p>我知道地圖上1公分代表實際距離200公尺；所以實際距離2500公尺，在地圖上是$2500 \div 200 = 12.5$（公分）。1公分：200公尺</p> <p>$= 12.5$公分：2500公尺</p> <p>5. 學生乙：我先把2500公尺想成250000公分，由比例尺「1：20000」，列算式$1:20000 = () : 250000$，$250000 \div 20000 = 12.5$，所以我知道實際2500公尺的距離，在地圖上是12.5公分。</p> <p>學生丙：我也是把2500公尺想成250000公分，由比例尺「$\frac{1}{20000}$」，</p> $250000 \times \frac{1}{20000} = 12.5$ <p>我知道實際 2500 公尺的距離，在地圖上是 12.5 公分。</p> <p>6. 引導學生回答：</p> <p>2公分：1500公尺</p> <p>$= 1$公分：750公尺</p> <p>$= 1$公分：75000公分</p> <p>所以，用比的方式可以記成「1：75000」，比值「$\frac{1}{75000}$」。</p>	<p>◎能透過圖示的比例尺解題。</p> <p>◎能透過比的形式解題。</p> <p>◎能透過比值解題。</p> <p>◎能將圖示的比例尺改記成比和比值的形式。</p>

九、教學注意事項：

1. 除了揭示大型地圖之外，教師亦應發給每位學童紙本的地圖，以方便測量。
2. 教師應提醒學童掌握「以基準量作為比的後項」的原則。說法為：實際區域是地圖的10000倍放大圖，而地圖是實際區域的 $\frac{1}{10000}$ 倍縮小圖。
3. 建議教師安排實作活動：提供學童教室的實際長寬及課桌椅和講桌的大小，讓各組學童討論課桌椅的最佳擺設，並畫出教室內的配置圖；也可以告知學童停車格的大小，給定學童區域，讓學童討論停車場的規畫。這類活動將使學童對於「地圖和比例尺」有更具體的概念。

附件一、



數學領域教材原型研發編輯計畫－試教教學活動設計

一、教學主題：立方體展開圖

二、教學年級：四年級

三、教學者：桃園縣有得雙語小學 魏慶雲教師

四、教學目標：

1. 能判斷出平怡、旋轉、翻轉後形狀相同的六連方塊。
2. 能繪製出所有的六連方塊。
3. 能有系統的討論六連方塊的分類方式。
4. 能敘述出可以成為立方體展開圖的六連方塊的現象。

五、教學的重點：

本單元鼓勵學生在操作中找出規律性，因此教學中會有許多時間與學生探討其繪製圖形中的規律性，以引導學生進行後設認知的整理。但在討論六連方塊的類型時，會依學生的想法進行分類，並不強制以何種分類方式呈現。

六、教學時間：120 分鐘（共三節；本次試教為第二節）

七、活動目標：

- 【活動一】：六連方塊圖形的探討。
- 【活動二】：找出所有的六連方塊圖形。
- 【活動三】：立方體展開圖。

八、教學說明：

1. 本單元是延續二年級「正方形的平面鋪設」及三年級「立方體堆疊」。
2. 若將平移、旋轉或翻轉後相同的圖形視為同一種圖形，則使用的正方形數量與拼出的圖形個數間的關係如下表：

正方形個數	1	2	3	4	5
拼出圖形個數	1	1	2	5	12

由此表可以發現：當使用的正方形個數增加時，能拼出的相異圖形之變化會逐漸複雜而多樣。本單元希望帶領學生討論如何有系統的將六連方塊的圖形加以分類，並利用有系統的歸納觀察結果來窮盡所有的六連方塊圖形。

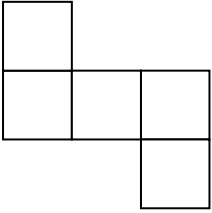
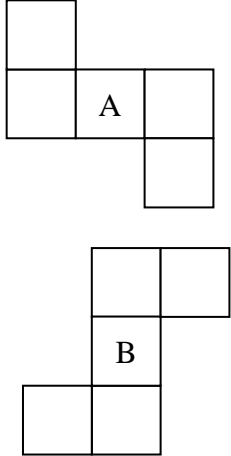
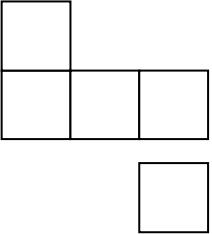
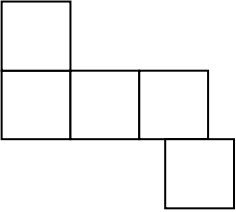
3. 六連方塊可以拼出很多圖形，學生不易判斷圖形中有哪些是全等的圖形，教學中會讓學生將拼出的圖形平移、旋轉及翻轉後和其他圖形直接比較，以判斷兩個圖形間是否全等。
4. 六連方塊的圖形並非全部都能折成立方體，在那麼多種不同的圖形中，本單元讓學生經由操作後，討論在哪些現象下能夠折成立方體，在哪些狀況下一定不能折成立方體。

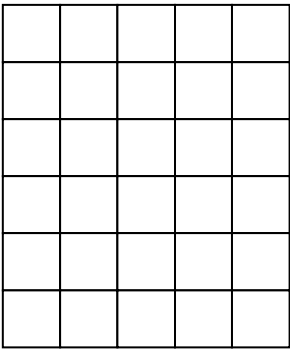
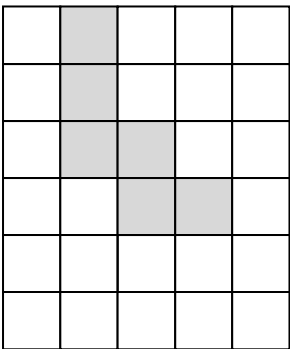
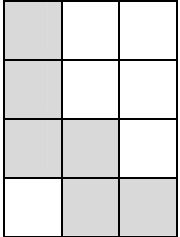
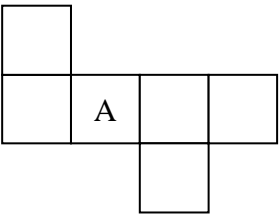
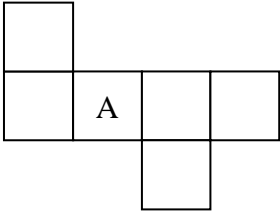

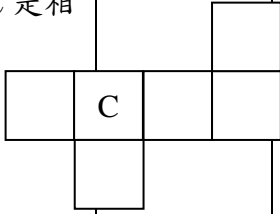
九、教學準備：

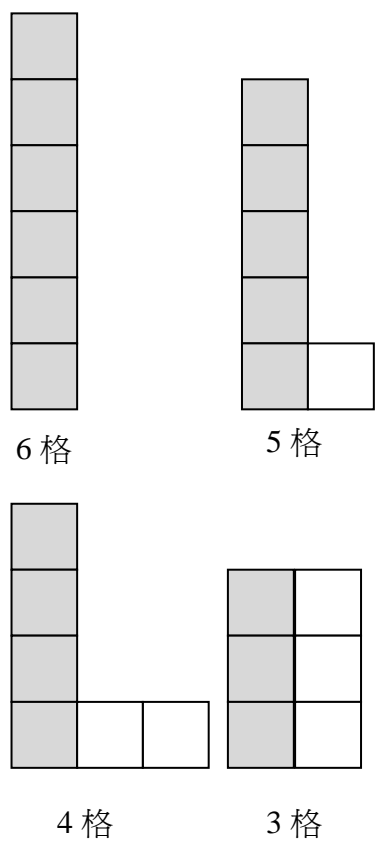
立方塊、5*6 正方格繪圖紙(每生 50 張)、夾鏈袋(30 個)、立方體紙盒(學生自備)、學習單將學生每 3~4 人分為一組

十、教學活動設計：

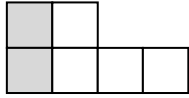
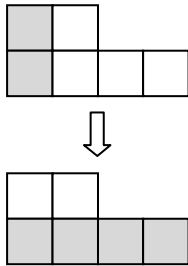

【活動一】：六連方塊圖形探討（第一節）

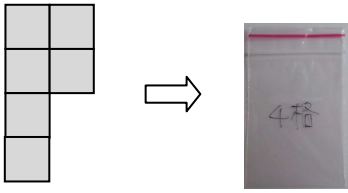
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>說明連方規則及複習五連方塊</p>	<p>1. 教師進行連方塊的規則說明：</p> <p>(1). 在黑板上展示圖形</p>  <p>說明這是由五個正方形所組成的圖形，其中任何二個正方形都有一個邊連在一起。 並提醒學生<u>不</u>符合規定的狀態。</p> <p>(2). 再展示</p>  <p>說明圖形 A 順時針旋轉 90° 後，會與圖形 B 相同，這樣就稱圖形 A 與圖形 B 是相同的圖形。</p>	<p>➤ 連方圖形必須正方形圖形與正方形圖形間至少有一邊是完全相連。</p> <p>(1). 以下狀況是<u>不</u>符合規定的：</p>  <p>或</p>  <p>(2). 平移、旋轉或翻轉後相同的圖形，視為一樣的圖形。</p>	<p>實作評量 (回答問題)</p>
<p>六連方塊練習</p>	<p>2. 發給每位學生一張每格邊長為 2CM 的 5x6 方格紙</p>	<p>➤ 如：繪製結果如下</p>	<p>實作評量 (操作)</p>

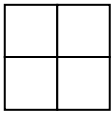
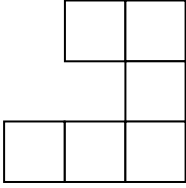

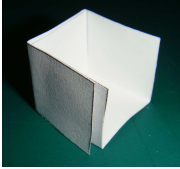
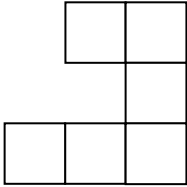
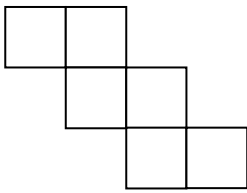


教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	 <p>3. 請學生在方格紙上繪製六連方塊的圖形。 4. 請繪製完成的學生將圖形沿邊緣剪下。</p>	 <p>剪成</p> 	
<p>平移、旋轉及翻轉的判斷</p>	<p>5. 將學生剪下的六連方塊圖形展示在黑板上。 6. 教師將相同的圖形挑出，並利用直接比較的方式與學生討論其為相同圖形的原因。 7. 如：在黑板上展示 A 圖形請學生先觀察</p>  <p>再比較</p> 	<p>➤ 引導學生說出：</p> <p>(1). 圖形 A 是用六個正方形組成的 (2). 圖形 A 中的每二個正方形之間一定有一個邊是共用的 (3). 圖形 B 和圖形 A 旋轉 180° 後會相同，圖形 C 和圖形 A 翻轉後會相同，所以圖形 A、圖形 B、圖形 C 是相同的圖形。</p>  <p>及</p> 	
<p>歸納、整理與分類</p>	<p>8. 教師取出幾個相異圖形，以說明這些圖形的分類方式—利用最多格部分</p>	<p>➤ 利用圖形中相連部分最多的格數：6 格、5 格、4 格、3 格、……。</p>	<p>實作評量 (發表)</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>如：</p>  <p>6格 5格</p> <p>4格 3格</p> <p>➤ 衍伸討論：為何老師發下的是5×6的方格紙，而不是6×6的方格紙？</p> <p>➤ 發給每位學生50張6×5方格紙，請學生回家畫出不一樣的六連方塊圖形—越多越好。</p> <p>➤ 將畫好的圖形都沿邊線剪下</p>	<p>● 引導學生說出：因為最多是六個正方形排成一直線，只需要長或寬其中一邊有6格就可以了。</p> <p>● 給學生一週的時間進行繪製活動，但不一定需要將50張全部畫完。</p> <p>● 若學生發現畫出了一樣的圖形，只需要取其中一張即可。</p>	<p>實作評量 (觀察與發表)</p>

【活動二】：找出所有的六連方塊圖形（第二節）

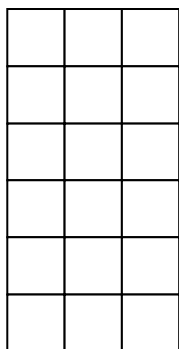
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
六連方塊圖形分類方式探究	<p>1. 教師提示前次教學中提及的分類方式，並在黑板上展示圖形：</p>  <p>2. 教師提問：「這個圖形是不是應該分在『2格』這一組？」</p> <p>3. 與學生進行討論，引導學生發現：乍看之下雖是2格組的，但事實上</p>  <p>因而得到結論：這圖形中最長的相連處有4格，應屬4格組。</p> <p>4. 請學生分組操作，找出各組的圖形分組結果。</p> <p>(1). 將學生分組，每組發給6個分別標上：1格、2格、3格、4格、5格、6格的夾鏈袋。</p> <p>(2). 請學生將個人準備好的所有圖形取出</p> <p>(3). 各組將全組的圖形先行過濾，去除相同的圖形。</p> <ul style="list-style-type: none"> ● 過濾掉的圖形請學生勿丟棄，因須留待下一活動使 	<p>➤ 引導學生尋找圖形中較長的部分，以確定圖形應屬於哪個組別。</p> 	實作評量 (發表)

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點																								
	<p>用。</p> <p>(4). 各組將過濾完的圖形進行分組。</p> <p>(5). 分別將分組好的圖形裝入該組的夾鏈袋中。</p> <p>5. 請各組將分類完的圖形展示在黑板上。</p>																										
<p>找出每一組別裡所有的圖形</p>	<p>6. 教師點數各組夾鍊袋中圖形的數量，並記錄在黑板。</p> <p>7. 教師將各組夾鍊袋中的圖形展示在黑板上，若發現有擺放錯誤的立刻進行澄清，將其放置在正確的組別處。</p> <p>8. 討論：為什麼每一組的「1格」夾鍊袋中都沒有任何圖形？</p> <p>9. 教師取一組學生的圖形分組結果進行討論：</p> <p>(1). 將圖形分組的結果呈現在黑板上</p> <p>(2). 討論：這些分組結果，可以再細分成不同的類型嗎？</p> <p>(3). 討論：每種類型裡，除了黑板上已經知道的之外，還有沒有其它的圖形？</p> <p>10. 獲得結論：所有的六連方塊圖形共有 35 種。</p>	<p>● 在黑板上先畫好各組如下的格子，以利討論：</p> <table border="1" data-bbox="831 871 1230 1070"> <tr> <th colspan="6">第○組</th> </tr> <tr> <td>1格</td> <td>2格</td> <td>3格</td> <td>4格</td> <td>5格</td> <td>6格</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>● 學生在將圖形分組時，可能會發生判斷錯誤的狀況，應立即更正，才不至於在後續的討論中產生混淆。</p> <p>● 引導學生說出：最長排不可能會只有 1 格，因為當 6 個一格排在一起，最長排會是 5 格。</p> <p>● 如：4 格組可以分成「4+2」、「4+1+1」等，而「4+1+1」又可以分為同側與異側。</p>	第○組						1格	2格	3格	4格	5格	6格													<p>展示夾鍊袋處</p> <p>寫數量處</p> <p>實作評量 (發表)</p>
第○組																											
1格	2格	3格	4格	5格	6格																						

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>10. 依學生做出的結果討論成為立方體展開圖的現象有哪些，如：</p> <p>(1). 六個正方形排在一列的不能成為立方體的展開圖。</p> <p>(2). 五個正方形排在一列的不能成為立方體的展開圖。</p> <p>(3). 四個正方形排在一列，另二個排在這四個正方形的同一邊的，不能成為立方體的展開圖。</p> <p>(4). 只要有四個正方形排在一起，另外二個正方形在這四個的兩邊的，不管那二個排在什麼位置，都可以成為立方體的展開圖。</p> <p>(5). 只要有  圖形出現的一定不能成為立方體的展開圖。</p> <p>(6). ……</p>	<p>說明</p> <div style="text-align: center;">  <p>折起來</p>   </div> <p>發現有些面重疊，有些面沒有，也就是說：</p> <div style="text-align: center;">  <p>不是立方體的展開圖。</p> </div> <p>而</p> <div style="text-align: center;">  <p>折起來</p>   </div> <p>所以是立方體的展開圖。</p>	

十一、教學注意事項：

1. 為找出展開圖的規律性，教學中會與學生進行討論，但若不對討論的範圍加以限制，會增加許多教學上的困擾，因此對於如何歸納六連方塊的分組方法，宜先規範。但是，當探討哪些現象下才有可能性是立方體的展開圖，或哪些現象下一定不會是立方體的展開圖的說明方式，宜由學生自行訂定，不需強加限制。
2. 討論中，若有時間可再擴充討論，如：可以引導學生再討論有沒有更經濟的方式畫方格紙，就可以畫出所有的六連方塊了。整理學生所畫的圖形後，可發現當圖形橫排超過四行時，縱排必在三列以下，如此一來經過旋轉即能使用 3×6 的方格紙



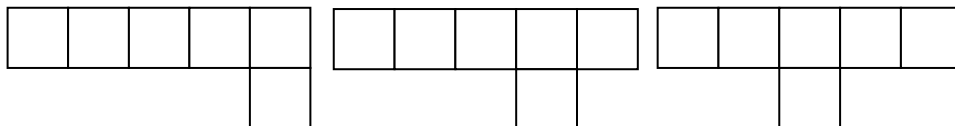
來畫出所有六連方塊中的任一個圖形。

3. 以下六連方塊圖形的分類方式提供參考：

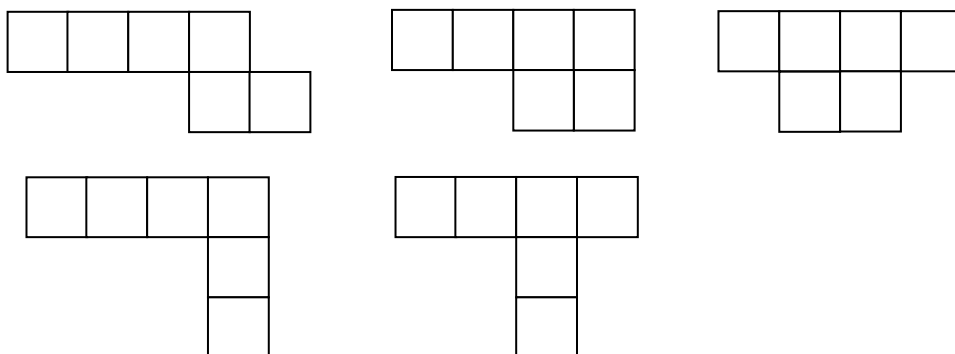
* 6 個 (一種)



* 5+1 個 (三種)

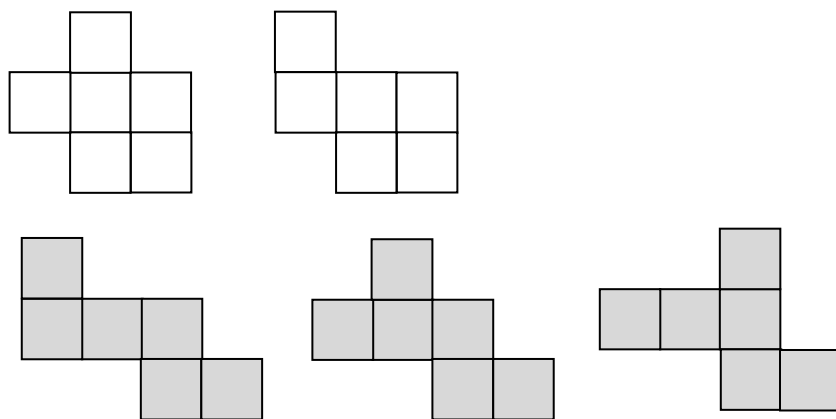


* 4+2 個 (五種)

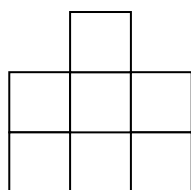


* 4+1+1 個

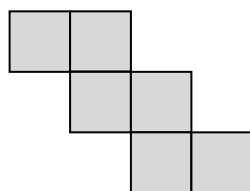
■ 同側 (二種)



* 3+1+1+1 個 (一種)

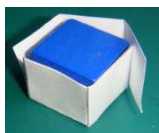


* 2+2+2 個 (一種)



4. 上列圖形中，有灰階塗滿的 11 種，可以成為立方體的展開圖。
5. 當學生在折疊六連方塊驗證其是否為立方體的展開圖時，若操作上不方便，可以利

用小方塊協助，如：

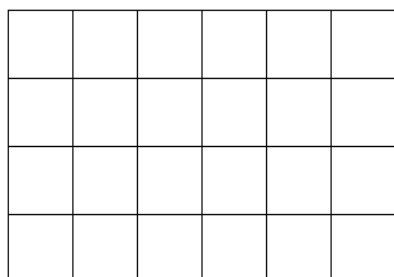


。但若如此操作時，必須提醒學生，只要看外面，

因為展開圖不包含內部。

<學習單>

- 一、利用下面的方格紙，最多可以畫出幾個不同的六連方塊圖形？



- 二、利用下面的方格紙，畫出 15 個以上不同的六連方塊圖形？

數學領域教材原型研發編輯計畫—試教教學活動設計

一、教學主題：角柱的面、頂點及邊的個數關係

二、教學年級：六年級

三、教學者：新北市中正國民小學 詹婉華教師

四、教學目標：能知道角柱的面、頂點及邊個數的關係。

五、教學的重點：由觀察不同角柱的面、頂點及邊的個數，以 n 角柱的 n 為變數，描述角柱之頂點、邊及面的個數，並知道角柱的頂點、邊、面的個數，滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」。

六、活動目標：

【活動一】：觀察角柱模型，用角柱底面的邊數描述頂點、邊及面的個數，並用 n 角柱的 n 為變數來描述角柱頂點、邊及面的個數。

【活動二】：由觀察角柱的面、頂點及邊的個數與底面邊數的關係，知道角柱的面、頂點及邊的個數，滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」。

七、教學說明：

- 關於角柱的頂點、邊、面的個數，應先讓學童記錄不同角柱的頂點、邊、面的個數，再讓他們用角柱底面的邊的個數，來描述角柱的頂點、邊及面的個數。
- 當學童能用底面的邊的個數來描述角柱的頂點、邊及面的個數，要進一步幫助學童以變數的想法，來描述頂點、邊及面的個數，例如：先以 n 代表 3 角柱、4 角柱、5 角柱的 3、4、5，則 3 角柱、4 角柱、5 角柱的頂點個數，可記為 $n \times 2$ 、邊個數可記為 $n \times 3$ 、面的個數可記為 $n + 2$ ，再引導他們了解 n 可以是任何大於 3 的正整數。
- 立體形體都滿足「頂點的個數+面的個數=邊的個數+2」的關係，數學上稱該關係為尤拉公式。但在國小階段，只進行角柱、角錐及立體形體的頂點、邊、面的個數，滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」的教學活動，不介紹「尤拉公式」這個名詞，且不做任何課後評量。
- 本教學活動只進行角柱的頂點、邊、面的個數，滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」的教學。

八、教學活動設計：

【活動一】：用 n 角柱的 n 為變數，來描述角柱頂點、邊及面的個數

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
用角柱底面的邊數描述頂點、邊及面的個數	<ol style="list-style-type: none"> 教師在教學活動進行前，讓學童記錄不同角柱的底面形狀、面的個數、頂點的個數、邊的個數。 教師在黑板上寫出學童記錄的表格 	<ol style="list-style-type: none"> 引導學童正確記錄角柱的底面形狀、面的個數、頂點的個數、邊的個數。 引導學童思考各角柱底面的邊數和頂點、邊、面的個數的關係。 	<p>◎能正確記錄。</p> <p>◎能發表想法。</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點																									
	<table border="1" data-bbox="395 297 874 591"> <thead> <tr> <th>柱體名稱</th> <th>底面形狀</th> <th>面的個數</th> <th>頂點的個數</th> <th>邊的個數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>三角柱</td> <td>三角形</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>四角柱</td> <td>四邊形</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>五角柱</td> <td>五邊形</td> <td>7</td> <td>10</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>六角柱</td> <td>六邊形</td> <td>8</td> <td>12</td> <td>18</td> </tr> </tbody> </table> <p data-bbox="421 600 852 779">教師提問：從表格中各角柱的頂點、邊、面的個數，你發現它們和底面的邊數有什麼關係？</p> <p data-bbox="421 788 639 824">學童發表想法。</p> <p data-bbox="387 833 852 967">3. 教師拿起三角柱，提問：三角柱的底面有幾個邊？共有幾個面？幾個頂點？幾個邊？</p> <p data-bbox="421 976 852 1111">教師修改表格中三角柱面的個數為「3+2」、頂點的個數為「3×2」、邊的個數為「3×3」。</p> <p data-bbox="421 1120 852 1254">提問：可以這樣記錄三角柱的面、頂點、面的個數嗎？說說你的理由。</p> <p data-bbox="421 1263 852 1352">學童修改表格中三角柱的面、頂點、邊的個數的資料。</p> <p data-bbox="387 1406 852 1585">4. 教師提問：你能模仿三角柱的記錄方式，由底面的形狀修改四角柱、五角柱、六角柱的面、頂點、邊的個數嗎？</p> <p data-bbox="421 1594 852 1729">學童修改表格中四角柱、五角柱、六角柱的面、頂點、邊的個數的資料。</p> <p data-bbox="387 1738 852 1827">5. 教師讓正確記錄的學童，上台修改表格，並說明理由。</p> <p data-bbox="387 1836 852 2016">6. 教師提問：7角柱、8角柱、10角柱、的頂點、邊、面的個數，是不是能用同樣的方式來記錄？</p>	柱體名稱	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數	三角柱	三角形	5	6	9	四角柱	四邊形	6	8	12	五角柱	五邊形	7	10	15	六角柱	六邊形	8	12	18	<p data-bbox="877 833 1193 1388">3. 引導學童發現三角柱面的個數的「3+2」是底面三角形的3個邊形成3個側面和上、下2個底面，頂點的個數的「3×2」是上、下底面三角形各有3的頂點，邊的個數的「3×3」是三角形有3個邊，上、下底面和側面各有3個邊。</p> <p data-bbox="877 1397 1193 1675">4. 引導學童修改表格中四角柱、五角柱、六角柱的面、頂點、邊的個數，並注意能正確修改記錄方式的學童。</p> <p data-bbox="877 1738 1193 1827">5. 引導學童依三角柱的模式，說明理由。</p> <p data-bbox="877 1836 1193 2060">6. 引導學童以同樣的方式記錄以7角柱、8角柱、10角柱的頂點、邊、面的個數。</p>	<p data-bbox="1206 833 1401 1200">◎能說出面的個數為「3+2」、頂點的個數為「3×2」、邊的個數為「3×3」的理由。</p> <p data-bbox="1206 1397 1401 1630">◎能修改表格中的面、頂點、邊的個數的資料。</p> <p data-bbox="1206 1738 1401 1827">◎能說明理由。</p> <p data-bbox="1206 1836 1401 2060">◎能正確記錄7角柱、8角柱、10角柱的頂</p>
柱體名稱	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數																								
三角柱	三角形	5	6	9																								
四角柱	四邊形	6	8	12																								
五角柱	五邊形	7	10	15																								
六角柱	六邊形	8	12	18																								

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點																																								
<p>用 n 角柱的 n 為變數，來描述角柱頂點、邊及面的個數</p>	<p>讓學童說明想法，並以同樣的方式記錄 7 角柱、8 角柱、10 角柱、的頂點、邊、面的個數。</p>		<p>點、邊、面的個數。</p>																																								
	<table border="1" data-bbox="389 394 850 831"> <thead> <tr> <th>柱體名稱</th> <th>底面形狀</th> <th>面的個數</th> <th>頂點的個數</th> <th>邊的個數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>三角柱</td> <td>三角形</td> <td>$3+2$</td> <td>3×2</td> <td>3×3</td> </tr> <tr> <td>四角柱</td> <td>四邊形</td> <td>$4+2$</td> <td>$\times 2$</td> <td>4×3</td> </tr> <tr> <td>五角柱</td> <td>五邊形</td> <td>$5+2$</td> <td>5×2</td> <td>5×3</td> </tr> <tr> <td>六角柱</td> <td>六邊形</td> <td>$6+2$</td> <td>6×2</td> <td>6×3</td> </tr> <tr> <td>7 角柱</td> <td>7 邊形</td> <td>$7+2$</td> <td>7×2</td> <td>7×3</td> </tr> <tr> <td>8 角柱</td> <td>8 邊形</td> <td>$8+2$</td> <td>8×2</td> <td>8×3</td> </tr> <tr> <td>10 角柱</td> <td>10 邊形</td> <td>$10+2$</td> <td>10×2</td> <td>10×3</td> </tr> </tbody> </table>	柱體名稱	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數	三角柱	三角形	$3+2$	3×2	3×3	四角柱	四邊形	$4+2$	$\times 2$	4×3	五角柱	五邊形	$5+2$	5×2	5×3	六角柱	六邊形	$6+2$	6×2	6×3	7 角柱	7 邊形	$7+2$	7×2	7×3	8 角柱	8 邊形	$8+2$	8×2	8×3	10 角柱	10 邊形	$10+2$	10×2	10×3		
	柱體名稱	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數																																						
	三角柱	三角形	$3+2$	3×2	3×3																																						
	四角柱	四邊形	$4+2$	$\times 2$	4×3																																						
	五角柱	五邊形	$5+2$	5×2	5×3																																						
	六角柱	六邊形	$6+2$	6×2	6×3																																						
	7 角柱	7 邊形	$7+2$	7×2	7×3																																						
	8 角柱	8 邊形	$8+2$	8×2	8×3																																						
	10 角柱	10 邊形	$10+2$	10×2	10×3																																						
<p>7. 教師提問：由表格中三角柱、四角柱、五角柱、六角柱的面、頂點、邊的個數，你發現什麼相同？什麼不同？</p> <p>教師寫下「n 角柱：面的個數 = $n+2$、頂點的個數 = $n \times 2$、邊的個數 = $n \times 3$」。</p> <p>提問：這些式子可以代表面、頂點、邊的個數嗎？</p>	<p>7. 引導學童發現 $n=3, 4, 5, 6$ 時，都能正確表示角柱的面、頂點、邊的個數。</p>	<p>◎能了解「n」代表 3、4、5、6 時，可以用 n 來記錄面、頂點、邊的個數。</p>																																									
<p>8. 教師提問：由表格中七角柱、八角柱、十角柱的面、頂點、邊的個數，也可以用這樣的方式表示嗎？</p>	<p>8. 引導學童發現 $n=7, 8, 10$ 時，也能正確表示角柱的面、頂點、邊的個數。</p>	<p>◎可以用 n 來記錄面、頂點、邊的個數。</p>																																									
<p>9. 教師取下填寫角柱的面、頂點、邊個數的表格，並留下「$n=3, 4, 5, \dots, n$ 角柱：面的個數 = $n+2$、頂點的個數 = $n \times 2$、邊的個數 = $n \times 3$」。</p> <p>提問：想一想之前記錄角柱的面、頂點、邊的個數的表格，從三角柱開始，是不是都可以用 $n+2$ 代表面的個數，$n \times 2$ 代表頂點的個數，$n \times 3$ 代表邊的個數？說明你的理由。</p>	<p>9. 引導學童發現之前表格中各角柱的面、頂點、邊的個數，都能用「面的個數 = $n+2$、頂點的個數 = $n \times 2$、邊的個數 = $n \times 3$」。</p>	<p>◎能以之前表格中各角柱，來說明能用「面的個數 = $n+2$、頂點的個數 = $n \times 2$、邊的個數 = $n \times 3$」表示的理由。</p>																																									

【活動二】：知道角柱的面、頂點及邊的個數，滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點																														
<p>角柱的面、頂點及邊的個數，滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」</p>	<p>1. 教師運用活動一角柱之頂點、邊、面的個數的表格</p> <table border="1" data-bbox="395 443 845 786"> <thead> <tr> <th>柱體名稱</th> <th>底面形狀</th> <th>面的個數</th> <th>頂點的個數</th> <th>邊的個數</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>三角柱</td> <td>三角形</td> <td>3+2</td> <td>3×2</td> <td>3×3</td> </tr> <tr> <td>四角柱</td> <td>四邊形</td> <td>4+2</td> <td>4×2</td> <td>4×3</td> </tr> <tr> <td>五角柱</td> <td>五邊形</td> <td>5+2</td> <td>5×2</td> <td>5×3</td> </tr> <tr> <td>六角柱</td> <td>六邊形</td> <td>6+2</td> <td>6×2</td> <td>6×3</td> </tr> <tr> <td>八角柱</td> <td>八邊形</td> <td>8+2</td> <td>8×2</td> <td>8×3</td> </tr> </tbody> </table> <p>教師提問：三角柱邊的個數是3的幾倍？頂點的個數是3的幾倍？面的個數和3有什麼關係？</p> <p>2. 教師提問：三角柱面的個數加上頂點個數減掉邊的個數，剩下多少？可以如何記錄？</p> <p>3. 教師提問：四角柱邊的個數是4的幾倍？頂點的個數是4的幾倍？面的個數和4有什麼關係？</p> <p>4. 教師提問：四角柱面的個數加上頂點個數減掉邊的個數，剩下多少？可以如何記錄？</p> <p>5. 教師提問：五角柱邊的個數是5的幾倍？頂點的個數是5的幾倍？面的個數？</p>	柱體名稱	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數	三角柱	三角形	3+2	3×2	3×3	四角柱	四邊形	4+2	4×2	4×3	五角柱	五邊形	5+2	5×2	5×3	六角柱	六邊形	6+2	6×2	6×3	八角柱	八邊形	8+2	8×2	8×3	<p>1. 引導學童回答：三角柱邊的個數是3的3倍，頂點的個數是3的2倍。面的個數是3的1倍+2。</p> <p>2. 引導學童說出：三角柱面的個數和頂點個數的和，與邊的個數差2，也就是$(3 \times 1 + 2) + 3 \times 2 - 3 \times 3 = 2$。</p> <p>3. 引導學童回答：四角柱邊的個數是4的3倍，頂點的個數是4的2倍。面的個數是4的1倍+2。</p> <p>4. 引導學童回答：四角柱面的個數和頂點個數的和，與邊的個數差2，也就是$(4 \times 1 + 2) + 4 \times 2 - 4 \times 3 = 2$。</p> <p>5. 引導學童回答：五角柱邊的個數是5的3倍，頂點的個數是5的2倍。面的個數是5的1倍+2。</p>	<p>◎能正確回答三角柱的邊、頂點、面的個數。</p> <p>◎能說出並寫出：$(3 \times 1 + 2) + 3 \times 2 - 3 \times 3 = 2$。</p> <p>◎能正確回答四角柱的邊、頂點、面的個數。</p> <p>◎能說出並寫出：$(4 \times 1 + 2) + 4 \times 2 - 4 \times 3 = 2$。</p> <p>◎能正確回答五角柱的邊、頂點、面的個數。</p>
柱體名稱	底面形狀	面的個數	頂點的個數	邊的個數																													
三角柱	三角形	3+2	3×2	3×3																													
四角柱	四邊形	4+2	4×2	4×3																													
五角柱	五邊形	5+2	5×2	5×3																													
六角柱	六邊形	6+2	6×2	6×3																													
八角柱	八邊形	8+2	8×2	8×3																													

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>6. 教師提問：五角柱面的個數加上頂點個數減掉邊的個數，剩下多少？可以如何記錄？</p> <p>7. 教師提問：六角柱面的個數加上頂點的個數和邊的個數相差多少？</p> <p>8. 讓學童觀察活動一表格的 7 角柱、8 角柱、10 角柱的頂點、邊、面的計算方式。 教師提問：它們是不是也都是「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」？</p>	<p>6. 引導學童說出：五角柱面的個數和頂點個數的和，與邊的個數差 2，也就是$(5 \times 1 + 2) + 5 \times 2 - 5 \times 3 = 2$。</p> <p>7. 引導學童發現六角柱也是「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」。</p> <p>8. 引導學童發現 7 角柱、8 角柱、10 角柱都是「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」。</p>	<p>◎能說出並寫出：$(5 \times 1 + 2) + 5 \times 2 - 5 \times 3 = 2$。</p> <p>◎能回答：也是面的個數+頂點的個數-邊的個數=2。</p> <p>◎能回答：都是面的個數+頂點的個數-邊的個數=2。</p>

九、教學注意事項：

1. 學童以底面的邊的個數，來描述角柱的頂點、邊及面的個數時，要回到情境中，確認學童理解各數字的意義，如：七角柱面的個數=7+2，其中的 7 表示 7 個側面、2 表示 2 個底面，而非以數列的形式來記錄角柱的頂點、邊及面的個數。
2. 關於角錐的教學活動，可仿角柱的教學模式，讓學童由觀察不同角錐的面、頂點及邊的個數，用 n 角錐的 n 為變數，描述角錐之頂點、邊及面的個數，進而知道角錐的頂點、邊、面的個數，同樣滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」。
3. 當學童知道角柱與角錐的頂點、邊、面的個數，都滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」後，教師可用其他的立體形體，讓學童知道這些立體形體的頂點、邊、面的個數，也滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」，作法如下：
 - (1) 教師將一個三角錐及一個三角柱組合為一個立體形體後，以此立體形體問學童：它的面、頂點及邊的個數，是不是「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」？學童在實際點數面、頂點及邊的個數後，會回答：是面的個數+頂點的個數-邊的個數=2。
 - (2) 教師將一個四角錐及一個四角柱組合為一個立體形體後，以此立體形體問學童：它的面、頂點及邊的個數，是不是「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」？學童在實際點數面、頂點及邊的個數後，會回答：是面的個數+頂點的個數-邊的個數=2。
 - (3) 教師將一個五角柱切割成二個立體形體後，以此二個立體形體問學童：它們的

面、頂點及邊的個數，是不是「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」？學童在實際點數面、頂點及邊的個數後，會回答：它們是面的個數+頂點的個數-邊的個數=2。

4. 在國小階段，只在課堂上進行立體形體的頂點、邊、面的個數，滿足「面的個數+頂點的個數-邊的個數=2」的教學活動，不介紹「尤拉公式」這個名詞，且不做任何課後評量。

國民小學數學教材原型 C 冊 / 謝 堅 主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院，2013.12

1. 數學教育
2. 中小學教育
3. 教材與教法

國民小學數學教材原型 C 冊

主 編 者：謝 堅

作 者：吳欣悅 房昔梅 詹婉華 謝 堅 魏慶雲
(依姓氏筆畫順序排列)

發 行 人：柯華葳

出 版 者：國家教育研究院

編 審 者：數學領域教材原型研發編輯委員會

主任委員：陳昭地

副主任委員：謝 堅

委 員：丁斌悅 吳欣悅 李政憲 李政豐 周筱亭 房昔梅
張東輝 曹博盛 陳彥廷 傅淑婷 黃幸美 詹婉華
魏慶雲 蘇進發
(依姓氏筆畫順序排列)

編輯小組：吳欣悅 周筱亭 房昔梅 張東輝 黃幸美 詹婉華
謝 堅 魏慶雲
(依姓氏筆畫順序排列)

編輯助理：張淑娟、蔡敏冲

出版年月：102 年 12 月

版 次：初版

電子全文可至國家教育研究院網站 <http://www.naer.edu.tw> 免費取用

非 賣 品

本書經雙向匿名審查通過
(著作財產權歸教育部所有，請勿侵害)

