

# 國民小學數學教材原型B冊

謝 堅教授 主編



國家教育研究院 出版

# 國民小學數學教材原型 B 冊



國家教育研究院 編印



# 國民小學數學教材原型 B 冊

## 目次

序..... vii

編輯大意..... ix

### 第一章：量與實測概論

撰寫者：謝堅

#### 主題 1-1：量與實測教材的發展

1-1-1：量與實測教材的內容..... 1

1-1-2：量與實測教材的發展..... 2

#### 主題 1-2：測量單位與測量單位的化聚

1-2-1：測量單位及測量單位的數量化聚..... 10

1-2-2：量感..... 11

1-2-3：公制單位與常用單位..... 13

1-2-4：單位的化聚..... 17

### 第二章：面積

#### ◎理念篇

撰寫者：謝堅

#### 主題 2-1：面積的意義

2-1-1：單位面積的意義..... 23

2-1-2：面積常用單位的引入..... 27

#### 主題 2-2：長(正)方形的面積公式

2-2-1: 長方形及正方形面積公式.....	31
2-2-2: 長方形面積公式的迷思概念.....	37
<b>主題 2-3: 平行四邊形、三角形、梯形面積公式</b>	
2-3-1: 引入面積公式(策略一).....	41
2-3-2: 引入面積公式(策略二).....	46
2-3-3: 平行四邊形、三角形、梯形 面積公式的統整.....	50
<b>主題 2-4: 圓、扇形及不規則圖形的面積公式</b>	
2-4-1: 圓的面積.....	51
2-4-2: 不規則圖形的面積.....	54

◎案例篇

撰寫者：吳欣悅

**主題 2-2-1: 長方形及正方形面積公式**

~長方形及正方形的面積公式..... 57

**主題 2-2-1: 長方形及正方形面積公式**

~長邊或寬邊「不是整數」的長方形面積..... 65

**主題 2-3-2: 平行四邊形、三角形、梯形面積公式**

~平行四邊形、三角形、梯形面積公式..... 80

**第三章：重量**

◎理念篇

撰寫者：謝堅

主題 3-1：重量的意義.....	115
主題 3-2：重量的直接與間接比較	
3-2-1：重量的直接比較.....	118
3-2-2：重量的間接比較.....	119
3-2-3：重量的個別單位及普遍單位比較.....	121
主題 3-3：測量重量的單位—秤	
3-3-1：秤的秤面結構.....	123
3-3-2：如何報讀物體的重量.....	126
主題 3-4：重量單位的化聚	
3-4-1：重量單位化聚的迷失概念.....	128
3-4-2：重量整數及分、小數倍單名數的化聚.....	130

◎ 案例篇

撰寫者：魏慶雲

主題 3-2-1：重量的直接比較	
~ 利用手及天平進行重量的直接比較.....	139
主題 3-2-2：重量的間接比較	
~ 利用天平進行重量的間接比較.....	149
主題 3-4-1：整數倍單名數及複名數化聚	
~ 公斤、公克的整數倍單名數及複名數化聚..	157
主題 3-4-2：分、小數倍單名數及複名數化聚	
~ 公斤、公克的分、小數倍單名數及複名數化	

聚.....	165
--------	-----

## 第四章：角度

### ◎理念篇

撰寫者：謝堅

#### 主題 4-1：角與角度

4-1-1：圖形角與張開角.....	179
--------------------	-----

4-1-2：角度的直接及間接比較.....	181
-----------------------	-----

#### 主題 4-2：角度的合成與分解

4-2-1：旋轉角.....	185
----------------	-----

4-2-2：角度的合成與分解.....	187
---------------------	-----

#### 主題 4-3：角度單位及量角器

4-3-1：角度單位.....	190
-----------------	-----

4-3-2：量角器.....	192
----------------	-----

### ◎案例篇

撰寫者：詹婉華

#### 主題 4-1-2：角度的直接與間接比較

～角的直接與間接比較.....	195
-----------------	-----

#### 主題 4-2-2：角度的合成與分解

～角度的合成與分解.....	212
----------------	-----

#### 主題 4-3-2：量角器

～認識量角器並測量角.....	229
-----------------	-----

## 第五章：容量與體積

### ◎理念篇

撰寫者：謝堅

主題 5-1：體積、容量、容積、液量..... 247

5-1-1：體積與容量..... 248

5-1-2：容量與容積..... 249

5-1-3：容量與液量..... 250

5-1-4：體積與容量教學的迷失..... 251

主題 5-2：長(正)方體體積公式

5-2-1：長(正)方體體積公式..... 253

5-2-2：長(正)方體體積公式的迷思概念..... 257

主題 5-3：角柱及圓柱體積公式

5-3-1：角柱的體積公式..... 259

5-3-2：圓柱的體積公式..... 262

5-3-3：不規則物體的體積..... 264

### ◎案例篇

撰寫者：房昔梅

主題 5-1-1：體積與容量..... 265

主題 5-2-1：長(正)方體體積公式

～長方體的體積公式..... 277

## ◎附錄-試教教學活動設計

主題 2-3-2：平行四邊形、三角形、梯形面積公式	
~ 三角形的面積公式.....	291
主題 2-3-2：平行四邊形、三角形、梯形面積公式	
~ 梯形面積公式的導出與應用.....	301
主題 3-4-2：分、小數倍單名數及複名數化聚	
~ 公斤、公克的分、小數倍單名數及複名數化聚.	309
主題 4-1-2：角度的直接與間接比較	
~ 角的直接比較.....	316
主題 4-2-2：角度的合成與分解	
~ 角的合成與分解.....	322
主題 5-1-1：體積與容量.....	329
主題 5-2-1：長（正）方體體積公式	
~ 複合形體的體積.....	336

## 序

數學不僅是科學的基礎，數學教育更是關乎國家公民素養和人才素質的重要因素之一。國家教育研究院推動課程與教學研究及研發適性適量適時之教材工作，進行中小學各學習領域（學科）教材研發、編輯與試用，並建置教科書資源資料庫。本數學領域教材原型研發手冊即是針對中學生與小學生所設計之教學輔助教材，期能落實課程綱要能力指標與教材細目之課程與教學之實踐，提供教師或教科書編輯者可依循或指引之教科書編輯素材，活化數學教材的內涵，並引領未來十二年國民基本教育數學教學之方向。

此計畫研發初期，本人時任國家教育研究院院長，當時曾召開會議徵詢國內數學專家學者之意見，幾經遴選承蒙陳昭地教授願意在國立臺灣師範大學教職退休後，因為對數學教育的使命感，而接下此研發編輯之重任。陳教授學經歷豐富，不但在教學及專業領域上的研究，受到學術界的肯定及重視，表現傑出，對啟蒙青年學子有滿滿的熱情，對數學教育貢獻不遺餘力，在他的號召之下，旋即組織優秀的學者專家教授與教學卓越的中小學教師等成立編輯委員會，前後歷經三年，完成本系列的教材原型作品。

本書研發編撰適合國中、小數學能力之題材，這些題材與教師未來的數學教學密切相關，並可藉此增長學生數學的學習能力，內容相當豐富，盼讀者以輕鬆愉快的心情欣賞閱讀數學的相關方法與應用，經由與日常生活相關的例題，透過循序漸進的演練，以培養學生自我學習的興趣與信心，期待能為數學教師提供便捷的教學資源。

教育部國民及學前教育署 署長

吳清山 謹識

2013年12月

## 序

政府為回應立法院與民意的需求，於民國 92 年起責成本院組成委員會編撰九年一貫數學領域國中、小部編本教科書，經審定後上市供書，以平抑教科書價格，同時引領民間出版商改善教科書的品質。部編本教科書在完成教材示範編撰與制衡教科書市場之階段性任務後，轉型發展教材原型，本書即為教材原型的研發成果之一。

本書分為中學與小學，中學部分配合國中以上之數學教師的數學專業素養，編輯延伸性與原創性的題材，包含未來與國民教育第十年數學銜接息息相關的重要內容，提供教師編選相關教材之用，或提供教科書編輯者及民間出版業研發教師手冊及相關教材。小學部分：配合教師需求，著重於國小階段之數、計算、量與實測、幾何等相關教材教法。本套教材編撰之目的，在於能引發教師教學之共鳴，進而沿用於教學，故於其取材方向及內容，依中、小學之特性而有些許差異。

本書係由課程及教學研究中心數學教材原型研發編輯委員會陳昭地教授、鍾靜教授、謝堅教授、張東輝教授、曹博盛教授、黃幸美教授、陳彥廷教授、周筱亭研究員、李政豐教師、蘇進發教師、傅淑婷教師、李政憲教師、丁斌悅教師、莊國彰教師、魏慶雲教師、房昔梅教師、詹婉華教師、吳欣悅教師、胡蕙芬教師等，前後共計三年的辛勤投入，內容極具意義與參考價值，對落實數學教育，應該頗有助益。茲值付梓之前，特為之序，並致最高謝意。

國家教育研究院課程及教學研究中心主任

范信賢 謹識

2013 年 12 月

## 編輯大意

- 一、 本研究成品為國家教育研究院數學領域教材原型研發編輯計畫第二年(民 101 年)國民小學部分的成果。
- 二、 本研究成品以國小階段之量與實測為主軸撰寫，因為時間、人力及經費不足，研發團隊並沒有編寫出全部的教材，只編寫部份的教材。
- 三、 本研究成品分成三類，第一類為理念篇，編寫相關教材的認知及數學結構，以及教學時可能產生的迷思概念；第二類為案例篇，編寫教師不易教學或可能教錯的部份教材；第三類為教學活動設計篇，在每個案例篇選擇一節課的教材，編寫成較詳細的教學活動設計。
- 四、 理念篇共有量與實測概論，面積，重量，角度，容量與體積等五個部分，每個部分再分成數個主題，分別說明相關之認知及數學結構。
- 五、 案例篇配合主題且擇要撰寫，尤其針對該主題之重要學習關鍵或教學不易掌握之處編寫；共計 12 案例，提供 20 節教學節數之教材。
- 六、 各案例之教學說明係聯絡該主題之理念、該活動之目標，教師可參考教學活動流程及教學注意事項進行教學，亦可融入現行

或自編教材；指定作業部份可直接下載應用。

- 七、 本冊已選擇 7 個案例進行試教，並編寫較詳細的教學活動設計，除了提供課堂教學參考之外，也做為修改本教材之依據。
- 八、 本教材單元雖經研發團隊審慎研發編輯而成，惟疏漏之處仍在所難免，使用者針對案例可直接或間接以最適當的方式調整。

## 第一章：量與實測概論

撰寫者：謝堅

### 主題 1-1：量與實測教材的內容與發展

#### 1-1-1：量與實測教材的內容

##### 認知及數學結構

國小量與實測教學中的量，包含長度、容量、角度、面積、體積、重量、時間等生活中常用的七種量，其中長度、面積、容量、體積、角度屬於幾何量，可以透過視覺產生量感，學生比較容易透過幾何的經驗掌握這些量的意義，教材編寫的方式也比較類似；重量無法透過視覺產生量感，必須透過手掂實物或利用工具來掌握量感，教材的編寫方式和前面的五種量有一些差異；而時間是看不見、摸不到，無法具體表現出來，也不易掌握量感，教學時必須依賴工具及文化的約定，因此教材的編寫方式與前面這六種量完全不同。

國家教育研究院出版了很多與長度以及時間有關的影帶及書籍，在國民中小學教師專業成長影集中出版了「長度篇」與「時間篇」；在國民中小學教材與教學探討中出版了「長度篇」與「時間篇(一)、時間篇(二)、時間篇(三)」，因此教材原型 B 冊中暫不討論時間及長度的教材與教學，在第二章中討論面積，第三章中討論重量，第四章中討論角度，第五章中討論體積與容量。

## 1-1-2：量與實測教材的發展

### 認知及數學結構

感官量的學習包含概念的發展與工具的使用兩部份，這兩部份的學習會經歷下面的五個階段，第一階段：某量的初步概念；第二階段：某量的間接比較；第三階段：某量的普遍單位比較；第四階段：某量的測量單位制度概念；第五階段：某量的測量公式概念。其中角度只經歷前面三個階段，長度、容量與重量只經歷前面四個階段，而面積與體積則經歷五個階段。

#### (一)第一階段：某量的初步概念

第一階段是某量的初步概念，可以區分成「某量的認識」、「某量的直接比較」、「使用以某量為刻度單位的工具」等三個部份，下面分別說明其意義。

##### (1)某量的認識

一個長方體木盒，同時擁有長度、面積、體積、容量、角度、重量等不同的性質，學生必須先知道不同的量在哪裡，才能討論該量的意義。例如學童必須知道長方體木盒中的線段在那裡，才能比較兩條邊的長短；必須知道面在那裡，才能比較兩個側面面積的大小；必須知道角在那裡，才能比較兩個角角度的大小；必須知道重量是什麼，才能描述這個長方體木盒有多重；必須知道體積是什麼，才能描述這個長方體木盒木頭部份的體積有多大；

必須知道容量是什麼，才能描述這個長方體木盒最多能裝多少液體。

教師可以透過直觀比較，檢查學生是否掌握討論的量是什麼，以及其測量的意義。例如教師指出黑板的長邊及寬邊，當學生知道長度的意義，就能說出長邊比寬邊長；指出黑板及講桌的桌面，當學生知道面積的意義，就能說出黑板比講桌的面積大。

## (2) 某量的直接比較

剛開始引入量與實測教材時，只比較兩個量的大小，學生可以透過直接比較來判斷兩個量誰比較大，直接比較指的是不透過任何媒介物，利用直接比對來比較兩個量的大小關係。

例如要比較兩條繩子誰比較長的時候，只要將兩條繩子一端對齊後拉直，就能透過另一端看出哪一條繩子比較長；要比較報紙與圖畫紙誰的面積比較大的時候，只要確定圖畫紙完全包含在報紙的內部，就知道報紙的面積比較大。這些比較的方式都是直接比較。

## (3) 使用以某量為刻度單位的工具

學生剛開始使用測量工具時，因為沒有單位的概念，可能無法掌握刻度單位的意義，學生只報讀工具上的刻度，感覺刻度值大小與量的大小有關。例如學生報讀一條木棍長 7 公分，指的是用直尺量木棍時，木棍的一端對齊 0，另一端會對齊 7，7 公分是

報讀刻度 7 得到的，7 公分並不是 7 個 1 公分接起來的簡稱。

## (二) 第二階段：某量的間接比較

第二階段是某量的間接比較，可以區分成「某量的間接比較」、「某量的個別單位比較與實測」等二部份，分別說明其意義。

### (1) 某量的間接比較

直接比較和間接比較，都是討論兩個量的大小關係，它們的差異是直接比較不必透過媒介物就能比較兩個量的大小，而間接比較必須透過媒介物才能比較。

以比較 A、B 兩棟大樓教室黑板的長邊為例，因為無法將 A 大樓教室的黑板搬到 B 大樓的教室進行直接比較，必須透過媒介物的幫忙，才能判斷哪一棟大樓教室黑板的長邊比較長。最常用的方法是透過先複製、再直接比較的方式來解決問題，例如先拿一條繩子把 A 大樓黑板的長邊複製下來，再拿著複製的繩子和 B 大樓黑板的長邊進行直接比較，如果繩子比 B 大樓黑板的長邊長，A 大樓黑板的長邊比較長，如果繩子比 B 大樓黑板的長邊短，B 大樓黑板的長邊比較長。

如果能找到一根比 A 大樓黑板的長邊長，比 B 大樓黑板的長邊短的竹竿，也可以透過遞移性，B 大樓黑板的長邊比竹竿長，竹竿比 A 大樓黑板的長邊長，得到 B 大樓黑板的長邊比 A 大樓黑板的長邊長的結果。

再以「考卷上有兩條直線段，問哪一條線段比較長」為例，說明直接比較與間接比較的差異。如果學童撕下考卷中的一條線段，直接和另一條線段比長短，他是利用直接比較來解題；如果學童用鉛筆或繩子複製一條線段的長，再和另一條線段比長短，他是利用間接比較來解題。

## (2) 某量的個別單位比較與實測

直接比較和間接比較都只能比較兩個量的大小關係，當我們要同時比較很多量的大小，或描述某一個量有多大時，最好的方法就是選定一個單位，透過單位的累積會分割將這些量數字化，透過數字來描述並比較這些量的大小。

以比較 A、B 兩棟大樓教室的面積為例，我們可以選擇相同大小的報紙當做個別單位來比較兩棟大樓教室面積的大小。我們先拿一些報紙將 A 大樓教室鋪滿，再拿著鋪滿 A 大樓教室的報紙來鋪 B 大樓的教室，如果報紙還有剩，表示鋪 A 大樓教室報紙的張數比較多，所以 A 大樓教室的面積比較大，如果報紙不夠，表示鋪 A 大樓教室報紙的張數比較少，所以 B 大樓教室的面積比較大。

上面是透過一對一對應的概念，解決比較兩間教室面積大小的問題，如果我們用報紙鋪滿 A、B 兩棟大樓的教室，再分別點數報紙的張數，將兩間教室的面積數值化，例如鋪滿 A 大樓教室的報紙有 92 張，鋪滿 B 大樓教室的報紙有 85 張，就能透過數字的

大小判斷兩間教室面積的大小，因為 92 比 85 大 7，所以 A 大樓教室的面積比較大，而且多了 7 張報紙合起來的面積。

透過單位量將要測量的量數值化有兩個好處，第一個好處是可以描述教室的面積和多少張報紙的面積合起來一樣大；第二個好處是透過數字的大小，可以同時比較很多教室面積的大小。建議教師多讓學童有自行選擇合適的個別單位，並將個別單位數字化後來比較或描述的解題經驗，應為它是量與實測的核心概念。

### (三)第三階段：某量的常用單位比較

第三階段是某量的常用單位比較，常用單位指的是某時代多數人經常使用的單位，也可以稱之為標準單位。下面區分成「認識某常用單位的意義」、「以常用單位量為單位，進行實測與估測的活動」等二部份說明其意義。

#### (1)認識某常用單位的意義

如果每個人所選擇的個別單位都不相同，在溝通的過程中容易產生誤會，例如小明說他書房的面積和 23 張報紙合起來一樣大，小花說她書房的面積和 51 張報紙合起來一樣大，除非他們所選擇報紙的面積都一樣大，否則無法透過數字的大小判斷誰書房的面積比較大。又如小英請媽媽幫她到文具店買和 50 個手扞一樣長的彩帶，因為媽媽、文具店的店員和小英手扞的長度不相同，買回來彩帶的長度可能不符合小英的需求。

為了解決個別單位所產生的誤會，必須引入大家都認同的單位，常用單位或標準單位指的是多數人使用的單位，如果大家都使用相同的單位，就不會產生上面的爭議。公制單位和民間單位都是常用單位，只是在國小的數學課程中，以公制單位為主要討論的對象，教師可以引入一些民間單位的問題，檢查學生是否掌握單位量及單位量數值化的概念。

## (2)以常用單位量為單位，進行實測與估測的活動

學生有個別單位或常用單位的概念後，教師應幫助學生掌握直尺等工具刻度的意義，例如直尺刻度 0 到刻度 7 長 7 公分，刻度 5 到刻度 12 也長 7 公分，因為它們都和 7 個 1 公分接起來一樣長。

## (四)第四階段：某量的測量單位制度概念

第四階段是某量的測量單位制度概念，區分成「認識甲常用單位量及乙常用單位量的關係」、「甲常用單位量及乙常用單位量的化聚」等二部份，分別說明其意義。

### (1)認識甲常用單位量及乙常用單位量的關係

認識甲常用單位量及乙常用單位量的關係，指的是經常使用兩單位間的換算關係，下面以「公尺」、「公分」、「公里」這三種長度的普遍單位為例，說明如何幫助學生認識「公分」和「公尺」，以及「公尺」和「公里」兩單位間的關係。

建議教師先引入「公分」單位，再引入「公尺」單位，最後才引入「公里」單位。而且透過兩種不同的方式，分別引入「公分」和「公尺」，以及「公尺」和「公里」兩常用單位間的關係。

為了要建立常用單位的概念，建議教師分別引入「公分」以及「公尺」兩種單位，再討論這兩種單位之間的關係，例如先引入1公分的單位，要求學生以1公分為單位進行實測及估測，再引入1公尺的單位，要求學生以1公尺為單位進行實測及估測，最後才說明「公分」和「公尺」兩單位的關係，例如100個1公分接起來和1公尺一樣長，所以 $100\text{公分}=1\text{公尺}$ ；將1公尺等分成100份後，其中的1份和1公分一樣長，所以 $\frac{1}{100}\text{公尺}=1\text{公分}$ 。

為了節省教學時間並且和公制單位接軌，建議教師直接透過「公尺」單位引入「公里」單位。例如1公里是1000個1公尺接起來另一個名字的方式，引入「公里」單位，得到 $1\text{公里}=1000\text{公尺}$ 的結果後，再進行以1公里為單位的實測與估測。

## (2)甲常用單位量及乙常用單位量的化聚

有兩個以上的單位，才会有單位間化與聚的問題。其中較大的單位轉換為較小的單位稱之為化、較小的單位轉換成較大的單位稱之為聚。有關兩單位間化聚的教學，會在1-2-4及1-2-5中

說明。

### (五)第五階段：某量的測量公式概念

國小量與實測的教學中，長度、角度、重量、容量等量都有工具可以測量，例如我們常用直尺或捲尺來測量長度、用量角器來測量角度、用磅秤來測量重量、用量杯來測量容量；但是國小階段沒有測量面積和體積的工具。

某量的測量公式概念，主要是針對面積及體積，重點是說明如何使用測量公式替代測量工具解決實測的問題，至於如何引入面積及體積的公式，會在第二章及第五章說明。

雖然感官量教材的發展都要經過上述的五個階段，但是因為長度、容量、重量、角度、面積、體積教材內容的屬性及認知難度的差異，會讓不同感官量的教材落入不同的年級。以 92 及 97 課綱為例，國小二年級時，長度教材已進入第三及第四階段的教學，但是容量、重量、面積教材才開始引入，並進行第一及第二階段的教學；國小三年級時，長度教材已進入第四階段的教學，但是容量、重量教材才進行第三階段的教學，角度的教材才開始引入，並進行第一、第二階段的教學，國小三年級還沒有體積的教材，體積的教材在四年級才開始引入。

## 主題 1-2：測量單位與測量單位的化聚

### 1-2-1：測量單位及測量單位的數量化

#### 認知及數學結構：

對國小學生而言，數字是用來描述離散量的個數，例如 5 條繩子，7 顆蘋果等。當學生面對 1 條繩子長 30 公分，或 1 個蘋果重 38 公克的情境時，他可能無法理解，為什麼 1 條繩子會冒出「30」這個數字，1 個蘋果會冒出「38」這個數字。下面說明為什麼可以使用數字來描述，以及將這些量數字化對我們有那些幫助？

有一條要被測量長度的甲繩，當我們選定「1 公分」當做長度的單位量，就可以利用單位量累積的次數來描述甲繩的長度，例如 30 個「1 公分」接起來和甲繩一樣長，就稱甲繩的長度是 30 公分。我們也可以將單位量等分割，稱等分割後的量為單位分量，再利用單位分量累積的次數來描述繩子的長度，例如將單位量「1 公尺」平分成 10 份，得到單位分量 $\frac{1}{10}$ 公尺，3 個 $\frac{1}{10}$ 公尺接起來和甲繩一樣長，就稱甲繩的長度是 $\frac{3}{10}$ 公尺。

透過單位量將要測量的量數值化有兩個好處，以長度量為例，第一個好處是能描述被測量的繩子有多長，第二個好處是透過數字的大小，可以比較所有被測量繩子的長短。

## 1-2-2：量感

### 認知及數學結構：

長度、面積、容量、體積、角度、重量這六種感官量中，估測那些量比較準？為什麼這些量比較容易估測？跳繩、走廊、萬里長城及細菌的長度中，估測那些量比較準？為什麼很長或很短的情境都不容易估測？能進行有效率的估測，要有那些先備能力？

測量是將單位量數值化的結果，因此掌握的單位量愈多，愈容易描述測量的結果，當我們能夠掌握 1 公分的量感，就能透過 1 公分累積的次數，描述鉛筆大約長多少公分。透過 1 公分的累積次數描述走廊有多長很困難，因為累積的次數太多，如果我們能夠掌握 1 公尺的量感，就能透過 1 公尺累積的次數，描述走廊大約長幾公尺。

當學生知道拇指和食指間的寬度是 7 公分（1 扠），就能以 1 扠為單位量，測量黑板的長度，例如 40 個 1 扠接起來和黑板一樣長，黑板的長度就是 40 個 1 扠，也就是  $40 \times 7 = 280$  公分。用 1 扠為單位量測量教室的周長太麻煩，當學生也知道伸直雙手的長度是 1.5 公尺，就能以伸直雙手的長度為單位量，測量教室的周長，例如 30 個伸直雙手的長度接起來和教室的周長一樣長，教室的周長就是  $1.5 \times 30 = 45$  公尺。

由以上的描述可以知道，必須有單位量的概念，才能透過單位量的累積次數概略描述被測量的量是多少個單位量，多數成人估測長度及角度不會太離譜，估測重量比較困難。因為成人掌握較多長度的單位量，可以透過單位量累積的次數描述被測量的量和單位量的倍數關係，來描述繩子有多長；成人也能掌握直角是90度，可以透過和90度的比較，或將90度先分割再合成的方式，概略描述一個角是多少度。

多數成人無法掌握1公克或1公斤的量，因此無法較正確的描述物體的重量；多數成人也沒有適合描述很長或很短長度的單位量，所以無法正確估測萬里長城或細菌的長度。

## 1-2-3：公制單位與常用單位

### 認知及數學結構：

#### (一)公制單位

「公制單位」是十進位制的單位，全世界通用，而且方便記憶。國小課本中出現的單位是社會上較常使用的「公制單位」，稱之為「常用單位」。

在測量長度、重量、容量、…時，公制單位都先選擇一個基準單位，並使用一組形容詞來描述各單位與基準單位間的十進關係。以「長度」單位為例，公制單位選擇「米」當做長度的基本單位，然後在米前面加上「十、百、千、…、百萬、…、十億、…」等形容詞表示這些單位與米的「十倍、百倍、千倍、…、百萬倍、…、十億倍、…」的關係，例如千米表示和 1000 個 1 米接來一樣長。在米前面加上「分、厘、毫、…、微、…、奈、…」等形容詞表示這些單位與米的「十分之一倍、百分之一倍、千分之一倍、百萬分之一倍、…、十億分之一倍、…」的關係，例如：厘米表示百分之一米，毫米表示千分之一米，微米表示百萬分之一米，奈米表示十億分之一米。

相同的，公制單位選擇了「公升」當做「容量」的基準單位，分公升表示十分之一公升，毫公升表示千分之一公升，微公升表示百萬分之一公升，有時也將分公升、毫公升等簡稱為分升、毫

升。因此，當我們知道不同單位的基準單位之後，只要記憶一組形容詞，就能夠掌握單位間的倍數關係，對解決單位間的化聚有很大的幫助。

下面提供長度及容量不同單位對應的表格，第三行的描述方式和第二行英文公制單位的描述方式一致。

長度單位：公里、公引、公丈、公尺、公寸、公分、公釐

Km 、 hm 、 dam 、 m 、 dm 、 cm 、 mm

千米、百米、十米、 米、分米、厘米、毫米

容量單位：公秉、公石、公斗、公升、公合、公勺、公撮

Kl 、 hl 、 dal 、 l 、 dl 、 cl 、 ml

千公升、百公升、 十公升、 公升、分公升、厘公升、毫公升

在 97 年頒布九年一貫課程綱要，數學學習領域附錄三的度量衡列表中，出現的單位並不完全是公制單位的記法，例如長度單位出現公里、公尺、公分與毫米；容量單位出現公升及毫公升，重量單位出現公噸、公斤及公克。

## (二)常用單位

以長度的單位為例，我國每十倍就有一個單位的名稱，例如公里、公引、公丈、公尺、公寸、公分、公厘都是長度的單位；公制單位每十倍也有一個單位的名稱，例如 km(千米)、hm(百米)、

dam(十米)、m(米)、dm(分米)、cm(厘米)、mm(毫米) 等都是長度的單位，但是日常生活中，並不需要用到這麼多的單位。

以公制長度的基本單位「米」為例，西方人認為 1000 以內的數量都是可以掌握的，因此 13 個「1 米」稱為 13 米即可，並不需要引入新的單位「十米」，將 13 米稱為 1「十米」3「米」；278 個「1 米」稱為 278 米即可，並不需要引入新的單位「百米」和「十米」，將 278 米稱為 2「百米」7「十米」8「米」。當「1 米」的個數超過 1000 個時，才需要引入新的單位「千米」，並將 2465 個「1 米」稱為 2「千米」465「米」。

公制單位是西方人發明的，延伸西方人三位一撇的概念，在長度單位中，經常使用的單位是「千米」、「米」、「毫米」、「微米」、「奈米」，其中「千米」是「米」的 1000 倍，「米」是「毫米」的 1000 倍、「毫米」是「微米」的 1000 倍、「微米」是「奈米」的 1000 倍，也就是說，經常使用的單位間都滿足 1000 倍的關係。

轉換成我們熟悉的單位，日常生活中經常使用的長度單位是「公里」、「公尺」、「公分」、「公厘」，重量單位是「公噸」、「公斤」、「公克」，容量單位是「公秉」、「公升」、「公撮」，如果將公分拿走，相鄰兩個單位間都是 1000 倍的關係。

引入換單位概念時，應該先引入兩單位間的 10 倍關係，再引入兩單位間的 100 倍關係，最後才引入兩單位間的 1000 倍關係，

因此國小數學教材，除了出現上面這些常用的單位外，還要引入公合(分公升)等單位，其中  $1$  公尺 =  $100$  公分、 $1$  公分 =  $10$  公厘， $1$  公升 =  $10$  公合。換句話說，只要能掌握三位一撇的概念，再記憶公分和公尺、公分和公厘，以及公合和公升的倍數關係，就可以掌握國小皆段所有不同單位間的倍數關係。

## 1-2-4：單位的化聚

### 認知及數學結構：

有兩個以上的單位，才會有單位間化與聚的問題。其中較大的單位轉換為較小的單位稱之為化，例如將 1 公尺化為 100 公分，較小的單位轉換成較大的單位稱之為聚，例如將 100 公分聚成 1 公尺。

單位呈現的格式有兩種，一種稱為單名數，例如：3 公尺、3.6 公克、 $\frac{2}{7}$  公升、5 小時等都是單名數；另一種稱為複名數，例如 3 公尺 20 公分、3 日 5 小時 20 分 30 秒等都是複名數。

單位化聚的類型可以區分為四類，第一類是整數倍單名數化聚、第二類是整數倍複名數化聚、第三類是分、小數倍單名數化聚、第四類是分、小數倍複名數化聚。

整數倍單名數化聚又可以區分為兩類，一類是大單位化成小單位，例如 3 公尺 = 300 公分、2 日 = 48 小時。另一類是小單位聚成大單位，例如 5000 公克 = 5 公斤、720 分 = 12 時。整數倍複名數化聚也可以區分為兩類，一類是大單位化成小單位，例如 3 公尺 20 公分 = 320 公分、2 日 15 時 = 63 時。另一類是小單位聚成大單位，例如 5400 公克 = 5 公斤 400 公克、1520 分 = 1 日 1 時 20 分。分、小數倍單名數化聚也可以區分為兩類，一類是大單位化成小

單位，例如  $0.2$  公尺 =  $20$  公分、 $3.2$  公尺 =  $320$  公分、 $2.6$  日 =  $62.4$  小時。另一類是小單位聚成大單位，例如  $40$  公克 =  $0.04$  公斤、 $5040$  公克 =  $5.04$  公斤、 $615$  分 =  $25.25$  時。分、小數倍複名數化聚也可以區分為兩類，一類是大單位化成小單位，例如  $3.2$  公尺 =  $3$  公尺  $20$  公分、 $2$  日  $12$  時 =  $2.5$  日。另一類是小單位聚成大單位，例如  $5$  公斤  $40$  公克 =  $5.04$  公斤、 $4$  時  $15$  分 =  $4.25$  時。

化聚問題中比較困難的是分、小數倍單名數的化聚，下面區分成大單位化成小單位，以及小單位聚成大單位兩部份，概略說明如何進行分、小數倍單位化聚的教學。

### (一)分、小數倍單名數化聚(大單位化成小單位)

以  $0.2$  公尺 = ( ) 公分為例，說明如何幫助不同階段的學生解決問題。

#### 策略甲：利用分數做數的概念來解題

中年級學生已有分數做數，以及一位小數和十分之幾分數互換的解題經驗，教師可以透過下面的步驟幫助學生解決問題。

步驟 1：「1 盒蘋果有 20 個， $\frac{3}{5}$  盒蘋果有多少個？」

教師可以透過  $\frac{3}{5}$  盒蘋果是將 1 盒蘋果平分成 5 份後，取出其中的 3 份，也就是將 20 個蘋果平分成 5 份，取出其中的 3 份的想法，幫助學生利用算式「 $20 \div 5 = 4$ ， $4 \times 3 = 12$ 」，

算出 $\frac{3}{5}$ 盒蘋果有 12 個的答案。

步驟 2：「將小數 0.2 改記成分數，記記看。」

教師透過小數 0.2 是分數 $\frac{2}{10}$ 的另一種記法；或透過 0.2

是 2 個 0.1，也就是 2 個 $\frac{1}{10}$ ，2 個 $\frac{1}{10}$ 是 $\frac{2}{10}$ 的想法，

幫助學生將 0.2 改記成 $\frac{2}{10}$ 。

步驟 3：「1 公尺和 100 公分一樣長，0.2 公尺和幾公分一樣長？」

當學生能將 0.2 改記成 $\frac{2}{10}$ ，就能利用算式「 $100 \div 10 = 10$ ，

$10 \times 2 = 20$ 」，算出 0.2 公尺和 20 公分一樣長。

**策略乙：利用單位量轉換的概念來解題**

當學生知道 3 公尺是 3 個 1 公尺，0.2 公尺是 0.2 個 1 公尺，也有解決整數乘以小數問題的經驗，就能透過單位量轉換的想法解決問題。

0.2 公尺是 0.2 個 1 公尺

⇒ 0.2 公尺是 0.2 個 100 公分(1 公尺=100 公分)

⇒ 0.2 公尺是 100 公分的 0.2 倍(可以記成  $100 \times 0.2$ )

⇒ 0.2 公尺是 20 公分( $100 \times 0.2 = 20$ )

**策略丙：利用比的概念來解題**

當學生能掌握比與比值的意義後，就能透過四項比例式

「1 公尺：100 公分=0.2 公尺：( )公分」解決問題。

學生可能利用相等的比的概念，「 $1:100=2:200=0.2:20$ 」，得到  $0.2$  公尺= $20$  公分的答案。也可能利用「內項乘以內項等於外項乘以外項」的算則，「 $1:100=0.2:甲$ ， $100\times 0.2=1\times 甲$ ， $甲=20$ 」，得到  $0.2$  公尺= $20$  公分的答案。

## (二)分、小數倍單名數化聚(小單位聚成大單位)

以  $40$  公克=( )公斤為例，說明如何幫助不同階段的學生解決問題。

### 策略甲：利用整數除以整數，答案是分數或小數的概念來解題

當學生有包含除問題的解題經驗，也有整數除以整數，答案是分數或小數的解題經驗，可以透過下面的步驟幫助學生解決問題。

步驟 1：「有  $400$  個蘋果，每  $1000$  個裝 1 箱，全部裝完，相當於裝成幾箱？」

學生可以利用算式「 $400\div 1000=0.4$ 」或「 $400\div 1000=$

$\frac{400}{1000}$ 」，算出  $400$  個蘋果相當於  $0.4$  箱或  $\frac{400}{1000}$  的答案。

步驟 2：「有  $40$  公克，每  $1000$  公克換成 1 公斤，全部換完，相當於多少公斤？」

學生可以利類比步驟 1 的解題經驗，用算式「 $40 \div 1000 = 0.04$ 」或「 $40 \div 1000 = \frac{40}{1000}$ 」，算出 40 公克相當於 0.04 公斤或  $\frac{40}{1000}$  公斤的答案。

### 策略乙：利用單位量轉換的概念來解題

當學生知道 40 公克是 40 個 1 公克，1 公克是 0.001 公斤，也有小數乘以整數的解題經驗，就能透過單位量轉換的想法來解決問題。

40 公克是 40 個 1 公克

⇒ 40 公克是 40 個 0.001 公斤 (1 公克 = 0.001 公斤)

⇒ 40 公克是 0.001 公斤的 40 倍 (可以記成  $0.001 \times 40$ )

⇒ 40 公克是 0.04 公斤 ( $0.001 \times 40 = 0.04$ )

### 策略丙：利用比的概念來解題

當學生能掌握比與比值的意義後，就能透過四項比例式

「1 公斤 : 1000 公克 = ( ) 公斤 : 40 公克」解決問題。

學生可能利用相等比的概念，「 $1 : 1000 = 0.01 : 10 = 0.04 : 40$ 」，得到 40 公克 = 0.04 公斤的答案。也可能利用「內項乘以內項等於外項乘以外項」的算則，「 $1 : 1000 = 乙 : 40$ ， $1 \times 40 = 1000 \times 乙$ ， $乙 = 0.04$ 」，得到 40 公克 = 0.04 公斤的答案。



## 第二章：面積

撰寫者：謝堅

### 主題 2-1：面積的意義

#### 2-1-1：單位面積的意義

#### 認知及數學結構：

##### (一)測量面積的單位

長度是一維的量，只能選擇直線段或曲線段當做測量長度的單位，因為以直線段為單位比較容易測量，所以數學上選擇直線段為測量長度的單位，以長度單位 1 公分為例，繩長 5 公分，指的是繩子和 5 個 1 公分接起來一樣長。

面積是二維的量，因此有比較多選擇測量面積單位的方式。想想看，正三角形、正方形、滿足黃金分割的長方形、正五邊形、正六邊形、圓形等圖形中，那些圖形能當作測量面積的單位，哪種圖形當作測量面積的單位最恰當？

圓形及正五邊形無法無空隙延伸的鋪滿整個平面，因此它們不能當作測量面積的單位；正三角形、滿足黃金分割的長方形、正六邊形等都可以無空隙的鋪滿整個平面，但是有效率的點數這些圖形的個數不太方便；而透過乘法計算排列整齊正方形的個數很方便，在直角坐標上求圖形的面積也很方便等原因，因此數學上選擇正方形當作測量面積的單位。

##### (二)單位面積的命名

以單位面積 1 平方公分為例，有兩種命名的方法。

第一種：拿出邊長 1 公分的正方形，直接宣告邊長 1 公分正方形的面積是 1 平方公分。

第二種：透過「公分乘以公分是平方公分」的方式，說明邊長 1 公分正方形的面積是「1 公分乘以 1 公分」，也就是 1 平方公分。

很多教師習慣透過第二種方法命名 1 平方公分，這種命名的方式是不合理的，因為國小學生只學過兩個數字相乘，並沒有學過兩個單位相乘。如果「公分 $\times$ 公分=平方公分」的結論是正確的，那麼「公克 $\times$ 公克=平方公克」、「公升 $\times$ 公升=平方公升」的結論也應該成立，但是我們並沒有聽過「平方公克」和「平方公升」這些單位。

台灣民間經常使用的面積單位是「坪」，依據前面公分相乘的說法，「 $\sqrt{\text{坪}}\times\sqrt{\text{坪}}$ 」才會得到「坪」這個單位，但是我們並不知道「 $\sqrt{\text{坪}}$ 」有多長。以前台灣民間經常使用榻榻米，榻榻米的大小是大家熟悉的面積單位，因為榻榻米是長方形，為了測量方便，選擇和 2 個榻榻米合起來一樣大圖形的面積為建地的測量單位，稱為「1 坪」。

成人習慣透過「公分 $\times$ 公分=平方公分」引入單位面積 1 平方公分，主要是受到「正方形面積=邊長 $\times$ 邊長」這個公式的影響，

因為直觀的看，正方形面積公式是透過「長度×長度」得到的。請注意，在引入1平方公分單位之前，學生尚未學過正方形及長方形的面積公式。

### (三)單位面積的累加及分割

教師可以透過累積及分割單位面積的方式，檢查學生是否掌握單位面積1平方公分的意義。例如要求學生畫出面積是5平方公分的圖形，檢查學生是否理解5平方公分就是5個1平方公分合起來的意義；要求學生畫出 $\frac{1}{2}$ 平方公分的圖形，檢查學生是否理解 $\frac{1}{2}$ 平方公分就是將1平方公分平分成2份，再取出其中1份的意義。

相當多學生誤解 $\frac{1}{2}$ 平方公分的意義，畫出邊長為 $\frac{1}{2}$ 公分的正方形(面積是 $\frac{1}{4}$ 平方公分)，稱該正方形的面積是 $\frac{1}{2}$ 平方公分。教師可以透過下面幾個步驟，先幫助學生掌握1平方公分單位的意義，再正確的畫出 $\frac{1}{2}$ 平方公分。

步驟1：拿出1張圓形色紙代表1個披薩，要求學生畫出 $\frac{1}{2}$ 個披

薩；或拿出1條繩子，要求學生畫出 $\frac{1}{2}$ 條繩子。

步驟 2：拿出 1 平方公分的色紙，要求學生畫出 $\frac{1}{2}$ 張色紙，學生

可能有很多畫出 $\frac{1}{2}$ 張色紙的方法，教師都應該接受。

步驟 3：因為色紙的面積是 1 平方公分， $\frac{1}{2}$ 張色紙的面積是 1 張

色紙的一半，也就是 1 平方公分的一半，1 平方公分的

一半是 $\frac{1}{2}$ 平方公分。

國小三年級課程已經引入單位分數及真分數的意義，因此當國小三年級引入單位面積 1 平方公分的意義後，畫出 $\frac{1}{2}$ 平方公分對國小中、高年級學生而言應該並不困難，學生為什麼會將邊長為 $\frac{1}{2}$ 公分正方形面積視為 $\frac{1}{2}$ 平方公分，可能有下面二個理由：

第一個理由是學生沒有單位面積的概念，不知道 $\frac{1}{2}$ 平方公分是 $\frac{1}{2}$ 個 1 平方公分；第二個理由是學生只會利用長方形及正方形面積公式解決求面積的問題，但是並不理解面積公式的意義。

## 2-1-2：面積常用單位的引入

### 認知及數學結構：

#### (一)一次方單位的引入及化聚

長度的單位(例如公尺、公分等)，容量的單位(例如公升、毫公升等)，角度的單位(例如度)，重量的單位(例如公斤、公克等)、時間的單位(例如小時、分鐘等)，都是一次方的單位；面積的單位(例如平方公尺、平方公分等)，是二次方的單位，體積的單位(例如立方公尺、立方公分等)，是三次方的單位。

下面以長度單位公尺和公里為例，說明兩種引入一次方單位及其化聚的方式：

第一種：分別引入 1 公尺和 1 公里兩種單位，再討論它們之間的化聚關係。

步驟 1：引入 1 公尺的單位，並做相關的實測、估測與計算。

步驟 2：引入 1 公里的單位，並做相關的實測、估測與計算。

步驟 3：宣告 1000 個 1 公尺接起來和 1 公里一樣長，

引入  $1000 \text{ 公尺} = 1 \text{ 公里}$

步驟 4：透過將 1 公里平分成 1000 份，其中的 1 份和 1 公尺一樣

長，引入  $\frac{1}{1000} \text{ 公里} = 1 \text{ 公尺}$

第二種：先引入 1 公尺的單位，再透過累積 1 公尺的方式引入

1 公里，並討論它們之間的化聚關係。。

步驟 1：引入 1 公尺的單位，並做相關的實測、估測與計算。

步驟 2：給 1000 個 1 公尺接起來的長度一個新名字，稱為 1 公里，

即  $1000 \text{ 公尺} = 1 \text{ 公里}$

步驟 3：透過將 1 公里平分成 1000 份，其中的 1 份和 1 公尺一樣

長，引入  $\frac{1}{1000} \text{ 公里} = 1 \text{ 公尺}$ 。

步驟 4：以 1 公里為單位，做相關的實測、估測與計算。

因為第一種引入的方式比較自然，像民間單位的精神，第二種引入的方式強調 1 公尺的累積，比較接近公制單位的精神。建議教師首引公分及公尺單位時，採用第一種引入的方式，接下來引入公尺及公里，公分及公釐(毫米)單位時，採用第二種引入的方式。

## (二)平分公分及平方公尺單位的引入及化聚

平方公尺及平方公分都是二次方的單位，國小課程都先引入 1 平方公分，再引入 1 平方公尺，有兩種引入 1 平方公尺，以及討論平方公分和平方公尺化聚的方式：

第一種：先命名 1 平方公尺，再透過將 1 平方公尺化為 10000 平方公分的方式，進行平方公分和平方公尺的化聚。

步驟 1：先命名邊長 1 公尺的正方形面積為 1 平方公尺

步驟 2：1 平方公尺是邊長 100 公分正方形的面積，邊長 100 公分

正方形是由 10000 個 1 平方公分組成的，

所以 1 平方公尺 = 10000 平方公分

(a) 如果已引入正方形面積公式，可以利用公式算出答案。

(b) 如果尚未引入正方形的面積公式，可以利用平方公分板，

透過點數或乘法算式算出答案。

步驟 3：將 1 平方公尺平分成 10000 份，其中的 1 份是 1 平方公

分，所以  $1 \text{ 平方公分} = \frac{1}{10000} \text{ 平方公尺}$

第二種：先命名 1 平方公尺，再透過將 1 平方公分聚為 1 平方公

尺的方式，進行平方公分和平方公尺的化聚。

步驟 1：先命名邊長 1 公尺的正方形面積為 1 平方公尺。

步驟 2：邊長 1 公分正方形面積是 1 平方公分， $100 \times 100$  個 1 平方

公分可以排成邊長 100 公分的正方形， $100 \text{ 公分} = 1 \text{ 公}$

尺，邊長 1 公尺正方形的面積是 1 平方公尺，所以  $100 \times$

$100$  個 1 平方公分排成正方形的面積是 1 平方公尺。

步驟 3：邊長 1 公分正方形面積是 1 平方公分， $100 \times 100$  個 1 平方

公分排成正方形的面積是 10000 平方公分，

所以  $10000 \text{ 平方公分} = 1 \text{ 平方公尺}$ 。

步驟 4：將 1 平方公尺平分成 10000 等份，其中的 1 份是

$$1 \text{ 平方公分}，所以 1 \text{ 平方公分} = \frac{1}{10000} \text{ 平方公尺}$$

### (三)公頃、公畝及平方公里單位的引入

平方公分、平方公尺、平方公里都是二次方描述的面積單位，平方公里單位的引入，和平方公分及平方公尺單位引入的方式相同(見下圖)，都是透過邊長是單位長度的正方形引入單位面積。

正方形的邊長	1 公分	1 公尺	1 公里
正方形的面積	1 平方公分	1 平方公尺	1 平方公里

公頃和公畝都是一次方描述的面積單位，如下面的表格，有兩種命名公畝和公頃的方式：

正方形的邊長	1 公尺	10 公尺	100 公尺	1000 公尺
正方形的面積	1 平方公尺	1 公畝	1 公頃	1 平方公里

第一種：直接命名邊長 10 公尺正方形的面積為 1 公畝，邊長 100 公尺正方形的面積為 1 公頃。

第二種：分別算出邊長 10 公尺正方形的面積為 100 平方公尺，邊長 100 公尺正方形的面積為 10000 平方公尺，再命名 100 平方公尺為 1 公畝，10000 平方公尺為 1 公頃。

## 主題 2-2：長(正)方形的面積公式

### 2-2-1：長方形及正方形面積公式

#### 認知及數學結構：

#### (一)長邊及寬邊都是整公分的長方形面積公式。

長邊和寬邊是長方形的組成要素，最有效率求長方形面積或周長的方式，就是將長邊與寬邊的長度，直接代入公式算出答案，「長邊 $\times$ 寬邊」是求長方形面積的公式，「(長邊 $+$ 寬邊) $\times 2$ 」是求長方形周長的公式。

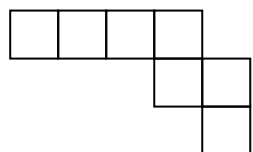
很多學生面對求長方形面積或周長問題時，無法選擇正確的公式來解題，主要的理由是長方形面積和周長公式中，都出現長邊和寬邊，而學生無法掌握長方形面積公式及周長公式的意義。下面透過四個步驟，說明如何幫助學生理解長邊及寬邊都是整公分的長方形面積公式。

**步驟 1：**建立單位面積 1 平方公分的概念，幫助學生知道 a 個 1

平方公分合起來圖形的面積是 a 平方公分。

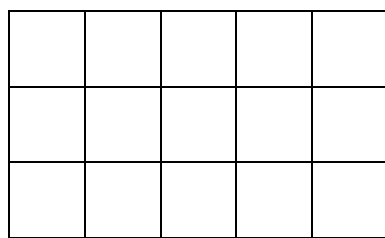
邊長 1 公分的正方形面積是 1 平方公分，下圖的面積和 7 個

1 平方公分合起來一樣大，所以下圖的面積是 7 平方公分。



**步驟 2：**給定一個長方形，用 1 平方公分的方瓦將它鋪滿後，限制學生用一排有幾個，有幾排的方式計算長方形的面積是多少平方公分，並用乘法算式記錄計算面積的過程。

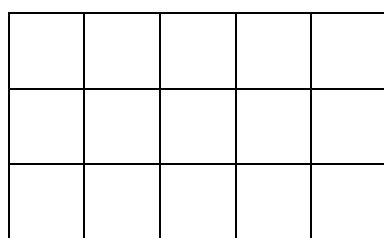
下圖是一個用 1 平方公分方瓦鋪滿的長方形，學生可以透過點數或加法算出長方形的面積是 15 平方公分，教師必須要求學生使用一排有幾個 1 平方公分的格子，一共有幾排的方式，利用乘法「 $5 \times 3 = 15$ 」或「 $3 \times 5 = 15$ 」算出面積是 15 平方公分，才能幫助學生引導出長方形面積的公式。



**步驟 3：**察覺被乘數、乘數和長邊、寬邊的公分數間的關係。

當學生能使用乘法「 $5 \times 3 = 15$ 」算出長方形的面積是 15 平方公分後，教師可以幫助學生察覺乘法算式中被乘數與乘數，和長方形中長邊和寬邊長度的關係。算式中被乘數 5 的和長方形長邊長 5 公分有關，乘數 3 和長方形寬邊長 3 公分有關。長邊是 5 公分，剛好有 5 個 1 平方公分的格子，也就是一排有 5 個 1 平方公分，寬邊是 3 公分，剛好有 3 個 1 平方公分的格子，也就是一共有 3 排。

長邊 5 公分  $\Rightarrow$  一排有 5 個 1 平方公分



寬邊 3 公分  $\Rightarrow$  有 3 排

**步驟 4：**利用長邊及寬邊的公分數，直接用乘法算出單位面積的個數，並形成長乘以寬公式算法的共識。

長邊是 5 公分，表示一排有 5 個 1 平方公分，寬邊是 3 公分，表示一共有 3 排，因此可以透過長邊及寬邊的公分數，利用一排有幾個，有幾排的方式算出長方形的面積，並得到「長方形面積 = 長邊的公分數  $\times$  寬邊的公分數」的公式，當學童有一些利用上述公式的解題經驗後，教師可以將面積公式「長邊的公分數  $\times$  寬邊的公分數」簡稱為「長邊  $\times$  寬邊」或「長  $\times$  寬」。

長方形面積公式的意義不是「5 公分  $\times$  3 公分 = 15 平方公分」，而是「1 平方公分  $\times$  5(個)  $\times$  3(排)」，面積公式計算出長方形是由 15 個 1 平方公分合起來，所以長方形的面積是 15 平方公分。

**(二)長邊或寬邊不是整公分的長方形面積公式。**

上面討論的是長邊和寬邊都是整公分長方形的面積公式，接下來說明當長邊或寬邊是分數或小數公分時，「長方形面積 = 長邊  $\times$  寬邊」的公式還是成立，也就是說，不論長邊與寬邊的長度是整數、分數或小數公分，都可以將長與寬的數字直接代入「長  $\times$  寬」

公式中算出答案。

以「長 $\frac{4}{7}$ 公尺，寬 $\frac{3}{5}$ 公尺色紙的面積是多少平方公尺」為

例，提出兩種幫助學生理解長邊或寬邊是分數或小數公分時面積公式的方法：

第一種方法：延伸長邊和寬邊都是整公分長方形面積公式的意義

**步驟 1：**複習長邊和寬邊都是整公分的問題「長 4 公尺、寬 3 公

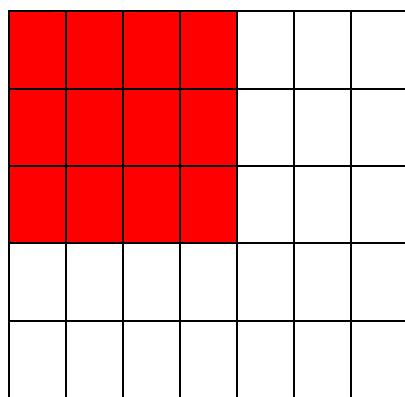
尺的長方形面積是多少平方公尺？」，要求學生說明

「長 $\times$ 寬 $=4\times3=12$ 」是計算有多少個 1 平方公尺。

**步驟 2：**畫出待求的單位 1 平方公尺，接著在其中畫出

長邊 $\frac{4}{7}$ 公尺、寬邊 $\frac{3}{5}$ 公尺的長方形，並將 1 平方公尺

平分成 35 「 $7\times5=35$ 」等份(見下圖)。



**步驟 3：**長方形的長邊和 4 個 $\frac{1}{35}$ 平方公尺接起來一樣長，寬邊

和 3 個 $\frac{1}{35}$ 平方公尺接起來一樣長，可以利用乘法算式

$4 \times 3 = 12$ ，算出色紙的面積是 12 個  $\frac{1}{35}$  平方公尺，

也就是  $\frac{12}{35}$  平方公尺。

步驟 4：幫助學生察覺，算式「 $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{35} = \frac{12}{35}$ 」中的  $4 \times$

$3$  是計算有幾個  $\frac{1}{35}$  平方公尺，和原來用  $4 \times 3$  計算幾個

平方公尺的長方形面積公式是相同的，因此可以延伸原

來的長方形面積公式，透過「長  $\times$  寬  $= \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{35} =$

$\frac{12}{35}$ 」算出長  $\frac{4}{7}$  公尺，寬  $\frac{3}{5}$  公尺長方形面積是  $\frac{12}{35}$  平

方公分。

第二種方法：延伸分數乘以分數乘法的意義

步驟 1：複習分數乘法問題「一張白紙有  $\frac{4}{7}$  平方公尺， $\frac{3}{5}$  張白

紙有多少平方公尺？」，對待答的單位量 1 平方公尺而言，

它是二次分割的問題，第一次分割是將 1 平方公尺平分

成 7 份，取出其中的 4 份得到  $\frac{4}{7}$  平方公尺，第二次分割

是將  $\frac{4}{7}$  平方公尺平分成 5 份，取出其中的 3 份得到  $\frac{12}{35}$

平方公尺，因此可以透過「 $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{35}$ 」算出答案是

$$\frac{12}{35} \text{ 平方公尺。}$$

步驟 2：「長 $\frac{4}{7}$ 公尺，寬 $\frac{3}{5}$ 公尺色紙的面積是多少平方公尺」和

上述問題的解題方式相同，也是將 1 平方公尺進行二次

等分割，因此也可以透過「長 $\times$ 寬 $=\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{35}$ 」，

算出長 $\frac{4}{7}$ 公尺，寬 $\frac{3}{5}$ 公尺白紙的面積是 $\frac{12}{35}$ 平方公

尺。

## 2-2-2：長方形面積公式的迷思概念

### 認知及數學結構：

#### (一)長方形的長邊與寬邊

因為「長方形面積＝長 $\times$ 寬」，因此長方形哪一邊稱為長邊、哪一邊稱為寬邊常引起爭議。數學上並沒有給長邊或寬邊下定義，日常生活中，常見下面這三種定義長邊和寬邊的方式。

第一種：因為受到「長」這個關鍵字的影響，稱比較長的那一邊為長邊，比較短的那一邊稱為寬邊。

第二種：由長方形擺放的位置決定長邊和寬邊，將長方形擺正後，稱水平方向的那一邊為長邊，鉛直方向的那一邊為寬邊。這種定義的方式有一個缺點，如果兩個人擺放的方式不相同，他們所稱的長邊和寬邊就不相同。

第三種：因為只要確定長邊和寬邊就能決定一個長方形，因此長邊和寬邊是同等的重要，只要約定其中的一邊為長邊，那麼剩下的另一邊就是寬邊。

長方形有兩雙對邊等長，四個角都是直角的性質，因此只要給定長方形長邊和寬邊的長度，就能畫出唯一的長方形。但是當學生尚未完全掌握長方形的性質時，只告訴學生長邊和寬邊的長度，學生可能無法畫出正確的長方形。

#### (二)為什麼長度單位相同才能利用乘法算出面積？

因為數學上選擇正方形當作測量面積的單位，因此利用面積公式算長方形的面積時，長和寬的單位必須相同，才能算出有幾個單位面積。

下面是筆者詢問國小中、高年級學生的案例：

「長 3 公分、寬 2 公尺長方形的面積是多少？」，因為沒有詢問面積的單位，因此 600 平方公分、0.06 平方公尺都是合理的答案，不知道教師們是否能接受 6 公分公尺的答案。

國小學生對整數的乘法運算比較熟悉，多數都先將 2 公尺改寫成 200 公分後，再利用長方形面積公式算出答案是 600 平方公分；只有少數的學生將 3 公分改寫成 0.03 公尺，再利用長方形面積公式算出答案是 0.06 平方公尺。

學生算出答案後，筆者接著追問「為什麼 3 公分和 2 公尺不可以直接相乘？」，學生都回答長和寬的單位要相同才可以相乘；筆者再追問「為什麼要將長和寬換成同單位以後才能相乘？」；此時學生不是拒絕回答，就是回答「這是規定」。

### (三)線段和線段乘積的意義

圖一中有 1、a、b 三條線段，請畫出「 $axb$ 」的圖形。



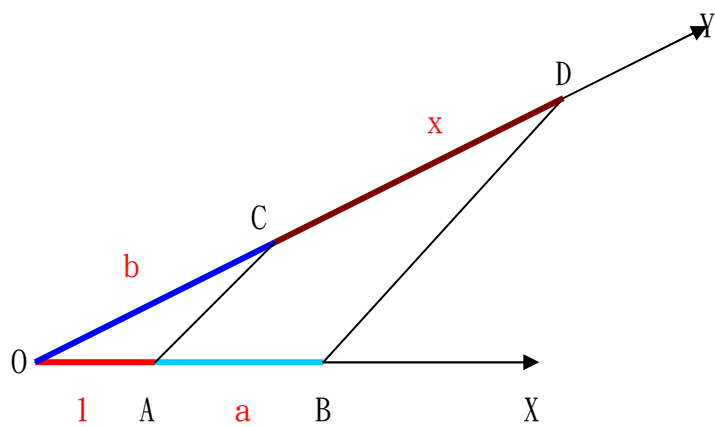
很多人都認為線段和線段的乘積是面積，於是畫出長邊是線段  $a$ 、寬邊是線段  $b$  的長方形，說明這個長方形的面積就是  $axb$ 。這種畫法並沒有解決上面的問題，問題中要求畫出的是線段  $a$  和線段  $b$  乘積「 $axb$ 」的圖形，不是畫出面積是  $axb$  長方形的圖形。

下面提出一種畫出線段  $a$  和線段  $b$  的乘積「 $axb$ 」圖形的方法，畫出來「 $axb$ 」的圖形還是一條線段。

如下圖，先過  $O$  點畫出一條射線  $OX$ ，並在射線  $OX$  上依序畫出線段  $OA=1$ ，線段  $AB=a$ 。再過  $O$  點畫出另一條射線  $OY$ ，並在射線  $OY$  上畫出線段  $OC=b$ 。連接  $A$ 、 $C$  兩點，再過  $B$  點畫出平行於線段  $AC$  的線段  $BD$ ，且交射線  $OY$  於  $D$  點，假設線段  $CD$  的長是  $x$ 。

因為  $\triangle OAB$  和  $\triangle OBD$  相似，所以對應邊長度成比例，可以得到  $OA : AB = OC : CD$ ，也就是  $1 : a = b : x$ ，透過內項乘以內項等於外項乘以外項的公式，可以算出  $x = axb$ 。也就是說， $a$  和  $b$  是兩條線段，線段  $a$  和線段  $b$  的乘積「 $axb$ 」還是一條線段。

仿上面的畫法，可以透過「 $1 : axb = b : y$ 」，畫出「 $axbxb$ 」的圖形，「 $axbxb$ 」的圖形不是體積為  $axbxb$  的長方體，「 $axbxb$ 」的圖形還是一條線段。



## 主題 2-3：平行四邊形、三角形、梯形面積公式

### 2-3-1：引入面積公式(策略一)

#### 認知及數學結構：

數學上選擇正方形當作測量面積的單位，長方形和正方形很容易被單位面積覆蓋，也很容易利用乘法算出其面積（單位面積的個數）。平行四邊形、三角形及梯形無法被單位面積剛好蓋滿，因此不易直接算出這些圖形的面積，必須透過公式幫助，才能較快速的算出面積。接下來，介紹兩種引入平行四邊形、三角形及梯形面積公式的方法。

第一種方法：先引入平行四邊形面積公式，再透過平行四邊形面積公式引入三角形及梯形面積公式。

這種方法的優點是只要操弄圖形就能引入公式，不涉及代數式的運算；缺點是解法不自然，學生無法自發性的解題，必須透過教師的引導才能導出公式。九年一貫課程綱要在五年級就引入平行四邊形、三角形、梯形面積公式，因此多數課本都透過第一種方法引入面積公式。

第二種方法：以長方形和直角三角形面積公式為基準，將平行四邊形、三角形、梯形分割成長方形和直角三角形後，分別算出長方形和直角三角形的面積後再相加，就能算出平行四邊形、三角形和梯形的面積。

這種方法的優點是學生可以自行解題，缺點是引入公式時涉及代數式的運算，不易導出面積公式。

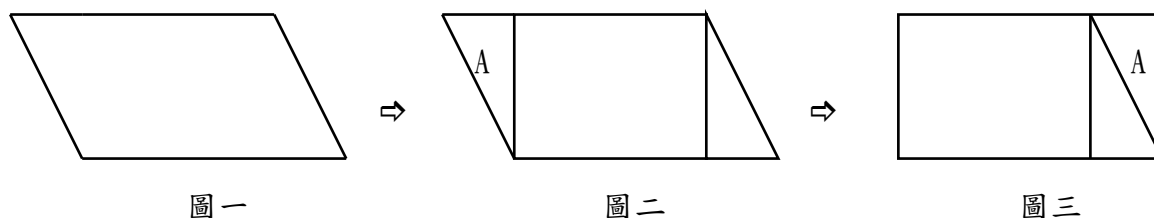
以下較詳細的說明這兩種引入面積公式方法的教學流程。

### 第一種引入面積公式方法的教學流程：

步驟 1：透過分割及合成，將平行四邊形轉換成等積異形的長方形。

下圖中，圖一是平行四邊形，我們可以將圖一中的平行四邊形分割成圖二中兩個全等的直角三角形和一個長方形；如果將圖二中左邊的直角三角形 A 切割下來，補在右邊直角三角形旁邊，讓兩個直角三角形對應的斜邊重合，圖二中的平行四邊形就會變形成圖三中的長方形，而且圖二的平行四邊形和圖三的長方形面積相等。

圖三中長方形的長邊就是圖一中平行四邊形的底邊，因此只要量出圖三中長方形的寬邊，就可以算出圖三長方形的面積，圖三長方形的面積也就是圖一平行四邊形的面積。

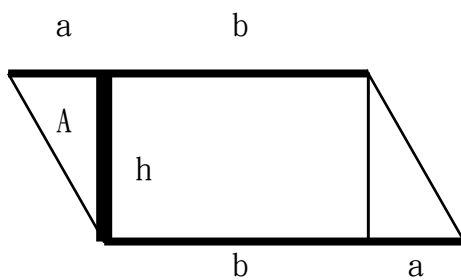


步驟 2：命名平行四邊形的高，導出平行四邊形的面積公式。

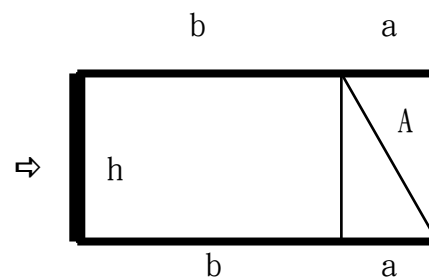
平行四邊形有 4 個邊，4 個角，平行四邊形並沒有「高」，想想看，何謂平行四邊形的高？為什麼要定義平行四邊形的高？

透過步驟一分割及合成的活動，可以將圖四中的平行四邊形轉換成圖五中等積異形的長方形，圖五長方形的長邊和圖四平行四邊形的底邊等長，圖五長方形的寬邊和圖四平行四邊形另一邊並不等長，因此必須求出圖五中長方形的寬邊，才能算出圖四平行四邊形的面積。圖五長方形的寬邊剛好是圖四平行四邊形上、下兩平行邊的距離，因此，數學上稱平行四邊形上、下兩平行邊的距離為平行四邊形的高。

圖四中平行四邊形的底邊和圖五長方形的長邊都是  $(b+a)$ ，圖四平行四邊形的高和圖五長方形的寬邊都是  $h$ ，可以導出面積公式「平行四邊形面積 = 長方形面積 = 長  $\times$  寬 =  $(b+a) \times h =$  底  $\times$  高」。



圖四



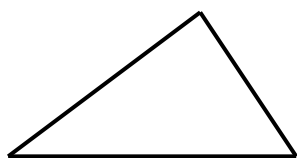
圖五

**步驟 3：**透過平行四邊形面積公式導出三角形面積公式。

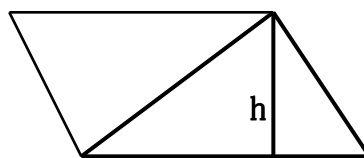
圖六是一個三角形，當我們複製出一個和圖六全等的三角形後，這兩個全等的三角形可以拼成圖七中的平行四邊形，所以，

圖六三角形面積剛好是圖七平行四邊形面積的一半。

三角形有 3 個邊，3 個角，三角形並沒有「高」，必須透過平行四邊形的高引入三角形的高，圖七平行四邊形上、下兩平行邊的距離和圖六三角形頂點到底邊的距離等長，因此數學上稱頂點到底邊的距離為三角形的高。圖六三角形的高和圖七平行四邊形的高都是  $h$ ，圖六三角形的底邊和圖七平行四邊形的底邊都是  $a$ ，可以導出面積公式「三角形面積 = 平行四邊形面積  $\div 2 = (axh) \div 2 = (\text{底} \times \text{高}) \div 2$ 」。



圖六



圖七

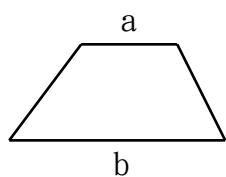
教師們請注意，國小學生無法想到這種解題策略，必須透過教師引導才能導出公式。另外，國小學生不知道「兩個全等的三角形可以拼成一個平行四邊形」這個幾何性質，教師必須幫助學生驗證，由兩個全等三角形拼成的四邊形，兩雙對邊都互相平行，所以是一個平行四邊形。

**步驟 4：**透過平行四邊形面積公式導出梯形面積公式。

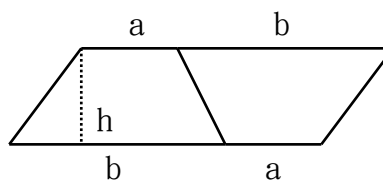
圖八是一個梯形，當我們複製出一個和圖八全等的梯形後，這兩個全等的梯形可以拼成圖九中的平行四邊形，所以圖八梯形的面積剛好是圖九平行四邊形面積的一半。

梯形有 4 個邊，4 個角，梯形並沒有「高」，必須透過平行四邊形的高引入梯形的高，因為圖九中平行四邊形上、下兩平行邊的距離就是圖八梯形上、下兩底的距離，因此數學上稱上、下兩底的距離為梯形的高。

圖八梯形的高和圖九平行四邊形的高都是  $h$ ，圖九平行四邊形的底邊和圖八梯形上底和下底的長度和都是  $a+b$ ，可以導出面積公式「梯形面積 = 平行四邊形面積  $\div 2 = (a+b) \times h \div 2 = (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2$ 」。



圖八



圖九

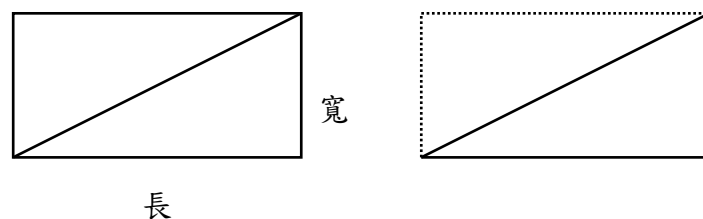
## 2-3-2：引入面積公式(策略二)

認知及數學結構：

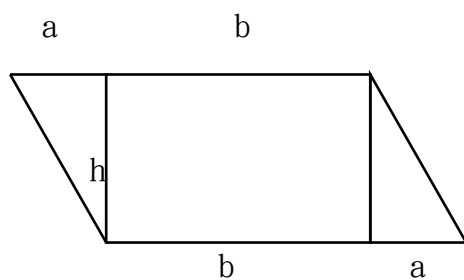
第二種引入面積公式的教學流程：

步驟1：知道直角三角形的面積是對應長方形面積的一半

學生已經學過長方形面積公式，也知道長方形的對角線可以將長方形分割成兩個全等的三角形，因此下面右圖直角三角形的面積是左圖長方形面積的一半，可以導出面積公式「直角三角形面積＝長方形面積 $\div 2 = (\text{長} \times \text{寬}) \div 2$ 」。



步驟2：透過分割成兩個全等直角三角形和一個長方形的方式導出平行四邊形面積公式



只要把平行四邊形分割成兩個全等的直角三角形和一個長方形，並量出直角三角形直角兩股的長度和長方形的長和寬，就可以利用直角三角形及長方形面積公式分別算出直角三角形和長方

形的面積，這三個圖形的面積和就是平行四邊形的面積。

雖然學生可以算出平行四邊形的面積，但是不易透過下面的代數運算引入平行四邊形的面積公式。

$$\text{平行四邊形的面積} = (axh) \div 2 + bxh + (axh) \div 2$$

$$= \frac{axh}{2} + bxh + \frac{axh}{2}$$

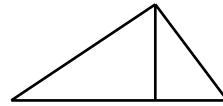
$$= \frac{axh}{2} + \frac{axh}{2} + bxh$$

$$= axh + bxh$$

$$= (a+b) \times h$$

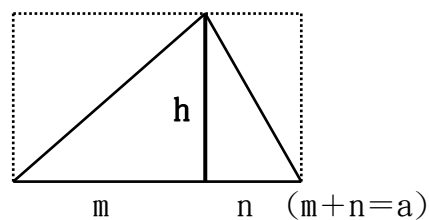
$$= \text{底} \times \text{高}$$

步驟 3：透過分割成兩個直角三角形的方式導出三角形面積公式



只要由三角形的頂點往對應邊畫垂線，把三角形分割成兩個直角三角形，並分別量出直角三角形直角兩邊的長度，就能算出

這 2 個直角三角形的面積，這兩個直角三角形的面積和就是三角形的面積。



雖然學生可以算出三角形的面積，但是不易透過下面的代數

運算引入三角形的面積公式。

$$\text{三角形面積} = (m \times h) \div 2 + (n \times h) \div 2$$

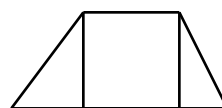
$$= \frac{m \times h}{2} + \frac{n \times h}{2}$$

$$= \frac{(m+n) \times h}{2} = \frac{a \times h}{2}$$

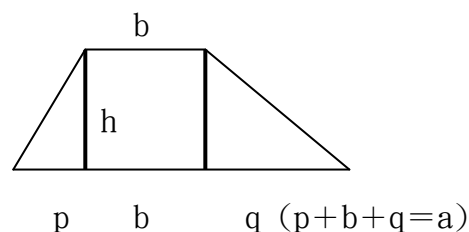
$$= (a \times h) \div 2$$

$$= (\text{底} \times \text{高}) \div 2。$$

**步驟 4：**透過分割成兩個直角三角形和一個長方形的方式導出梯形面積公式



只要由梯形上底的兩個頂點往下底畫垂線，把梯形分割成兩個直角三角形和一個長方形，並分別量出直角三角形直角兩邊的長度和長方形的長和寬，就可以算出這兩個直角三角形和長方形的面積，將這三個圖形的面積相加就是梯形的面積。



雖然學生可以算出梯形的面積，但是不易透過下面的運算導出梯形的面積公式。

$$\begin{aligned}
 \text{梯形面積} &= (pxh) \div 2 + bxh + (qxh) \div 2 \\
 &= \frac{pxh}{2} + \frac{2(bxh)}{2} + \frac{qxh}{2} \\
 &= \frac{pxh + 2(bxh) + qxh}{2} \\
 &= \frac{pxh + bxh + qxh + bxh}{2} \\
 &= \frac{[(p+b+q) + b]xh}{2} \\
 &= \frac{(a+b)xh}{2} \\
 &= (a+b)xh \div 2 \\
 &= (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2
 \end{aligned}$$

## 2-3-3：平行四邊形、三角形、梯形面積公式的統整

### 認知及數學結構：

當學會平行四邊形、三角形及梯形面積公式後，建議教師們提出下面的問題讓學生們討論，檢查學生是否能透過極限的想法，掌握這些面積公式的意義。

問題：梯形的下底和高不變，只改變上底的長短。

(a)當上底變成和下底一樣長，

是否能利用梯形面積公式「 $(上底+下底) \times 高 \div 2$ 」

推得平行四邊形面積公式「 $底 \times 高$ 」。

(b)當上底變成很接近0，

是否能利用梯形面積公式「 $(上底+下底) \times 高 \div 2$ 」

推得三角形面積公式「 $底 \times 高 \div 2$ 」。

## 主題 2-4：圓、扇形及不規則圖形的面積公式

### 2-4-1：圓的面積

#### 認知及數學結構：

圓周率是圓周長和直徑的比值，求圓面積時會利用到圓周率，本文暫不討論圓周率的意義，只討論如何求出圓的面積。接下來，筆者提共兩種國小學童能夠理解解決圓面積的方法。

#### 第一種方法：

先將圓切成兩個半圓，再將兩個半圓都切成很多個(例如 8 個或 16 個)全等的扇形，將這兩個切成扇形的半圓上下交錯疊合起來，會變成一個接近平行四邊形(或長方形)的圖形，平行四邊形的底(長方形的長)是圓周長的一半，平行四邊形的高(長方形的寬)是圓的半徑，可以透過平行四邊形(長方形)面積求出圓面積。

圓面積 = 平行四邊形面積

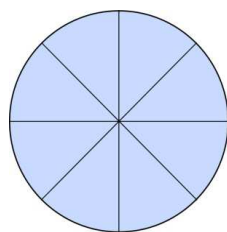
$$= \text{底} \times \text{高}$$

$$= \text{圓周長的一半} \times \text{半徑}$$

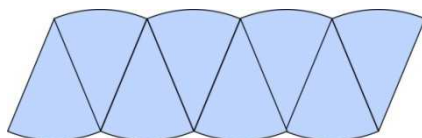
$$= (\text{直徑} \times 3.14) \div 2 \times \text{半徑}$$

$$= (\text{直徑} \div 2 \times 3.14) \times \text{半徑}$$

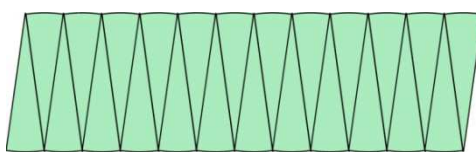
$$= \text{半徑} \times \text{半徑} \times 3.14$$



一個被八等分分割的圓



重新組合一個被八等分割的圓



重新組合一個被二十四等分割的圓

### 第二種方法：

先將圓切成很多個(例如 8 個)同心圓，再將一串串的圓環(像等厚度的甜甜圈)一個個的疊起來，會變成一個接近等腰三角形的圖形，等腰三角形的底就是圓周長，等腰三角形的高就是半徑，可以透過等腰三角形的面積求出圓的面積。

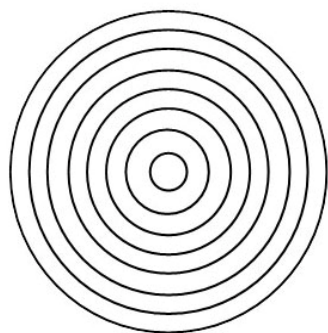
圓面積 = 等腰三角形面積

$$= (\text{底} \times \text{高}) \div 2$$

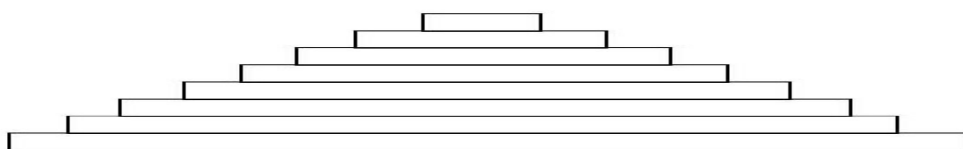
$$= [(\text{直徑} \times 3.14) \times \text{半徑}] \div 2$$

$$= [(\text{直徑} \div 2 \times 3.14) \times \text{半徑}]$$

$$= \text{半徑} \times \text{半徑} \times 3.14$$



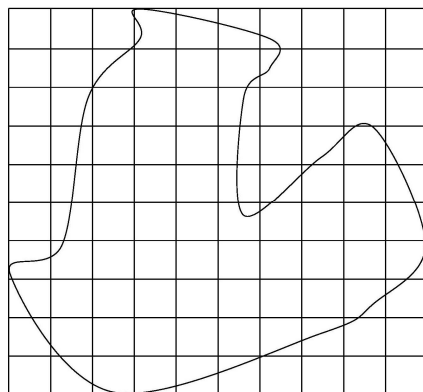
8 個同心圓



一串串的圓環疊起來

## 2-4-2：不規則圖形的面積

認知及數學結構：



上圖是一個不規則的圖形，只要有單位面積的概念，就很容易解決求不規則圖形面積的問題。筆者提共兩種解決不規則圖形面積的方法，第一種是學生自己能想出來的解題方法，也是多數國小學生較能接受的方法；第二種是成人經常使用的方法，這種方法涉及算術平均數的概念，如果算出來單位面積的個數太少，例如面積是十幾平方公分或幾平方公尺，國小學生可能無法接受。

第一種方法：

在不規則圖形上面畫出很多 1 平方公分(單位面積)的格子，假設先算出完整的格子有  $a$  個，面積是  $a$  平方公分，再透過拼湊的方式估算不完整的格子合起來大約和  $c$  個完整的格子一樣大，不完整格子面積合起來是  $c$  平方公分，這個不規則圖形的面積大約是「 $(a+c)$ 」平方公分。

如果格子數夠多時，假設這些不完整的格子有  $b$  個，而且都可以兩兩配對，讓配對出的不完整格子合起來的面積都是 1 平方公分，就可以得到這個不規則圖形的面積大約是「 $a + (b \div 2) = a + \frac{b}{2}$ 」平方公分。

第二種方法：

在不規則圖形上面畫出很多 1 平方公分(單位面積)的格子，假設先算出完整的格子有  $a$  個，再算出不完整的格子有  $b$  個，完整的格子  $a$  個加上不完整格子  $b$  個的一半，就知道這個不規則圖形的面積大約是「 $a + (b \div 2) = a + \frac{b}{2}$ 」平方公分。這種方法涉及算術平均數的概念，我們假設這些不完整格子的面積平均是 1 平方公分的一半，所以選擇  $b \div 2 = \frac{b}{2}$  當作這些不完整格子的算術平均數。



## 主題 2-2-1：長方形

撰寫者：吳欣悅

### 及正方形面積公式

~長方形及正方形的面積公式

授課對象：國小四年級學生

先備知識：

1. 會利用點數有幾個 1 平方公分的方式，算出圖形面積是幾平方公分。
2. 知道面的大小叫面積。
3. 會利用平方公分板測量面積。
4. 會作整數乘以整數。
5. 已認識長方形長邊、寬邊和正方形邊長的性質。

教學目標：

能理解長方形和正方形的面積公式。

教學時間：40 分鐘（一節課）

教學說明：

1. 因為長方形面積公式「長 $\times$ 寬」中的長與寬都是長度，讓很多學童產生「公分」 $\times$ 「公分」會出現「平方公分」的錯誤聯想，建議教師幫助學童澄清長方形面積是透過計數有幾個 1 平方公分得到的，「長 $\times$ 寬」中的長指的是一排有幾個 1 平方公分，寬指的是有幾排。

2. 有三種命名長方形「長邊」及「寬邊」的方法。

第一種：較長的一邊為「長邊」，較短的一邊為「短邊」；

第二種：將長方形擺正後，水平方向的為「長邊」，鉛直方向的為「寬邊」；

第三種：約定其中一邊為「長邊」，另一邊就是「寬邊」。其中，第三種是比較容易溝通的方法。

3. 由於數學上選擇正方形當作測量面積的單位，因此當長方形的長邊和寬邊單位不同時，必須換成相同單位後，才能代入「長 $\times$ 寬」的公式，計算出長方形的面積。

以長是 3 公分、寬是 6 公尺的長方形為例，當題目問面積是多少平方公分時，應將寬邊的單位換成 600 公分， $3 \times 600 = 1800$ ，才能利用公式算出面積是 1800 平方公分。當題目問面積是多少平方公尺時，應將長邊的單位換成 0.03 公尺， $0.03 \times 6 = 0.18$ ，才能利用公式算出面積是 0.18 平方公尺。

4. 本活動先協助學童建立單位面積 1 平方公分的概念，知道由  $a$  個 1 平方公分合起來的圖形面積是  $a$  平方公分，接著幫助學生利用乘法算出長方形的面積是多少平方公分，並察覺長邊、寬邊的公分數和 1 平方公分個數的關係，最後形成「長 $\times$ 寬」的面積公式。

**教具準備：**平方公分板、長方形色紙（長 5 公分、寬 3 公分）（長

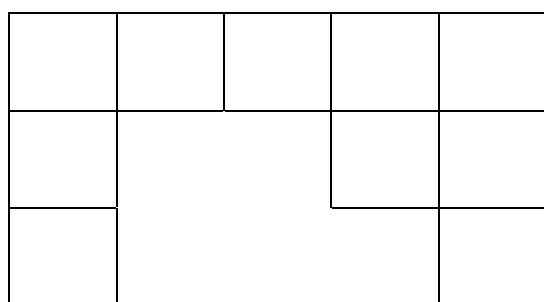
6 公分、寬 4 公分)、方瓦、9 平方公分圖形 $\times 3$ 。

**活動一：**長邊和寬邊是「整公分」的長方形和正方形的面積公式

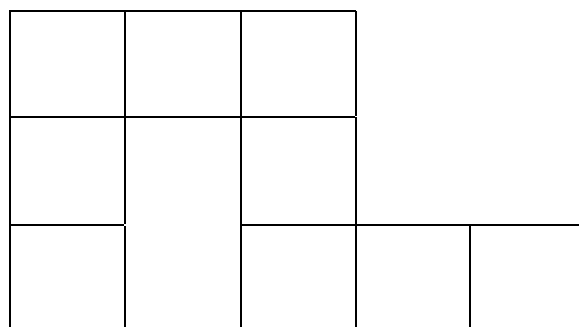
**活動目標：**能瞭解長方形和正方形面積公式是由單位面積 1 平方公分累加而來，並以「長 $\times$ 寬」的面積公式計算出面積。

**活動流程：**

1. 教師提出一些由 1 平方公分所拼成的圖形(如圖一及圖二)，幫助學童透過點數 1 平方公分的個數，認識由 9 個 1 平方公分拼成的圖形，面積就是 9 平方公分。

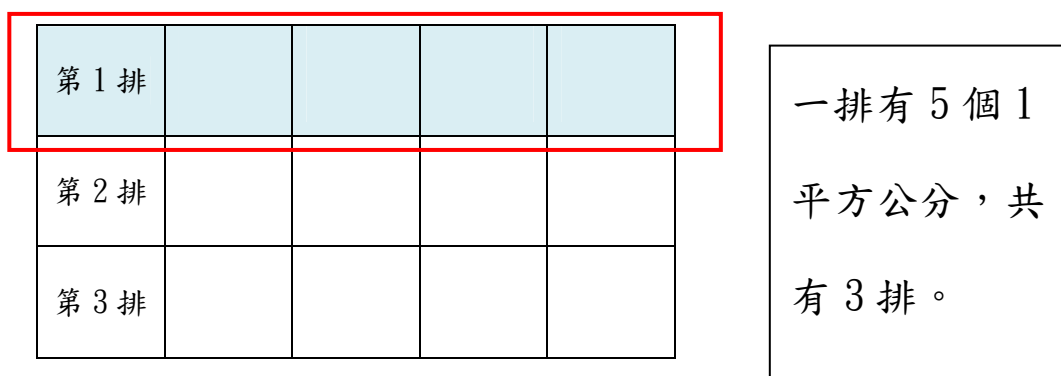


【圖一】



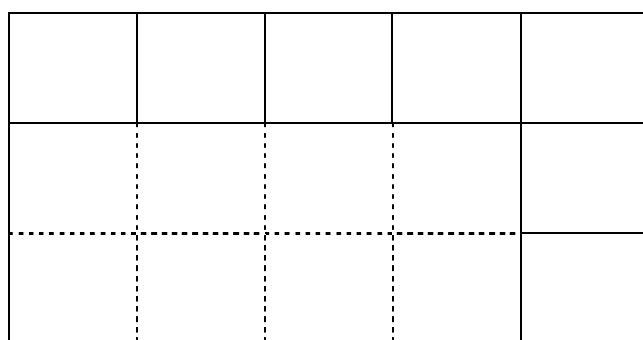
【圖二】

2. 教師拿出一張長 5 公分、寬 3 公分的長方形色紙，並在上面鋪滿 1 平方公分的方瓦，要求學童先算出第一排有多少個 1 平方公分的方瓦，再算出共有幾排，並限制學童須使用乘法算式「 $5 \times 3 = 15$ 」把算法記下來，得到合起來有 15 個 1 平方公分的方瓦，也就是長方形面積是 15 平方公分的答案。



3. 先與學童討論長方形長邊的公分數和一排有幾個 1 平方公分方瓦個數之間的關係，幫助學童察覺，長邊是 5 公分時，長邊共排了 5 個 1 平方公分的方瓦。接著再討論長方形寬邊的公分數和有幾排 1 平方公分方瓦的關係，幫助學童察覺，寬邊是 3 公分，所以寬邊排了 3 排 1 平方公分的方瓦。

長邊是 5 公分，表示一排排了 5 個 1 平方公分



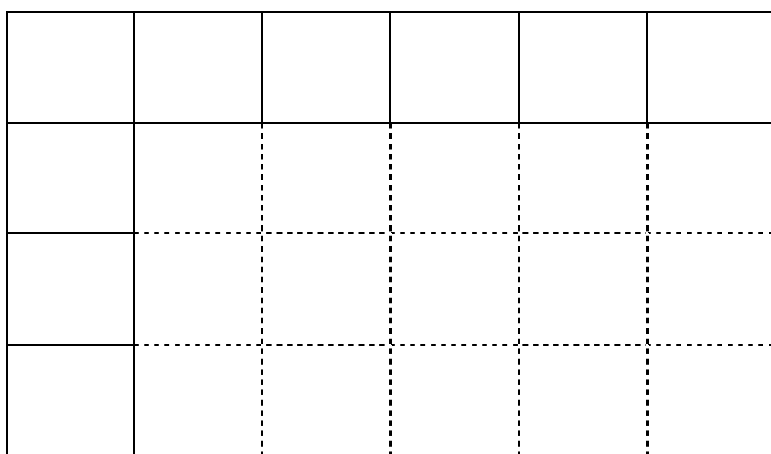
寬邊是 3 公分，表示  
有 3 排「5 個 1 平方  
公分」

4. 教師再拿出一張寬邊是 6 公分，長邊是 4 公分的長方形色紙，

與學童討論它的面積是多少平方公分，步驟如下：

- (1) 在色紙上面鋪滿 1 平方公分的方瓦。
- (2) 要求學童先算出一排有多少個 1 平方公分的方瓦，再算出共有幾排，並限制學童須使用乘法算式「 $6 \times 4 = 24$ 」把算法記下來，得到合起來有 24 個 1 平方公分的方瓦，也就是長方形面積是 24 平方公分的答案。

寬邊是 6 公分，表示一排有 6 個 1 平方公分

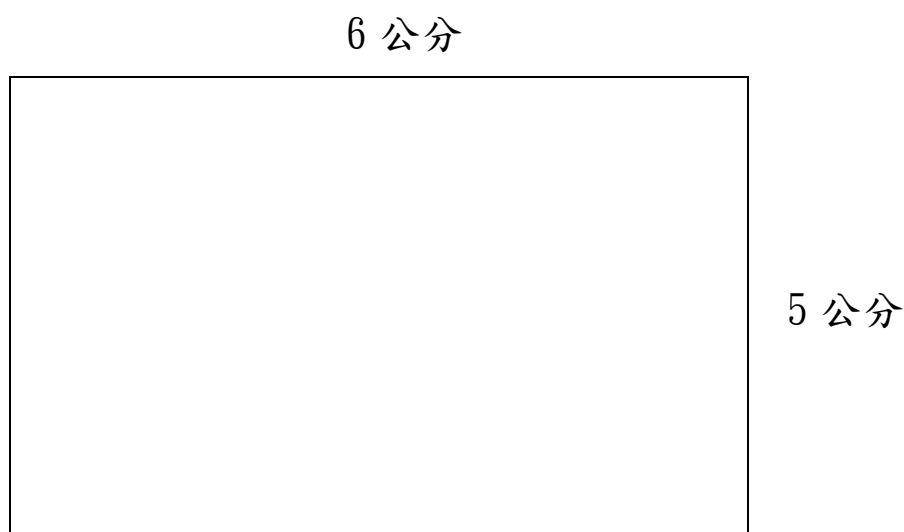


寬邊是 4 公分，表示每排有「6 個」1 平方公分，共有 4 排。

5. 由長邊的公分數可以知道一排有幾個 1 平方公分的方法，由寬邊的公分數可以知道有幾排，所以可以利用「長邊的公分數  $\times$  寬邊的公分數」算出長方形的面積是多少平方公分。最後再將「長邊的公分數  $\times$  寬邊的公分數」簡稱為「長邊  $\times$  寬邊」或「長  $\times$  寬」。
6. 教師畫一個長 6 公分，寬 5 公分的長方形，討論長方形的面積是多少平方公分。當算出「 $6 \times 5 = 30$ ，答：30 平方公分」的答

案後，請學童說明算式中每一個數字所代表的意義如下：

- (1) 6：長邊是 6 公分，表示長邊排了 6 個 1 平方公分。
- (2) 5：寬邊是 5 公分，表示有 5 排。
- (3) 30：長方形是由 30 個 1 平方公分組合而成，所以面積是 30 平方公分。

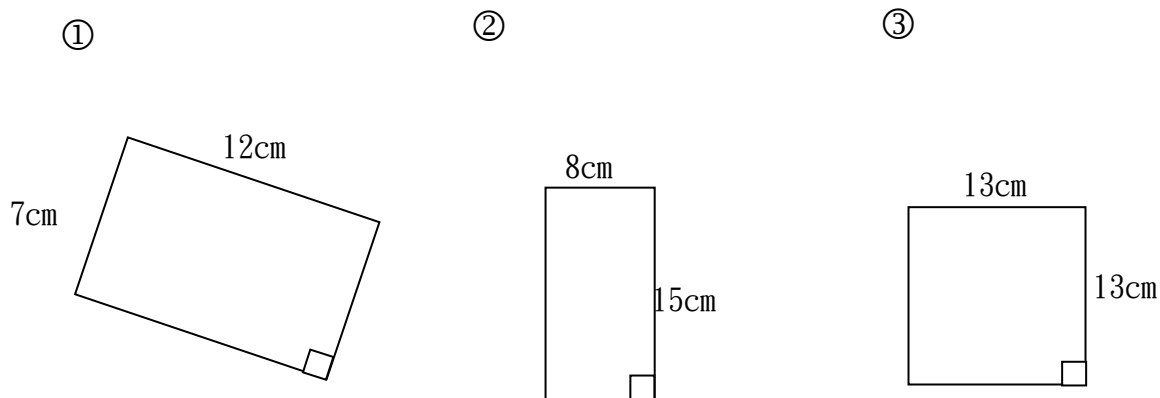


7. 計算長方形的面積時，「長×寬」與「寬×長」的答案一定相等。

**指定作業：**

習題一：(配合活動一)

(1) 算算看，下面各圖形的面積是多少平方公分。



- (2) 教室裡的黑板是一個長 1 公尺 30 公分，寬 5 公尺的長方形，  
它的面積是多少平方公分？
- (3) 一張邊長 65 公分的正方形圖畫紙，面積是多少平方公分？
- (4) 有一張長方形的壁報紙，長邊是 35 公分，寬邊是 26 公分，面  
積是多少平方公分？
- (5) 有一片長方形紙板的面積是 1540 平方公分，它的長邊是 28 公  
分，它的寬邊是多少公分？

### 指定作業參考解答：

#### 習題一：

- (1) ①84 平方公分 ②120 平方公分 ③169 平方公分。
- (2) 65000 平方公分。
- (3) 4225 平方公分。
- (4) 650 平方公分。
- (5) 55 公分。

### 教學注意事項：

1. 教師引導學生認識長方形的「長」與「寬」時，可以多加舉例，  
讓學童知道長與寬的命名可以有不同的選擇。
2. 正方形是長方形圖形中的一種特例，也就是當長方形的長邊與

寬邊相同時，我們稱之為正方形，因此正方形其實是長方形中的一種圖形。

### 教學參考資料：

朱建正等（民 91）。國中小數學教材與教學探討-幾何篇（二）。三峽：國家教育研究院。

## 主題 2-2-1：長方形

撰寫者：吳欣悅

### 及正方形面積公式

~長邊或寬邊「不是整數」的長方形面積

授課對象：國小五年級學生

先備知識：

1. 知道單位面積  $1\text{cm}^2$  的意義。
2. 理解長、寬是整數公分的長方形和正方形的面積公式是「長 $\times$ 寬」。
3. 會作「分數 $\times$ 分數」的乘法。

教學目標：

能運用分數乘法的概念，說明長邊或寬邊「不是整數」的長方形面積

教學時間：80 分鐘（二節課）

教學說明：

1. 四年級引入長（正）方形面積公式時，長、寬皆限制為整數公分，學生在五年級學完分數乘以分數之後，建議教師幫助他們察覺，長方形的長與寬是分數時，面積公式依然成立。
2. 教師可以先複習單位面積  $1\text{ cm}^2$  的概念，再讓孩子畫出  $\frac{1}{2}$

$\text{cm}^2$ 、 $\frac{3}{4}\text{ cm}^2$  等的面積，確認學童知道  $\frac{1}{2}\text{ cm}^2$  是將  $1\text{ cm}^2$  平分

成 2 份取出其中 1 份； $\frac{3}{4} \text{ cm}^2$  是將  $1 \text{ cm}^2$  平分成 4 份取出其中的 3 份，而不是寬邊與長邊各為  $\frac{1}{2} \text{ cm}$  與  $\frac{1}{2} \text{ cm}$ ，或  $\frac{3}{4} \text{ cm}$  與  $\frac{3}{4} \text{ cm}$ 。

3. 本主題的教學重點在於藉由分數乘法的運算說明：長方形與正方形的面積公式，在長與寬的邊長為分數的情況下，也適用「長×寬」的公式。

**活動一：**檢驗學童是否了解  $1 \text{ cm}^2$  的意義，進而了解  $1/2 \text{ cm}^2$  和  $3/4 \text{ cm}^2$  的意義。

**活動目標：**能畫出  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ 、 $\frac{3}{4} \text{ cm}^2$ 。

**活動流程：**

1. 教師先複習邊長為  $1 \text{ cm}$  的正方形，其面積為  $1 \text{ cm}^2$ ，是計算面積時的一個基本單位。
2. 教師檢驗學童是否能了解  $1 \text{ cm}^2$ ，並請他們畫出  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$  的圖形，說明如下：

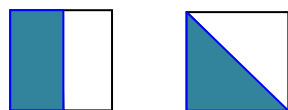
(1)  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$  是將  $1 \text{ cm}^2$  分成兩等份，取其中一份，也可以說

是  $1 \text{ cm}^2$  的一半，所以學童可能會畫出如【圖一】的圖形。

教師請學童觀察畫出的是不是分割成兩個一模一樣的圖

形，提醒學童注意， $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$  是  $\frac{1}{2}$  個  $1 \text{ cm}^2$ ，所以  $1 \text{ cm}^2$  是

由 2 個「 $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ 」的面積構成的。



【圖一】

(2) 如有學童認為  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$  是指  $1 \text{ cm}^2$  的邊長的一半，而畫出

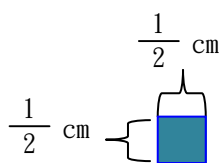
邊長是  $\frac{1}{2} \text{ cm}$  的正方形，如【圖二】，教師須與學童討論

和澄清。教師可就【圖三】向學童說明：邊長如為  $\frac{1}{2} \text{ cm}$ ，

所畫出的新圖形應是將  $1 \text{ cm}^2$  分成四等分，取其中的一

份，也就是  $1 \text{ cm}^2$  的  $\frac{1}{4}$ ，所以，此時的  $1 \text{ cm}^2$  是由 4 個「 $\frac{1}{4}$

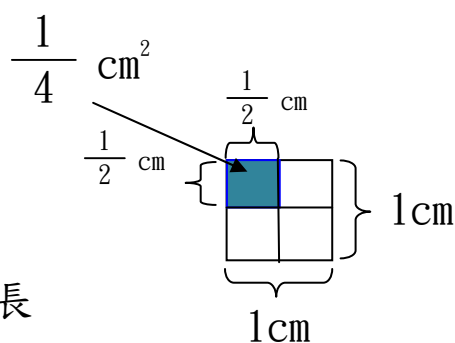
$\text{ cm}^2$ 」的面積組合而成。



學生將  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$  圖形誤畫成邊長

是  $\frac{1}{2} \text{ cm}$  的圖形。

【圖二】



【圖三】

(3) 請學童畫出  $\frac{3}{4} \text{ cm}^2$ 。經過前一題  $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$  的面積說明之後，

學童可以知道畫出  $\frac{3}{4} \text{ cm}^2$  時，應該先畫出  $1 \text{ cm}^2$ ，再將  $1 \text{ cm}^2$

分成四等份，取出其中的三份，也就是 3 個  $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$  是  $\frac{3}{4}$

$\text{cm}^2$ ； $\frac{3}{4} \text{ cm}^2$  是  $\frac{3}{4}$  個  $1 \text{ cm}^2$ ，見【圖四】。



【圖四】

**活動二：** 能將長方形面積公式延伸至長邊或寬邊「不是整公分」的情境。

**活動目標：** 能透過「分數乘以分數」的意義，知道長方形的長邊或寬邊是分數或是小數時，仍可運用「長邊×寬邊」的公式算出長方形面積。

1. 運用分數乘法的概念說明。

(1) 教師先複習分數乘以分數的乘法問題：

一張海報紙有 $\frac{3}{5}$ 平方公尺， $\frac{4}{7}$ 張有多少平方公尺？

① 畫出一個邊長 1 公尺的正方形代表 1 平方公尺，見

**【圖五】**。

② 一張海報紙有 $\frac{3}{5}$ 平方公尺，將正方形的寬邊平分成

5 份，畫出其中 3 份表示 $\frac{3}{5}$ 平方公尺(圖中淺色陰影部份)，也就是 1 張海報紙。

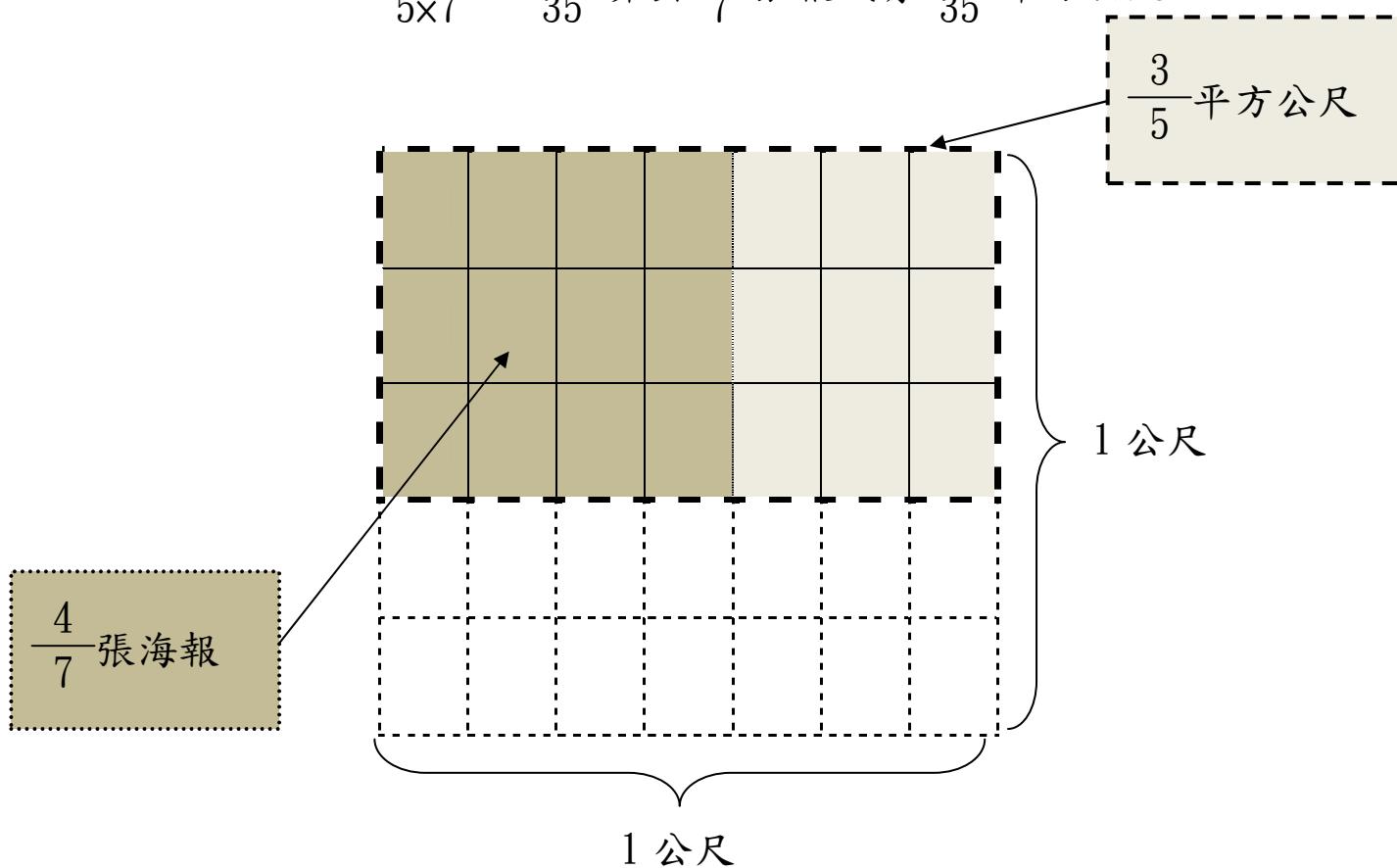
③  $\frac{4}{7}$ 張是把 1 張海報紙平分成 7 份，再取出其中的 4

份，將圖中長方形(淺色陰影部份)的長邊平分成 7

份，再取出其中的 5 份，表示 $\frac{4}{7}$ 張(深色陰影部份)。

④因為看不到 1 平方公尺被平分成幾份，因此將分割的線段都延長，可以看到 1 平方公尺被分割成 35(5×7)小份，其中的 1 小份就是 $\frac{1}{35}$  平方公尺， $\frac{4}{7}$ 張是 12(3×4)個 $\frac{1}{35}$  平方公尺，可以利用 $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} =$

$$\frac{3 \times 4}{5 \times 7} = \frac{12}{35} \text{ 算出 } \frac{4}{7} \text{ 張報紙有 } \frac{12}{35} \text{ 平方公尺。}$$



【圖五】

(2) 再讓學童計算長邊 $\frac{4}{7}$ m、寬邊 $\frac{3}{5}$ m的長方形面積。

教師可利用實際面積為 $1\text{m}^2$ 的圖形，經由切割、平分說

明長邊 $\frac{4}{7}$  m、寬邊 $\frac{3}{5}$  m的長方形面積計算方式，見【圖

六】，步驟如下：

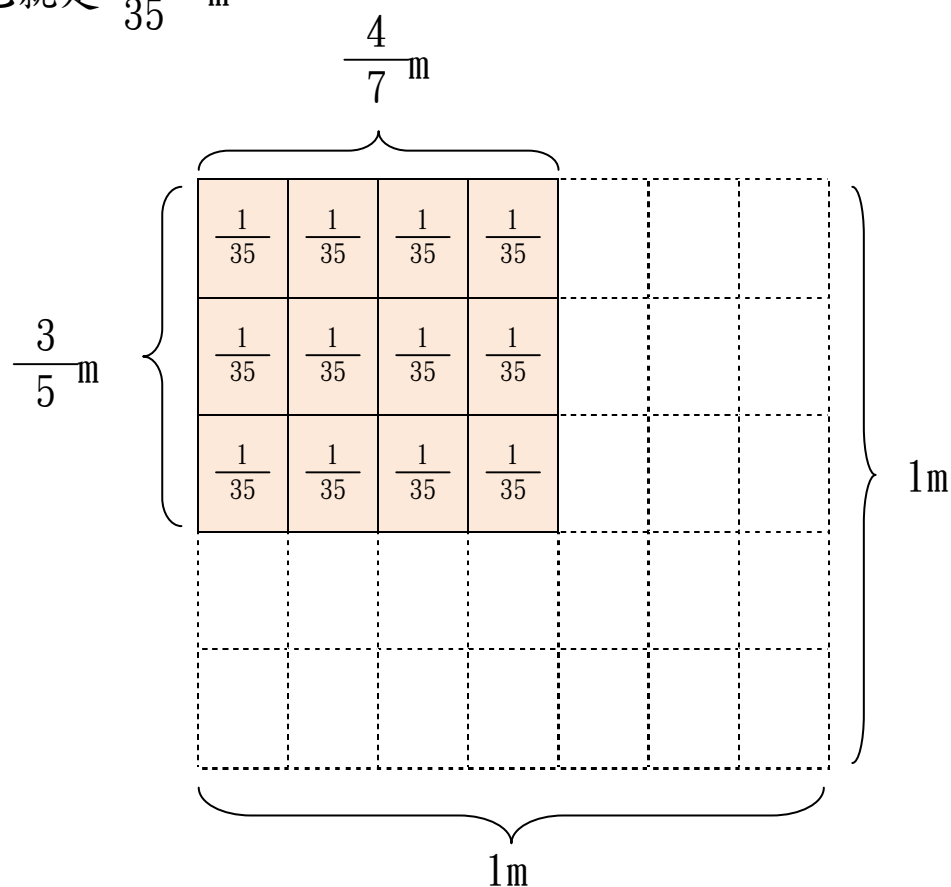
①將長邊 1m 平分成 7 等份，寬邊 1m 平分成 5 等份。

②將  $1 \text{ m}^2$  平分成 35 等份，所以每 1 個等份是 $\frac{1}{35}$   $\text{m}^2$ 。

③觀察【圖六】，利用面積公式計算，每一列有 4 個 $\frac{1}{35}$

$\text{m}^2$  共有 3 列，所以面積是  $4 \times 3 = 12$  共有 12 個 $\frac{1}{35} \text{ m}^2$

也就是 $\frac{12}{35} \text{ m}^2$ 。



【圖六】

(3) 教師請學生看著圖形，幫助他們發現，利用  $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} =$

$\frac{3 \times 4}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$  算出來的答案，剛好是長邊  $\frac{3}{5}$  公尺，寬邊

$\frac{4}{7}$  公尺長方形的面積。

所以，也可以利用長邊 $\times$ 寬邊  $= \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$

算出長邊  $\frac{3}{5}$  公尺，寬邊  $\frac{4}{7}$  公尺的長方形面積是  $\frac{12}{35}$  個

1 平方公尺，也就是  $\frac{12}{35}$  平方公尺。

2. 因此，不論邊長是「整數」或「非整數」皆適用長方形面積公式的方法計算。
3. 教師也可利用單位分數的概念進行說明。

教師讓學童計算長邊  $\frac{4}{7}$  m、寬邊  $\frac{3}{5}$  m 的長方形面積。

(1) 教師利用實際面積為  $1\text{m}^2$  的圖形，經由切割、平分說明

長邊  $\frac{4}{7}$  m、寬邊  $\frac{3}{5}$  m 的長方形面積計算方式，見【圖七】，

步驟如下：

① 將  $1\text{m}^2$  縱分成 7 等份，橫切成 5 等份。

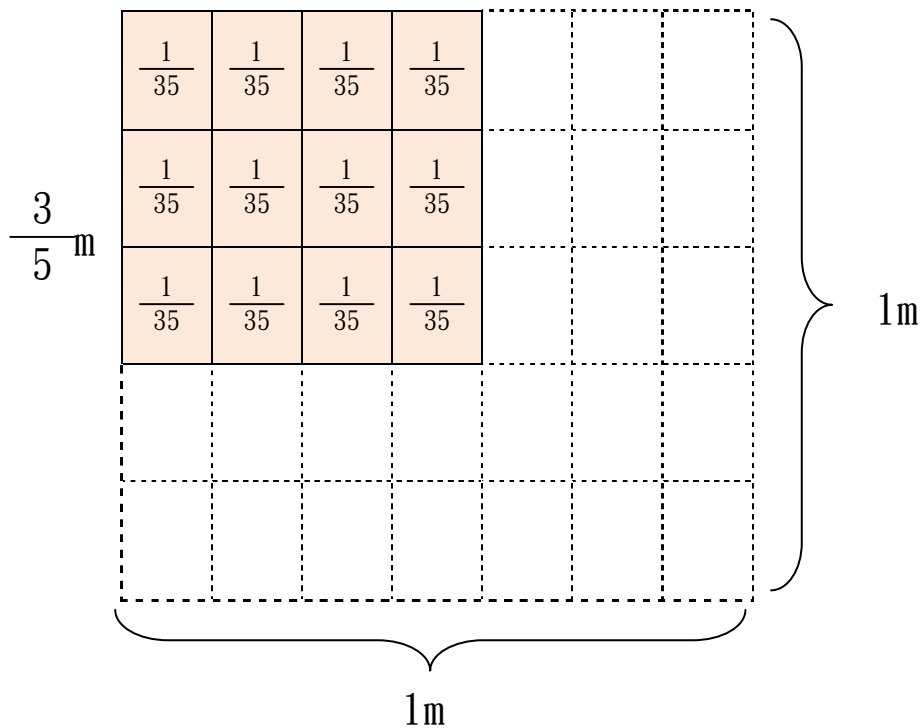
②  $1\text{m}^2$  平分成 35 等份，所以每 1 個等份是  $\frac{1}{35}\text{m}^2$ ；

也可以說是由 35 個  $\frac{1}{35} \text{ m}^2$  的單位組合  $1 \text{ m}^2$ 。

③觀察【圖七】，利用面積公式計算，每一列有 4 個

$\frac{1}{35} \text{ m}^2$  共有 3 列，所以面積是  $4 \times 3 = 12$  共有 12 個

$\frac{1}{35} \text{ m}^2$  也就是  $\frac{12}{35} \text{ m}^2$ 。  
 $\frac{4}{7} \text{ m}$



【圖七】

(2) 引導學生觀察數字之間的關係。

①  $\frac{1}{35} \text{ m}^2$  是將  $1 \text{ m}^2$  縱切成 7 等份，再橫切成 5 等份，共分成了「 $7 \times 5$ 」等分，和分數乘法中「分母  $\times$  分母」的計算方法相同。

$$\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{7 \times 5}$$

②再觀察  $\frac{12}{35} \text{ m}^2$  與邊長  $\frac{4}{7} \text{ m}$  和  $\frac{3}{5} \text{ m}$  數字之間的

關係。「 $4 \times 3 = 12$ 」是計算有多少個以  $\frac{1}{35} \text{ m}^2$

為單位的面積，和分數乘法中「分子 $\times$ 分子」

的結果一樣。

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{7 \times 5}$$

由此可看出分數乘法與長方形面積公式的計算方式相同。因此，不論邊長是「整數」或「非整數」皆適用面積公式的方法計算。

4. 不論選擇那一種方法進行教學之後，建議教師更進一步說明假分數相乘之面積計算。

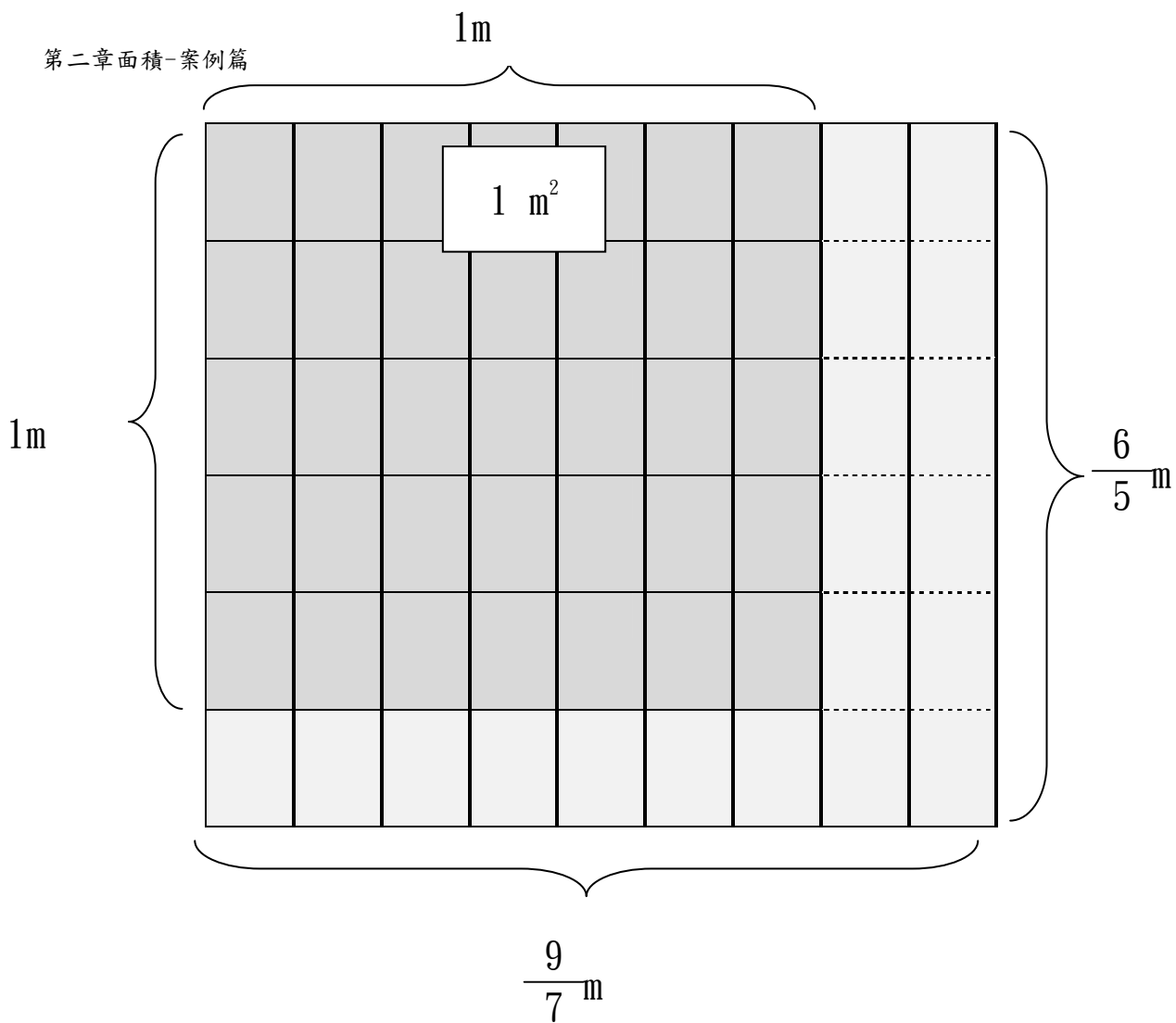
5. 以邊長各為  $\frac{9}{7} \text{ m}$  和  $\frac{6}{5} \text{ m}$  的長方形面積為例，教師可說明計算過程如下：

程如下：。

(1) 先畫出  $1 \text{ m}^2$ ，並將  $1 \text{ m}^2$  縱切成 7 等分，每一等分是  $\frac{1}{7} \text{ m}^2$ ，再橫切 5 等分，所以  $1 \text{ m}^2$  共分成「 $7 \times 5$ 」35 分，和分數乘法中的「分母 $\times$ 分母」一樣，見【圖八】。

(2) 對照分數乘法  $\frac{9}{7} \times \frac{6}{5} = \frac{9 \times 6}{7 \times 5}$  的結果，與長方形面積公式：分母 $\times$ 分母「 $7 \times 5 = 35$ 」說明  $1 \text{ m}^2$  共有 35 個  $\frac{1}{35} \text{ m}^2$ ；分子 $\times$ 分子「 $9 \times 6 = 54$ 」說明長方形面積共有 54 個  $\frac{1}{35} \text{ m}^2$ ，也就是  $\frac{54}{35} \text{ m}^2$ 。

(3) 所以，不論是假分數相乘或真分數相乘，皆與長方形的面積公式「長邊的公尺數 $\times$ 寬邊的公尺數」相同。




【圖八】

指定作業：

習題一(配合活動一)

甲、 畫出指定圖形：

①   $\rightarrow \frac{1}{2}$

②  $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$

③  $\frac{3}{5} \times 1\frac{2}{7}$

習題二(配合活動二)

(1) 長邊是 8.2 公分，寬邊是 10.5 公分的長方形，面積是多少平方公分？

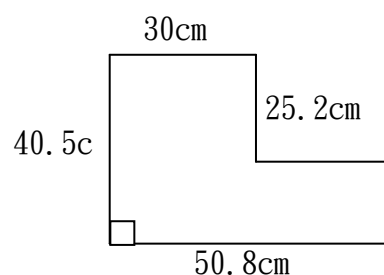
(2) 邊長是  $2\frac{3}{5}$  公分的正方形，面積是多少平方公分？

(3) 老師剪了一張長邊是  $\frac{5}{6}$  公尺，寬邊是  $\frac{3}{4}$  公尺的長方形壁報紙，這張壁報紙的面積是多少平方公尺？

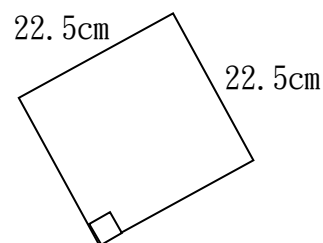
(4) 有一張長方形圖畫紙的長邊是 11.8 公尺、寬邊是 15.5 公尺，在這張圖畫紙中剪出一張最大的正方形，正方形的邊長是幾公尺？正方形的面積是多少平方公尺？

(5) 算出下面各圖形的面積

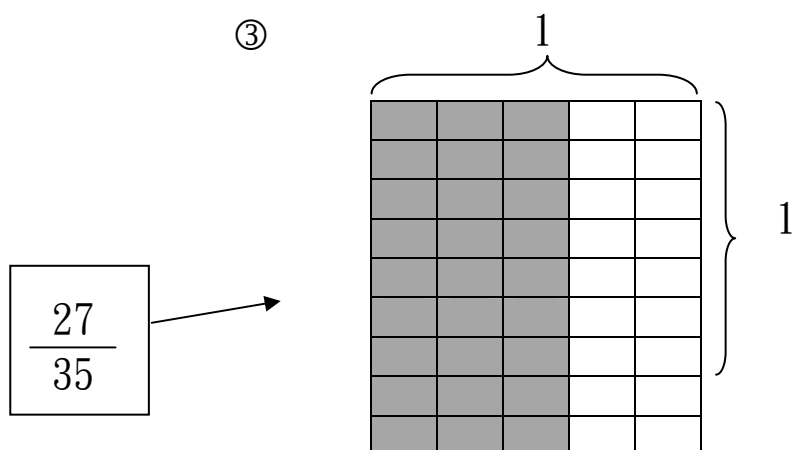
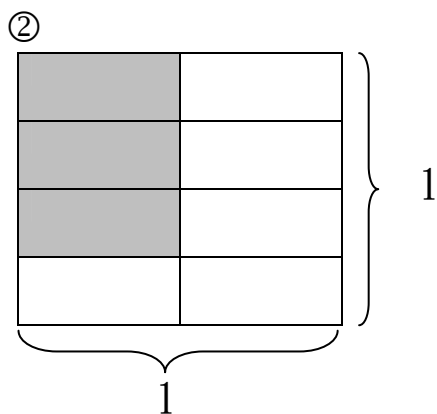
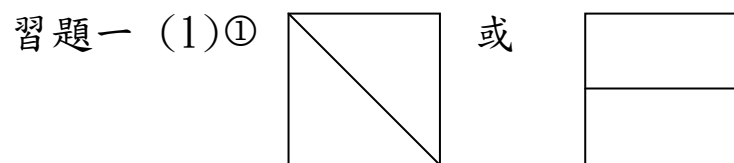
①



②



指定作業參考答案：



習題二

(1) 86.1 平方公分。

(2)  $6\frac{19}{25}$  平方公分。

(3)  $\frac{15}{24}$  平方公尺。

(4) ①11.8 公分 ②139.24 平方公分。

(5) ①1533.24 平方公分②506.25 平方公分。

### 教學注意事項：

1. 教師可透過學生所畫出的 $\frac{1}{2}$ 平方公分、 $\frac{3}{4}$ 平方公分圖形判斷學童是否理解分數的意義，如果學童不清楚分數的概念，教師可以讓學童多加練習。
2. 教師說明不是整數的長方形面積公式時，可以依照學生的理解程度採用一以分數乘以分數的應用問題情境，解釋非整數邊長的面積；或是將1平方公尺切割成更小的面積，再以此為單位累算出面積。
3. 學生學會分數乘以分數之後，教師可以提示學生如遇到數字為「小數」時，可以先將小數化為分數之後再做計算。

### 教學參考資料：

朱建正等(民91)。國中小數學教材與教學探討-幾何篇(二)。三峽：國家教育研究院。

**主題 2-3-2：平行四邊形、**

**撰寫者：吳欣悅**

**三角形、梯形面積公式**

~平行四邊形、三角形、梯形面積公式

**授課對象：國小五年級學生**

**先備知識：**

1. 知道長方形和正方形的面積公式。
2. 知道長方形的對角線可將長方形切割成兩個全等直角三角形。
3. 知道乘法對加法、減法的分配律。

**教學目標：**

透過切割或重組成長方形及直角三角形的方式，理解平行四邊形、三角形及梯形面積的公式。

**教學時間：240 分鐘（六節課）**

**教學說明：**

1. 如果教師直接引入三角形、平行四邊形、梯形的面積公式，而沒有說明如何導出公式時，容易讓學童在計算時只偏重在數字的代入，未能理解公式的真正涵意。
2. 進行活動前，教師需先復習長方形的對角線可將長方形切割成兩個全等直角三角形，幫助學童理解直角三角形面積為長方形面積的一半；再透過切割或重組圖形成長方形或直角三角形的方式，利用乘法對加法、減法的分配律，幫助學童理解平行四

邊形、三角形和梯形的公式。

**活動一：**認識直角三角形面積是對應的長方形面積的一半

**活動目標：**透過沿對角線將長方形分割成兩個全等三角形的活

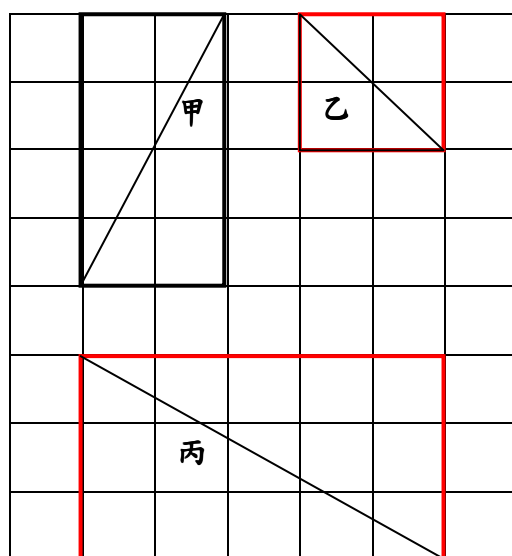
動，認識直角三角形面積是對應長方形面積的一半。

**活動流程：**

1. 在方格紙上算出直角三角形甲、乙、丙的面積。

(1) 長方形皆可以沿對角線切成  
兩個全等直角三角形。

(2) 因此，直角三角形的面積，可  
由長方形的面積公式(長×寬)  
的一半(÷2) 求出，所以甲的  
面積是： $2 \times 4 \div 2 = 4$ ；乙的面積



是： $2 \times 2 \div 2 = 2$ ；丙的面積是： $5 \times 3 \div 2 = 7.5$ 。

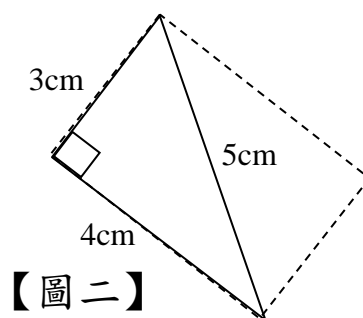
【圖一】

(3) 學童練習算出直角三角形的面積。

①讓學童確認直角三角形中

夾住直角的兩個邊長，

是對應長方形的長邊與寬邊。



【圖二】

因為直角三角形的面積是對應長方形面積的一半，所以

直角三角形的面積是「(長×寬)÷2」。

可以利用 $(3 \times 4) \div 2 = 6$  算出【圖二】直角三角形的面積是 $6\text{cm}^2$ 。

②確認直角三角形中夾住直角的兩個邊長，

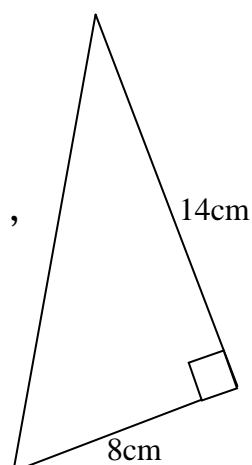
是對應長方形的寬邊與長邊，

因為直角三角形面積是長方形面積的一半，

因此，【圖三】直角三角形的面積是

$(8 \times 14) \div 2 = 56$ ，算出直角三角形的面積

是 $56\text{cm}^2$ 。



【圖三】

## 活動二：求三角形、平行四邊形與梯形的面積

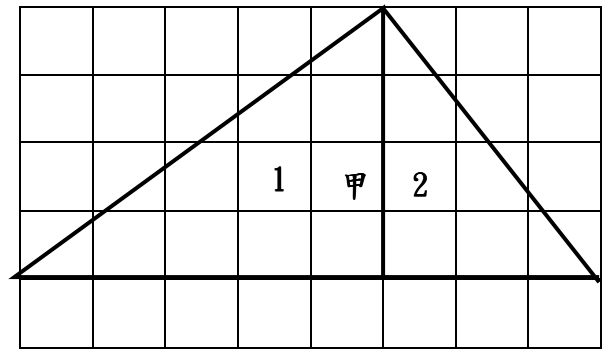
**活動目標：**透過將三角形、平行四邊形與梯形分割成直角三角形與長方形的方式，算出三角形、平行四邊形與梯形的面積。

### 活動流程：

1. 在方格紙上算出三角形甲、乙的面積。

(1) 將【圖一】中的甲圖分割成直角三角形 1 和直角三角形 2。

①因為直角三角形的面積是對應長方形面積的一半，所以直角三角形的面積是「(長×寬)÷2」。



【圖一】

②利用 $(5 \times 4) \div 2 = 10$ 算出

直角三角形 1 的面積是  $10\text{cm}^2$ 。

利用 $(3 \times 4) \div 2 = 6$ 算出直角三角形 2 的面積是  $6\text{cm}^2$ 。

$10 + 6 = 16$ ，直角三角形甲的面積是  $16\text{cm}^2$ 。

直角三角形甲的面積算式是：

$$\begin{aligned} &(5 \times 4) \div 2 + (3 \times 4) \div 2 \\ &= 10 + 6 \\ &= 16 \end{aligned}$$

(2) 從【圖二】中乙圖的勺點沿方格往下作垂直線，

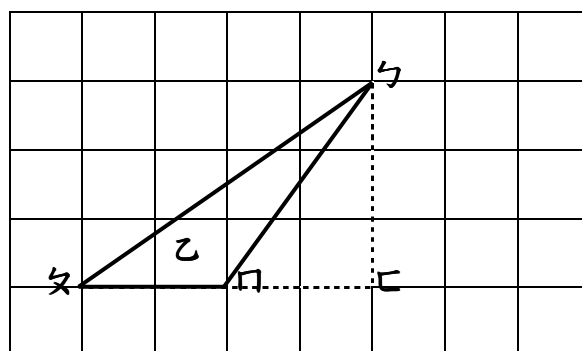
再從口點延長三 角形

的勺口邊，相交於亡

點，形成直角三角形勺

勺亡與直角三角形勺口

亡。



【圖二】

①在直角三角形中，夾住直角的兩個邊是長方形的長邊與寬邊，可以推算出直角三角形的面積。

②先算出直角三角形勺勺亡的面積 $(4 \times 3) \div 2 = 6 \text{ cm}^2$ ；再算出直角三角形勺口亡面積 $(3 \times 2) \div 2 = 3 \text{ cm}^2$ ，將直角三角形勺勺亡的面積減去直角三角形勺口亡面積，就可以得知乙圖的面積是

$$6 - 3 = 3 \text{ cm}^2。$$

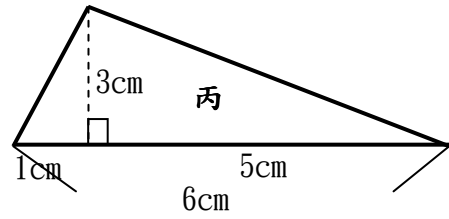
三角形乙的面積算式是：

$$\begin{aligned} &(4 \times 3) \div 2 - (2 \times 3) \div 2 \\ &= 6 - 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

2. 教師讓學童再練習兩題計算三角形的面積。

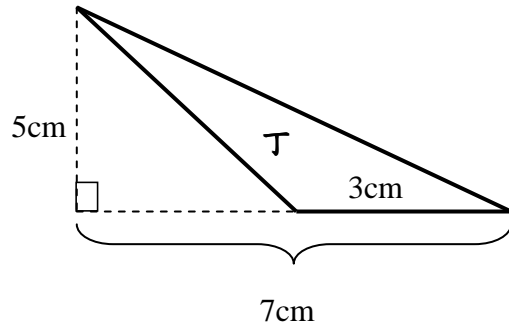
丙的面積

$$\begin{aligned} & (1 \times 3) \div 2 + (5 \times 3) \div 2 \\ & = 1.5 + 7.5 \\ & = 9 \end{aligned}$$



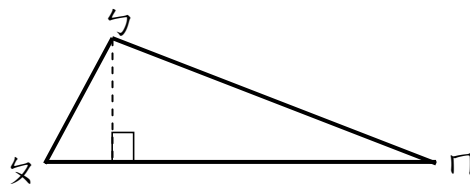
丁的面積

$$\begin{aligned} & 7 - 3 = 4 \\ & (7 \times 5) \div 2 - (4 \times 5) \div 2 \\ & = 17.5 - 10 \\ & = 7.5 \end{aligned}$$



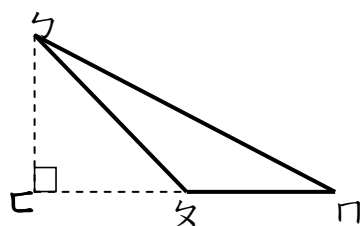
3. 教師總結三角形的面積算法。

- (1) 當兩底角都是銳角如【圖三】，可以由頂點往底邊作垂線，將三角形切割成兩個直角三角形，分別算出兩個直角三角形的面積之後再相加，就能得到原三角形的面積。



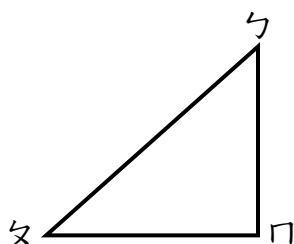
【圖三】

- (2) 當兩底角中有一個角是鈍角如【圖四】，可以先延伸底邊，再由頂點往底邊作垂線，形成大、小兩個直角三角形，分別算出兩個直角三角形的面積之後再相減，就能得到原三角形的面積。



【圖四】

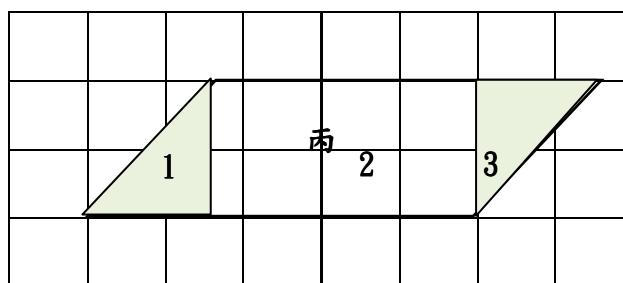
- (3) 當兩底角中有一個角是直角如【圖五】，就能直接算出它的面積。



【圖五】

4. 算出平行四邊形丙、丁的面積。

- (1) 將【圖六】的平行四邊形丙切成兩個直角三角形與一個



【圖六】

長方形，分別算出它們的面積，再加起來即是平行四邊形的答案，所以平行四邊形丙的面積可以運用兩個直角

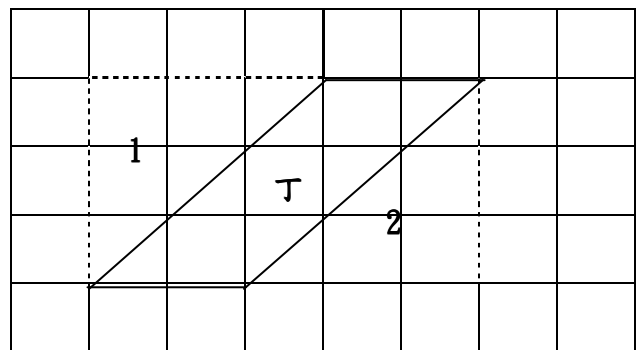
三角形 1、3 的面積： $(1.5 \times 2) \div 2 \times 2 = 3$ ，再加上 1 個長方形的面積： $3.5 \times 2 = 7$  得知。

平行四邊形丙的面積算式是：

$$\begin{aligned} & (1.5 \times 2) \div 2 \times 2 + 3.5 \times 2 \\ & = 3 + 7 \\ & = 10 \end{aligned}$$

(2) 另一種算法，可以將【圖七】的平行四邊形丁，看成一

個長方形減掉兩個  
直角三角形（1 與  
2），亦即將其面積各  
自算出來，再將長方



【圖七】

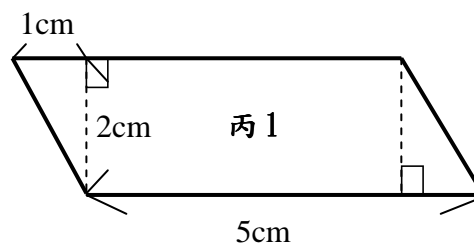
形面積減去兩個直角三角形的面積，即是平行四邊形的答案。所以平行四邊形丁的面積，可以先算出長方形的面積： $5 \times 3 = 15$ ，再減掉兩個直角三角形的面積： $(3 \times 3) \div 2 \times 2 = 9$  而得知。

平行四邊形丁的面積算式是：

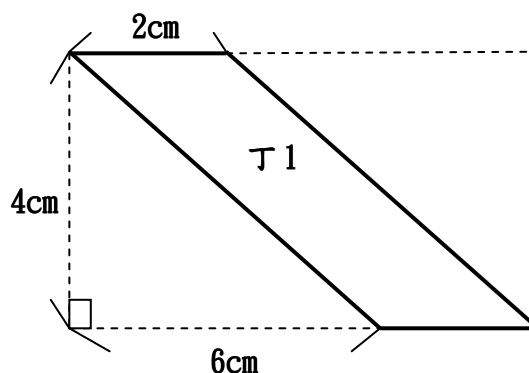
$$\begin{aligned} & 5 \times 3 - (3 \times 3) \div 2 \times 2 \\ & = 15 - 9 \\ & = 6 \end{aligned}$$

5. 讓學童再練習兩題平行四邊形的面積計算。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (1 \times 2) \div 2 \times 2 + 4 \times 2 \\
 & = 2 + 8 \\
 & = 10
 \end{aligned}$$

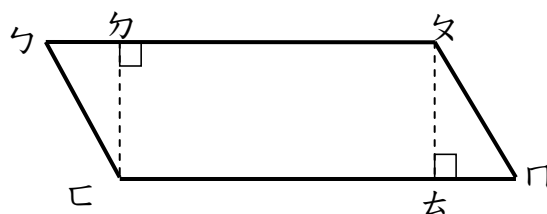


$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 6 + 2 = 8 \\
 & 8 \times 4 - (6 \times 4) \div 2 \times 2 \\
 & = 32 - 24 \\
 & = 8
 \end{aligned}$$



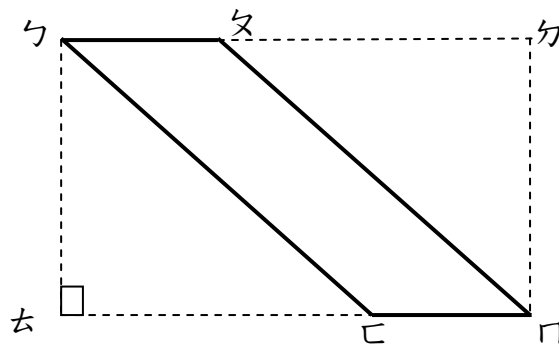
6. 總結平行四邊形的面積算法：

- (1) 由相對兩頂點往底邊作高如【圖八】，能將平行四邊形能分割成兩個全等的直角三角形和一個長方形時，分別算出它們的面積後再相加，就能得到原來平行四邊形的面積。



【圖八】

- (2) 由相對兩頂點往底邊作垂線如【圖九】，若不能將平行四邊形分割成兩個全等的直角三角形和一個長方形時，可以先延伸底邊，再由相對頂點往底邊作垂線，形成一個大長方形和兩個全等的直角三角形，先算出大長方形的面積，再減去兩個全等直角三角形的面積，就能得到原來平行四邊形的面積。

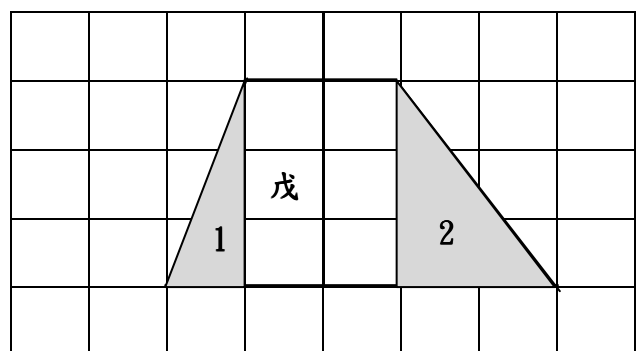


【圖九】

7. 在方格紙上算出梯形戊、己【圖十】的面積。

- (1) 先將【圖十】的梯形

戊切成兩個直角三角形與一個長方形，再算出它們的面積後相加，所以戊圖



【圖十】

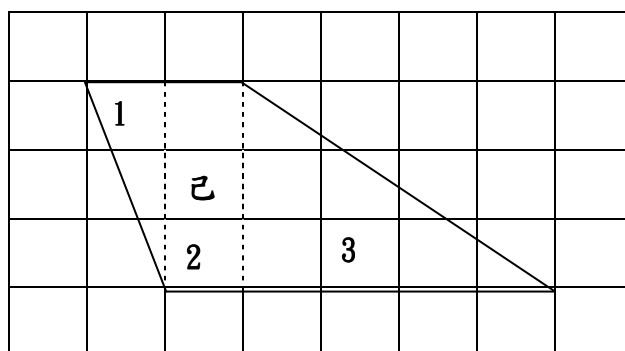
可以先算出兩個直角三角形的面積： $(1 \times 3) \div 2 = 1.5$  和  $(2 \times 3) \div 2 = 3$ ，再加上長方形面積  $2 \times 3 = 6$  得知。

梯形戊的面積算式是：

$$\begin{aligned} & (1 \times 3) \div 2 + (2 \times 3) \div 2 + 2 \times 3 \\ & = 1.5 + 3 + 6 \\ & = 10.5 \end{aligned}$$

(2) 同梯形戊的作法，將【圖十一】的梯形己切成一個長方

形和兩個直角三  
角形，所以梯形  
己的面積由算出  
兩個直角三角形  
的面積 $(1 \times 3) \div 2$



【圖十一】

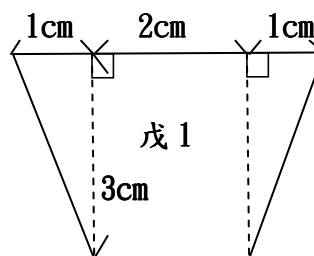
$= 1.5$  與  $(4 \times 3) \div 2 = 6$ ，再加上長方形的面積  $1 \times 3 = 3$  得知。

梯形己的面積算式是：

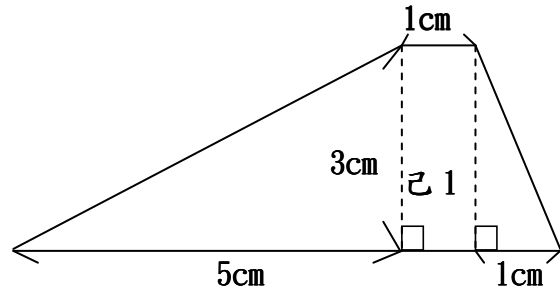
$$\begin{aligned} & (1 \times 3) \div 2 + 1 \times 3 + (4 \times 3) \div 2 \\ & = 1.5 + 3 + 6 \\ & = 10.5 \end{aligned}$$

8. 讓學童再練習兩題梯形的面積計算。

$$\begin{aligned} & (1 \times 3) \div 2 + (1 \times 3) \div 2 + 2 \times 3 \\ & = 1.5 + 1.5 + 6 \\ & = 9 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & (5 \times 3) \div 2 + 1 \times 3 + (1 \times 3) \div 2 \\ &= 7.5 + 3 + 1.5 \\ &= 12 \end{aligned}$$



9. 總結梯形的面積算法：將梯形切成一個長方形和兩個直角三角形，算出一個長方形和兩個直角三角形的面積之後再相加，就可以算出梯形的面積。

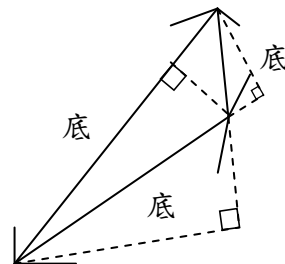
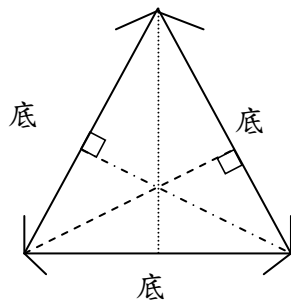
### 活動三：三角形的面積公式

活動目標：能知道三角形的面積公式是  $\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$ ，也可以寫成  $(\text{底} \times \text{高}) \div 2$ 。

### 活動流程：

1. 教師說明三角形的底和高。

- (1) 從三角形的頂點到對邊所做的垂直線，稱為高。
- (2) 教師畫出三角形的高



(3) 所以一個三角形有 3 個高，3 個底。

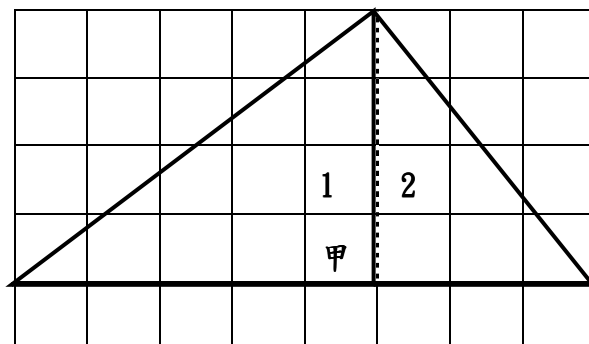
2. 導出三角形面積公式。

(1) 列出【圖一】三角形甲

的面積算式：

$$\begin{aligned} & \frac{5 \times 4}{2} + \frac{3 \times 4}{2} \\ = & \frac{5 \times 4 + 3 \times 4}{2} \\ = & \frac{(5 + 3) \times 4}{2} \\ = & \frac{\text{底} \times \text{高}}{2} \end{aligned}$$

$$= (\text{底} \times \text{高}) \div 2$$



【圖一】

三角形甲的底是 8 公分、高是 4 公分。將三角形甲分割成直角三角形 1 和直角三角形 2，三角形甲的面積等於直角

三角形 1 的面積加上直角三角形 2 的面積，也就是  $\frac{5 \times 4}{2} +$

$\frac{3 \times 4}{2}$  可以寫成  $\frac{5 \times 4 + 3 \times 4}{2}$ 。利用乘法對加法的分配律加

以整理之後，這個算式可以寫成  $\frac{(5 + 3) \times 4}{2}$ ，「(5 +

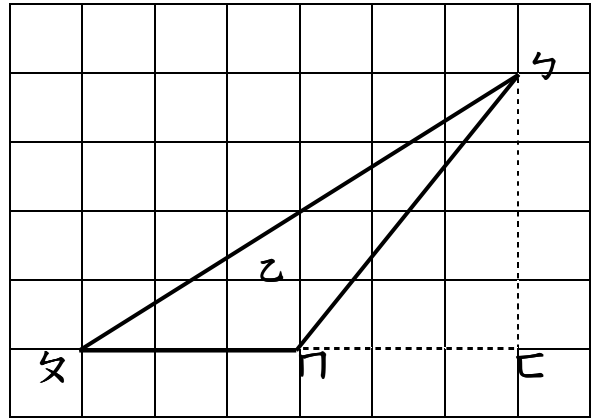
3)」是三角形甲的底，「4」是三角形甲的高，因此三角

形甲的面積可以由  $\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$  求出答案， $\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$  也可寫成 (底 ×

高) $\div 2$ 。

(2) 列出【圖二】三角形乙的面積算式

$$\begin{aligned} & \frac{6 \times 4}{2} - \frac{3 \times 4}{2} \\ = & \frac{6 \times 4 - 3 \times 4}{2} \\ = & \frac{(6 - 3) \times 4}{2} \\ = & \frac{3 \times 4}{2} \\ = & \frac{\text{底} \times \text{高}}{2} \\ = & (\text{底} \times \text{高}) \div 2 \end{aligned}$$



【圖二】

三角形乙的底是 3 公分，高是 4 公分，三角形乙的面積

是三角形ㄅㄆㄇ減掉三角形ㄅㄆㄇ，也就是 $\frac{6 \times 4}{2} -$

$\frac{3 \times 4}{2}$ ，整理之後寫成 $\frac{6 \times 4 - 3 \times 4}{2}$ ，運用乘法對減法的

分配律，將式子改寫成 $\frac{(6 - 3) \times 4}{2}$ ，「6-3」是三角

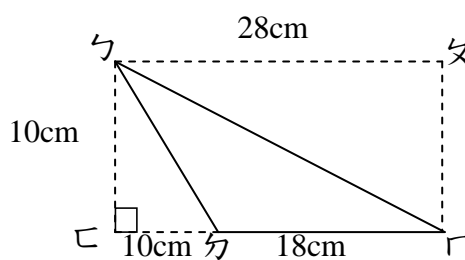
形乙的底「3」，「4」是三角形乙的高，因此三角形乙的

面積可以由 $\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$ 求出答案，也可寫成 $(\text{底} \times \text{高}) \div 2$ 。

3. 求出三角形的面積。

(1) 利用「長方形面積的一半是直角三角形面積」的方法，求出【圖三】三角形 $\triangle$ 的面積。

$$\begin{aligned} & \frac{28 \times 10}{2} - \frac{10 \times 10}{2} \\ &= \frac{28 \times 10 - 10 \times 10}{2} \\ &= \frac{280 - 100}{2} \\ &= \frac{180}{2} \\ &= 90 \end{aligned}$$



【圖三】

(2) 利用「 $\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$ 」求出

三角形 $\triangle$ 的面積。

$$\begin{aligned} & \frac{18 \times 10}{2} \\ &= \frac{180}{2} \\ &= 90 \end{aligned}$$

對照(1)和(2)兩種算法，運用 $\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$ 即可算出三角形的面

積，所以三角形的面積公式是 $\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$ ，也可以寫成「底 $\times$ 高 $\div 2$ 」。

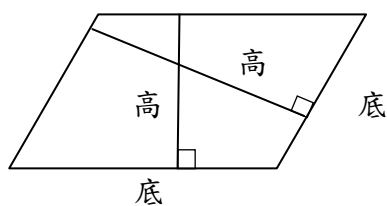
**活動四：平行四邊形與梯形的面積公式**

**活動目標：**能推導出平行四邊形和梯形的面積公式

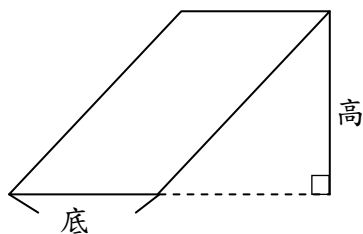
**活動流程**

1. 教師說明平行四邊形的高。

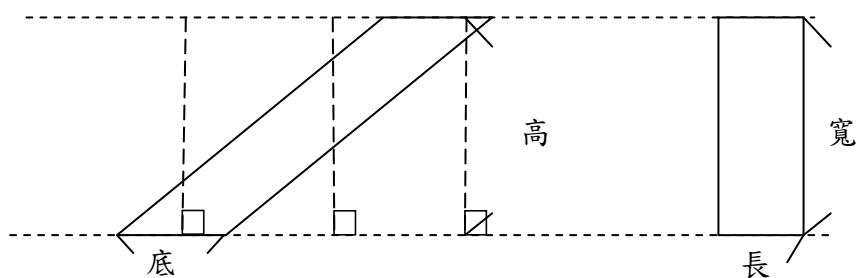
(1) 從平行四邊形的一邊上的一點向底邊畫一條垂直線。



(2) 也可延長平行四邊形的底邊，再從右上頂點向底邊畫垂直線。



(3) 平行四邊形的高係對應長方形的寬，上下底平行線之間之垂直線皆是平行四邊形的高。



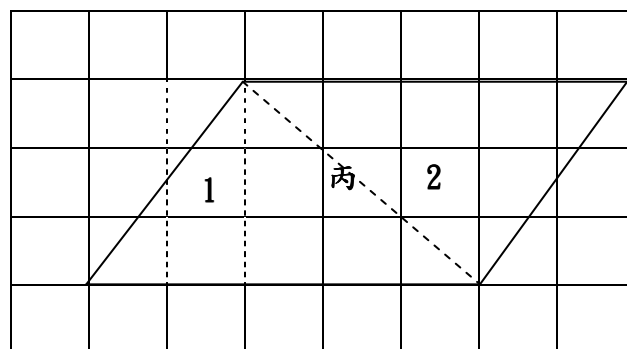
## 2. 導出平行四邊形的面積公式。

(1) 算出【圖一】平行四邊形丙的面積。

$$\begin{aligned} & \frac{5 \times 3}{2} \times 2 \\ &= \frac{5 \times 3 \times 2}{2} \end{aligned}$$

$$= 5 \times 3$$

$$= \text{底} \times \text{高}$$



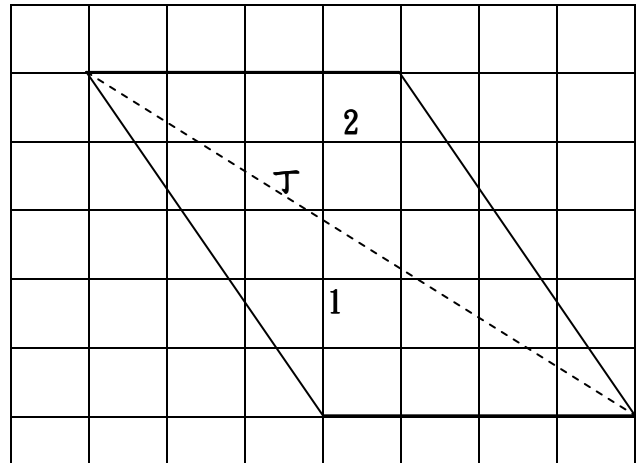
【圖一】

(2) 平行四邊形的底是 5 公分，高是 3 公分。將平行四邊形丙沿對角線切成兩個相同的三角形，所以平行四邊形丙的面積可以寫成兩個三角形的面積的和，也就是

「 $\frac{5 \times 3 \times 2}{2}$ 」，在式子中，分子、分母皆有「2」，所以可以彼此抵消，約分後可以寫成「 $5 \times 3$ 」，「5」是平行四邊形的底，「3」是平行四邊形的高，所以運用「底 $\times$ 高」可以算出平行四邊形的面積。

- (3) 算出【圖二】平行四邊形丁的面積。

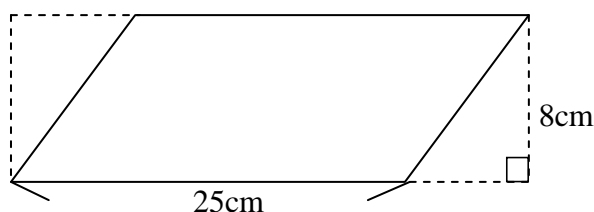
$$\begin{aligned} & \frac{4 \times 5}{2} \times 2 \\ = & \frac{4 \times 5 \times 2}{2} \\ = & 4 \times 5 \\ = & \text{底} \times \text{高} \end{aligned}$$



【圖二】

- (4) 平行四邊形丁的底是 4 公分、高是 5 公分，沿對角線可以切成兩個相同的三角形，所以平行四邊形的面積可以寫成兩個三角形的面積的和「 $\frac{4 \times 5 \times 2}{2}$ 」，在式子中，分子、分母皆有「2」，所以可以彼此抵消，得到「 $4 \times 5$ 」，「4」是平行四邊形丁的底，「5」是平行四邊形丁的高，所以平行四邊形丁的面積可以由「底 $\times$ 高」算出。

(5) 算出【圖三】的平行四邊形面積：



◎運用「切成兩個三角形」算出平行四邊形的面積。

$$\begin{aligned} & \frac{25 \times 8}{2} \times 2 \\ &= \frac{200}{2} \times 2 \\ &= 200 \end{aligned}$$

【圖三】

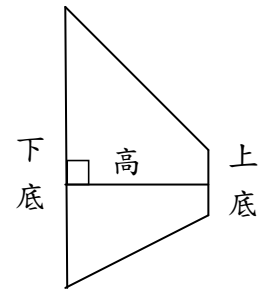
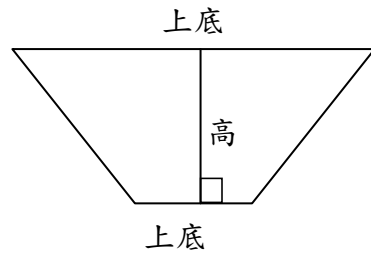
◎運用「底×高」算出平行四邊形的面積。

$$25 \times 8 = 200$$

對照兩個算式，運用「切成兩個三角形」面積算出平行四邊形的面積，與運用「底×高」所算出平行四邊形的面積是一樣，所以平行四邊形的面積公式是「底×高」。

3. 教師說明梯形的高。

梯形互相平行的邊，稱為上底和下底，上、下底之間的垂直距離稱為高。

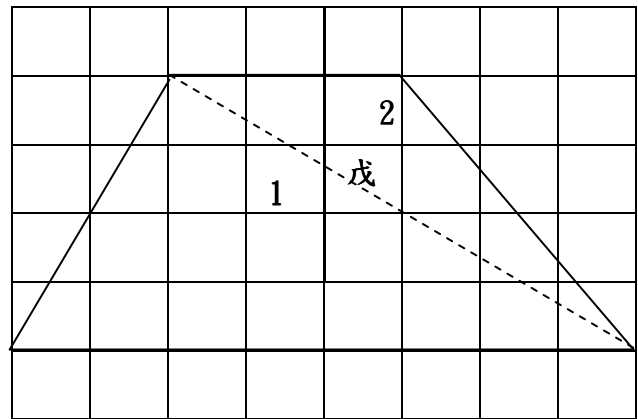


4. 導出戊、己梯形的面積公式。

(1) 算出【圖四】的梯形

戊面積。

$$\begin{aligned} & \frac{3 \times 4}{2} + \frac{8 \times 4}{2} \\ = & \frac{3 \times 4 + 8 \times 4}{2} \\ = & \frac{(3+8) \times 4}{2} \\ = & \frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2} \end{aligned}$$



【圖四】

(2) 梯形戊的上底是 3 公分，下底是 8 公分，高是 4 公分。

將梯形戊切成 2 個三角形，所以梯形戊的面積可以寫成

兩個三角形的面積的和，即是「 $\frac{3 \times 4 + 8 \times 4}{2}$ 」，運用乘

法對加法的分配律，可以將式子寫成「 $\frac{(3+8) \times 4}{2}$ 」，

其中「3」是梯形戊的上底，「8」是梯形戊的下底，「3

「 $+8$ 」就是梯形戊的上底加下底，而「 $4$ 」是梯形戊的高，  
所以梯形的面積可以寫成 $\frac{(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}}{2}$ ，就是(上  
底+下底) $\times$ 高 $\div 2$ 。

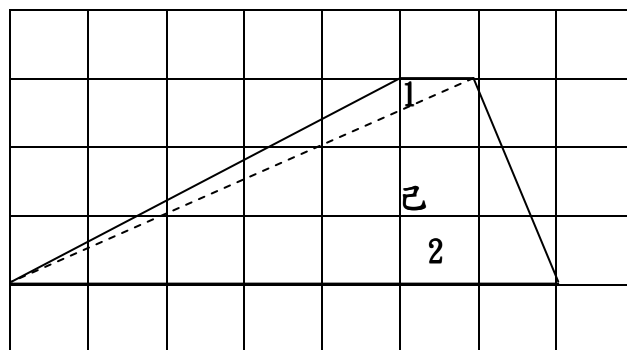
(3) 算出【圖五】梯形己的面積。

$$\frac{1\times 3}{2} + \frac{7\times 3}{2}$$

$$= \frac{1\times 3 + 7\times 3}{2}$$

$$= \frac{(1+7)\times 3}{2}$$

$$= \frac{(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}}{2}$$



【圖五】

(4) 梯形己的上底是 1 公分，下底是 7 公分，高是 3 公分。

將梯形己切成兩個三角形，所以梯形己的面積可以寫成

「 $\frac{1\times 3 + 7\times 3}{2}$ 」，再利用乘法對加法的分配律，將式子

寫成「 $\frac{(1+7)\times 3}{2}$ 」，其中「 $1$ 」是梯形己的上底；「 $7$ 」

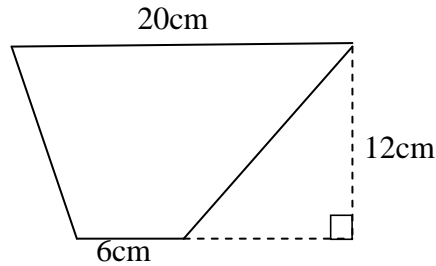
是梯形己的下底；「 $1+7$ 」就是梯形己的上底加下底，「 $3$ 」

是三角形的高，也就是梯形己的高，所以計算梯形的面

積時，可以寫成 $\frac{(\text{上底}+\text{下底})\times\text{高}}{2}$ ，也就是(上底+

下底)  $\times$  高  $\div 2$ 。

5. 算出梯形的面積。



(1) 運用「切割成兩個三角形」的方式求出梯形面積。

$$\begin{aligned} & \frac{6 \times 12}{2} + \frac{20 \times 12}{2} \\ &= 36 + 120 \\ &= 156 \end{aligned}$$

(2) 運用「 $\frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2}$ 」求出梯形面積。

$$\begin{aligned} & \frac{(20 + 6) \times 12}{2} \\ &= \frac{26 \times 12}{2} \\ &= \frac{312}{2} \end{aligned}$$

對照兩個算式，「運用切割成兩個三角形」的方式求出梯形面積，與運用「 $\frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2}$ 」求出梯形面積的結果一樣，

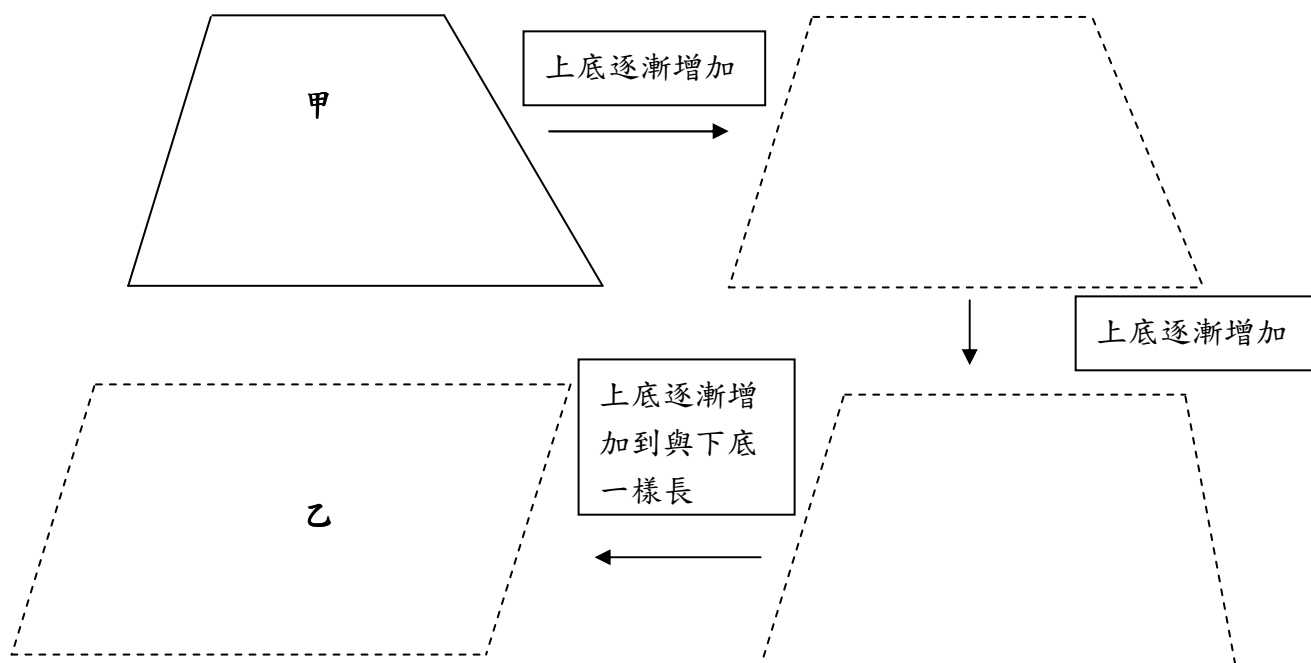
所以梯形的面積公式可以寫成  $\frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2}$  或  $(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2$ 。

**活動五：**察覺可以利用梯形面積公式推導出平行四邊形和三角形面積公式。

**活動目標：**固定下底及高，透過上底長短的改變，察覺可以利用梯形面積公式推導出平行四邊形和三角形面積公式。

**活動流程：**

1. 固定梯形「下底」和「高」的長度，將「上底」逐漸增加。
  - (1) 教師先畫出梯形甲，固定「下底」和「高」的長度，將「上底」逐漸增加，請學童觀察圖形的變化。
  - (2) 學童可以看到圖形逐漸變化，當上底增加到與下底一樣長時，教師可以詢問學童：此時的圖形與什麼形狀相同？學童應能回答：「平行四邊形」。
  - (3) 圖形的變化如下面圖示：



(4) 運用梯形公式算出梯形甲的面積。

$$(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2 \quad (\text{當上底與下底一樣長時})$$

$$= \text{下底} \times 2 \times \text{高} \div 2$$

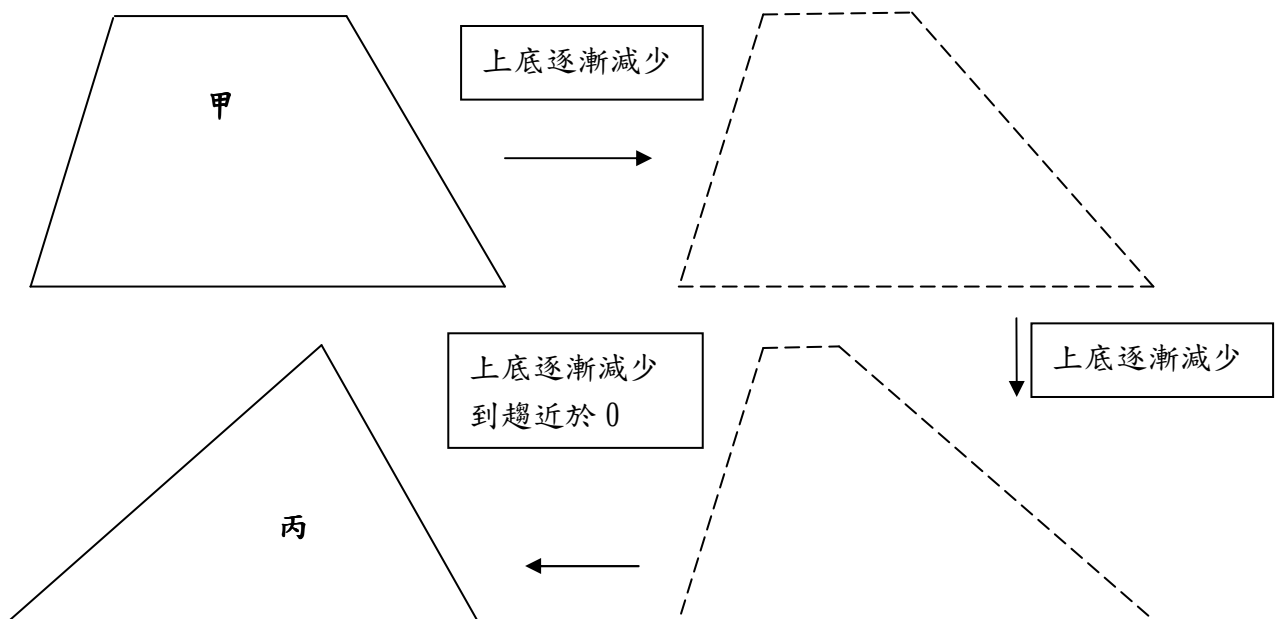
$$= \text{下底} \times \text{高} = \text{底} \times \text{高}$$

因為上底和下底一樣，所以經過運算之後得到：底×高，「底×高」也就是平行四邊形面積的算法。

2. 固定梯形甲的「下底」和「高」的長度，將「上底」逐漸縮小，請學童觀察圖形的變化。

(1) 學童可以看到圖形逐漸變化，當上底縮小到趨近於0時，教師可以詢問學童：此時的圖形與什麼形狀相同？學童會回答：「三角形」。

(2) 圖形的變化如下面圖示：



(3) 運用梯形公式算出丙的面積。

$$(0 + \text{下底}) \times \text{高} \div 2$$

$$= \text{底} \times \text{高} \div 2 \quad \text{也就是三角形的面積}$$

因為丙的上底為 0，所以經過運算之後得到：底×高÷2，「底×高÷2」也就是三角形面積的算法。

**活動六：**周長固定時的長方形面積變化

**活動目標：**當周長固定，能發現長方形之長邊與寬邊一樣長時，面積會最大。

**教具準備：**提供每兩位學童 1 條 20、32、40 公分的棉繩。

**活動流程：**

1. 讓學生運用 20、32、40 公分之棉繩，在長與寬是整公分的情況下，圍出不同邊長之長方形，並記錄所圍出的面積。

(1) 教師先示範將棉線 20 公分彎折成長方形之後，記錄的結果。

周長	20 公分								
長 (公分)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
寬 (公分)	9	8	7	6	5	4	3	2	1
長、寬相差 (公分)	8	6	4	2	0	2	4	6	8
面積 (平方公分)	9	16	21	24	25	24	21	16	9

討論填寫的結果可以知道，長方形的長邊是 5 公分、寬邊是 5 公分之後，下一組的長邊與寬邊的組合為長邊 6 公分、寬邊 4 公分，與寬邊 6 公分、長邊是 4 公分，兩組長邊與寬邊所圍出的面積是一樣，長邊 7 公分、寬邊 3 公分與寬邊 7 公分、長邊 3 公分，兩組長邊與寬邊所圍出的面積一樣；長邊 8 公分、寬邊 2 公分與長邊 2 公分、寬邊 8 公分，兩組長邊與寬邊所圍出的面積一樣；長邊 9 公分、寬邊 1 公分與長邊 1 公分、寬邊 9 公分，兩組長邊與寬邊所圍出的面積是一樣的。因此，當我們發現長邊與寬邊與之前某組長邊與寬邊的長度相反時，則不須再找出下一組長邊與寬邊。

- (2) 將棉線 32 公分彎折成長方形之後，紀錄下結果，結果如下表：

周長	32 公分								
長 (公分)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
寬 (公分)	15	14	13	12	11	10	9	8	7
長、寬相差 (公分)	14	12	10	8	6	4	2	0	2
面積 (平方公分)	15	28	39	48	55	60	63	64	63

(3) 將棉線 40 公分彎折成長方形之後，紀錄下結果，

如下表：

周長	40 公分										
長 (公分)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
寬 (公分)	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
長、寬相差 (公分)	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	2
面積 (平方公 分)	19	36	51	64	75	84	91	96	99	100	99

(4) 引導學童發現，在紀錄表格時，可以怎樣紀錄，才會比

較清楚：

①先將棉繩的長度平分成 2 份之後，比較容易確定

長與寬。

②有規律的呈現數字，例如：將長邊由大到小排

列，或由小到大排列，比較容易觀察出數字之

間的變化。

③長與寬相差的結果越小時，所圍成的面積會越

大。

④長與寬一樣時，所圍成的面積最大。

6. 教師佈題：我有一條 36 公分的繩子，如何將繩子圍出一個最

大的面積，此時的邊長和面積各是多少？

(1) 先將 36 公分長的繩子平分成 2 份。

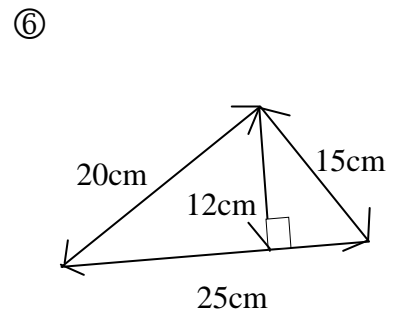
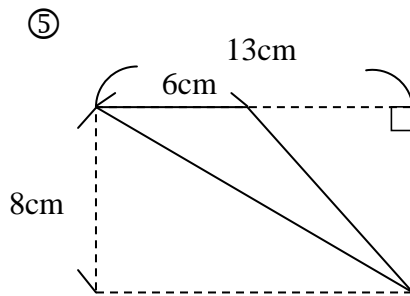
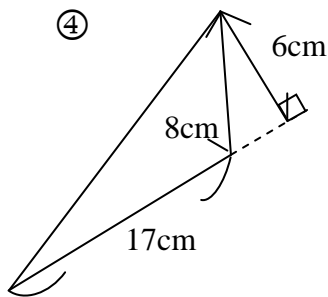
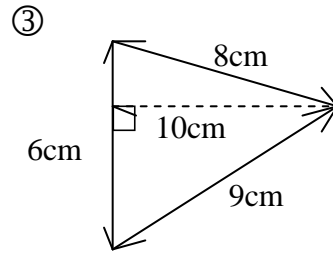
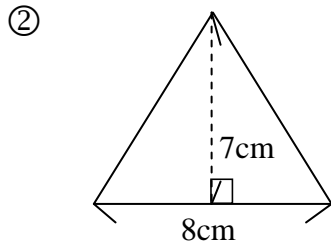
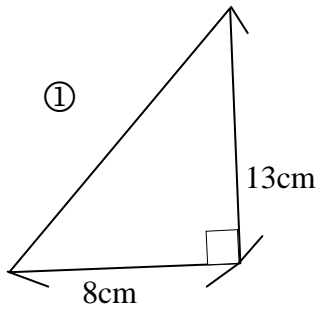
(2) 當兩邊的邊長相等時，面積會最大。

$$18 \div 2 = 9, 9 \times 9 = 81。$$

**指定作業：**

習題一：(配合活動一、二、三 求出三角形面積)

(1) 求出下面各三角形的面積



(2) 右圖中，甲、乙、丙三角形的面積各是多少？

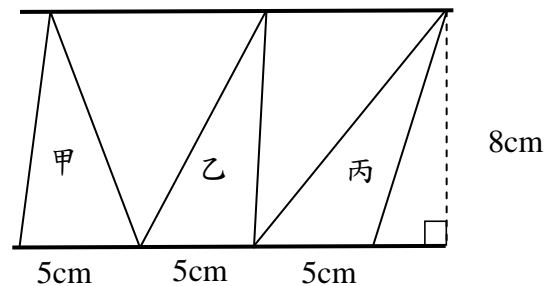
① 甲的面積：( )  $\text{cm}^2$

② 乙的面積：( )  $\text{cm}^2$

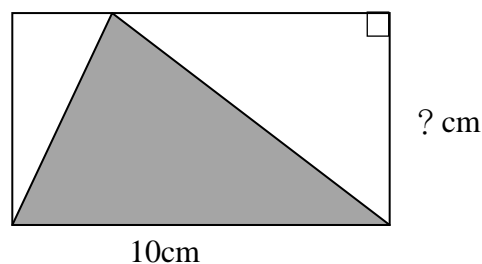
③ 丙的面積：( )  $\text{cm}^2$

④ 我發現 ( ) 和 ( ) 相同時，不論三角形

的形狀如何變化，面積都相同。



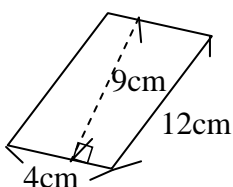
(3) 圖中灰色三角形的面積是 40 平方公分，請問長方形的寬是幾公分？



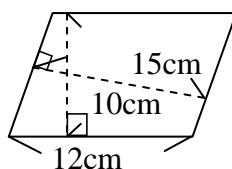
習題二：(配合活動四平行四邊形的面積)

(1) 求出下面各平行四邊形的面積：

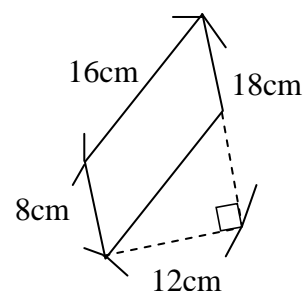
①



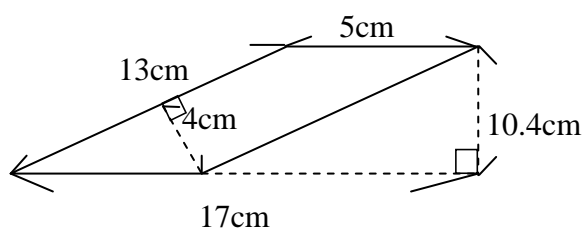
②



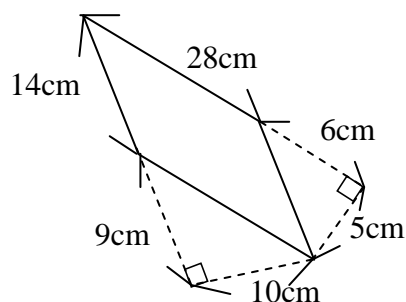
③



④

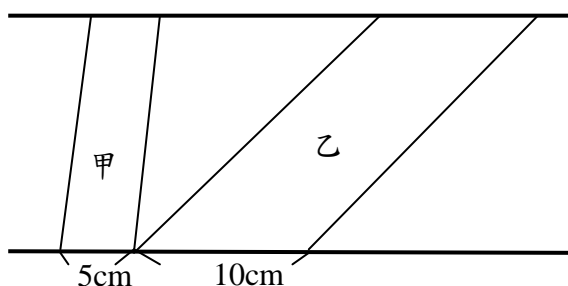


⑤



(2) 有一個平行四邊形的底是 12 公分，面積是 96 公分，請問它的高是多少公分？

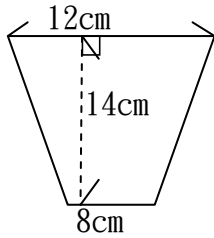
(3) 觀察下面的圖形之後，算算看甲的面積是乙的幾倍？



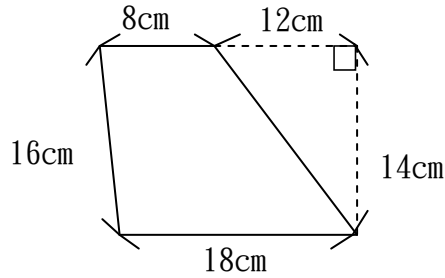
習題三：(配合活動四梯形的面積)

(1) 求出下面各梯形的面積

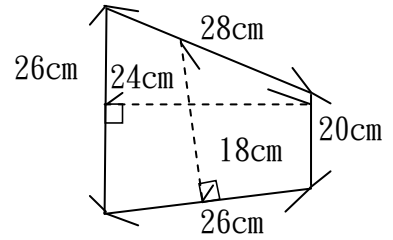
①



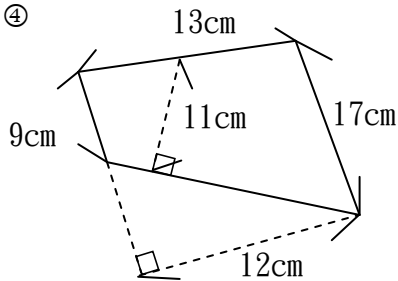
②



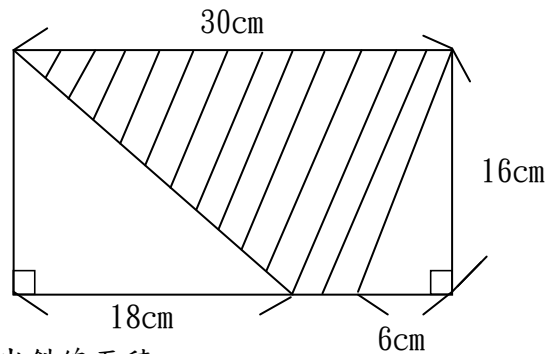
③



④



⑤

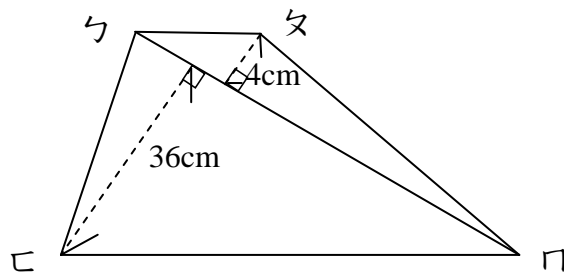


求出斜線面積

(2) 右圖梯形勺勺口口

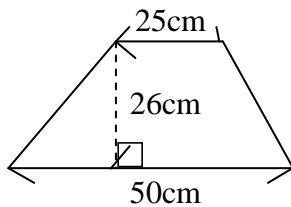
的面積是 400 平方公分

請求出線段勺口的長度。

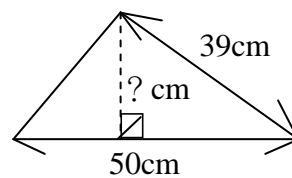


習題四：(配合活動五、六)

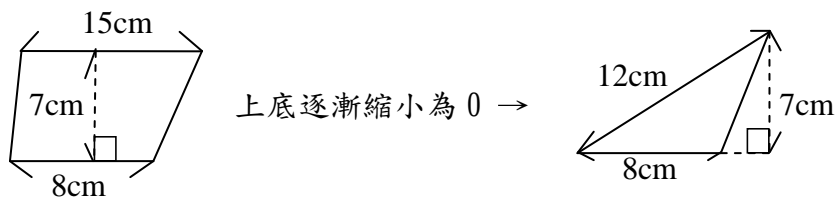
(1) 求出右邊三角形的高



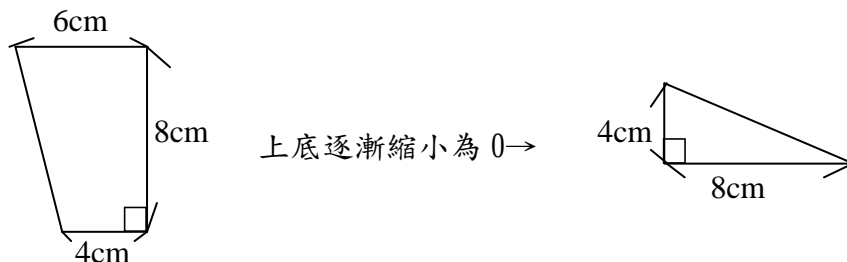
上底逐漸縮小為 0 →



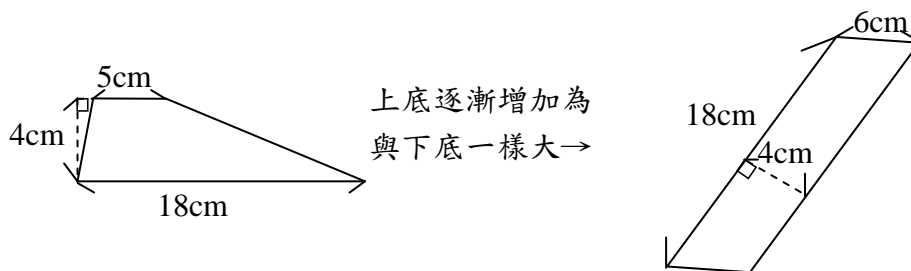
(2) 求出梯形與三角形的面積



(3) 求出梯形與三角形的面積



(4) 求出梯形與平行四邊形的面積



(5) 運用棉線 45 公分圍成正方形，要圍出最大的面積，此時的長邊與寬邊各是多少公分？面積是多少平方公分？

**指定作業解答：**

習題一

(1) ①52 平方公分 ②28 平方公分 ③30 平方公分 ④51 平方公分  
 ⑤24 平方公分 ⑥150 平方公分

(2) ①20 平方公分 ②20 平方公分 ③20 平方公分 ④底、高

(3) 8 公分

### 習題二

(1) ①36 平方公分②120 平方公分③96 平方公分④52 平方公分  
⑤140 平方公分

(2) 8 公分

(3)  $\frac{1}{2}$  倍

### 習題三

(1) ①140 平方公分②182 平方公分③552 平方公分④156 平方公分  
⑤288 平方公分

(2) 20 公分

### 習題四

(1) 26 公分。

(2) 三角形面積：28 平方公分。梯形面積：80.5 平方公分。

(3) 三角形面積：16 平方公分。梯形面積：40 平方公分。

(4) 平行四邊形面積：36 平方公分。梯形面積：46 平方公分。

(5) ①11.25 公分②126.5625 平方公分。

### 教學注意事項：

1. 教師需提醒學童在記錄長與寬的數字時，以長與寬皆為整公分為原則。

2. 導出面積的公式，需要運用「乘法對加法、減法的分配律」，

以及將「除數寫在分母」的形式，例如： $8 \times 10 \div 2 \rightarrow$ 寫成 $\frac{8 \times 10}{2}$

的形式，因此在正式進入面積的計算之前，須讓學童先熟悉乘法對加法、減法的分配律及將除數寫在分母的寫法。

3. 先練習乘法對加法、減法的分配律題目，如：

$$(1) \quad 8 \times 10 + 9 \times 10 = (8 + 9) \times 10$$

$$(2) \quad 6 \times 4 - 3 \times 4 = (6 - 3) \times 4$$

$$(3) \quad 9 \times 5 + 4 \times 5 = (9 + 4) \times 5$$

4. 練習將「除數寫在分母」的形式，如：

$$(1) \quad 8 \times 7 \div 2 = \frac{8 \times 7}{2}$$

$$(2) \quad 19 \times 7 \div 2 = \frac{19 \times 7}{2}$$

$$(3) \quad 12 \times 5 \div 2 = \frac{12 \times 5}{2}$$

5. 再練習「乘法對加法、減法的分配律」，以及將「除數寫在分母」的計算類型，如：

$$(1) \quad \frac{6 \times 4}{2} - \frac{3 \times 4}{2} = \frac{6 \times 4 - 3 \times 4}{2} = \frac{(6 - 3) \times 4}{2}$$

$$(2) \quad \frac{8 \times 5}{2} + \frac{12 \times 5}{2} = \frac{8 \times 5 + 12 \times 5}{2} = \frac{(8 + 12) \times 5}{2}$$

$$(3) \quad \frac{10 \times 5}{2} - \frac{3 \times 5}{2} = \frac{10 \times 5 - 3 \times 5}{2} = \frac{(10 - 3) \times 5}{2}$$

6. 教師需教完「長方形與正方形面積公式」之後，方可進行「活動五」之教學。

### 教學參考資料：

朱建正等（民91）。國中小數學教材與教學探討-幾何篇（二）。三峽：國家教育研究院。



### 第三章：重量

撰寫者：謝堅

#### 主題 3-1：重量的意義

#### 認知及數學結構：

##### (一)重量不是視覺感官量

長度、面積、體積、容量、角度等量，可藉由視覺產生量感，較適合進行直接比較與間接比較，重量是存在於物質上的非視覺感官量，必須藉由手掂實物來掌握量感，不易進行直接比較與間接比較，必須和秤等工具連結，才能產生意義。

##### (二)重量與質量的關係

物體的質量是不變的，但是重量隨著地心引力的大小而改變，例如在平地或在高山上面，法碼的質量不會改變，但是法碼在平地秤的重量，會比在高山上面秤的重量重。在同一個地區，我們都忽略地心引力的影響，將物體的重量和質量視為相等。

因為重量的概念比較具體且實用，因此國小課程只引入重量的概念，並不討論質量。而進行重量教學所在地點都在海拔高度變化不大的範圍，同一個物體的重量不會因為時、地不同而改變，因此在國小階段，只討論物體的重量是多少，不討論物體的質量，並不會造成測量上的混淆。

##### (三)重量與力氣的關係

在同一個地點，描述物體的重量是絕對的觀點，每一個人拿

該物體時，它的重量都相等；但是描述物體的輕重則是相對的觀點，不同的人拿該物體時，對輕重的感覺可能不相同。例如一袋米的重量是固定的，但是力氣大的人，覺得這袋米很輕，而力氣小的人，覺得這袋米很重；有時同一個人，在不同時間對同一個物體用力的感覺也不相同，例如身體狀況好的時候，覺得這袋米很輕，而身體狀況不好的時候，覺得這袋米很重。

學生剛開始學習重量時，建議教師透過比較兩個物體誰比較重，來掌握重量的意義，不宜先討論一個物體輕或重，或描述一個物體有多重。換句話說，教師應提供兩個重量不同的物體，要求學生比較哪一個物體比較重，而不是只提供一個物體，要求不同的學生描述這個物體有多重，前者能幫助學生經驗重量的意義，而後者討論的重點是力氣的大小。

#### (四)重量與體積的關係

重量與體積的關係很密切，體積是視覺感官量，因此部份學生常透過兩個物體體積的大小，來判斷兩個物體的輕量關係，形成體積較大的物體比較重的結果。當兩個物體的密度相同或體積較大物體的密度比較大時，學生判斷的結果是正確的，但是，當體積較大物體的密度比較小時，學生判斷的結果可能是錯誤的。

物體的重量、體積和密度三者間滿足「重量＝體積×密度」的關係，當兩個物體的密度相同時，這兩個物體的重量和體積滿足

成正比的關係，例如比較兩塊黏土的重量時，體積大的黏土一定比較重；但是，當兩個物體的密度不相同時，可能無法透過物體體積的大小來判斷物體的輕重，例如比較一塊黏土和一塊鐵片的重量時，因為鐵片的密度比黏土大很多，當鐵片的體積比黏土大時，鐵片一定比黏土重，但是當鐵片的體積比黏土小很多時，鐵片也可能比黏土重。

## 主題 3-2：重量的直接與間接比較

### 3-2-1：重量的直接比較

#### 認知及數學結構：

重量是非視覺感官量，無法透過視覺，直觀的比較輕重，必須藉由手掂兩實物來比較輕重，當重量的差異很大時，手掂實物的方式很容易判斷輕重，當重量的差異不大時，手掂實物的方式經常無法準確判斷輕重。

以比較兩個橘子的輕重為例，有兩種常見手掂實物比較的方法，第一種是左、右手各拿一個橘子來比較輕重，第二種是用同一隻手分別拿兩次橘子來比較輕重，這兩種比較方法與生活習慣有關，教師不應限制學生必須使用某種方法來判斷輕重。

建議教師先布置重量差異較大兩物體的情境，讓學生透過手掂實物經驗輕與重的意義，再布置重量差異不大的兩物體，讓學生察覺手掂實物經常無法正確的判斷輕重，必須引入天平等工具替代手掂實物來進行直接比較。

秤是用來測量重量，而天平是用來溝通質量，部份成人質疑國小課程為何引入溝通質量的天平當作重量教學的教具。國小引入天平的目的並不是溝通質量的意義，而是手掂實物經常無法判斷輕重，因此利用天平替代手掂實物來進行直接比較。

### 3-2-2：重量的間接比較

#### 認知及數學結構：

當兩物體無法進行直接比較時，視覺量常透過先複製再直接比較的方式進行間接比較，以比較甲、乙兩窗戶的周長為例，可以先用繩子複製出甲窗戶的周長，再拿著複製的周長到乙窗進行直接比較，就知道哪一個窗戶的周長比較長。

沒有天平或秤等工具時，重量不易複製，因此國小階段較少透過先複製再進行直接比較的方式進行間接比較，較常利用第三物以及天平，透過遞移性來進行間接比較。例如先用天平測得甲物比乙物重，乙物比丙物重後，再利用遞移性推得甲物比丙物重的結果。

國小二年級引入用「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」表示兩數量的大小關係，例如  $5+3>8$ 、 $11<20$ 、 $12-5=4+3$  等。也要求學童能在具體情境中認識上述關係的遞移性，建議教師布題時不宜只討論重量

「 $>$ 」及「 $<$ 」的遞移關係，也要討論下列含「 $=$ 」的遞移關係。

(1) 已知甲、乙和乙、丙的輕重關係，可以推得甲、丙的輕重關係：

甲的重量 $=$ 乙的重量、乙的重量 $=$ 丙的重量，可以推得

甲的重量 $=$ 丙的重量的關係。

甲的重量 $=$ 乙的重量、乙的重量 $>$ 丙的重量，可以推得

甲的重量 $>$ 丙的重量的關係。

甲的重量  $>$  乙的重量、乙的重量  $>$  丙的重量，可以推得

甲的重量  $>$  丙的權量的關係。

甲的重量  $>$  乙的重量、乙的重量  $=$  丙的重量，可以推得

甲的重量  $>$  丙的權量的關係。

(2) 已知甲、乙和乙、丙的輕重關係，無法推得甲、丙的輕重關係：

甲的重量  $>$  乙的重量、乙的重量  $<$  丙的重量，無法判斷甲和丙

重量的大小關係。

二年級尚未引入併式記錄及逐次減項的記法，建議教師不宜將「甲  $>$  乙、乙  $>$  丙」的記法，摘要的記成「甲  $>$  乙  $>$  丙」。

### 3-2-3：重量的個別單位及普遍單位比較

#### 認知及數學結構：

##### (一)重量的個別單位比較

可以利用同物累加的想法，在天平的一端逐次加入個別單位的方式，引入重量個別單位比較的意義。例如將甲物體放在天平的一邊，另一邊逐次放入十元硬幣，如果放 7 個十元硬幣時天平保持平衡，那麼甲物體和 7 個十元硬幣合起來一樣重；再將乙物體放在天平的一邊，另一邊逐次放入十元硬幣，如果放 8 個十元硬幣時天平保持平衡，那麼乙物體和 8 個十元硬幣合起來一樣重；8 個十元硬幣比 7 個十元硬幣重，所以乙物體比甲物體重。

##### (二)重量的常用單位比較

長度、面積、容量等視覺量，可以透過視覺看到單位量的累積，例如透過直尺的刻度，觀察 5 個 1 公分接起來和 5 公分一樣長的關係；透過點數平方公分板，觀察 5 個 1 平方公分合起來和 5 平方公分一樣大的關係；透過量杯的刻度，觀察分別倒入 5 次 1cc 的液體和 5cc 液體一樣多的關係等。

重量的常用單位包含公噸、公斤及公克。重量無法透過視覺看到單位量的累積，例如無法理解為什麼 5 個 1 公克合起來和 5 公克一樣重的意義，教師可以透過天平或秤，建立常用單位的意義。例如先利用天平，幫助學生發現 5 個 1 公克的法碼合起來和 1

個 5 公克的法碼一樣重，所以 5 個 1 公克合起來的重量就是 5 公克；或利用秤，幫助學童發現 5 公克的法碼重 5 公克，5 個 1 公克法碼的重量也是 5 公克，所以 5 個 1 公克合起來的重量就是 5 公克。

## 主題 3-3：測量重量的單位—秤

### 3-3-1：秤的秤面結構

#### 認知及數學結構：

##### (一) 刻度 0 的意義

直尺和分公升量杯這兩種測量工具的刻度結構類似，但是低年級學生用直尺測量長度時較可能發生錯誤，例如學生用直尺測量鉛筆的長度時，常將鉛筆的一端對齊直尺的邊緣，再報讀鉛筆另一端對應的刻度，而得到錯誤的測量結果，但是學生用分公升量杯報讀有多少液體時，並不會發生類似的錯誤。

報讀直尺和分公升量杯測量結果時，都必須掌握刻度 0 和測量結果的刻度，差別是學生用直尺測量時，必須自己找出刻度 0，才能報讀測量結果的刻度，而用分公升量杯測量時，不必找出刻度 0，只要報讀測量結果的刻度即可。再以量角器和秤這兩種測量工具為例，用量角器測量角度時，必須自己找出刻度 0，而用秤測量物體重量時，不必找出刻度 0，因此學生用量角器測量角度較可能發生錯誤。

##### (二) 秤的秤面結構

國小課程中常使用的秤有 1 公斤秤、3 公斤秤及體重計等，先以 1 公斤秤為例，較詳細的說明 1 公斤秤的刻度結構，再說明體重計的刻度結構。

先將 1 公斤秤面上呈圓形排列的數線拉直，代表 1 公斤，也就是 1000 公克。再將拉直後的數線平分成 10 份，形成最大的刻度，每一個最大刻度表示 100 公克，最大刻度上依序標上數字 0、100g、200g、300g、……、1000g(圍回圓形時，0 和 1000 標示同一個刻度)；再將最大刻度平分成 2 份，形成次大的刻度，每一個次大刻度表示 50 公克，次大刻度上依序標示數字 50g、150g、250g、……、950g；接著將每一個次大刻度 5 等份，形成次小的刻度，每一個次小的刻度表示 10 公克，再將每一個次小刻度 2 等份，形成最小的刻度，每一個最小的刻度表示 5 公克，次小及最小的刻度上都沒有數字。

家用體重計的秤面上只能看到部份的刻度，其它的刻度隱藏起來看不到，秤面上類似指針功能的標線是不動的，只有秤盤上的刻度在轉動。家用體重計都是以 1 公斤為單位，有兩類標示刻度單位的方式，第一類以 5 公斤為主要刻度，刻度上能看到數字 5、10、15、20……；第二類以 10 公斤為主要刻度，刻度上能看到數字 10、20、30、40……。這兩類標示方式都還有小刻度，有的小刻度有的只有 1 公斤，有的多了半公斤的刻度，這些刻度上面都沒有數字。



### 3-3-2：如何報讀物體的重量

#### 認知及數學結構：

下面以 1 公斤秤為例，建議教師透過下面的步驟，幫助學童解決報讀測量物體的重量。

步驟 1：先報讀最大的刻度。

1 公斤秤面上最大的刻度是 100g，教師可以利用每次累加 100 公克法碼的方式，幫助學生報讀最大刻度 100g、200g、300g、……、1000g。

步驟 2：再報讀秤面上次大的刻度。

1 公斤秤面上次大的刻度是 50g，教師可以利用每次累加 50 公克法碼的方式，先幫助學生依序報讀次大及最大的刻度 50g、100g、150g、200g、250g、……、1000g；再由 50g 開始，透過每次累加 100 公克法碼的方式，幫助學生報讀出次大刻度 50g、150g、250g、……、950g。

步驟 3：最後報讀次小和最小的刻度。

當學生掌握這些有數字刻度的意義後，才能透過累加 10 公克及 5 公克的方式，報讀秤面上次小及最小的刻度，例如先透過每次累加 10 公克法碼，幫助學童報讀 10g、20g、30g、40g、50g、……、90g、100g，或先放置 200 公克的法碼，再透過每次累加 5 公克法碼，幫助學童報讀 200g、205g、210g、215g、220g、……、250g、

255g。

步驟 4：幫助學生察覺，在秤上逐一加上物體時，秤面上指針的轉動愈大，在秤上逐一拿走物體時，秤面上指針的轉動愈小。

步驟 5：進行實測的活動(以 385 公克為例)。

學生學會報讀秤面的刻度後，就可以開始進行實測的活動，實測的順序是先找出有數字的刻度，再報讀次小及最小的刻度，例如先找出指針指在 350g 和 400g 之間，再透過報讀 350g、360g、370g、380g、385g 的方式，得到物重 385g 的結果。

## 主題 3-4：重量單位的化聚

### 3-4-1：重量單位化聚的迷失概念

#### 認知及數學結構：

很多教師認為透過下面的格子圖，很容易幫助學生進行公斤及公克兩單位的化聚活動，例如面對  $234500 \text{ 公克} = (\quad) \text{ 公斤}$  的問題時，只要將  $234500 \text{ 公克}$  的個位數字對齊圖一中的公克，再將數字填入格子中，就可以看到  $234500 \text{ 公克} = 234.5 \text{ 公斤}$  的答案；面對  $38.2 \text{ 公斤} = (\quad) \text{ 公克}$  的問題時，只要將  $38.2 \text{ 公斤}$  的個位數字對齊圖二中的公斤，再將數字填入格子中，並在小數右邊的缺項補 0，就可以看到  $38.2 \text{ 公斤} = 38200 \text{ 公克}$  的答案。

		公			公
		斤			克
2	3	4	.	5	0 0

(圖一)

		公			公
		斤			克
	3	8	.	2	0 0

(圖二)

這是不正確的的教學方式，畫格子圖並不是解決單位化聚問題的概念，只是一種幫助記憶「特定單位化聚」的解法，面對公斤與公克兩單位間的化聚問題，利用上圖中的格子圖是有效的，但是面對公噸與公克、公尺與公分、平方公尺與平方公分等其它

單位的化聚問題時，上圖中的格子圖對解題並沒有幫助，學生必須記憶很多組不同的格子圖，才能解決所有單位化聚的問題，是非常沒有效率的解題方式。

利用格子圖解題的學生，並沒有學到單位化聚的概念，雖然在小範圍「特定單位化聚」的考試中得到較好的成績，但是以後面對非十進制民間單位的化聚問題時，例如  $1 \text{ 公斤} = 2.2 \text{ 英磅}$ ， $4.8 \text{ 公斤} = ( ) \text{ 英磅}$ ，或  $1 \text{ 台斤} = 0.6 \text{ 公斤}$ ， $2.3 \text{ 台斤} = ( ) \text{ 公斤}$ ，學生無法畫出格子圖，完全沒有成功解題的機會。

### 3-4-2：重量整數及分、小數倍單名數的化聚

#### 認知及數學結構：

下面以公斤及公克單位化聚的問題為例，說明如何幫助學生解決問題。有三種解決單位化聚問題的解題策略，第一種策略是利用乘法及除法來解題；第二種策略是利用單位量轉換的概念來解題；第三種策略是利用比或比值的概念來解題。

其中第一種策略利用乘法解決大單位化為小單位的問題，利用除法解決小單位聚為大單位的問題，因此學生常混淆該用乘法或除法來解題，而第二種策略和第三種策略將化與聚的問題視為相同的解題活動。

下面分成大單位公斤化成小單位公克，以及小單位公克聚成大單位公斤兩部份來說明。

#### (一)大單位化為小單位

下面以問題 1 及問題 2 為例，說明如何幫助學生將大單位公斤化為小單位公克。其中問題 1 是整數倍的化聚問題，問題 2 是小數倍的化聚問題。

問題 1：3 公斤 = ( ) 公克

策略甲：利用乘法來解題

當學生能掌握整數乘以整數的問題後，教師可以透過下面分段布題的步驟，幫助學生解決問題 1。

步驟 1：「1 盒蘋果有 20 個，3 盒蘋果有多少個？」

學生會利用算式「 $20 \times 3 = 60$ 」，算出 3 盒蘋果有 60 個。

步驟 2：「1 公斤是 1000 公克，3 公斤是多少公克？」

教師可以幫助學生利用算式「 $1000 \times 3 = 3000$ 」，算出 3 公斤是 3000 公克

### 策略乙：利用單位量轉換概念來解題

當學生知道 3 公斤是 3 個 1 公斤，並掌握整數乘以整數的問題後，教師可以透過下面分段布題的步驟，幫助學生解決問題 1。

步驟 1：「3 公斤和幾個 1 公斤合起來一樣重？」

教師說明 3 個 1 公斤合起來是 3 公斤，3 公斤和 3 個 1 公斤合起來一樣重。

步驟 2：「1 公斤 = 1000 公克，3 個 1 公斤合起來和多少公克一樣重？」

教師說明 3 個 1 公斤合起來和 3 個 1000 公克一樣重，

步驟 3：「3 公斤合起來和 3 個 1000 公克一樣重，把做法用算式記下來？」

教師說明 3 個 1000 公克，也就是 1000 公克的 3 倍， $1000 \times 3 = 3000$ ，可以記成 3 公斤 = 3000 公克。

問題 2：4.6 公斤 = ( ) 公克

### 策略甲：利用乘法來解題

當學生有離散量情境分數做數問題的解題經驗，也有一位小數和十分之幾分數互換的解題經驗，教師可以透過下面分段布題的步驟，幫助學生解決問題 2。

步驟 1：「1 盒蘋果有 20 個， $\frac{3}{5}$  盒蘋果有多少個？」

教師透過  $\frac{3}{5}$  盒蘋果是將 1 盒蘋果平分成 5 份，取出其中的 3 份，也就是將 20 個蘋果平分成 5 份，取出其中的 3 份的想法，幫助學生利用算式「 $20 \div 5 = 4$ ， $4 \times 3 = 12$ 」，算出  $\frac{3}{5}$  盒蘋果有 12 個的答案。

步驟 2：「將小數 0.6 改記成分數，記記看。」

教師透過小數 0.6 是分數  $\frac{6}{10}$  的另一種記法；或透過 0.6 是 6 個 0.1，也就是 6 個  $\frac{1}{10}$ ，6 個  $\frac{1}{10}$  是  $\frac{6}{10}$  的想法，幫助學生將 0.6 改記成  $\frac{6}{10}$ 。

步驟 3：「1 公斤是 1000 公克，請問 0.6 公斤是多少公克？」

教師幫助學生利用算式「 $0.6 = \frac{6}{10}$ ， $1000 \div 10 = 100$ ， $100 \times 6 = 600$ 」，算出 0.6 公斤是 600 公克。

步驟 4：「1 公斤是 1000 公克，請問 4.6 公斤是多少公克？」

教師幫助學生可以利用算式「 $1000 \times 4 = 4000$ ，

$1000 \div 10 = 100$ ， $100 \times 6 = 600$ ， $4000 + 600 = 4600$ 」，

算出 4.6 公斤是 4600 公克。

### 策略乙：利用單位量轉換概念來解題

當學生知道 4.6 公斤是 4.6 個 1 公斤，也有解決整數乘以小數問題的經驗，教師可以透過下面分段布題的步驟，幫助學生解決問題 2。

步驟 1：「4.6 公斤和幾個 1 公斤合起來一樣重？」

教師說明 4.6 公斤和 4.6 個 1 公斤合起來一樣重。

步驟 2：「1 公斤 = 1000 公克，4.6 個 1 公斤合起來和多少公克一樣重？」

教師說明 4.6 個 1 公斤合起來和 4.6 個 1000 公克一樣重。

步驟 3：「4.6 公斤合起來和多少公克一樣重，把做法用算式記下來？」

教師說明 4.6 個 1000 公克，也就是 1000 公克的 4.6 倍，

$1000 \times 4.6 = 4600$ ，可以記成 4.6 公斤 = 4600 公克。

### 策略丙：利用比的概念來解題

當學生能掌握比與比值的意義後，就能透過四項比例式

「1 公斤 : 1000 公克 = 4.6 公斤 : □ 公克」解決問題。學生可能透過 4.6 公斤是 1 公斤的 4.6 倍的響法，利用  $1000 \times 4.6 = 4600$ ，得

到 4.6 公斤 = 4600 公克的答案。也可能利用「內項乘以內項等於外項乘以外項」的算則，「 $1:1000=4.6:\text{甲}$ ， $1000\times 4.6=1\times\text{甲}$ ， $\text{甲}=4600$ 」，得到 4.6 公斤 = 4600 公克的答案。

## (二)小單位聚為大單位

下面以問題 3 及問題 4 為例，說明如何幫助學生將小單位公克聚成大單位公斤。其中問題 3 是整數倍的化聚問題，問題 4 是小數倍的化聚問題。

**問題 3：5000 公克 = ( ) 公斤**

**策略甲：利用除法來解題**

當學生有整數除以整數包含除問題的解題經驗，教師可以透過下面分段布題的步驟，幫助學生解決問題 3。

步驟 1：「有 5000 個蘋果，每 1000 個裝 1 箱，全部裝完，可以裝成幾箱？」

學生會利用算式「 $5000\div 1000=5$ 」，算出 5000 個蘋果可以裝成 5 箱。

步驟 2：「1 公斤可以換 1000 公克，5000 公克可以換多少公斤？」

教師幫助學生利用算式「 $5000\div 1000=5$ 」，算出 5000 公克可以換 5 公斤。

步驟 3：「1 公斤是 1000 公克，5000 公克是多少公斤？」

教師幫助學生利用算式「 $5000\div 1000=5$ 」，算出 5000 公克

是 5 公斤。

### 策略乙：利用單位量轉換概念解題

當學生知道 5000 公克是 5000 個 1 公克，也知道 1 公克是 0.001 公斤，也有小數乘以整數的解題經驗，教師可以透過下面分段布題的步驟，幫助學生解決問題 3。

步驟 1：「5000 公克和幾個 1 公克合起來一樣重？」

教師可以澄清 5000 公克和 5000 個 1 公克合起來一樣重。

步驟 2：「1 公克 = 0.001 公斤，5000 個 1 公克合起來和多少公斤一樣重？」

教師可以澄清 5000 個 1 公克合起來和 5000 個 0.001 公斤一樣重。

步驟 3：「5000 公克合起來和多少公斤一樣重，把做法用算式記下來？」

教師可以說明 5000 個 0.001 公斤，也就是 0.001 公斤的 5000 倍， $0.001 \times 5000 = 5$ ，可以記成 5000 公克 = 5 公斤。

問題 4：3040 公克 = ( ) 公斤

### 策略甲：利用除法來解題

當學生有整數除以整數，答案是分數或小數的解題經驗，教師可以透過下面分段布題的步驟，幫助學童解決問題 4。

步驟 1：「有 40 個蘋果，每 1000 個裝 1 箱，全部裝完，相當於裝

成幾箱？」

學生可以利用算式「 $40 \div 1000 = 0.04$  (或  $\frac{40}{1000}$ )」，算出

40 個蘋果相當於  $0.04$  (或  $\frac{40}{1000}$ ) 箱的答案。

步驟 2：「有 40 公克，每 1000 公克換成 1 公斤，全部換完，相當於多少公斤？」

學生可以利用算式「 $40 \div 1000 = 0.04$  (或  $\frac{40}{1000}$ )」，算出 40

公克相當於 0.04 公斤或  $\frac{40}{1000}$  公斤的答案。

步驟 3：「有 3040 公克，每 1000 公克換成 1 公斤，全部換完，相當於多少公斤？」

學生可以利用算式「 $40 \div 1000 = 0.04$ ， $3000 \div 1000 = 3$ ，

$3 + 0.04 = 3.04$ 」，算出 3040 公克相當於 3.04 公斤的答案。

### 策略乙：利用單位量轉換概念解題

當學生知道 3040 公克是 3040 個 1 公克，也知道 1 公克是 0.001 公斤，也有小數乘以整數的解題經驗，教師可以透過下面分段布題的步驟，幫助學生解決問題 4。

步驟 1：「3040 公克和幾個 1 公克合起來一樣重？」

教師可以澄清 3040 公克和 3040 個 1 公克合起來一樣重。

步驟 2：「1 公克 = 0.001 公斤，3040 個 1 公克合起來和多少公斤一樣重？」

教師可以澄清 3040 個 1 公克合起來和 3040 個 0.001 公斤一樣重。

步驟 3：「3040 公克合起來和多少公斤一樣重，把做法用算式記下來？」

教師可以說明 3040 個 0.001 公斤，也就是 0.001 公斤的 3040 倍， $0.001 \times 3040 = 3.04$ ，可以記成 3040 公克 = 3.04 公斤。

### 策略丙：利用比的概念來解題

當學生能掌握比與比值的意義後，就能透過四項比例式

「1 公斤：1000 公克 = □ 公斤：3040 公克」解決問題。學生可能利用  $3040 \div 1000 = 3.04$ ，所以 □ 是 1 的 3.04 倍，得到 3040 公克 = 3.04 公斤的答案。也可能利用「內項乘以內項等於外項乘以外項」的算則，「 $1 : 1000 = \text{甲} : 3040$ ， $1000 \times \text{甲} = 3040 \times 1$ ， $\text{甲} = 3040 \div 1000 = 3.04$ 」，得到 3040 公克 = 3.04 公斤的答案。



## 主題 3-2-1：重量的直接比較

撰寫者：魏慶雲

～利用手及天平進行重量的直接比較

授課對象：國小二年級學生

先備知識：

1. 能用手掂物品感受物品的輕重
2. 知道可以利用天平比較物品的重量

教學目標：

1. 能透過手掂物品比較密度相同物品之重量。
2. 能透過手掂物品比較密度不同物品之重量。
3. 能以天平比較不同物品之重量。
4. 能知道同一個物品不論是形狀改變、時間改變或分割後的總和重量仍舊不變。

教學時間：40 分鐘(一節課)

教學說明：

1. 重量不是視覺感官量，無法透過視覺判斷兩物體重量的輕重關係，本主題的教學活動中，幫助學生藉由手掂物品或操作天平，來比較不同物品重量的輕重關係。
2. 當物品的密度相同時，物體的重量和體積滿足成正比例的關係，但是當物品的密度不同時，無法以物體體積的大小來判斷物體的輕量關係，必須透過手掂物品或操作天平，來比較不同

物品重量的輕重關係。

3. 以手掂物品比較兩物輕重時，學生可能用同一隻手拿兩次物品，先拿一個物品，放下後再拿另一個物品來判斷輕重，也可能用雙手，分別拿著物品來判斷輕重。
4. 當物品的重量很接近時，手掂物品不易或無法比較輕重差異，此時可以引入天平來協助比較輕重。
5. 基於對稱性的直覺，學生很容易相信天平平衡時，兩邊物品的重量相等，教師可以透過手掂物品，幫助學童察覺當天平不平衡時，往下沉那一邊的物體比較重。
6. 利用二塊重量相同的黏土，發現它們在天平二端時，天平是平的，然後
  - (1) 靜置一段時間。
  - (2) 將其中一塊的形狀改變。
  - (3) 將其中一塊切割為數小塊。再利用天平進行測量，發現天平二端依舊是平的，以檢驗同一個物品雖形狀改變、時間改變、分割再重組後，重量會保持不變的重量保留概念。

### 教具準備：

黏土、小積木、水果(體積相當的橘子、蘋果、芭樂……等)

### 活動一：透過手掂物體進行重量的直接比較

**活動目標：**透過手掂物體，比較相同密度及不同密度物品的重量，並用有 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 的算式記錄解題活動的結果。

**活動流程：**

1. 將學生每 4~5 人分為一組
2. 教師為每組準備以下教具：
  - (1) 一大(體積約如 10 個小積木)、一小(體積約如 2 個小積木)兩塊黏土，其中大黏土放在標示為勺的盤子上，小黏土放在標示為勺的盤子上。
  - (2) 一大塊黏土。
  - (3) 100 個小積木。
3. 第一階段以逐漸增加及減少物品來感知重量的變化：
  - (1) 請小朋友在手上放上勺盤上的大黏土，感受手掂之物品的重量，再將另一塊大黏土放到手上，感受重量的變化，然後引導學生說出：「黏土越多，就越重。」
  - (2) 請小朋友將手上的大黏土拿掉，引導學生說出：「黏土越少，就越輕。」
4. 第二階段則以二件不同的物品做重量的比較，先詢問：「勺盤子裡跟勺盤子裡的兩塊黏土中，哪一塊會較重？」請學生回答。此時學生必然會回答大的黏土比小的黏土重。
5. 再詢問：「10 個小積木和 2 個小積木哪個比較重？」請學生回

答。此時學生必然會回答 10 個小積木比較重。

6. 教師接著詢問學生：「如果是大的黏土和 10 個小積木比較，哪個比較重？」請學生回答。

7. 當學生無法確切說明何者較重時，引導學生：

(1) 說出不同的物品沒有辦法直接用看的來判斷重量，必須手掂物品才可以知道誰比較重。

(2) 透過手掂物品來比較兩物品的重量，學生可能用同一隻手掂二次，或同時掂在二隻手上來比較。

(3) 說出比較的結果，例如說出「大黏土比小黏土重」，或說出「10 個小積木比 2 個小積木重」。

8. 重量關係的記錄

(1) 教師先複習有  $>$ 、 $=$ 、 $<$  算式的記法。

提問：「8 比 5 大，要怎麼記？」

「2 比 7 小，要怎麼記？」

「 $2+4$  和 6 一樣大，要怎麼記？」

引導學生寫出：「 $8>5$ 」、「 $2<7$ 」、「 $2+4=6$ 」。

(2) 教師宣告：「用  $\cup$  表示大黏土，用  $\cup$  表示小黏土。」

提問：「 $\cup$  黏土比  $\cup$  黏土重，要怎麼記？」

引導學生寫出：「 $\cup$  的重量  $>$   $\cup$  的重量」。

9. 請學生用手掂比較大黏土和 10 個小積木的重量。

10. 請學生說明哪個比較重，並加以記錄。
11. 教師取出體積相當的水果，如：橘子、蘋果、芭樂，請學生比較輕重，並加以記錄。
12. 引導學生得出下列結論：
  - (1) 當物品的重量差異較大時，可以輕易的用手比較重量。
  - (2) 當物品的重量差距不大時，用手難以比較輕重。
  - (3) 用手難以比較輕重時，可以利用工具進行比較。

## 活動二：用天平做重量的直接比較

**活動目標：**用天平比較不同物品之重量。

**活動流程：**

1. 教師利用兩塊黏土放置在天平二側，並說明經由天平的操作，可以判斷二塊黏土的重量孰輕孰重。
  - (1) 當天平兩臂平衡時，表示左邊的物品重量和右邊的物品一樣重。
  - (2) 當天平兩臂不平衡時，表示兩邊的物品重量不相同。
    - ① 左邊較低時，表示左邊的物品較重。
    - ② 左邊較高時，表示左邊的物品較輕。
  - (3) 教師可以透過手掂物品，幫助學童察覺當天平不平衡時，比較低那一邊的物體比較重。

2. 請各組學生分別在天平兩側放上各種數量的小積木，以檢視天平狀態的變化，並引導學生討論以下狀況：
  - (1) 天平的兩端放上相同數量的小積木，天平的狀態如何？
  - (2) 天平的左側放上比右側多的小積木，天平的狀態如何？
  - (3) 天平的左側放上比右側少的小積木，天平的狀態如何？
3. 教師分給每組各二塊體積接近的黏土，請各組找出哪一塊較重，並說明其判斷的理由。

### 活動三：檢驗重量的保留概念

**活動目標：**了解重量相同的二塊黏土，若其中一塊的形狀改變、放置一段時間或分割後的總合，其重量仍會和另一塊黏土的重量相同。

#### 活動流程：

1. 時間改變的重量保留概念：
  - (1) 取二個一樣重的水果置於天平兩端，此時天平是平的。
  - (2) 教師提問：「現在天平是平的，表示這二個水果一樣重。但是，經過5分鐘以後，這二個水果還會一樣重嗎？」
  - (3) 將兩個水果取下，放置於一旁，先進行「分割後總重量不變」的活動。待活動結束後，再將此二個水果放置於天平二側，檢驗天平是否仍是平的。

(4) 最後得出結論：一樣重的物品，經過一段時間後，還是會一樣重。

2. 形狀改變的重量保留概念：

(1) 教師取二塊一樣重的黏土置於天平兩端，此時天平是平的。

(2) 將其中一塊取下，在中心部份按壓使其成為碗狀(形狀亦可做其他變化)。

(3) 詢問學生：這一塊黏土的形狀改變了，重量還會和另一塊一樣嗎？

(4) 將二塊黏土再放置到天平上，將發現天平依舊是平的。

(5) 得出結論：黏土的形狀雖然改變了，但是重量仍然維持不變。

3. 分割後總重量不變的重量保留概念：

(1) 取二塊一樣重的黏土置於天平兩端，此時天平是平的。

(2) 將其中一塊分割為四小塊。

(3) 提問：「這兩塊黏土本來是一樣重的，現在其中一塊分成了四小塊，那麼這四小塊的總重量還會和另一塊一樣重嗎？」

(4) 將四小塊黏土一起放到天平上，發現和另一塊一起測量時，天平依舊是平的。

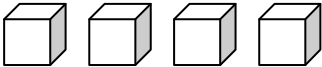
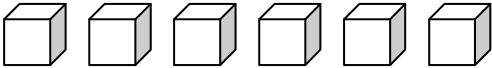
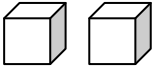
(5) 得出結論：分割後的黏土，總重量還是會和原來的重量一樣。

### 指定作業：




習題一(配合活動一)

選出最適合的答案

(1) 哪一組積木的總重量最重？

- ① 
- ② 
- ③ 

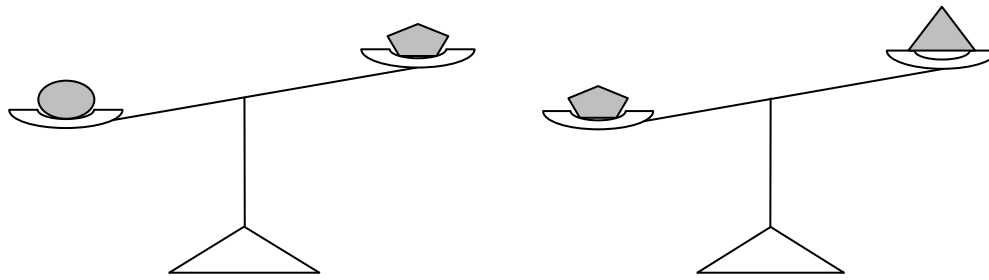
(2) 下面是同一種黏土，大小不一樣，哪一塊黏土的重量最重？

- ① 
- ② 
- ③ 

(3) 有二個水果，想知道哪一個比較重，可以用甚麼方法？

- ① 看一看哪個水果比較大
- ② 問一問哪個水果比較貴
- ③ 放在天平上哪邊比較低

## 習題二(配合活動二)



根據上面的測量結果，在( )中填上 $<$ 、 $=$ 或 $>$ 。

(1)  $\triangle$  的重量( )  $\text{pentagon}$  的重量

(2)  $\circ$  的重量( )  $\text{pentagon}$  的重量

### 指定作業參考解答：

#### 習題一

(1) ② 、(2) ① 、(3) ③

#### 習題二

(1) ( $<$ ) 、(2) ( $>$ )

### 教學注意事項：

1. 在教學中，教師往往會運用容易取得的教具進行教學活動，然而在重量的實測中，在相同密度的物品中較大的物品會較重，而產生「體積較大則物品較重」的錯覺。教學中宜使用較多種類的物品，進行重量的比較，以利學生認知到：「體積較大的

物品，不一定比較重。」

2. 在重量的比較裡，最自然的測量工具就是雙手，為了讓學生利用雙手感受重量的差異，教學中最好先用重量差異較大的物品做比較。
3. 重量的實測最後勢必需要使用測量工具，本單元中不找出每件物品的重量，而是聚焦在兩件不同物品之重量的比較上，因此使用的測量工具為天平。但為了製造出使用天平的需求感，需要產生只用手不足以測量的困境，因此教學中須選擇無法用手精準的比較出重量差異的兩個物品，以突顯手的感知力的不足，及使用工具進行測量的必要性。
4. 天平雖是測量質量的工具，但在本教學中僅是比較兩件物品重量的工具，無須強調質量的觀念。
5. 比較完兩件物品的重量後，可教導學生利用有 $<$ 、 $=$ 、 $>$ 的算式記錄比較的結果，為引入重量單位後的記錄鋪路。

### 教學參考資料：

鍾靜等(民 89)。國小數學教材分析－重量和容量。三峽：國家教育研究院。

## 主題 3-2-2：重量的間接比較

撰寫者：魏慶雲

～利用天平進行重量的間接比較

授課對象：國小二年級學生

先備知識：

1. 能以天平為工具得到兩物品輕重的關係
2. 認識 $<$ 、 $=$ 、 $>$ 的意義，能用有 $<$ 、 $=$ 、 $>$ 的算式記錄兩物品輕重比較的結果。

教學目標：

1. 能在重量的比較活動中認識遞移律。
2. 能在已知兩兩物體輕重的情境中，利用遞移律找出最重、最輕的物品，並加以排序。

教學時間：80 分鐘(二節課)

教學說明：

1. 本主題教學活動中，先利用天平，找出 A、B、C 三件物品中，A 與 B、B 與 C 及 A 與 C 間兩兩的輕重關係，再利用遞移律找出三件物品，哪個最重，哪個最輕，並將三件物品的重量加以排序。
2. 當學生比較 A 與 B 及 B 與 C 的輕重關係後，教師可以先引導學生利用遞移律推論 A 和 C 的輕重關係，再讓學生實際用天平確認推論的結果。

## 教具準備：

黏土、天平、體積大致相同的水果數種

## 活動一：利用天平認識重量的遞移律

**活動目標：**在已知三件物品兩兩輕重關係的情境中，利用遞移律對這三件物品的輕重加以排序，或找出三件物品中最重、最輕的物品。

## 活動流程：

1. 教師拿出勺、夕、冂三塊黏土，利用天平比較勺、夕，勺、冂及夕、冂的輕重關係，並用算式記錄比較的結果。
  - (1) 先將勺黏土及夕黏土放置在天平的兩側比較重量。  
發現勺黏土這一側的位置較低，表示勺黏土較重。  
在黑板上記錄：勺黏土的重量 > 夕黏土的重量。
  - (2) 再將夕黏土及冂黏土放置在天平的兩側比較重量。  
發現夕黏土較重，可以記錄成：  
夕黏土的重量 > 冂黏土的重量。
  - (3) 接著將勺黏土與冂黏土放至天平兩側，發現勺黏土這一側位置較低，記錄成：勺黏土的重量 > 冂黏土的重量。
2. 教師要求學生看著黑板上的三個算式，判斷哪塊黏土最輕，哪塊黏土最重，並說出判斷的理由。  
如學生能說出：

勺黏土最重，口黏土最輕。

因為勺黏土比勺黏土重，勺黏土比口黏土重，

所以勺黏土最重，口黏土最輕。

3. 教師提問：「經過三次測量，我們可以找出三塊黏土中最重的和最輕的。但是如果只測量兩次，可以找出最重的和最輕的黏土是誰嗎？」
4. 隨意取出三塊體積接近的黏土，並利用天平進行二次測量，並討論出：
  - (1) 勺的重量  $>$  勺的重量且勺的重量  $>$  口重量時，僅能得知勺最重。
  - (2) 勺的重量  $>$  口的重量且勺的重量  $>$  口重量時，僅能得知口最輕。
5. 物品中有重量相同者的推論：
  - (1) 教師取 A、B、C 三塊黏土，並測量出：  
A 的重量 = B 的重量，A 的重量  $>$  C 的重量。
  - (2) 引導學生討論  
「若 A 的重量 = B 的重量  
且 A 的重量  $<$  C 的重量  
則 B 與 C 的重量關係應如何？」
  - (3) 得出：「B 的重量  $>$  C 的重量」的結論。

(4) 使用天平驗證上述結論。

## 活動二：重量的間接比較

**活動目標：**利用天平，分別比較甲、乙兩物品和第三件物品丙的輕重關係，再利用遞移律，推出甲、乙兩物品誰重誰輕的結果。

### 活動流程：

1. 將學生分為六組，為每組準備三樣體積相近的不同種類的水果。
2. 發給每組一個天平，請各組利用天平量得甲、丙和乙、丙的輕重關係，進而推論出甲和乙的輕重關係，並完成學習單。

◇ 可能的測量結果如下：

(1).  $甲 > 丙$ ， $丙 > 乙$   $\Rightarrow$   $甲 > 乙$

(2).  $甲 < 丙$ ， $丙 < 乙$   $\Rightarrow$   $甲 < 乙$

(3).  $甲 > 丙$ ， $乙 > 丙$   $\Rightarrow$  無法判斷甲、乙的輕重關係

(4).  $甲 < 丙$ ， $乙 < 丙$   $\Rightarrow$  無法判斷甲、乙的輕重關係

### 3. 學習單

第\_\_\_\_\_組 組員：\_\_\_\_\_

- 我拿到的水果分別是：( )、( )、( )。
- 第一次測量發現：( )的重量 > ( ) 的重量。
- 第二次測量發現：( ) 的重量 > ( ) 的重量。
- 第三次測量發現：( ) 的重量 > ( ) 的重量。
- 經過這三次測量，我們發現最重的是：( )
- 經過這三次測量，我們發現最輕的是：( )

說說看你是如何判斷出最重和最輕的水果是誰呢？

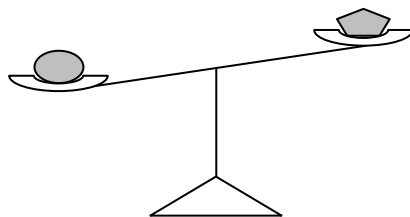
4. 各組報告比較結果。

**指定作業：**

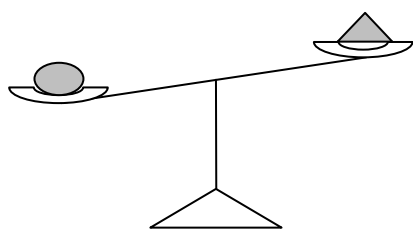
習題一(配合活動二)

小英用天平測量○、◡、▲三件物品，測量結果如下：

第一次測量：



第二次測量：



請根據這二次測量的結果，

從下面的題目中選出最適合的答案：

(1) 哪一個物品最重？



④ 無法判斷

(2) 哪一個物品最輕？



④ 無法判斷

習題二(配合活動二)

有四個水果：香蕉、橘子、番茄和蘋果，

如果香蕉的重量=橘子的重量，番茄的重量=蘋果的重量

而且香蕉的重量比番茄的重量重，

那麼橘子和蘋果誰比誰重？(把結果用 $>$ 記錄下來。)

## 指定作業參考解答：

### 習題一

(1) ① 、(2) ④ 、(3) ①

### 習題二

橘子的重量  $>$  蘋果的重量

## 教學注意事項：

1. 教學中應就如何利用遞移性找出三件物品中誰最重？誰最輕？有充分的討論，以澄清學生的概念。
2. 為了幫助學生使用有  $<$ 、 $=$ 、 $>$  的算式記錄比較的結果，建議教師提問時使用「誰比誰重？」的問話，不要使用「誰比較重？」的問話，以後者的方式提問，學生會回答「勺黏土比較重」，而以前者的方式提問，學生會回答「勺黏土比勺黏土重」前者較易引入算式「勺黏土的重量  $>$  勺黏土的重量」。
3. 要比較三件物品的重量，若只用天平測量二次，則可能出現：  
甲、只知道誰最重。  
乙、只知道誰最輕。  
丙、可以從重到輕排出順序。  
教師教學中不妨和學生就這些可能性進行討論，以幫助學生掌握遞移性的使用時機。

4. 四件物品中，兩兩的重量相等，則從等重的各組中各取出一件物品比較重量，則另一件的輕重關係亦可推論得知。但這種取四件物品比較的例子，已超過教材中欲討論的遞移性範圍，教師可將其當作挑戰題，視學生的程度做練習。

### 教學參考資料：

鍾靜等(民 89)。國小數學教材分析－重量和容量。三峽：國家教育研究院。

### 主題 3-4-1：整數倍單名數及複名數化聚 撰寫者：

～公斤、公克的整數倍單名數及複名數化聚

授課對象：國小四年級學生

先備知識：

1. 知道重量單位：公斤、公克。
2. 已經知道 1 公斤等於 1000 公克。

教學目標：

1. 能將整數公斤化為公克。
2. 能將公克聚為整數公斤。

教學時間：40 分鐘(一節課)

教學說明：

1. 本單元教學重點是公斤及公克整數倍單名數及複名數的化聚活動。
2. 以重量單位公斤與公克而言，公斤是高階單位，公克屬於低階單位，重量的化聚即為公斤與公克間單位量的轉換活動。
3. 公斤與公克間整數倍單名數化聚，就是將高階單位「公斤」化為低階單位「公克」，及將低階單位「公克」聚為高階單位「公斤」的轉換活動，轉換過程中的公斤都是整數。
4. 整數倍複名數化聚，就是將單名數公克聚成複名數公斤及公克，以及將複名數公斤及公克化成公克的轉換活動，轉換過程

中的公斤都是整數。

### 活動一：將複名數公斤及公克化為單名數公克

活動目標：能將複名數公斤及公克化為單名數公克。

活動流程：

1. 先複習舊經驗：「 $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ 」。

教師布題：3 公斤等於多少公克？

把做法用算式記下來，說說看你的算式記了什麼？

請學生進行解題

學生可能的算法有二種：

(1)  $1000 + 1000 + 1000 = 3000$

答：3 公斤 = 3000 公克

因為 1 公斤 = 1000 公克

3 公斤是 3 個 1 公斤，也就是 3 個 1000 公克

將 3 個 1000 公克相加，得到 3000 公克的答案。

(2)  $1000 \times 3 = 3000$

答：3 公斤 = 3000 公克

1 公斤 = 1000 公克

學生可能有下面兩種說法：

① 3 公斤是 3 個 1 公斤，也就是 3 個 1000 公克

將 1000 公克乘以 3，得到 3000 公克的答案。

② 3 公斤是 3 個 1 公斤，也就是 3 個 1000 公克，

3 個 1000 公克是 1000 公克的 3 倍，

將 1000 公克乘以 3，得到 3000 公克的答案。

2. 教師接著布題：「一個箱子重 5 公斤 860 公克，和幾公克一樣重？把做法用算式記下來，說說看你的算式記了什麼？」

解題說明：

根據前面活動的經驗，學生可能會利用以下二種解法。

$$(1) \quad 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 = 5000$$

$$5000 + 860 = 5860$$

得到 5 公斤 860 公克等於 5860 公克

$$(2) \quad 1000 \times 5 = 5000$$

$$5000 + 860 = 5860$$

得到 5 公斤 860 公克等於 5860 公克

3. 教師應限制使用加法解題的學生改用乘法來解題。
4. 教師布題：「一包米是 13 公斤 50 公克，和幾公克合起來一樣多？」

解題說明：

$$1000 \times 13 = 13000$$

$$13000 + 50 = 13050$$

所以 13 公斤 50 公克和 13050 公克一樣重。

5. 教師可多布幾題讓學生練習

**活動二：單名數公克聚為複名數的公斤及公克**

**活動目標：**能將單名數公克聚成複名數公斤及公克。

**活動流程：**

1. 先進行單名數公克聚為整數公斤的練習

教師布題：5000 公克等於幾公斤？

把做法用算式記下來，說說看你的算式記了什麼？

請學生進行解題

學生可能的算法有二種：

$$(1) \quad 5000 - 1000 = 4000$$

$$4000 - 1000 = 3000$$

$$3000 - 1000 = 2000$$

$$2000 - 1000 = 1000$$

$$1000 - 1000 = 0$$

答：5000 公克等於 5 公斤

先拿走 1000 公克換成 1 公斤，剩下 4000 公克

再拿走 1000 公克換成 1 公斤，剩下 3000 公克

.....

最後發現 5000 公克可以換成 5 個 1 公斤，

所以 5000 公克等於 5 公斤

$$(2) 5000 \div 1000 = 5$$

答：5000 公克等於 5 公斤

學生可能有下面兩種說法

① 將 5000 公克除以 1000 公克，

得到 5000 公克中包含了 5 個 1000 公克，

1000 公克是 1 公斤，所以 5000 公克等於 5 公斤。

② 5000 個蘋果，1000 個裝 1 盒，

可以用除法  $5000 \div 1000 = 5$ ，算出可以裝 5 盒的答案，

同樣的 5000 公克中，每 1000 公克換成 1 公斤，

也可以用除法算出 5000 公克中有 5 個 1000 公克，

1000 公克是 1 公斤，所以 5000 公克等於 5 公斤。

## 2. 接著進行單名數公克聚為複名數公斤及公克的練習

教師布題：「一張桌子是 2450 公克，和幾公斤幾公克合起來一樣重？」

解題說明

(1) 減法方式

由上面的練習可以知道每 1000 公克可以換為 1 公斤

所以

$$2450 - 1000 = 1450$$

$$1450 - 1000 = 450$$

換了 2 次之後剩下 450 公克

剩下的部分不足 1000 公克無法再換

因此 2450 公克等於 2 公斤 450 公克

(2) 除法方式

$$2450 \div 1000 = 2 \cdots \cdots 450$$

所以 2450 公克就等於 2 公斤 450 公克

3. 教師多布一題供學生練習：

「小明家的狗重 12780 公克，是幾公斤幾公克？」

解題說明

利用除法

$$12780 \div 1000 = 12 \cdots \cdots 780$$

表示 12780 公克可以分成 12 個 1000 公克還剩下 780 公克

所以 12780 公克是 12 公斤 780 公克

4. 教師布題：

「一包糖果是 450 公克，五包糖果等於幾公斤幾公克？」

解題

$$450 \times 5 = 2250$$

$$2250\text{g} = 2000\text{g} + 250\text{g}$$

$$=2\text{kg}250\text{g}$$

答：2 公斤 250 公克

5. 教師可以多布幾個類似題讓學生練習。在學生自習練習時，可請學生在解題策略中選自己喜歡的策略進行解題。

### 指定作業：

#### 習題一(配合活動一)

- (1) 3 公斤=( )公克
- (2) 7 公斤 653 公克=( )公克
- (3) 6000 公克=( )公斤
- (4) 3867 公克=( )公斤( )公克

#### 習題二(配合活動二)

- (1) 大賣場賣的冷凍水餃每包都是 1200 公克，小香買了 8 包，共重幾公斤幾公克？
- (2) 在重量為 2800 公克的箱子裡放入 2600 公克的蘋果，共是幾公斤幾公克？
- (3) 3 公斤綠豆吃掉 1 公斤 380 公克，剩下幾公克的綠豆？

### 指定作業參考解答：

#### 習題一

- (1) (3000)公克

- (2) (7653)公克
- (3) (6)公斤
- (4) (3)公斤(867)公克

### 習題二

- (1) 9 公斤 600 公克
- (2) 5 公斤 400 公克
- (3) 1620 公克

### 教學注意事項：

1. 三年級引入重量單位「公斤」與「公克」，並進行實測、估測與不進退位的加減計算。本單元進行的是「公斤」與「公克」間單名數及複名數的化聚活動。
2. 進行單名數及複名數的化聚時，學生可能有不同的解題策略，教師應接受所有合理的策略，不應要求學生使用特定的策略解題。

### 教學參考資料：

國立教育研究院籌備處(發行)(2005)。國中小數學教師專業成長影集—長度篇。三峽：國立教育研究院籌備處。

## 主題 3-4-2：分、小數倍

撰寫者：魏慶雲

### 單名數及複名數化聚

～公斤、公克的分、小數倍單名數及複名數化聚

授課對象：國小五年級學生

#### 先備知識：

1. 已經知道 1 公斤等於 1000 公克。
2. 能熟練的進行公斤、公克的整數倍單名數及複名數化聚。
3. 會計算整數乘以小數、分數。
4. 知道「公噸」及「公斤」間的關係。

#### 教學目標：

1. 能做小數倍公斤及公克的單名數化聚。
2. 能做分數倍公斤及公克的單名數化聚
3. 能做小數倍公斤及公克的複名數化聚。
4. 能做分數倍公斤及公克的複名數化聚。

教學時間：80 分鐘(二節課)

#### 教學說明：

1. 學生已有整數倍公斤與公克單名數及複名數化聚活動的解題經驗，本單元的目標是分、小數倍公斤與公克單名數及複名數化聚。
2. 為了讓學生將大單位化為小單位，以及小單位聚成大單位，都

視為相同的解題活動，本單元透過單位量轉換的概念，幫助學生利用乘法解決化聚的問題。

$$(1) a \text{ kg} \Rightarrow a \text{ 個 } 1\text{kg} \Rightarrow a \text{ 個 } 1000\text{g} \\ \Rightarrow 1000\text{g 的 } a \text{ 倍} \Rightarrow 1000\text{g} \times a。$$

$$(2) a \text{ g} \Rightarrow a \text{ 個 } 1\text{g} \Rightarrow a \text{ 個 } 0.001\text{kg} \\ \Rightarrow 0.001\text{kg 的 } a \text{ 倍} \Rightarrow 0.001\text{kg} \times a。$$

3. 學生已有整倍數單名數及複名數化聚的解題經驗，只要再學會分、小數倍的單名數化聚之後，就能類比整數倍複名數化聚的解題方式，解決分、小數倍的複名數化聚問題。

### 活動一：小數倍及分數倍的公斤化為公克或複名數

**活動目標：**能進行小數倍及分數倍高階重量單位「公斤」化為低階重量單位「公克」。

#### 活動流程：

1. 教師先以提問方式複習學生的舊經驗，以確定學生知道：「 $5 \text{ kg} = 5000 \text{ g}$ 」。
2. 教師提問：「 $\frac{3}{10}$  公斤是幾公克？」

解題說明

$$\text{因為 } \frac{3}{10} \text{ 公斤} = 1000 \text{ 公克} \times \frac{3}{10}$$

學生可能會有以下三種解題方式：

(1) 類比分數做數問題的舊經驗，利用整數乘法來解題：

先想想：

1 盒蘋果有 1000 個， $\frac{3}{10}$  盒有多少個？

可以用算式  $1000 \div 10 \times 3 = 300$ ，算出  $\frac{3}{10}$  盒有 300 個蘋果。

再類比：

1 公斤是 1000 公克， $\frac{3}{10}$  公斤是多少公克？

也可以用算式  $1000 \div 10 \times 3 = 300$ ，算出  $\frac{3}{10}$  公斤是 300 公克。

(2) 類比整數乘法問題，利用整數乘以分數來解題

1 盒蘋果有 1000 個，5 盒蘋果有多少個？

可以用算式  $1000 \times 3 = 3000$ ，算出 5 盒有 3000 個蘋果。

1 公斤是 1000 公克， $\frac{3}{10}$  公斤是多少公克？

也可以用乘法算式  $1000 \times \frac{3}{10} = 300$ ，算出  $\frac{3}{10}$  公斤是 300

公克。

(3) 透過單位量轉換的概念，利用整數乘以分數來解題

$\frac{3}{10}$  公斤是  $\frac{3}{10}$  個 1 公斤，也就是  $\frac{3}{10}$  個 1000 公克

$\frac{3}{10}$  個 1000 公克，也就是 1000 公克的  $\frac{3}{10}$  倍

$1000 \times \frac{3}{10} = 300$ ，所以  $\frac{3}{10}$  公斤是 300 公克。

3. 教師提問：「 $\frac{8}{5}$  公斤是幾公克？」

4. 類似於前面真分數的計算方式，因此學生可能出現的解題方法也會有以下三種。

(1) 利用整數乘除法來解題：1000 公克 $\div$ 5 $\times$ 8 算出 1600 公克

(2) 利用整數乘以分數來解題：

$$1000 \times \frac{8}{5} = 1600, \text{ 算出 } \frac{8}{5} \text{ 公斤是 } 1600 \text{ 公克。}$$

(3) 透過單位量轉換的概念：

$\frac{8}{5}$  公斤是  $\frac{8}{5}$  個 1 公斤，也就是  $\frac{8}{5}$  個 1000 公克；

$\frac{8}{5}$  個 1000 公克，也就是 1000 公克的  $\frac{8}{5}$  倍；

$$1000 \times \frac{8}{5} = 1600, \text{ 所以 } \frac{8}{5} \text{ 公斤是 } 1600 \text{ 公克。}$$

5. 教師再將換單位的題型類比到純小數狀態，教師提問：

「一塊黏土是 0.3 公斤，相當於幾公克？」

解題說明

➤ 要進行單位的化聚，可以使用以下方法：

(1) 利用整數乘除法來解題：

因為 0.3 等於  $\frac{3}{10}$

所以 0.3 公斤等於 1000 公克乘以  $\frac{3}{10}$

於是以 1000 公克 $\div$ 10 $\times$ 3 的方式算出答案

(2) 利用整數乘以小數來解題：

因為 0.3 公斤是 3 個 0.1 公斤

而 0.1 公斤是 1000 公克乘以 0.1

所以 0.3 公斤等於  $1000 \text{ 公克} \times 0.3 = 300 \text{ 公克}$

(3) 透過單位量轉換的概念：

0.3 公斤是 0.3 個 1 公斤，也就是 0.3 個 1000 公克；

0.3 個 1000 公克，也就是 1000 公克的 0.3 倍；

$1000 \times 0.3 = 300$ ，所以 0.3 公斤是 300 公克。

6. 帶小數化為單名數的練習，教師布題：「3.9 公斤是多少公克？」

經過以上的教學，建議教師幫助學生以透過單位量轉換的方式進行解題。

解題說明：

3.9 公斤是 3.9 個 1 公斤，也就是 3.9 個 1000 公克

3.9 個 1000 公克，也就是 1000 公克的 3.9 倍

$1000 \times 3.9 = 3900$ ，所以 3.9 公斤是 3900 公克。

7. 帶小數化為複名數的練習

教師布題：「5.89 公斤相當於幾公斤幾公克？」

解題說明：

5.89 公斤是 5 公斤加上 0.89 公斤

而  $0.89 \text{ 公斤} = 1000 \text{ 公克} \times 0.89$

$= 890 \text{ 公克}$

所以 5.89 公斤等於 5 公斤 890 公克

8. 可再多布幾個類似題讓學生自行練習。
9. 分數倍公斤化為公克的練習

教師布題： $3\frac{75}{100}$  公斤是幾公克？是幾公斤幾公克？

解題說明：

因為  $3\frac{75}{100}$  公斤是 3 公斤加上  $\frac{75}{100}$  公斤

其中的 3 公斤等於 3000 公克是學生以前已經學會的概念

因此只需要處理  $\frac{75}{100}$  公斤的部分

而  $\frac{75}{100}$  公斤 = 1000 公克  $\times \frac{75}{100}$  = 750 公克

所以  $3\frac{75}{100}$  公斤 = 3750 公克

也可以說是 3 公斤 750 公克

10. 教師可多布類似題讓學生練習。

## 活動二：公克聚為小數倍或分數倍的公斤或複名數

**活動目標：**能進行低階重量單位「公克」聚為小數倍或分數倍高階重量單位「公斤」。

**活動流程：**

1. 公克聚為純小數倍公斤的練習

教師先布題：「8000 公克是幾公斤？」

以確定學生確實知道「是 8 公斤」

2. 教師再布題：「800 公克是幾公斤？」

3. 解題方法可能有以下二種：

(1) 類比整數除法問題，利用整數除以整數來解題

先想想：

1 盒蘋果有 1000 個，5000 個蘋果是多少盒？

可以用算式  $5000 \div 1000 = 5$ ，算出 5000 個蘋果是 5 盒。

再類比：

1 公斤是 1000 公克，800 公克是多少公斤？

也可以用除法算式  $800 \div 1000 = 0.8$ ，

算出 800 公克是 0.8 公斤。

(2) 透過單位量轉換的概念，利用小數乘以整數來解題

已知 1 公克 = 0.001 公斤

800 公克是 800 個 1 公克，也就是 800 個 0.001 公斤

800 個 0.001 公斤，也就是 0.001 公斤的 800 倍

$0.001 \times 800 = 0.8$ ，所以 800 公克是 0.8 公斤。

\* 如果學生無法掌握 1 公克 = 0.001 公斤

教師可以透過下列方式幫助學生

1 公斤=1000 公克

把 1 公斤平分成 1000 份，

其中的 1 份是  $1/1000$  公斤，

也就是 0.001 公斤

把 1000 公克平分成 1000 份，

其中的 1 份是 1 公克。

所以 1 公克=0.001 公斤。

4. 教師布題：「35 公克是幾公斤？」

解題方式可以有以下二種。

(1) 利用整數除以整數來解題： $35 \div 1000 = 0.035$ (公斤)

(2) 透過單位量轉換的概念：

已知 1 公克=0.001 公斤

35 公克是 35 個 1 公克，也就是 35 個 0.001 公斤

35 個 0.001 公斤，也就是 0.001 公斤的 35 倍

$0.001 \times 35 = 0.035$ ，所以 35 公克是 0.035 公斤。

5. 單名數轉變為帶小數倍的公斤之題型：

教師布題：「6890 公克是幾公斤？」

單位量轉換的方式之解題說明：

6890 公克是 6890 個 0.001 公斤

$0.001 \times 6890 = 6.890$

所以 6890 公克是 6.890 公斤

6. 教師接著再布一個由複名數轉變為小數倍的公斤之題型：

「一袋水果重 3 公斤 700 公克，是幾公斤？」

單位量轉換的方式之解題說明

先將 3 公斤分離出來，僅僅處理 700 公克的部分。

而由前面的經驗，已經可以得知：

$$0.001 \times 700 = 0.7$$

也就是說 700 公克是 0.7 公斤

所以 3 公斤 700 公克就是 3.7 公斤。

7. 接著進行分數倍題型的練習

8. 教師布題：「4603 公克是幾分之幾公斤？」

解題說明時依然使用換單位方法，也就是說：

因為 4603 公克是 4603 個 1 公克

也就是 4603 個  $\frac{1}{1000}$  公斤

$$4603 \times \frac{1}{1000} = \frac{4603}{1000}$$

所以 4603 公克是  $\frac{4603}{1000}$  公斤

9. 再布一個複名數的例子：「6 公斤 350 公克是幾分之幾公斤？」

解題說明：

可先說明 6 公斤的部分，可以直接轉為分數表示法的整數部

分，無須再做轉換。

需要處理的僅是 350 公克的部分。

而此一部分就如前面所學之單位量轉換，可得：

$$350 \times \frac{1}{1000} = \frac{350}{1000}$$

$$\text{也就是 } 350 \text{ 公克} = \frac{350}{1000} \text{ 公斤}$$

因此 6 公斤 350 公克是  $6 \frac{350}{1000}$  公斤。

10. 教師布題：「10 公斤 75 公克等於幾公斤(答案以分數呈現)？」

解題說明：

(1) 因為 75 公克等於  $\frac{75}{1000}$  公斤

(2) 所以 10 公斤 75 公克就是  $10 \frac{75}{1000}$  公斤

11. 教師布題：「5 公噸 605 公斤等於幾公噸？」

12. 因公噸與公斤的化聚和公斤、公克間的化聚相類似，因此教師

可讓學生直接類化前面的學習經驗，而得到以下結果：

$$605 \text{ 公斤} = 605 \times 0.001 \text{ 公噸} = 0.605 \text{ 公噸}$$

所以 5 公噸 605 公斤等於 5.605 公噸

**指定作業：**

習題

(1) 大賣場賣的米一包重 3.6 公斤，是幾公斤幾公克？

(2) 在重量為 2.823 公斤的箱子裡放入 2.6 公斤的蘋果，共是幾公斤幾公克？

- (3)  $\frac{7}{5}$  公斤的綠豆吃掉  $\frac{3}{10}$  公斤，剩下幾公斤幾公克的綠豆？
- (4) 爸爸買了二顆西瓜，其中一顆重 2 公斤 452 公克，另一顆重 5 公斤 60 公克，二顆西瓜共重多少公斤？

### 指定作業參考解答：

#### 習題

- (1) 3 公斤 600 公克
- (2) 5 公斤 423 公克
- (3) 1 公斤 100 公克
- (4) 7.512 公斤

### 教學注意事項：

- 本單元的教學設計均聚焦在幫助學童透過單位量轉換的概念  
 $(1\text{kg}=1000\text{g}, 1\text{g}=\frac{1}{1000}\text{kg})$ ，利用乘法解決化聚的問題。  
 例如將 3.8 個 1 公斤(3.8 公斤)視為 3.8 個 1000 公克，利用乘法  $1000 \times 3.8$  算出 3.8 公斤 = 3800 公克；將 20 個 1 公克(20 公克)視為 20 個 0.001 公斤，利用乘法  $0.001 \times 20$  算出 20 公克 = 0.02 公斤。
- 學童在解單位化聚的問題時，經常混淆該用乘法或除法來解題  
 (例如：3.8 公斤 = ( ) 公克或英磅；7.2 英磅或公克 = ( ) 公

斤)，單位量轉換的想法可以幫助學生將化與聚的問題視為相同的解題類型。

3. 有許多教材中，會利用換算表教導學生進行複名數與單名數間的轉換。但是在「量與實測」裡，不同單位間轉換的進位方式不同，如：

長度中的厘米與毫米是十進位，厘米與米是百進位；

面積中的平方公尺與平方公分是萬進位，公畝與公頃是百進位；重量中的公斤與公克是千進位……等。

若學生在每一種換算中都依賴換算表進行，需要記憶的各種換算表會異常複雜，容易造成混淆。因此教師教學，仍應關注在個別單位換算的基礎上，以免學生在各種不同種類換算的時候產生錯誤。

4. 關於利用試算表進行換算，可能帶來記憶上的負擔試舉幾例如下表：

量	換算的單位	換算方式	換算表可能方式								
長度	厘米與毫米	$1\text{cm}=10\text{mm}$ (十進位)	<table border="1"> <tr> <td>cm</td> <td>mm</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> </tr> </table>	cm	mm						
	cm	mm									
米與厘米	$1\text{m}=100\text{cm}$ (百進位)	<table border="1"> <tr> <td>m</td> <td></td> <td>cm</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </table>	m		cm	1	0	0			
m		cm									
1	0	0									
公里與米	$1\text{km}=1000\text{m}$ (千進位)	<table border="1"> <tr> <td>km</td> <td></td> <td></td> <td>m</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </table>	km			m	1	0	0	0	
km			m								
1	0	0	0								
重量	公斤與公克	$1\text{kg}=1000\text{g}$ (千進位)	<table border="1"> <tr> <td>kg</td> <td></td> <td></td> <td>g</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </table>	kg			g	1	0	0	0
	kg			g							
1	0	0	0								
公斤與磅	$1\text{kg}=2.204622621\text{b}$ $1\text{b}=0.45359237\text{kg}$	無法以換算表換算									
面積	平方公尺 與 平方公分	$1\text{m}^2=10000\text{cm}^2$ (萬進制)	<table border="1"> <tr> <td><math>\text{m}^2</math></td> <td></td> <td><math>\text{cm}^2</math></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> </table>	$\text{m}^2$		$\text{cm}^2$	1	0	0		
	$\text{m}^2$		$\text{cm}^2$								
	1	0	0								
公畝 與 平方公尺	$1\text{a}=100\text{m}^2$ (百進位)	<table border="1"> <tr> <td>a</td> <td><math>\text{m}^2</math></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table>	a	$\text{m}^2$	1	0					
a	$\text{m}^2$										
1	0										
公畝與坪	$1\text{a}=30.25$ 坪	無法以換算表換算									

由以上列舉的幾個例子，可以看出在不同單位間的換算，有各式各樣的換算表，甚至出現無法以換算表換算的狀況。因此利用換算表進行換算的教學，在單一的單元中也許看起來有效且迅速，但以數學學習的整體性來看，卻未必是最有利的教學。

5. 本單元的計算，會使用整數乘以小數的過程，因此建議放在五年級下學期再進行教學。

### 教學參考資料：

國立教育研究院籌備處(發行)(2005)。國中小數學教師專業成長影集—小數篇。國立教育研究院籌備處。

## 第四章：角度

撰寫者：謝堅

## 主題 4-1：角與角度

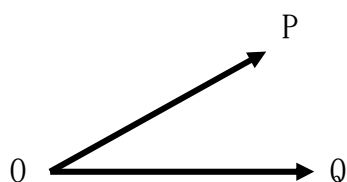
## 4-1-1：圖形角與張開角

## 認知及數學結構：

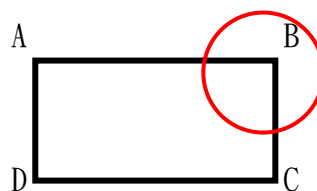
角和角度是兩種不同的概念，角討論的重點是已存在的角形，包含頂點、邊等構成要素，屬於幾何圖形的教材，而角度討論的是如何將角形張開或旋轉的程度數量化，屬於量與實測的教材，本文討論的重點是角度。

## (一)圖形角

數學上討論的角是由圖形中抽離並抽象化後的角，角是共端點兩條射線的聯集，如圖一中的角是由共端點的射線 OP 和 OQ 所組成，OP 和 OQ 這兩條射線可以無限的延長。國小階段所討論的角不是抽象化後的角，只討論隱藏在幾何圖形中的角，並稱之為圖形角，圖形角是幾何圖形的一部份，如圖二中的圖形角隱藏於長方形中，圖形角由長方形的一個頂點 B 和相鄰的兩邊所構成，P 稱為角的頂點，國小教材並不討論角的兩邊有多長。



(圖一)

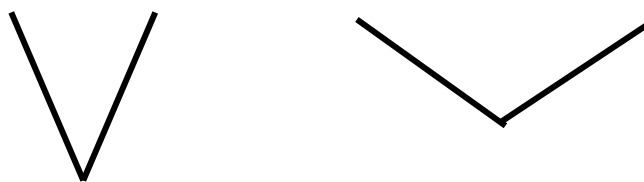


(圖二)

## (二)張開角

張開角指的是共端點兩重合線段張開的結果，共同的端點稱為頂點，張開後的兩線段稱為邊，因為張開後的形狀像一個圖形角，故稱之為張開角。張開角的角度指的是張開的程度，選定單位量後，可以把角張開的程度數量化，國小階段討論張開角的角度不宜超過 180 度。

張開角和圖形角的形狀相同，都稱之為角，但是必須透過張開程度有多少的想法，這個角才有測量張開程度，也就是測量角度的需求。透過共端點兩根竹籤的開與合，再加上張開程度結果的記錄，比較容易引入張開角的概念，以圖三為例，左圖中角張開的程度比右圖中角張開的程度小，所以左圖張開角的角度比右圖張開角的角度小。



(圖三)

## 4-1-2：角度的直接及間接比較

### 認知及數學結構：

#### (一)角度的直接比較

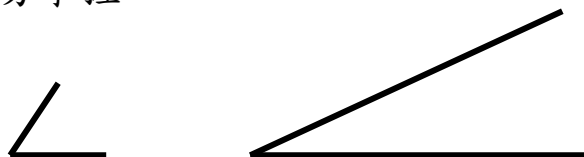
圖形角是幾何的教材，可以透過「先疊合頂點及一邊，再將另一邊放在疊合邊的同側」的方式，判斷這兩個圖形角是否全等，如果另一邊也能疊合，這兩個圖形角全等，若另一邊不能疊合，這兩個圖形角不全等。

也可以延伸上面的想法，透過「哪一個角包含在另一個角內部」的方式，比較兩個圖形角的大小，但是，當圖形角依附在幾何圖形上時，並沒有可以比較大小的量，因此當學生尚未掌握張開程度或旋轉程度的意義之前，不宜進行兩個圖形角大小的比較活動。

部份教師喜歡透過扇子的開與合與學生溝通張開角張開程度的意義，認為這種教法很有效率，因為教完之後，學生很快就能解決張開角角度大小的比較問題。以比較張開角度比較大的甲扇，以及張開角度比較小乙扇為例，如果學生說甲扇的角比乙扇的角大，一定是指甲扇張開的程度比乙扇大嗎？

如果學生能掌握面積大小的意義，或掌握弧線長短的意義，就能透過甲扇的面積比乙扇大，或甲扇弧的長度比乙扇長的現象，陰錯陽差的解決張開角角度大小的比較問題。

再以比較下圖中兩個角角度的大小為例，相當高比例的學生誤認為右邊那個角的角度比較大，理由可能是右邊那個圖形所夾的面積比較大，或右邊那個圖形的邊比較長，或右邊那個圖形所圍成的弧比較長，因為面積大小、邊及弧長的長短，都比角張開的程度容易掌握。



為什麼學生常透過邊的長短、扇形面積的大小、弧的長短等特徵，來比較兩個角張開程度的大小，主要的理由是學生只看到張開角張開後的結果，並沒有看到張開的過程，無法理解張開程度的意義，建議教師透過實作，讓學生經驗張開角張開程度的意義。下面提出一種能幫助學生掌握張開程度意義的教學策略。

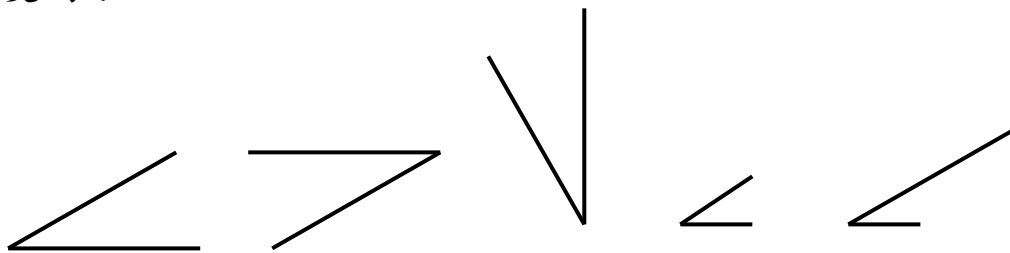
先拿出兩把扇子，其中一把扇子的邊比較長，另一把扇子的邊比較短，先張開邊長較長的那把扇子，問學生扇子張開了多大，學生可能描述扇子的面積、弧長等與張開程度無關的答案；此時可將邊長較短的那把扇子張開到和前一把扇子一樣大，再問學生這兩把扇子張開的程度是否一樣，此時兩把扇子的面積、邊長及弧長都不相同，只有張開的程度相同，強迫學生排除邊的長短、扇形面積的大小、弧的長短等因素，將注意力放在張開程度上。接下來，再將邊長較短的扇子張開一些，問哪一把扇子張開的程

度比較大，此時邊長較長扇子的邊長、弧長都比邊長較短的扇子長，邊長較長扇子的面積也比邊長較短的扇子大，只有張開的程度比較小，可以檢查學生是否掌握張開程度的意義。

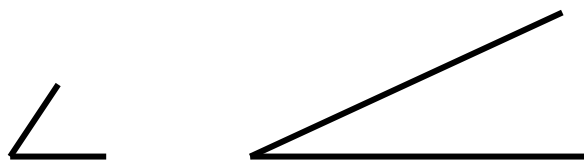
## (二)比較與描述

在進行直接比較或間接比較時，教師應掌握所進形的是比較活動或描述的活動，比較與描述的意義不同。

當教師要求學生記錄張開的結果時，教學重點是如何描述張開的結果，例如教師可以詢問，下面這些圖形都能夠溝通角張開的程度嗎？



當教師要求學生比較兩個角誰張開的程度比較大時，教學重點是比較兩個角角度的大小，例如教師可以詢問，下面這兩個角，哪一個角比較大或哪一個角張開的程度比較大？

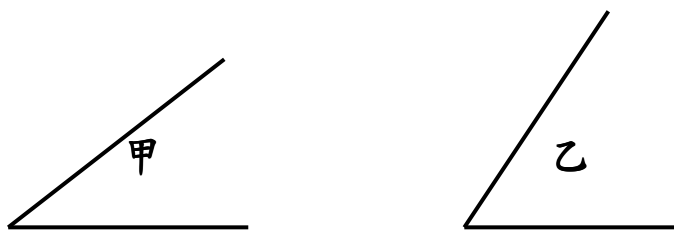


## (三)角度的間接比較

當學生掌握張開角的意義，以及形成角度的保留概念之後，

就能透過先複製再直接比較，以及利用第三個角或遞移性，解決角度間接比較的問題。

以下圖為例，學生可以在透明紙上複製甲角，再和乙角進行直接比較，就能得到乙角比甲角大的結果；如果學生能找到丙角，讓丙角比甲角大，且丙角比乙角小，就能透過遞移性，得到乙角比甲角大的結果。



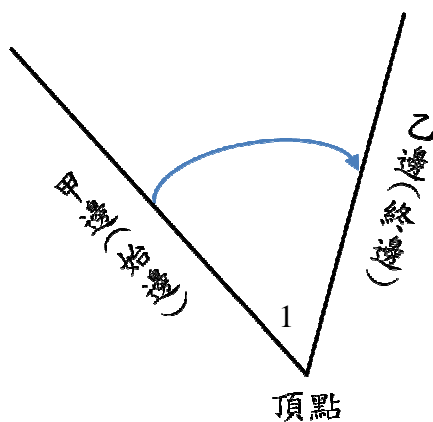
## 主題 4-2：角度的合成與分解

### 4-2-1：旋轉角

#### 認知及數學結構：

數學上討論的旋轉角是一條射線繞著端點旋轉的結果，它可以順時針或逆時針方向旋轉很多圈，高中三角函數引入的角就是旋轉角概念，旋轉的角度可以是任意的正數或負數。國小階段沒有引入射線的概念，故將旋轉角視為一條線段繞一個端點旋轉的結果，國小階段也沒有引入負數，因此不討論旋轉角度的正與負，並限制旋轉角度介於 0 度和 360 度之間。

如果將旋轉前、後的線段及端點記錄下來，它的形狀也是圖形角，故稱之為旋轉角。下圖是一個旋轉角，旋轉前的甲邊為始邊，旋轉後的乙邊為終邊，旋轉的支點為頂點，旋轉的方向是逆時針方向。為了讓學生瞭解旋轉活動，畫旋轉角時應該包含始邊、終邊、頂點以及旋轉的方向。



旋轉角是一個向量，包含了旋轉的程度和旋轉的方向，選定單位量以及旋轉方向後，數學上利用整數把旋轉角旋轉的程度及方向數量化。例如約定逆時針方向為正向，則順時針方向為負向，逆時針旋轉 30 度可以記成 +30 度，順時針旋轉 30 度可以記成 -30 度。

透過時鐘上指針的轉動，再加上旋轉活動的記錄，比較容易引入旋轉角的概念。旋轉角的角度是一個向量，在國小階段可以討論順時針及逆時針兩種旋轉現象，但是不涉及正、負角度的概念，例如稱逆時針旋轉 30 度，但是不引入 +30 度的記法。在國小階段，旋轉角的角度可以超過 180 度，但以不超過 360 度為限。

## 4-2-2：角度的合成與分解

### 認知及數學結構：

學生能用加法「 $5+3=8$ 」算出「甲有 5 個蘋果，乙有 3 個蘋果，兩個人合起來共有 8 個蘋果」，並掌握解題活動的意義後；當他再用加法「 $5+3=8$ 」算出「甲繩長 5 公分，乙繩長 3 公分，兩條繩子接起來長 8 公分」時，可能只是透過類比題目語意的方式解決問題，並不表示他能掌握解題活動的意義。

前面的問題可以透過畫出 5 個蘋果和 3 個蘋果，再利用點數得到 8 個蘋果的答案，但是後面的問題只能畫出兩條繩子，兩條繩子接起來變成一條繩子。學童必須掌握 5 公分就是 5 個 1 公分，3 公分就是 3 個 1 公分，才能利用點數蘋果的舊經驗，透過點數幾個 1 公分解決問題。

相同的理由，學生能用加法「 $50+30=80$ 」記錄「甲有 50 個蘋果，乙有 30 個蘋果，兩個人合起來的蘋果和 80 個一樣多」，當他再用加法「 $50+30=80$ 」記錄「甲角的角度是 50 度，乙角的角度是 30 度，兩個角合以來的角度和 80 度一樣大」時，可能只是透過類比題目語意的方式解決問題，並不表示他能掌握角度合成活動的意義。教師應先幫助學童理解角度的單位「1 度」的意義，再透過旋轉角的合成與分解，幫助學童理解角度相加或相減的意義。

## (一)角度的合成

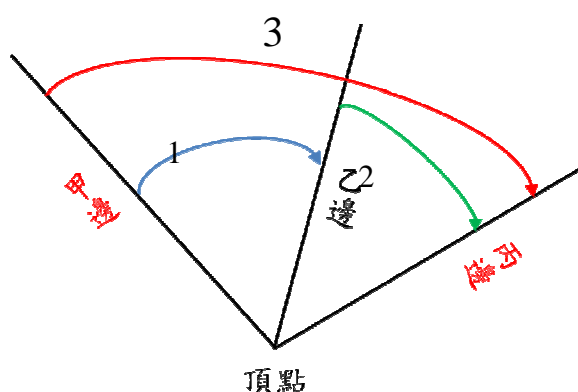
建議教師利用合成兩次旋轉及一次旋轉的比較活動，透過下列步驟，幫助學生理解可以用加法算式記錄角度合成結果的意義。

步驟1：先進行兩次旋轉的活動，第一次由甲邊順時針方向旋轉至乙邊，用 $\angle 1$ 記錄旋轉的結果；第二次由乙邊順時針方向旋轉至丙邊，用 $\angle 2$ 記錄旋轉的結果。

步驟2：用 $\angle 1 + \angle 2$ 記錄這兩次旋轉活動合成的結果。

步驟3：再進行一次旋轉的活動，由甲邊直接順時針旋轉至乙邊，用 $\angle 3$ 記錄旋轉的結果。

步驟4：透過比較「 $\angle 1 + \angle 2$ 」和「 $\angle 3$ 」，幫助學生發現，它們的始邊、終邊、旋轉方向和旋轉大小都相同，是相等的旋轉角，可以記成 $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3$ 。



## (二)角度的分解

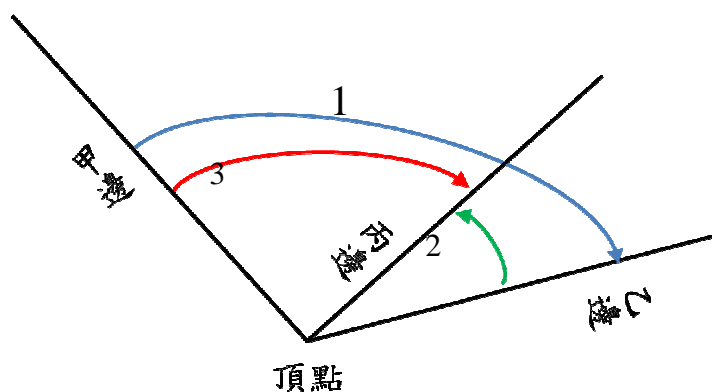
建議教師利用分解兩次旋轉及一次旋轉的比較活動，透過下列步驟，幫助學生理解可以用減法算式記錄角度分解結果的意義。

步驟 1：先進行兩次旋轉的活動，第一次由甲邊順時針方向旋轉至乙邊，用  $\angle 1$  記錄旋轉的結果；第二次由乙邊逆時針方向旋轉至丙邊，用  $\angle 2$  記錄旋轉的結果。

步驟 2：用  $\angle 1 - \angle 2$  記錄這兩次旋轉活動分解的結果。

步驟 3：再進行一次旋轉的活動，由甲邊直接順時針旋轉至丙邊，用  $\angle 3$  記錄旋轉的結果。

步驟 4：透過比較「 $\angle 1 - \angle 2$ 」和「 $\angle 3$ 」，幫助學生發現，它們的始邊、終邊、旋轉方向和旋轉大小都相同，是相等的旋轉角，可以記成  $\angle 1 - \angle 2 = \angle 3$ 。



## 主題 4-3：角度單位及量角器

### 4-3-1：角度單位

#### 認知及數學結構：

數學上有兩種描述平面角角度的單位，一種以「度」為單位，是國中、小階段經常使用的單位；另一種以「徑」為單位，是高中及較高深數學經常使用的單位，分別說明如下。

#### (一)以「度」為單位的角度

先畫出一個圓，將圓周等分成 360 份，稱旋轉 1 份弧長的角度為 1 度，旋轉四分之一圈的角度為 90 度，旋轉半圈的角度為 180 度，旋轉一圈的角度為 360 度，所以直角的角度是 90 度、平角的角度是 180 度，圓周角的角度是 360 度。

為什麼要將圓周等分成 360 份，為什麼不等分成 100 份，這是很多教師提出的問題，可能的理由是 360 的因數個數最多，比較容易切割圓心角。

國小階段角度的教材只引入「度」這一種單位，因此沒有單位化聚的問題，日常生活中常用的角度單位還有「分」及「秒」，

其中  $1 \text{ 分} = \frac{1}{60} \text{ 度}$ ， $1 \text{ 秒} = \frac{1}{60} \text{ 分} = \frac{1}{3600} \text{ 度}$ 。

## (二)以「徑」度為單位的角度

先畫出一個圓，在圓上選1份和半徑一樣長的弧，該弧所對應的圓心角就是1徑。因為圓周長是半徑的 $2\pi$ 倍，所以圓周角是 $2\pi$ 徑，平角是 $\pi$ 徑，為了記憶兩種角度單位間的互換關係，多數人熟記 $\pi$ 徑=180度。

很多高中學生認為 $\pi r^2$ 的 $\pi$ 是圓周率，而 $\sin\frac{\pi}{6}$ 中的 $\pi$ 是180度，這兩個 $\pi$ 是兩種不同的概念，這是不正確的想法，這兩種記法中的 $\pi$ 都是圓周率。

有兩種解讀 $\frac{\pi}{6}$ 徑角度的方法，第一種是回到「度」的舊經驗，利用 $\pi$ 徑=180度，得到 $\frac{\pi}{6}$ 徑=180度 $\div$ 6=30度；第二種是利用弧長對應圓心角的想法，圓周長 $2\pi$ 是弧長 $\frac{\pi}{6}$ 的12倍，所以 $\frac{\pi}{6}$ 徑就是 $\frac{1}{12}$ 圓周長所對應圓心角的角度。

## 4-3-2：量角器

### 認知及數學結構：

#### (一)量角器的刻度結構

先畫出一個圓，將圓周等分成 360 份，每 1 份弧所對應的圓心角就是 1 度，半圓所對的圓心角是平角，平角的角度是 180 度，圓所對的圓心角是圓周角，圓周角的角度是 360 度，日常生活中依附在圖形中的角都小於 180 度，因此量角器呈現半圓形，能測量的角度介於 0 度和 180 度之間。

量角器是一個半圓形，半圓外弧上有 1 度的小刻度，5 度的中刻度和 10 度的大刻度，通常只有 0 度、45 度、90 度、135 度及 180 度的刻度會連接到圓心，因此學生測量角度時都會有一些誤差，只要誤差不超過 2 度，都是可以接受的範圍。

#### (二)如何利用量角器測量角度

建議教師利用旋轉角的概念，透過下面的步驟，幫助學生利用量角器來測量角度。

步驟 1：量角器的中心點和待測量角的頂點重合

步驟 2：任選一邊為角的始邊，將角的始邊對期量角器的一邊，並在兩組刻度中找出 0 度和始邊重合的那組刻度。

步驟 3：始邊由 0 度開始旋轉，旋轉到終邊，終邊所對應的刻度是  $a$  度，這個角的角度是  $a$  度。

## (二)使用量角器的迷失概念

為了方便量角度，量角器都有兩組刻度，其中一組是順時針方向，另一組是逆時針方向，因此，部份學童使用量角器測量角度時，常將 70 度報讀為 110 度，80 度報讀為 100 度，下面簡單說明如何幫助學童正確的報讀角度。

當學童尚未掌握直角、銳角及鈍角的意義前，報讀角度時，應要求同時報讀兩個刻度，養成先將始邊對齊刻度 0(先找 0 度)，再看終邊刻度的習慣，並將刻度 0 到刻度 70 間的角度簡稱為 70 度。

當學童掌握鈍角及銳角的意義，知道被測量角度和直角 90 度大小關係後，面對銳角 70 度時，不會將它報讀為 110 度。



## 主題 4-1-2：角度的直接與間接比較

撰寫者：詹婉華

### ～角的直接與間接比較

授課對象：國小三年級學生

先備知識：

認識圖形角。

教學目標：

1. 能直接比較張開角的大小。
2. 能間接比較張開角的大小。

教學時間：80 分鐘（二節課）

教學說明：

1. 生活中所說的角，如牆「角」、「角」落、牛「角」，和學童數學學習上的「角」有所不同，學童會因生活中的角，對「角」的概念產生混淆。
2. 在國小階段關於角的教學，二年級時，讓學童認識封閉圖形裡的角，例如：教師會問學童，長方形的哪兒有角？讓學童指出或描繪出長方形的角，再認識其它圖形的角。然而，學童可能會誤以為角的大小和圖形的面積或邊長有關。



角度指的是角張開或旋轉的程度，所以，宜先由張開角進行角

的教學，排除圖形面積的干擾，並讓學童了解角的大小和邊長無關。

3. 幾何扣條是國小數學教學常用的教具及學具，有 6 種尺寸，最長的是紅色幾何扣條，最短的是橘色，可以拼出許多不同的幾何圖形。教師可運用幾何扣條進行張開角的操作及描繪活動，讓學童了解角的大小不受邊長的長短所影響。



- (1) 教師可讓學童觀察，幾何扣條張開的程度改變，角的大小也跟著改變。
  - (2) 教師運用不同幾何扣條改變某個角的邊長，讓學童發現，邊長改變角的大小不變。
4. 當學童了解張開角的意義後，才能進行角的直接比較。關於角的直接比較，可以讓學童運用不同長度的幾何扣條，進行不同的張開程度的比較活動。
  5. 本教學重點：(1) 由疊合幾何扣條的活動，進行角的直接比較。

(2) 透過複製角的活動，進行角的間接比較。

### 教具準備：

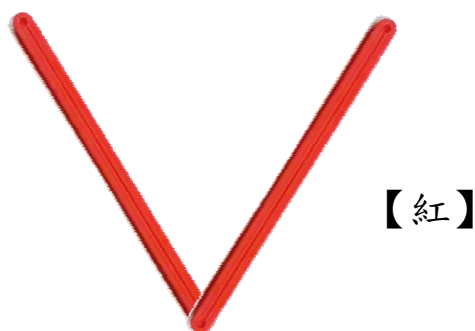
不同長短的幾何扣條，每個學童最少 2 條幾何扣條。

### 活動一：認識張開角

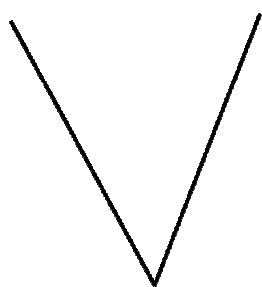
**活動目標：** 透過幾何扣條的張開程度，認識張開角。

### 活動流程：

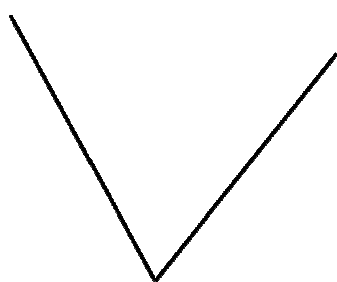
1. 教師用紅色幾何扣條組合成一個角，並改變其中一邊張開的程度，問學童：「什麼在改變？」，引導學童觀察幾何扣條張開的程度在改變，進而回答：「角張開的大小改變了」。



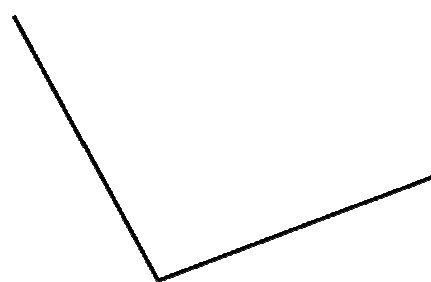
2. 操作紅色幾何扣條，讓學童看到並說出幾何扣條張開得越來越大。
3. 再次張開紅色幾何扣條，沿著幾何扣條的內側在黑板上畫下第 1 個角，接著將其中一邊張開得更大後，讓學童確認張開的程度變大後，畫下第 2 個角，再張開得更大，在學童確認張開的程度更大後，畫下第 3 個角。



【角 1】

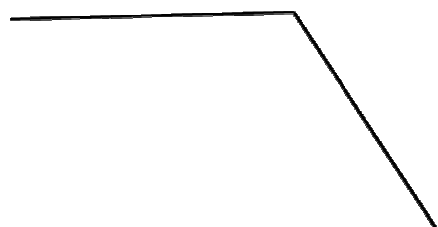


【角 2】

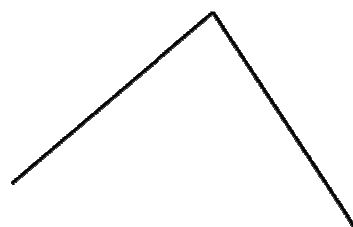


【角 3】

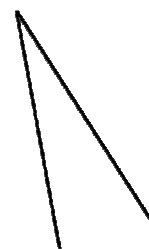
4. 引導學童說出畫下的 3 個圖形稱為「角」，操作幾何扣條讓學童觀察這 3 個角的變化，他們會發現當紅色幾何扣條張開的程度越大，畫下的角度也越大。
5. 操作幾何扣條，讓學童看到並說出幾何扣條張開得越來越小。
6. 操作紅色幾何扣條，以不同的方向在黑板上另外畫下第 4 個角，接著將幾何扣條其中一邊張開的程度變小，在學童確認張開的程度變小後畫下第 5 個角，再讓幾何扣條張開的程度變小，在學童確認張開的程度變小後，畫下第 6 個角。同樣的，讓學童觀察 4、5、6 這三個角的變化，學童會發現，當幾何扣條張開的程度越小，畫下的角度也越小。



【角 4】



【角 5】



【角 6】

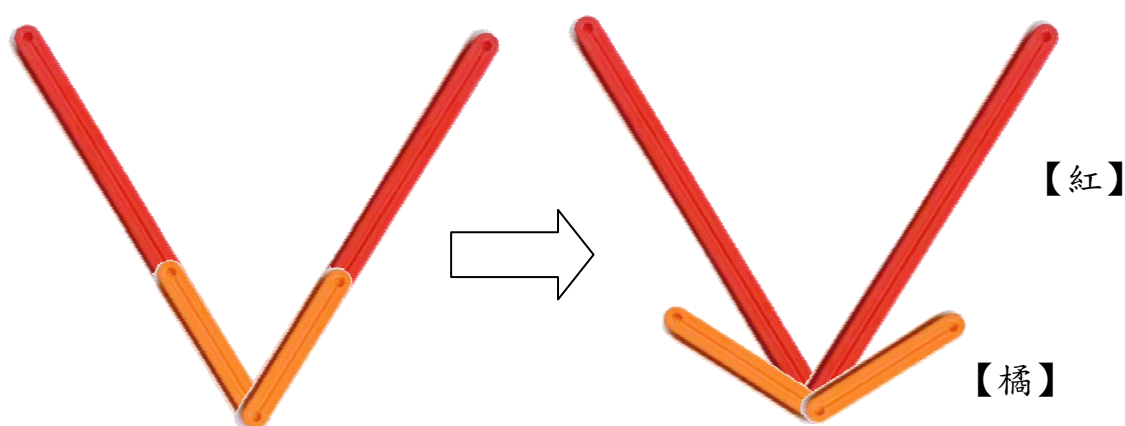
7. 發下幾何扣條，讓學童自己改變幾何扣條張開的程度，並在白紙上描繪 3 個不同的角。讓學童由描繪中察覺幾何扣條張開的

程度越大，描繪出來的角越大；幾何扣條張開的程度越小，描繪出來的角越小。

8. 拿出橘色幾何扣條，問學童：「紅色幾何扣條和橘色幾何扣條，哪一組幾何扣條張開的程度會最大？」，學童可能受到扣條長短的影響，而有「紅色幾何扣條的角  $>$  橘色幾何扣條的角」的想法。



9. 教師先將紅色和橘色兩組扣條一起張開至一樣的大小，再操作讓學童發現橘色幾何扣條可以張開成比紅色幾何扣條還要大的角，也就是「橘色幾何扣條的角  $>$  紅色幾何扣條的角」，所以邊長的長短和角的大小無關。



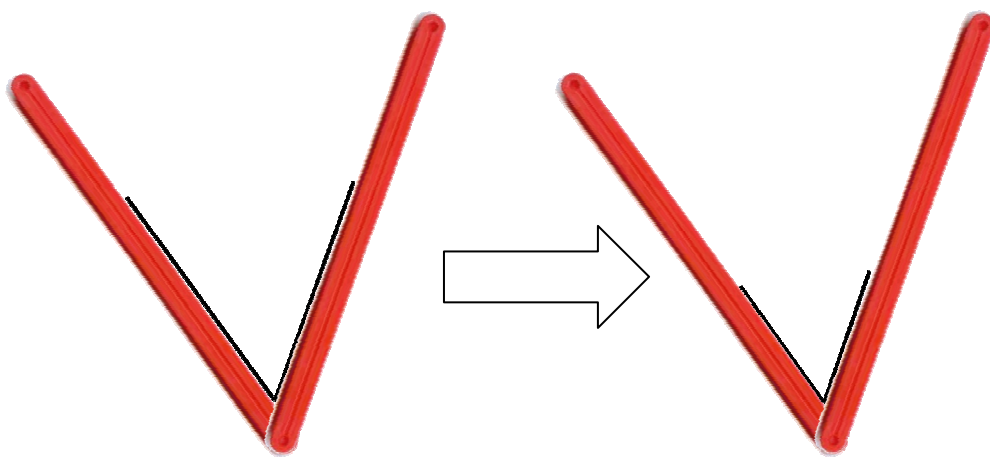
10. 教師運用幾何扣條畫下大小相同但邊長不同的角，再用幾何扣條讓學童看到這些邊長不同的角，角的大小一樣，作法如下：
- (1) 張開幾何扣條，在黑板上畫下 1 個角。



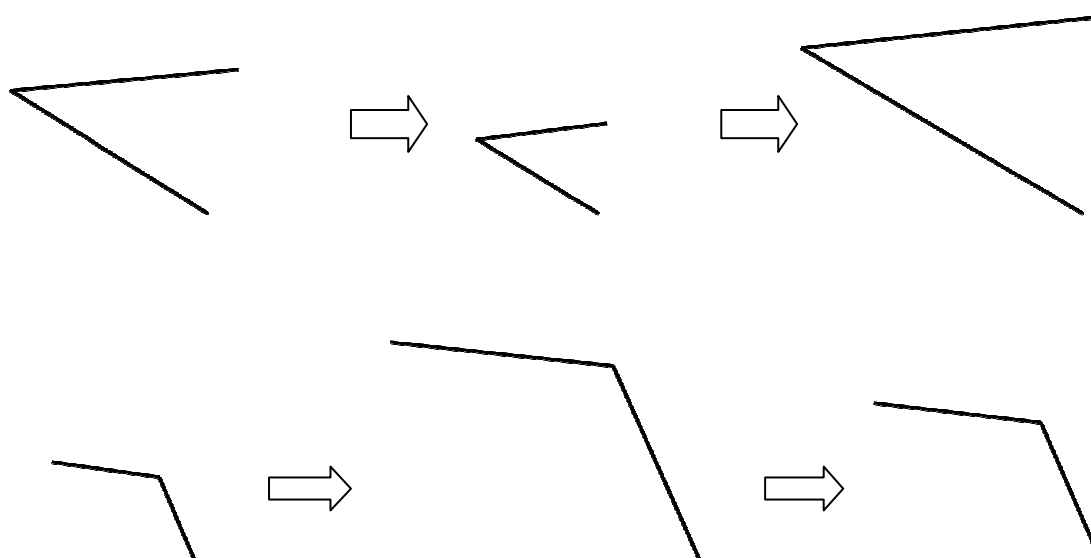
(2)運用同樣的幾何扣條畫下邊長較短但大小相同的角，問學童：這個角的大小改變了嗎？



(3)透過操作幾何扣條，讓學童確認，雖然邊長改變，但張開的程度不變，所以角的大小不變。



(4)再畫不同方向的角，並畫下邊長不同但大小相同的角，並透過操作幾何扣條，讓學童觀察，邊長改變但張開的程度不變，以便確認角的邊長長度和角的大小無關。



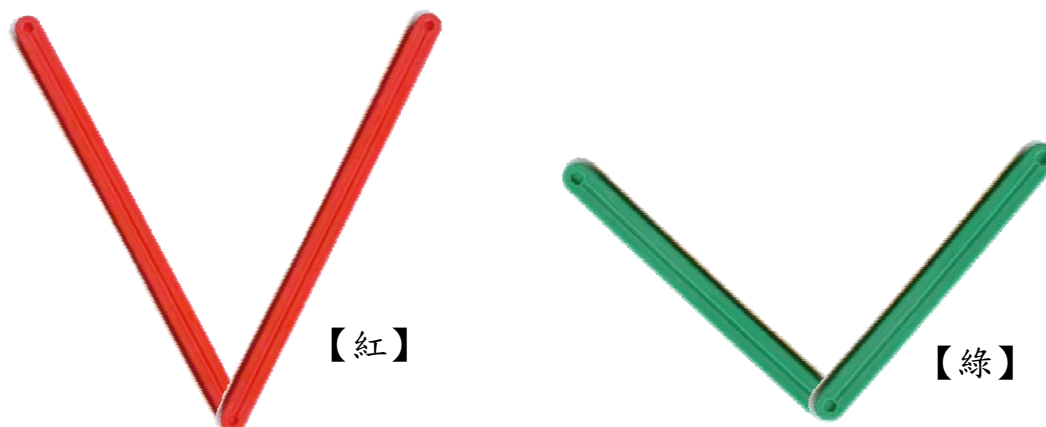
11. 學童兩人一組進行操作及觀察，讓學童了解角度大小和邊的長短無關。

## 活動二：角的直接比較

活動目標：能透過操作幾何扣條，直接比較張開角的大小。

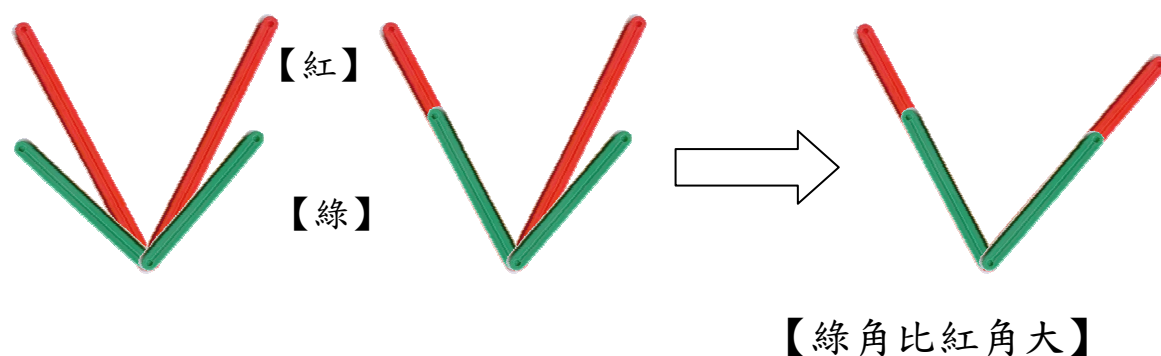
活動流程：

1. 教師用紅色幾何扣條組合一個 45 度的角，並將此角稱為「紅角」；用綠色幾何扣條組合成一個 90 度的角，並將此角稱為「綠角」，問學童：「哪一個角比較大？」，讓學童自由發表。



2. 問學童：「如何確認綠角比紅角大？」，讓學童上台嘗試比較。

教師可引導學童確認綠角比紅角大：將紅角繼續張開到和綠角一樣大。讓學童知道，紅角必須繼續張開，才能變得和綠角一樣大，所以原來的紅角比綠角小。



3. 教師拿起紅角，要學童運用手上的扣條做一個比紅角大的角，讓學童上台進行比較，並說明比較兩個角的大小的方法。教師再拿起綠角，要學童運用手上的扣條做一個比綠角小的角，讓學童上台進行比較，並說明比較兩個角的大小的方法。

4. 讓學童分組用不同顏色的幾何扣條，進行不同張開角的大小比較活動。舉例來說，活動過程可如下：

(1)用扣條先做出一個角，再用另一組扣條做出和它一樣大的角。

(2)用扣條先做出一個角，再用另一組扣條做出比它大的角。

(3)用扣條先做出一個角，再用另一組扣條做出比它小的角。

(4)由扣條張開的程度比較兩個角的大小。

5. 發給每個學童 2 條幾何扣條，兩人一組，玩比角的大小遊戲，

步驟如下：

- (1)教師發給每一組寫著「大」、「小」的紙卡各1張。
- (2)學童先決定自己幾何扣條張開的大小。
- (3)紙卡寫字的面朝下，抽取1張紙卡並翻開紙卡，若紙卡寫「大」則較大的角獲勝，若紙卡寫「小」則較小的角獲勝。
- (4)重複前述(1)～(3)的步驟5次後，獲勝次數較多者勝利。

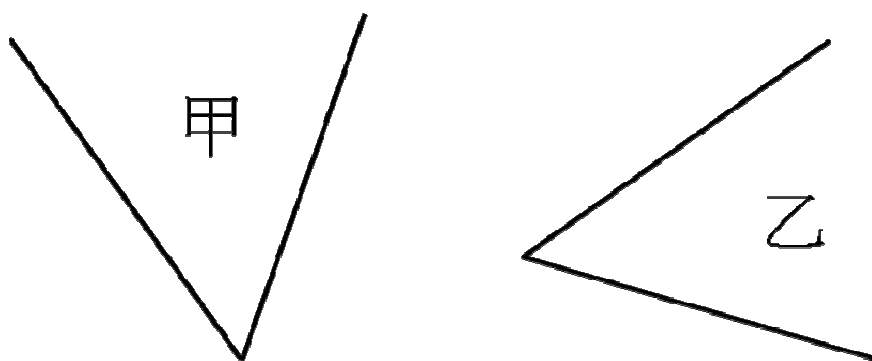
6. 讓學童發表如何比較2個角的大小的方法。

### 活動三：角的間接比較

**活動目標：**透過複製角的活動，進行角的間接比較。

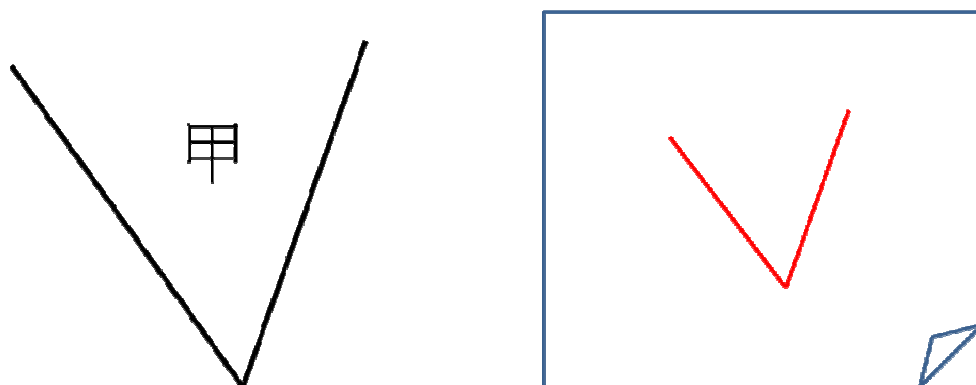
**活動流程：**

1. 教師準備畫有大小相近、不同方向角的學習單。每個學童都有一張透明板。
2. 在黑板上畫兩個方向不同、大小相近的角—角甲、角乙，問學童：「哪一個角比較大？」，學童可能會回答：「甲大」、「乙大」或「一樣大」。

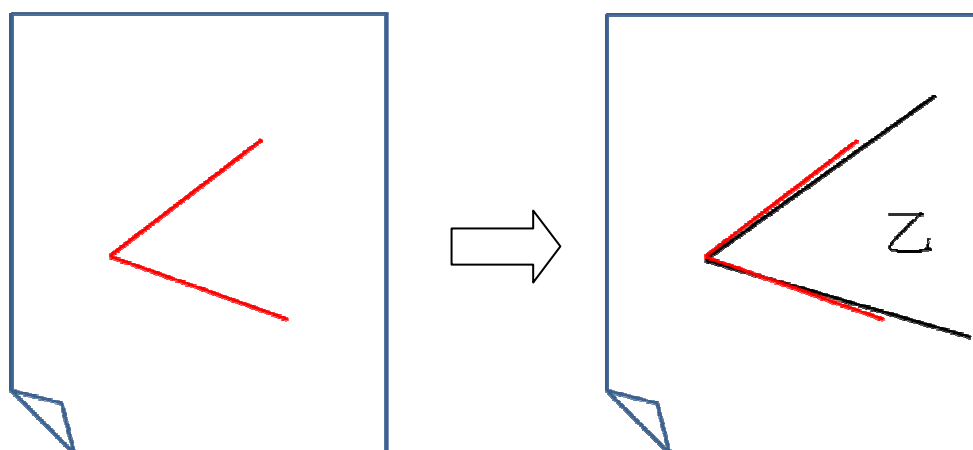


3. 問學童：「如何確定哪一個角大或者是兩個角一樣大？」，讓學童發表想法。

4. 教師用透明板複製角甲，並問學童，透明板上的角和角甲是否一樣大，若學童無法確定透明板上的角是否和角甲一樣大，教師可讓他們上台將透明板上的角和角甲疊合，讓學童確認透明板上的角和角甲一樣大。

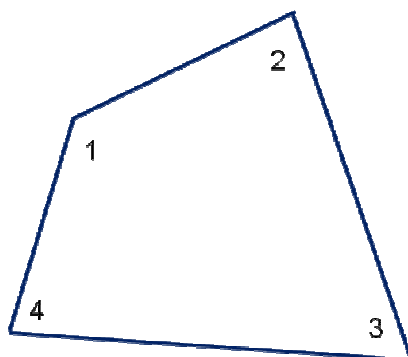


5. 讓學童將透明板上的角疊在黑板上的角乙之上，並進行比較。



6. 問學童：「角甲和角乙哪一個角比較大？」學童可以由透明板上的角和角甲一樣大，且透明板上的角比角乙大，說出角甲比角乙大。
7. 讓學童用透明板複製角乙，再將透明板上的角與角甲比較，學童會發現角甲仍然比角乙大。
8. 發下畫有各種大小相近、不同方向角的學習單，讓學童運用透明板進行角的大小比較，完成學習單。
9. 教師在黑板上畫下和學習單上相似的四邊形。讓學童發表比較角 1、角 2、角 3、角 4 大小的方法及結果，學童的可能方法如下：

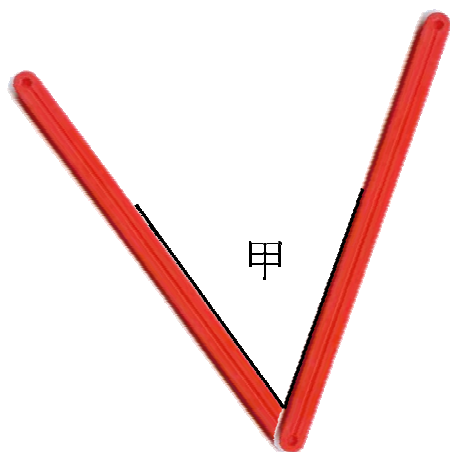
- (1) 可以直觀看出角 1 最大。
- (2) 可由複製角 3 後和角 4、角 2 比較，發現角 3 最小。
- (3) 可由複製角 4 後和角 3 比較，發現角 4 比角 3 小。
- (4) 最後知道角 1 最大，角 3 最小。



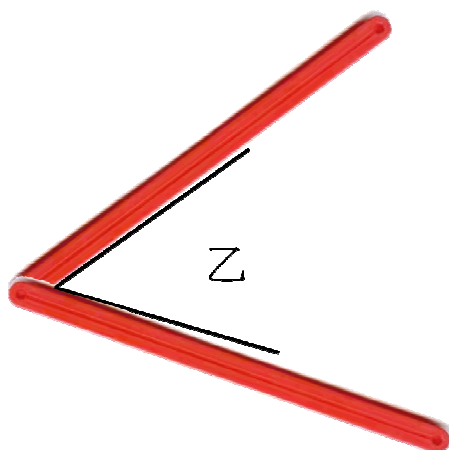
10. 問學童：「除了用透明板來複製角，還有沒有其他方法可以複製角？」，教師可引導學童發現，也可以用幾何扣條來複製角，

步驟如下：

- (1)比較 2 個無法移動的角時，將一組幾何扣條其中一邊先對齊一個角的一邊，然後張開幾何扣條，讓幾何扣條的另一邊對齊這個角的另一邊。



- (2)不改變幾何扣條張開的程度，將幾何扣條移至另一個角上，將一邊對齊這個角的一邊，再比較另一邊，便可比較出哪一個角比較大。



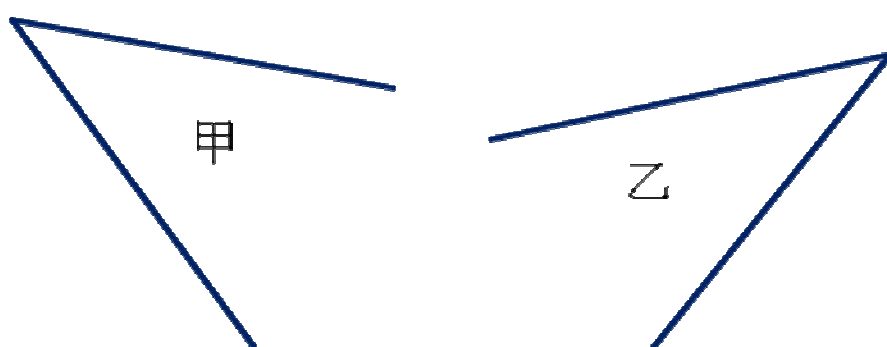
11. 向學童說明，比較兩個無法移動的角時，可以在透明板上複製其中一個角，再將透明板上的角與另一個角比較，就可以比較出兩個無法移動的角的大小。也可以運用幾何扣條複製其中一

個角後，將複製的角和另一個角進行比較，同樣可以比較出兩個無法移動的角的大小。

指定作業：

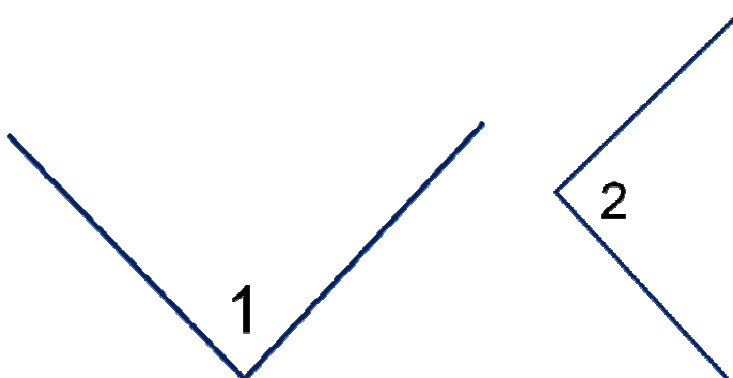
習題一（配合活動三）

(1)先用透明板畫下角甲。比比看，角甲和角乙哪一個角大？



答：( ) 大

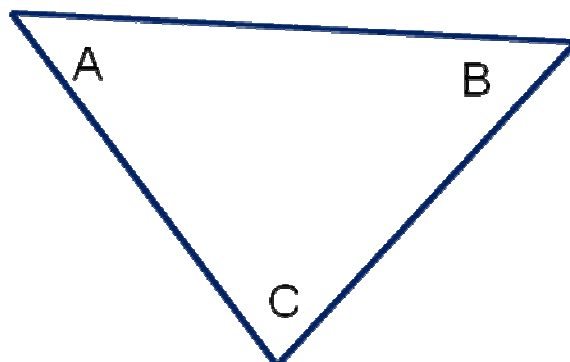
(2)先用透明板畫下角 2。比比看，角 1 和角 2 哪一個角大？



答：( ) 大

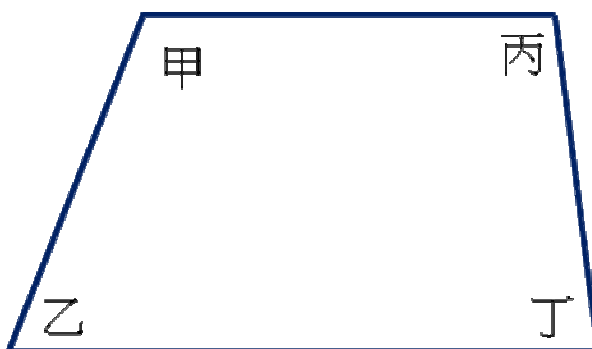
習題二（配合活動三）

(1)比較下圖 3 個角的大小。



答：( ) 最大，( ) 最小。

(2)比較下圖 4 個角的大小。



答：( ) 最大，( ) 最小。

**指定作業參考解答：**

習題一

(1) 甲

(2) 2

習題二

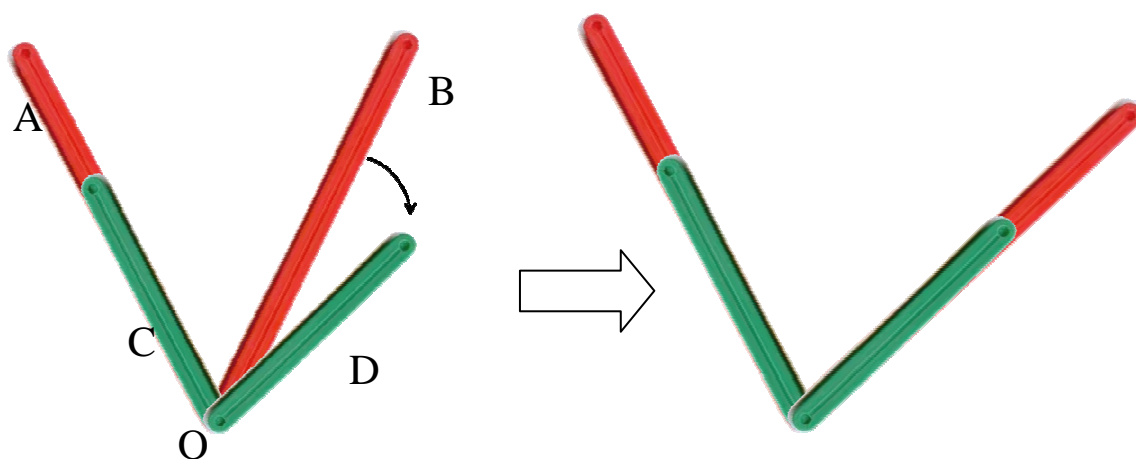
(1) 角 C，角 B

## (2)角甲，角乙

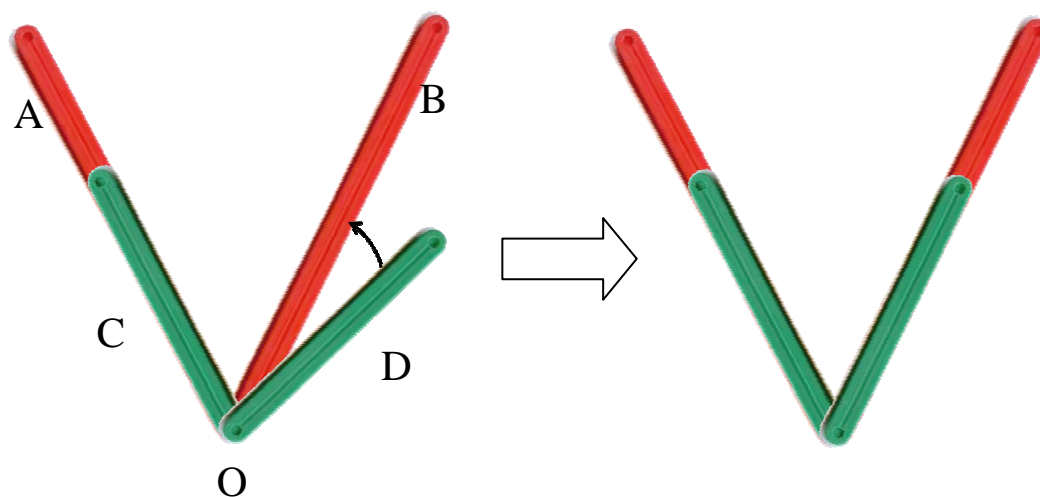
**教學注意事項：**

1. 本教學目標雖然是讓學童透過操作幾何扣條和複製角的活動，直接或間接比較張開角的大小，但教師仍應透過幾何扣條的操作活動，確認學童已了解張開角的意義。
2. 在黑板上畫下張開幾何扣條所形成的張開角時，描繪幾何扣條的內側比外緣更容易畫出角的頂點和兩邊，建議教師提醒學童描繪幾何扣條的內側來畫角。
3. 可以在描繪角的活動中，加入如：改變角的邊長、描繪角的張開變化、角度的大小比較，改變角的方向等。學童經由描繪角的活動，了解角的大小和角的邊長、方向無關。
4. 關於角度大小的直接比較，學童可能由直觀來比較出角度的大小，此時可以促使學童透過幾何扣條疊合及張開的活動來觀察或檢驗直觀是否正確。
5. 運用不同長度的幾何扣條進行直接比較的活動宜多操作，包括：兩組幾何扣條的角一樣大、較長幾何扣條的角比較短幾何扣條的角大等。
6. 疊合幾何扣條進行角的大小比較時，宜提醒學童注意，頂點必須先對齊，才能進行比較。另外，宜讓學童發現較短的幾何扣條放在較長的幾何扣條之上，比較容易比較出角的大小。

7. 當幾何扣條的一邊沒對齊時，可能無法判斷哪一組幾何扣條的角比較大，宜讓學童先將幾何扣條的一邊對齊，再比較另一邊；比較另一邊時，要運用張開角的概念來檢驗，譬如說，當 $\angle AOB$ 為小角、 $\angle COD$ 為大角，檢驗方法如下：疊合 $O$ 點，且邊 $A$ 與邊 $C$ 疊合 (1)可以張開 $B$ 邊直到與 $D$ 邊疊合，由小角要張開才能和大角一樣大的歷程比較出二個角的大小。(2)也可以合起 $D$ 邊直到與 $B$ 邊疊合，由大角要合起才能和小角一樣大的歷程，比較出二個角的大小。



【B 邊張開至與 D 邊疊合】



【D 邊合起至與 B 邊疊合】

8. 運用透明板複製某角後，用透明板上的角疊合其他的角時，亦要讓學童先對齊一邊，再比較另一邊。需注意學童是否先確實疊合 2 個角，才進行比較。
9. 學童運用透明板複製角時，可讓學童運用直尺畫出角的邊，並提醒學童，繪製時不可移動透明板。

**教學參考資料：**

朱建正等(民 91)。國小數學教材分析－體積和角度。三峽：  
國家教育研究院。

## 主題 4-2-2：角度的合成與分解

撰寫者：詹婉華

### ～角度的合成與分解

授課對象：國小四年級學生

先備知識：

1. 能進行張開角的直接與間接比較。
2. 認識旋轉角。
3. 認識角度單位「度」，並能測量角的角度。
4. 知道順時針方向、逆時針方向的意義。

教學目標：

1. 能做角的合成並用加法算式記錄。
2. 能做角的分解並用減法算式記錄。

教學時間： 40 分鐘（一節課）

教學說明：

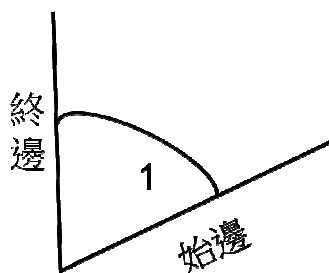
1. 關於角的加法和一般生活中我們所熟悉的數量加法有所不同。

學童可以用加法「 $35+45=80$ 」算出「小明有 35 顆糖果，小華有 45 顆糖果，二人合起來共有 80 顆糖果」，並掌握解題活動的意義。但學童用加法「 $35+45=80$ 」算出「角 A 是 35 度，角 B 是 45 度，合起來是 80 度」時，可能只是透過類比題目語意的方式解決問題，並不表示他們能掌握角度合成的意義。同樣的，學童在學習角的減法時，所寫的減法，也可能只是透過類比題

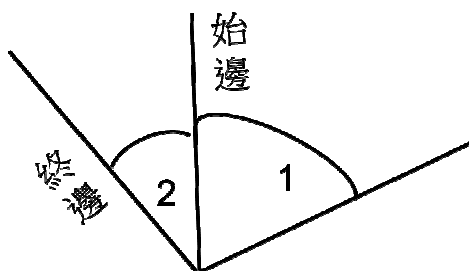
目的語意的方式解決問題，而非真的理解角度的分解意義。

2. 學童可透過角度旋轉二次後，和另一個角的比較角度活動，理解角度合成的意義。活動如下：

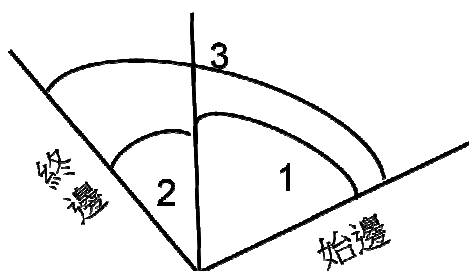
(1) 畫下始邊，旋轉後畫下終邊，如角 1。



(2) 再以角 1 的終邊為始邊，旋轉後畫下終邊，如角 2。



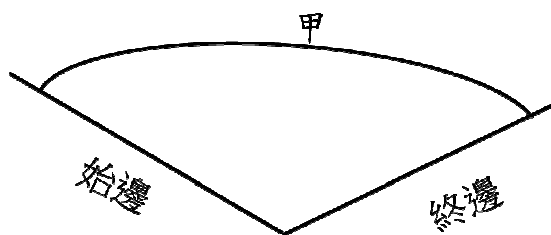
(3) 接著，以角 1 的始邊為始邊，旋轉至角 2 的終邊，如角 3。



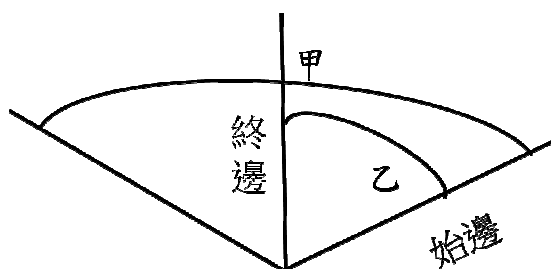
(4) 最後，比對角 1 和角 2 合起來是角 3。

3. 學童可透過旋轉角度和比較角度的活動，理解角度分解的意義，活動如下：

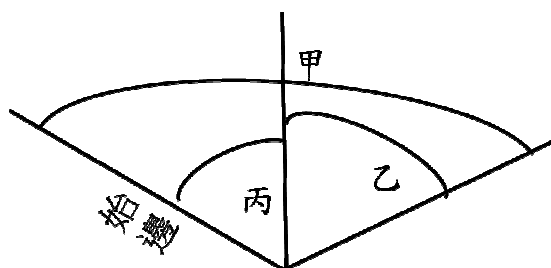
(1) 畫下始邊，旋轉後畫下終邊，如角甲。



(2)以角甲的終邊為始邊，逆向旋轉後畫下終邊，如角乙。



(3)再以角甲的始邊為始邊，旋轉至角乙的終邊，如角丙。



(4)比對角甲拿掉角乙會剩下角丙。

4. 在學童學習角的加法或減法時，可以透過旋轉角的合成與分解的歷程，幫助學童理解角度相加或相減的意義。

5. 本教學重點：透過旋轉角的合成與分解，讓學童理解角的相加及角的相減的意義，並用算式記錄。

### 教具準備：

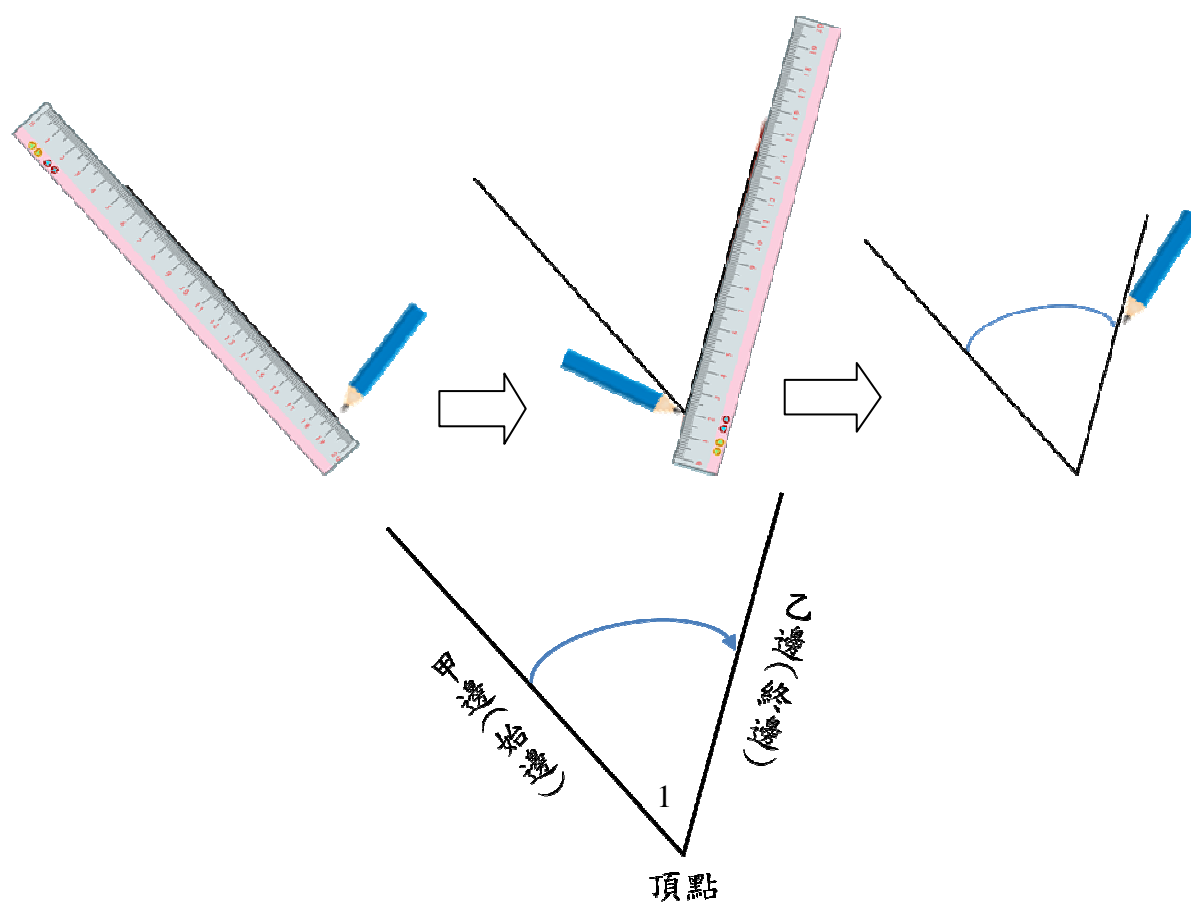
竹籤、直尺、量角器

## 活動一：角度的合成

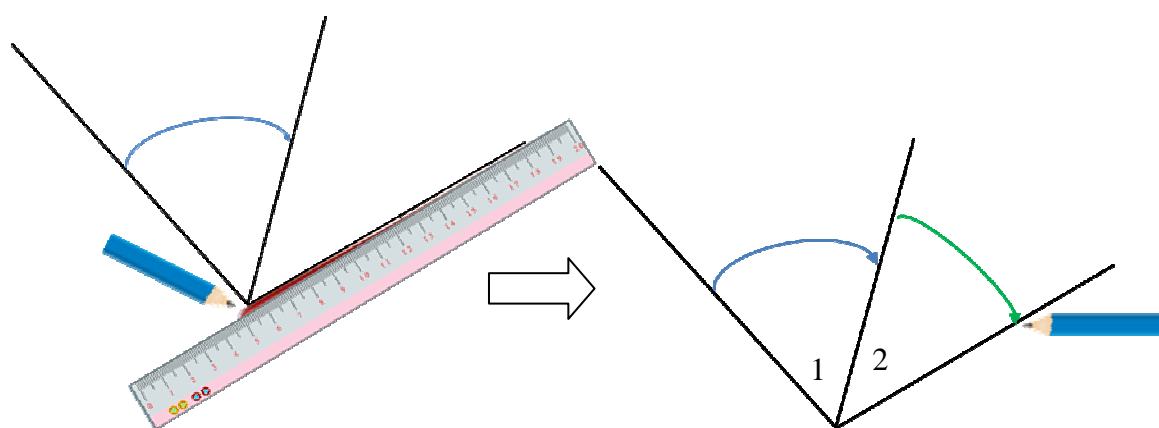
**活動目標：**透過畫旋轉角，進行角度的合成活動，並用加法算式記錄。

### 活動流程：

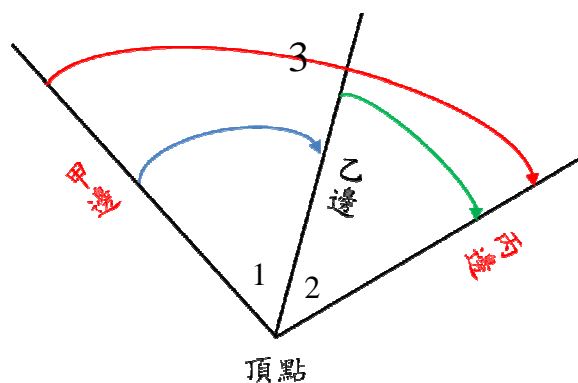
1. 教師用直尺在黑板上記錄直尺的位置，並告訴學童剛剛畫下的邊稱為「甲邊」，然後用竹籤貼合甲邊且竹籤的頂點對齊甲邊的一端，竹籤順時針旋轉大約 60 度，再用直尺記錄竹籤的終止位置，並告訴學童這一個邊是「乙邊」。教師引導學童說出剛剛畫下的角，始邊是甲邊、終邊是乙邊，並指出頂點的位置，並將這個角稱為「角 1」。



2. 以乙邊為始邊，依流程 1 的方式，竹籤以順時針方向做出大約 45 度的旋轉後，用直尺記錄竹籤的位置，並告訴學童這個邊稱為「丙邊」。教師讓學童確認第二次畫下的角的始邊是乙邊、終邊是丙邊，第二個角的頂點和第一個角的頂點位置相同，並將第二次畫下的角稱為「角 2」。



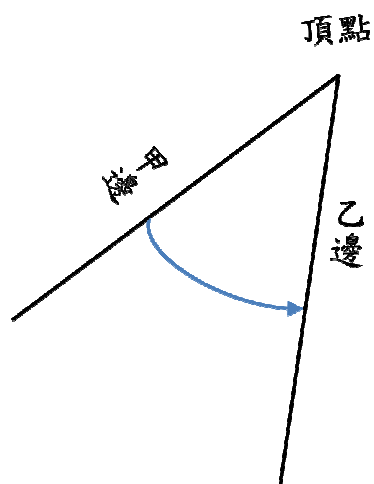
3. 請學童上台，運用竹籤，以甲邊為始邊、丙邊為終邊，旋轉竹籤。教師問：「如何記錄甲邊為始邊、丙邊為終邊的角？」，請學童發表想法。教師再請學童上台在黑板上表示出以甲邊為始邊、丙邊為終邊的角，並將這個角稱為「角 3」。



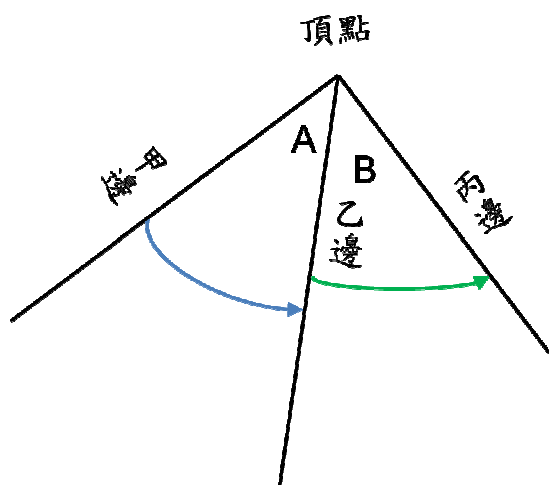
4. 教師問：「角 1 和角 2 合起來和哪一個角一樣大？」，學童可由

剛剛操作的歷程，說出「角 1 和角 2 合起來和角 3 一樣大」。教師問學童：「如何知道角 1、角 2 和角 3 的角度有多大？我們用量角器來量量看。」。讓學童上台進行測量，學童會量出角 1 是 60 度、角 2 是 45 度、角 3 是 105 度，教師引導學童學習記錄「角 1=60 度」、「角 2=45 度」、「角 3=105 度」。讓學童確認：因為角 1 和角 2 合起來和角 3 一樣大，所以 60 度加 45 度是 105 度。教師讓學童運用加法算式記錄，學童會記為「角 1 + 角 2 = 角 3，60 度 + 45 度 = 105 度」。

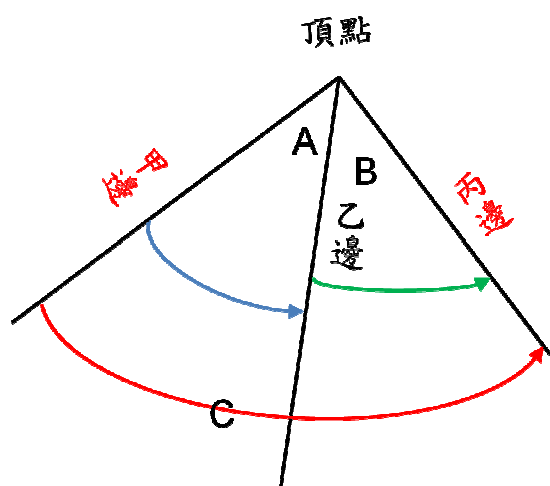
5. 問學童：「角 3 和哪兩個角合起來一樣大？」，學童會回答：「角 3 和角 1、角 2 合起來的角一樣大。」。教師引導學童運用加法算式記錄，記為「角 3 = 角 1 + 角 2，105 度 = 60 度 + 45 度」。
6. 讓學童上台運用直尺，在黑板上畫出起始的邊，並稱該邊為甲邊，接著引導學童運用竹籤，從甲邊開始，以逆時針方向旋轉約 45 度後，用直尺畫下第一個角的終邊，稱該邊為乙邊。教師讓學童確認第一個角的始邊、終邊及頂點，並稱呼第一個角為「角 A」。



7. 讓學童以乙邊的始邊，逆時針方向旋轉 45 度後，畫下終邊並稱該邊為丙邊，確認第二個角的始邊、終邊及頂點，並稱呼第二個角為「角 B」。



8. 請另一位學童上台用不同顏色的筆，操作竹籤並運用直尺畫出以甲邊為始邊，丙邊為終邊的角，並稱呼這個角為「角 C」，教師問學童：「哪兩個角合起來和角 C 一樣大？」，學童由操作的歷程，可以說出「角 A 和角 B 合起來和角 C 一樣大」。教師讓學童記錄「角 A + 角 B = 角 C」。



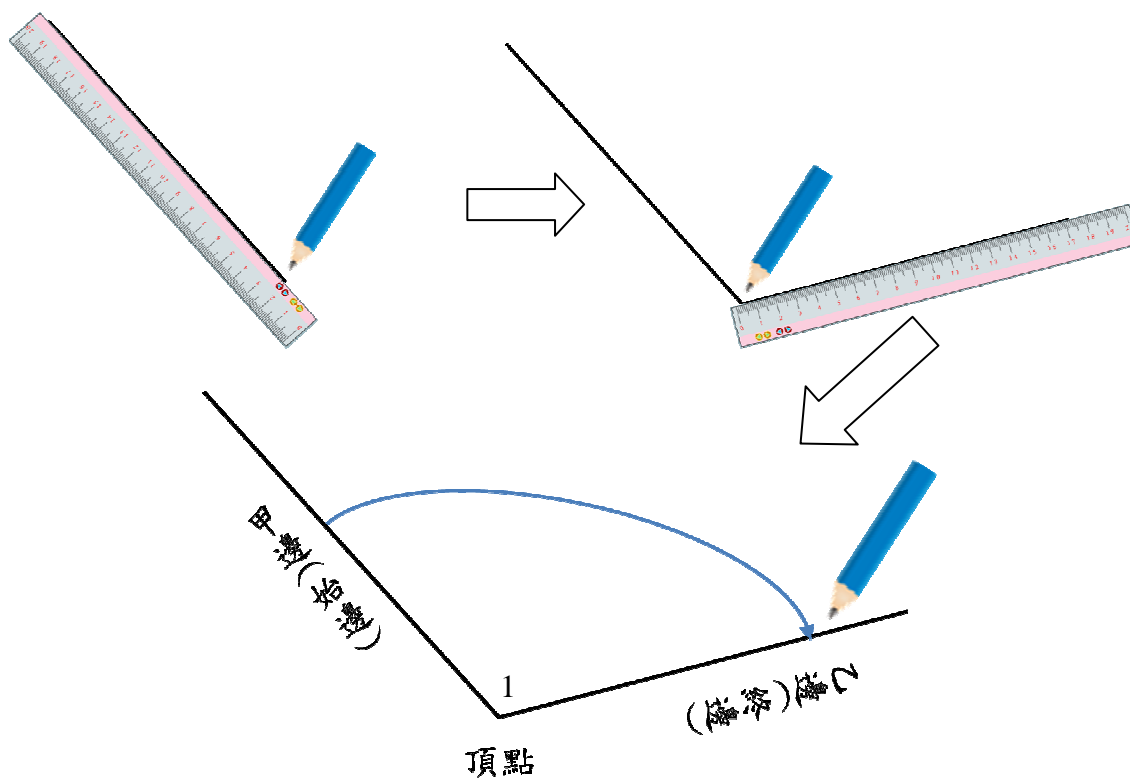
9. 教師再問：「角 A 和角 B 合起來和哪一個角一樣大？」，確認學童知道「角 A 和角 B 合起來和角 C 一樣大」。問學童：「如何知道角 A、角 B 和角 C 的角度有多大？」。學童可能會回答：「用量角器來量量看」，教師讓學童上台進行測量，他們會量出角 A 是 45 度、角 B 是 45 度、角 C 是 90 度，並在黑板上記錄「角 A = 45 度」、「角 B = 45 度」、「角 C = 90 度」。教師引導學童確認：因為角 A 和角 B 合起來和角 C 一樣大，所以 45 度加 45 度是 90 度。讓學童運用加法算式記錄，會記為「角 A + 角 B = 角 C，45 度 + 45 度 = 90 度」。
10. 問學童：「角 C 和哪兩個角合起來一樣大？」，學童會回答：「角 C 和角 A、角 B 合起來的角一樣大。」，教師引導學童運用加法算式記錄，記為「角 C = 角 A + 角 B，90 度 = 45 度 + 45 度」。
11. 教師以不同的角度，讓學童學習運用量角器量出兩個角的角度合起來等於第三個角的角度，並以加法算式記錄。

## 活動二：角度的分解

**活動目標：**透過畫旋轉角，進行角度的分解活動，並用減法算式記錄。

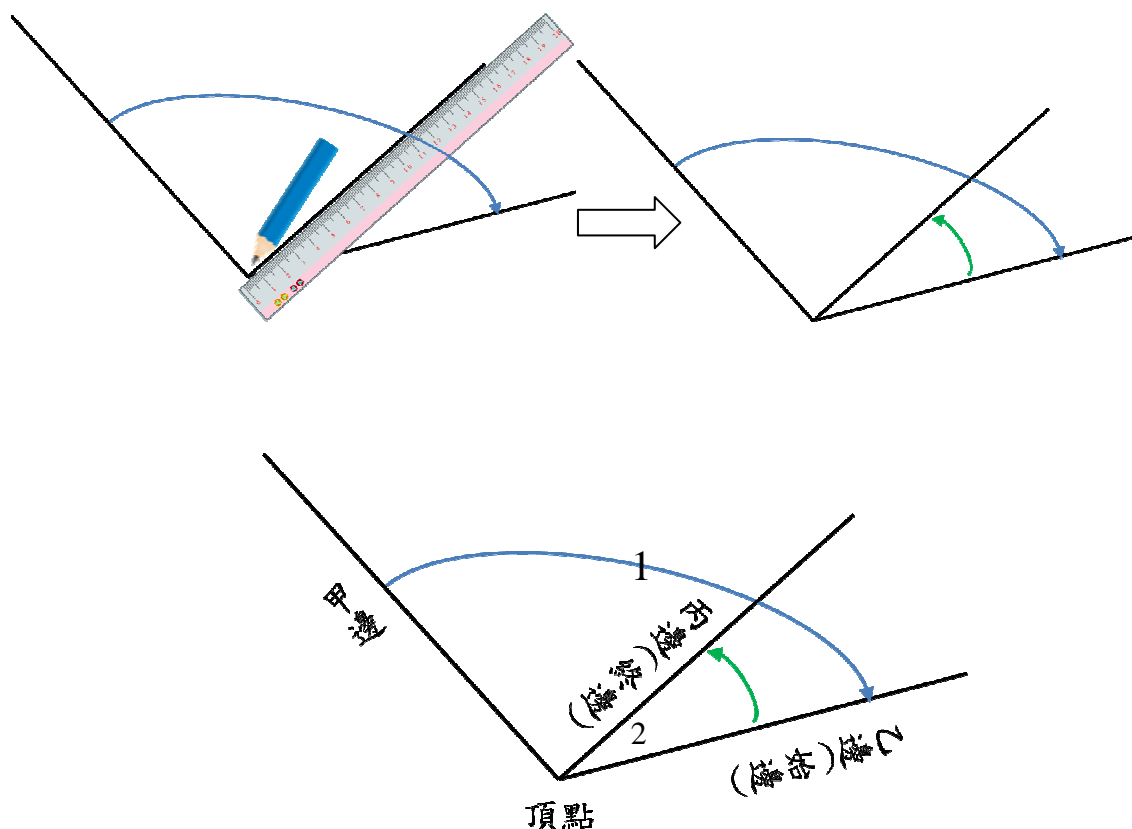
### 活動流程：

1. 教師在黑板上沿著直尺的邊畫一條直線，告訴學童剛剛畫下的邊稱為「甲邊」。然後用竹籤貼合甲邊且竹籤的頂點對齊甲邊的一端，竹籤順時針旋轉大約 120 度，再用直尺記錄竹籤的終止位置，告訴學童這一個邊是「乙邊」。教師引導學童說出剛剛畫下的角，始邊是甲邊、終邊是乙邊，指出頂點的位置，並將這個角稱為「角 1」。

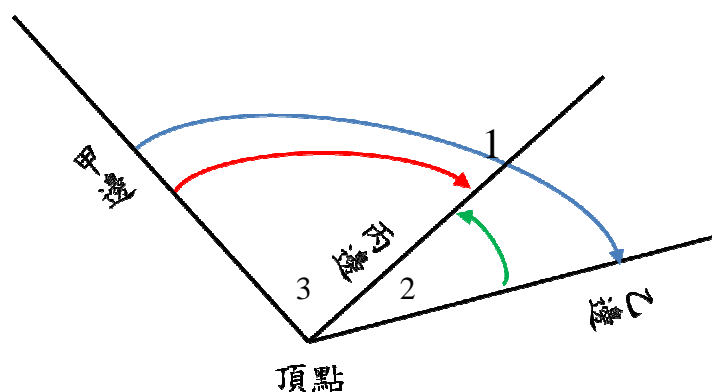


2. 以乙邊為始邊，以流程 1 的方式將竹籤以逆時針方向旋轉大約

30 度後，用直尺記錄竹籤的位置，並告訴學童這個邊稱為「丙邊」。讓學童確認第二次畫下的角的始邊是乙邊、終邊是丙邊，第二個角的頂點和第一個角的頂點位置相同，並將第二次畫下的角稱為「角 2」。

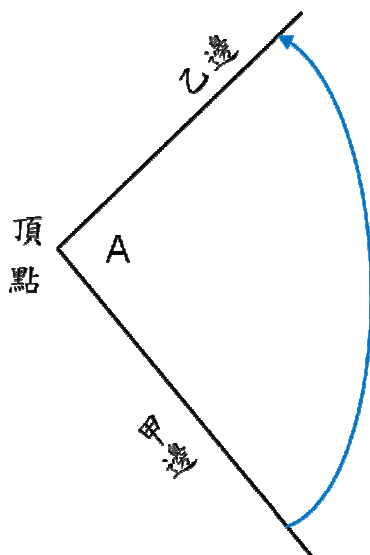


3. 問學童：「以甲邊為始邊，順時針旋轉竹籤到丙邊，可不可以畫出一個角？」，請他們發表想法。教師請學童上台，在黑板上表示出以甲邊為始邊、丙邊為終邊的角，並將這個角稱為「角 3」。

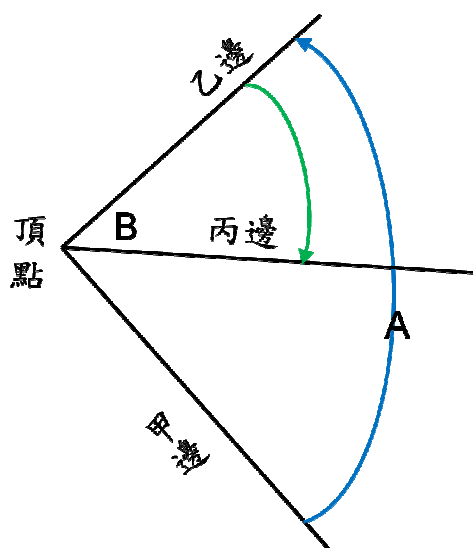


4. 問學童：「角 1 大還是角 2 大？」，學童會回答「角 1 大」，教師問學童：「角 1 拿掉角 2 會剩下哪個角？」，學童會回答：「角 3」。教師說明：由剛剛操作的歷程，可以知道角 1 拿掉角 2 會剩下角 3。
5. 教師問：「如何知道角 1、角 2 和角 3 的角度有多大？」。學童可能會回答：「用量角器來量量看。」，教師讓學童上台進行測量，會量出角 1 是 120 度、角 2 是 30 度、角 3 是 90 度，在黑板上記錄「角 1=120 度」、「角 2=30 度」、「角 3=90 度」。教師引導學童確認：因為角 1 拿掉角 2 會剩下角 3，所以 120 度減 30 度是 90 度，並用減法算式記錄為「120 度 - 30 度 = 90 度」。
6. 教師問：「角 1 拿掉角 3 會是哪個角？你怎麼知道的？」，學童由剛剛操作的經驗，會回答：「角 2」，並說明理由。教師引導學童運用減法算式記錄為「120 度 - 90 度 = 30 度」。
7. 請學童上台運用直尺，在黑板畫出起始的邊，並稱該邊為甲邊，接著引導學童運用竹籤以逆時針方向旋轉約 90 度後，用直

尺畫下第一個角的終邊，稱該邊為乙邊，教師讓學童確認第一個角的始邊、終邊及頂點，稱此角為「角 A」。

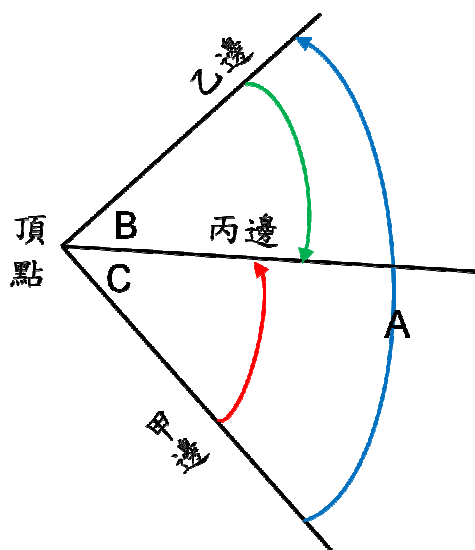


8. 讓學童以乙邊的始邊，順時針方向旋轉 45 度後，畫下終邊並稱該邊為丙邊。教師讓學童確認第二個角的始邊、終邊及頂點，稱此角為「角 B」。



9. 問學童：「以甲邊為始邊，逆時針旋轉竹籤到丙邊，可不可以畫出一個角？」，請學童發表想法，再請他們上台在黑板上表示出

以甲邊為始邊、丙邊為終邊的角，並將這個角稱為「角 C」。

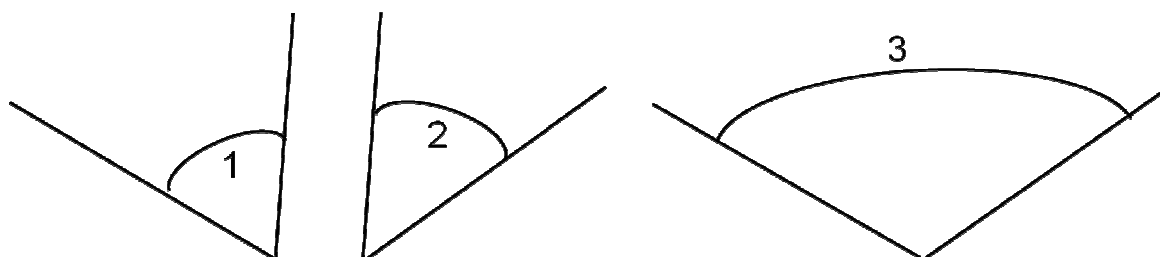


10. 問學童：「角 A 拿掉角 B 會剩下哪個角？」，學童會回答：「角 C」。
11. 教師問：「如何知道角 A、角 B 和角 C 的角度有多大？我們用量角器來量量看」，讓學童上台進行測量。學童量出角 A 是 90 度、角 B 是 45 度、角 C 是 45 度，並在黑板上記錄「角 A=90 度」、「角 B=45 度」、「角 C=45 度」。教師引導學童確認：因為角 A 拿掉角 B 會剩下角 C，所以 90 度減 45 度是 45 度。教師讓學童用減法算式記錄為「90 度-45 度=45 度」。
12. 問學童：「角 A 拿掉角 C 會是哪個角？你怎麼知道的？」，學童由剛剛操作的經驗會回答：「角 B」。教師引導學童用減法算式記錄為「90 度-45 度=45 度」。
13. 教師以不同的角度，讓學童學習運用量角器量出第一個角拿掉第二個角後會剩下第三個角，並以減法算式記錄。

## 指定作業：

## 習題一（配合活動一）

- (1) 用量角器量一量角 1、角 2、角 3 的角度，並記錄。角 1 和哪個角合起來和角 3 一樣大？用算式怎麼記？



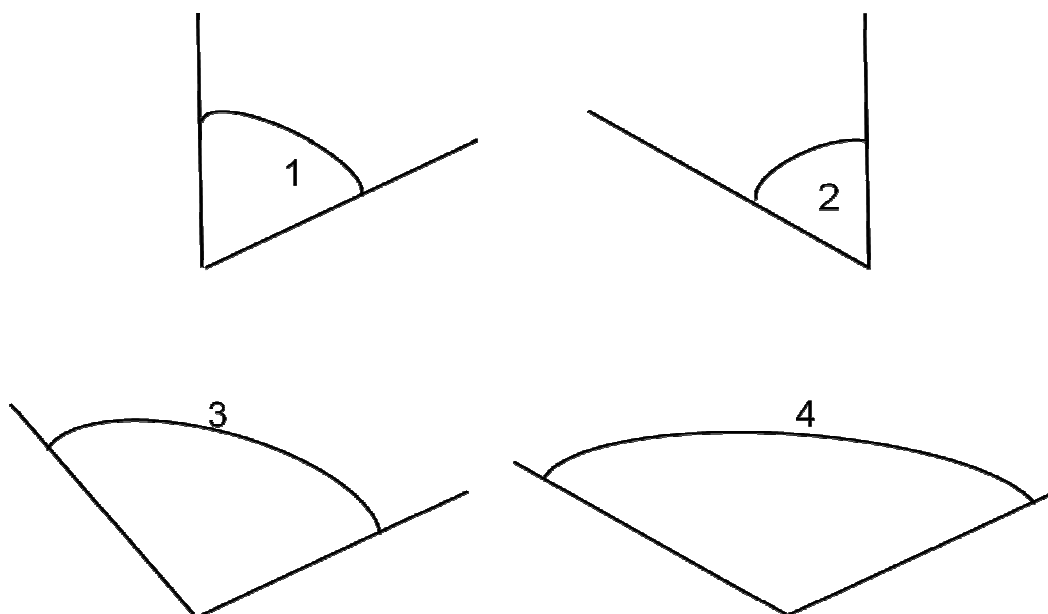
答：角 1 是( ) 度、角 2 是( ) 度、角 3 是( ) 度。

角 1 和 ( ) 合起來和角 3 一樣大。

算式可以記成 ( )。

- (2) 用量角器量一量角 1、角 2、角 3、角 4 的角度，並記錄。

角 1 和角 2 合起來和哪一個角一樣大？用算式怎麼記？



答：角 1 是( ) 度、角 2 是( ) 度、角 3 是( ) 度、角 4 是( ) 度。

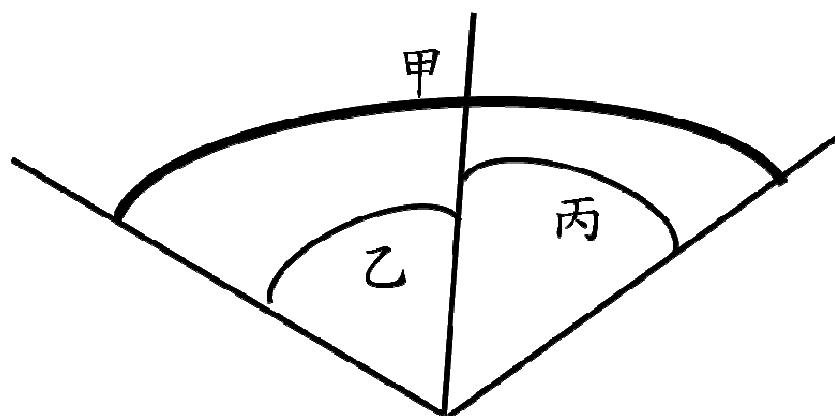
角 1 和角 2 合起來和 ( ) 一樣大。

算式可以記成 ( )。

### 習題二 (配合活動二)

(1) 用量角器量一量角甲、角乙、角丙的角度，並記錄。

角甲減掉角乙會是哪一個角？用算式怎麼記？



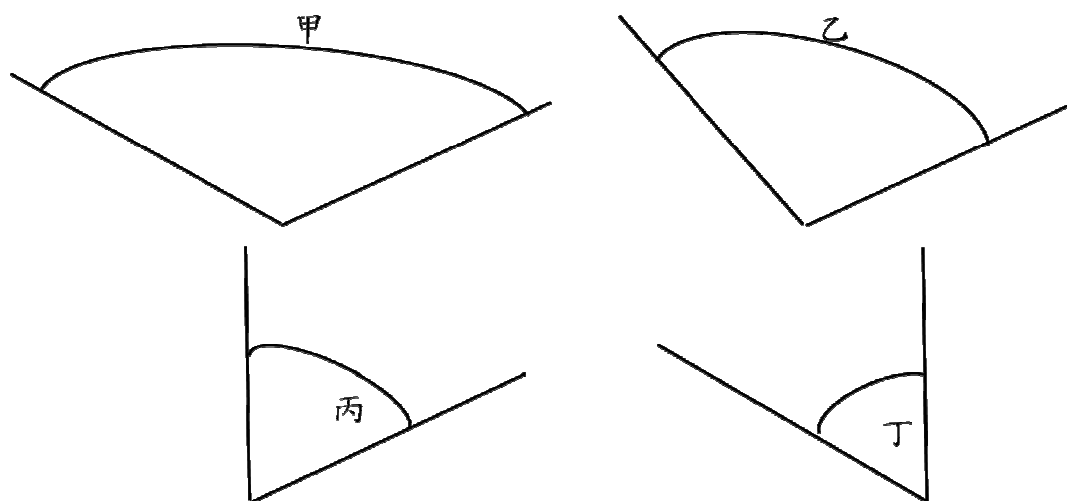
答：角甲是( ) 度、角乙是( ) 度、角丙是( ) 度。

角甲減掉角乙是 ( )。

算式可以記成 ( )。

(2) 用量角器量一量角甲、角乙、角丙、角丁的角度，並記錄。

角甲減掉角丁會是哪一個角？用算式怎麼記？



答：角甲是( )度、角乙是( )度、角丙是( )度、角丁是( )度。

角甲減掉角丁是( )。

算式可以記成( )。

### 指定作業參考解答：

#### 習題一

(1) 65, 50, 115, 角 2,  $65 \text{ 度} + 50 \text{ 度} = 115 \text{ 度}$ 。

(2) 65, 60, 105, 125, 角 4,  $65 \text{ 度} + 60 \text{ 度} = 125 \text{ 度}$ 。

#### 習題二

(1) 115, 65, 50, 角丙,  $115 \text{ 度} - 65 \text{ 度} = 50 \text{ 度}$ 。

(2) 125, 105, 65, 60, 角丙,  $125 \text{ 度} - 60 \text{ 度} = 65 \text{ 度}$ 。

### 教學注意事項：

1. 在角度的合成、分解教學前，宜確認學童已了解旋轉角的意義且能標示旋轉角，以及他們已經能正確的使用量角器測量某個角的角度。
2. 進行角度的合成、分解教學時，教師宜進行都是順時針方向與都是逆時針方向的旋轉角合成活動，以及先順時針方向再逆時針方向旋轉與先逆時針方向再順時針方向的旋轉角分解活動。讓學童了解，不論是順時針方向或逆時針方向都能合成或分解角度。
3. 進行角度的合成、分解教學時，須讓學童確認角的始邊、終邊及頂點的位置，並用不同的符號代表不同的角，如：A、B、C；甲、乙、丙；1、2、3……等。
4. 角度的合成、分解教學流程中所敘述竹籤旋轉的度數，如：活動一的活動流程 1 中「竹籤順時針旋轉大約 60 度」，是舉例說明竹籤旋轉某一個度數，而非固定的角度。此時教師的教學，宜著重竹籤旋轉的歷程，而非竹籤旋轉了幾度。關於竹籤旋轉的度數，可由接續的活動運用量角器來量測。

### 教學參考資料：

朱建正等(民 91)。國小數學教材分析—體積和角度。三峽：  
國家教育研究院。

## 主題 4-3-2：量角器

撰寫者：詹婉華

### ～認識量角器並測量角

授課對象：國小四年級學生

先備知識：

1. 認識張開角。
2. 認識旋轉角。

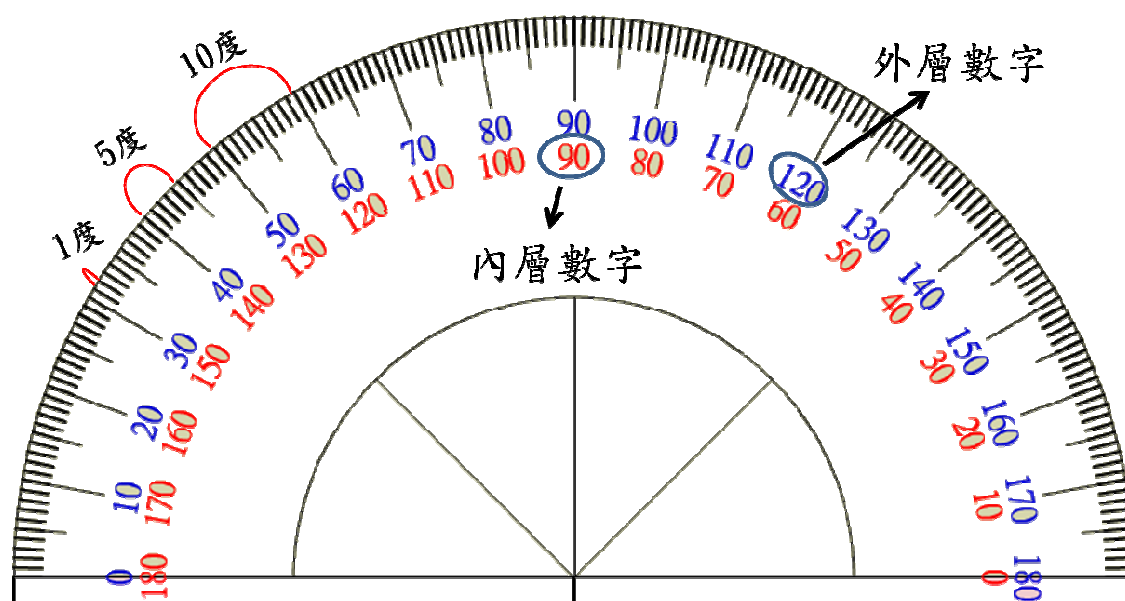
教學目標：

1. 認識量角器。
2. 認識角度的單位一度。
3. 運用量角器測量角的角度。

教學時間：40 分鐘（一節課）

教學說明：

1. 讓學童用量角器測量一個角的角度之前，應先讓學童認識量角器的結構與測量方法。量角器和直尺不同，有 3 組刻度，1 個小刻度為 1 度、1 個中刻度為 5 度、1 個大刻度為 10 度。量角器的外層數字由 0 度至 180 度是順時針方向，內層數字由 0 度至 180 度是逆時針方向。學童必須了解，測量角度時，對齊始邊的刻度 0 度是內層數字還是外層數字。



2. 本教學重點：先認識量角度的工具—量角器，進而認識角度的單位一度，並正確的運用量角器測量角的角度。教師宜在學童已學過角的合成與分解後，再進行使用量角器測量大於 180 度的角的教學活動。

### 教具準備：

細長竹籤（兩端尖）2 根、教學用直尺(100 公分)、教學用 180 度量角器及 360 度量角器(量角器底邊為 40 公分)、學童用直尺(15 公分)及量角器。

### 活動一：認識量角器

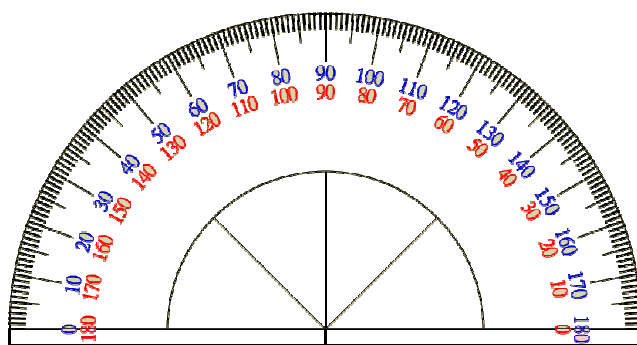
活動目標：認識量角器及角度的單位一度。

### 活動流程：

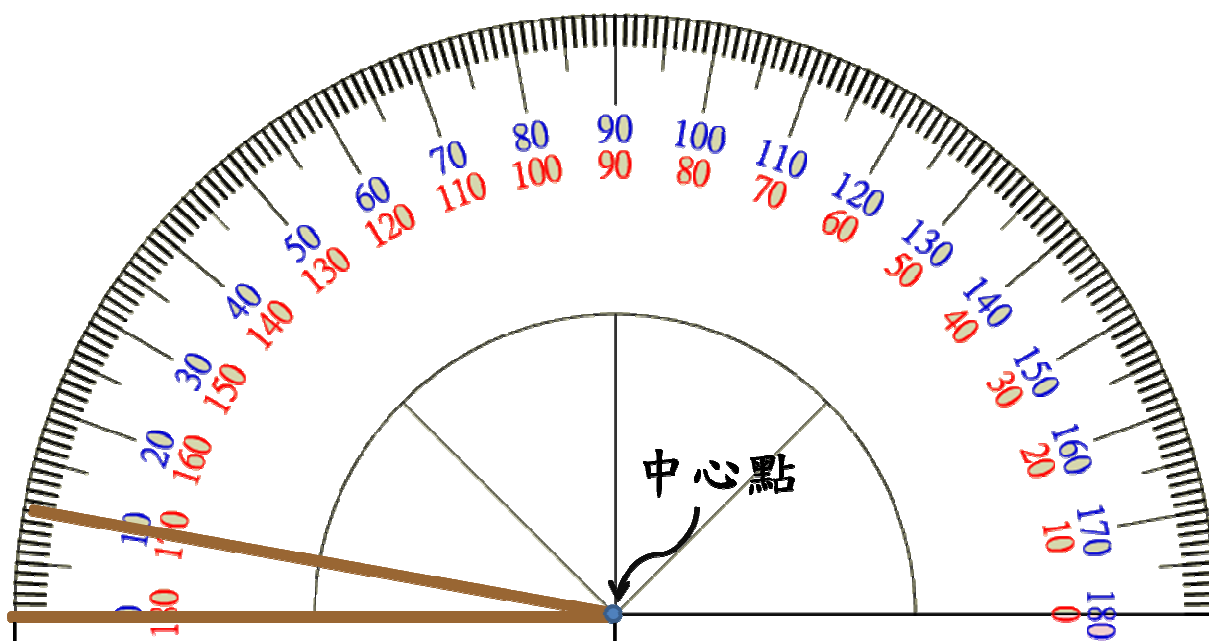
1. 教師對齊 2 根竹籤的端點，1 根竹籤不動，並說明這根竹籤是為

了方便觀察開始旋轉的位置，再將另 1 根竹籤依順時針方向旋轉，形成 1 個角，確認學童知道這是一個角後，再順時針方向旋轉這根竹籤，學童會知道角變大了。教師問學童：「我們如何告訴別人這個角原來是多大？後來這個角變成多大？」，請學童發表想法。

2. 教師說明：我們量長度時，可以用直尺來量，可以用幾公分、幾公尺來說明有多長。同樣的，量角度時，也有量角度的工具，量角度的工具是量角器，可以用「度」為單位來說明角的大小。
3. 展示教學用量角器，請學童發表觀察後的想法，學童的說法可能如下：
  - (1) 量角器像一個半圓形。
  - (2) 量角器上有內、外二層數字，最小的數字是 0，最大數字的是 180。
  - (3) 量角器上有一些和直尺一樣的刻度，有大的刻度、也有小的刻度。
  - (4) 量角器底部有一條長長的直線，直線左右兩端都有 0 和 180 的數字。
  - (5) 看到有數條直線交會於一點。

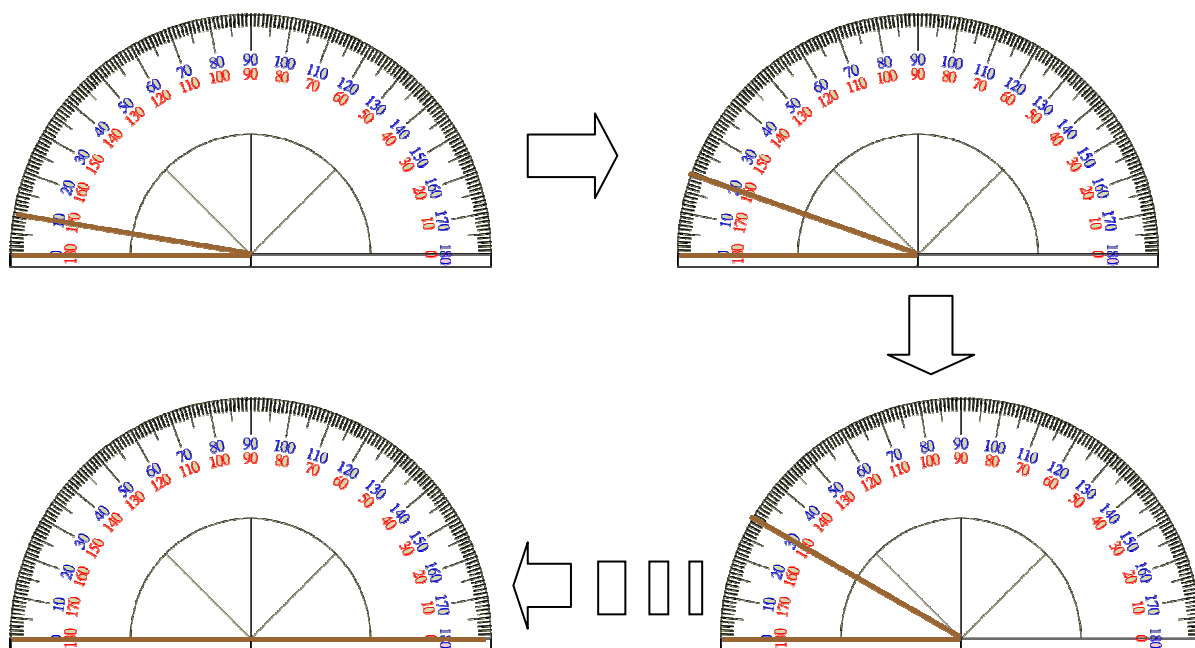


4. 教師拿 1 根竹籤對齊底邊的直線，且竹籤的頂端對齊量角器的中心點，並固定在外層 0 度的線上，將竹籤依順時針方向慢慢旋轉到 10 的位置，成為一個 10 度的旋轉角；再將另 1 根竹籤的頂端對齊中心點，並放在外層 0 度的線上，讓學童看到這根竹籤是表示旋轉角的始邊，讓學童觀察這個角（始邊在外層數字 0、終邊在數字 10），告知學童這個角的角度是 10 度。

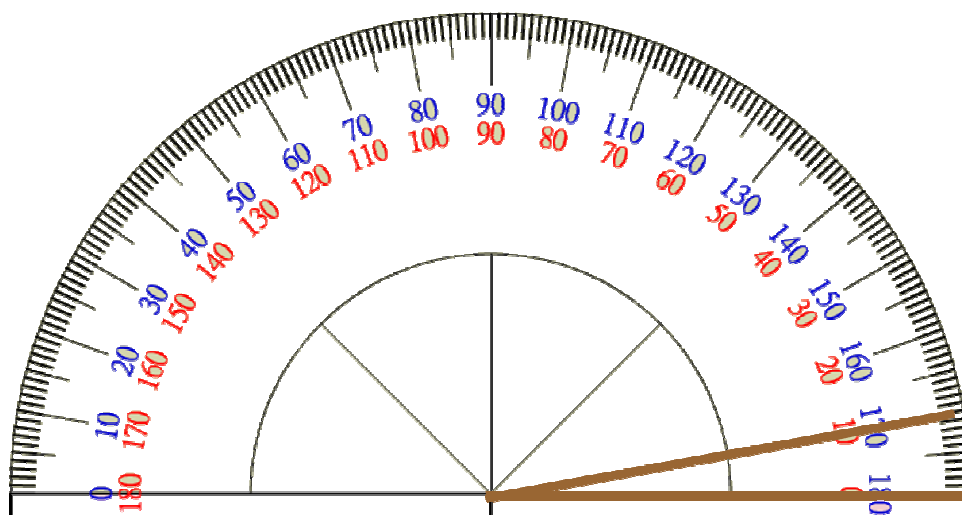


5. 教師依順時針方向從 10 旋轉竹籤至 20 的位置，讓學童看到這個角是由 0 的位置、旋轉至 20，並學習報讀它的角度為「20 度」，

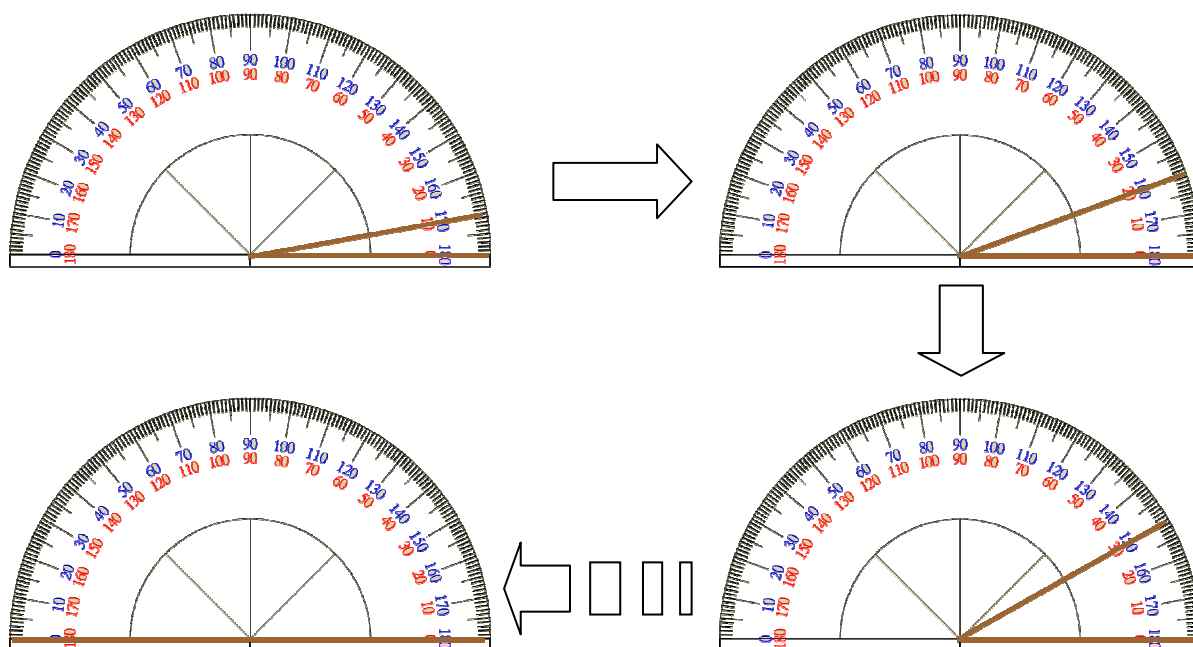
再繼續依順時針方向旋轉竹籤從 20 至 30，讓學童看到這個角的始邊在 0、終邊在 30，並讓學童學習報讀該角的角度為「30 度」，……直到竹籤指向 180，學童報讀角的角度是「180 度」。



6. 運用以內層數字 0 為始邊，一根竹籤固定在 0 度的線上，來表示旋轉角的旋轉始邊，另一根竹籤依逆時針方向慢慢旋轉到 10 的位置，是一個 10 度的旋轉角，引導學童思考：這個角的角度是多少？讓學童發現，這時，如果報讀外層的數字是不正確的，當角的始邊在內層數字 0，終邊在數字 10 的時候，可由內層的數字 10，知道這個角的角度是 10 度。



7. 教師依逆時針方向從 10 旋轉竹籤至 20 的位置，讓學童看到這個角的始邊在 0、終邊在 20，並學習報讀它的角度為「20 度」，再繼續依逆時針方向旋轉竹籤從 20 至 30，讓學童看到這個角的始邊在 0、終邊在 30，並學童學習報讀該角的角度為「30 度」，……直到竹籤指向 180，學童報讀角的角度是「180 度」。



8. 讓學童觀察，量角器有 3 種不同長短的刻度線，並引導他們點數，數字 0 至 10 之間有 10 個小刻度，了解每一個小刻度是 1

度。

9. 問學童：「1 度再增加 1 度是幾度？」學童會回答：「2 度」。繼續帶領學童以增加 1 度的方式累數至 5，讓他們了解 5 個 1 度是 5 度，1 個中刻度是 5 度。繼續讓學童以增加 1 度的方式累數至 10，了解 10 個 1 度是 10 度，1 個大刻度是 10 度；從 0 到 20 有 20 個小刻度，有 20 個 1 度，所以是「20 度」，從 0 到 20 有 4 個 5 度，所以也是「20 度」，從 0 到 20 有 2 個 10 度，同樣也是「20 度」。

10. 指著量角器上的刻度，帶領學童以增加 1 度的方式進行累數，或以增加 5 度的方式進行累數，或以增加 10 度的方式進行累數，累數至 180 度。

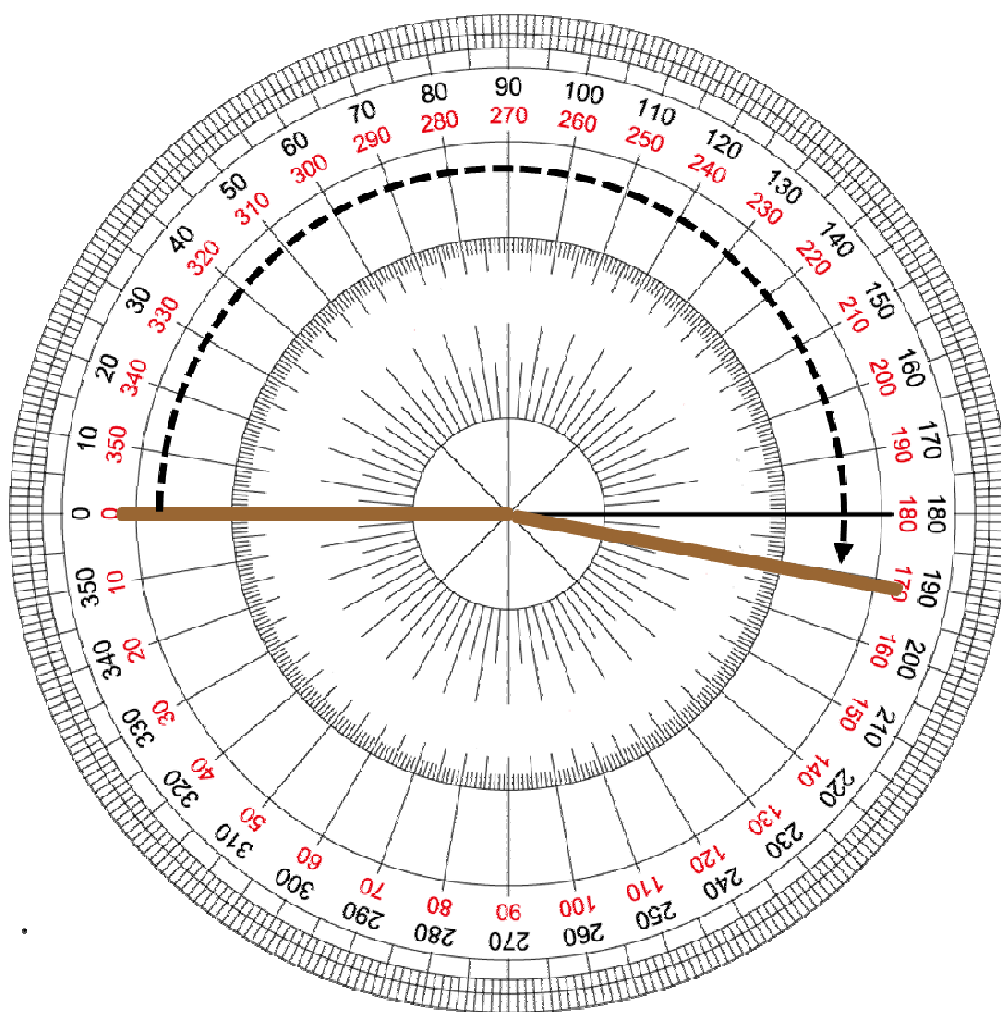
如：可以先增加 1 度的累數，20、21、22、23、24、25；接著增加 5 度的累數，30、35、40、45、50；再增加 10 度的累數，60、70、80、90……160；然後以增加 5 度或 1 度的累數至 180 度，165、170、175、176、177、178、179、180。

11. 教師說明：180 度的角稱為平角。

12. 發下竹籤和量角器，讓學童自行操作竹籤，認識量角器及角的單位「度」。

13. 教師問：「180 度再增加 1 度，是幾度？」，學童經由之前的經驗知道是 181 度。

14. 展示可測量 360 度的量角器，讓學童觀察量角器的構造。教師讓學童用竹籤由 0 度旋轉至 190 度，並用另一根竹籤表示旋轉的始邊(0 度)，讓學童認識 190 度的角，並帶領學童由 180 度，以增加 1 度的方式，累數至 190 度。



15. 指著量角器上的刻度，帶領學童以增加 1 度的累數，或增加 5 度的累數，或以增加 10 度的累數，累數至 360 度。

如：可以先增加 1 度的累數，190、191、192、193、194、195；接著增加 5 度的累數，200、205、210、215、220；再增加 10 度的累數，230、240、250、260……340；然後增加 5 度或 1

度的累數至 360 度，345、350、355、356、357、358、359、360。

16. 讓學童觀察由 0 度到 360 度是繞了一周，教師說明：360 度的角稱為周角。

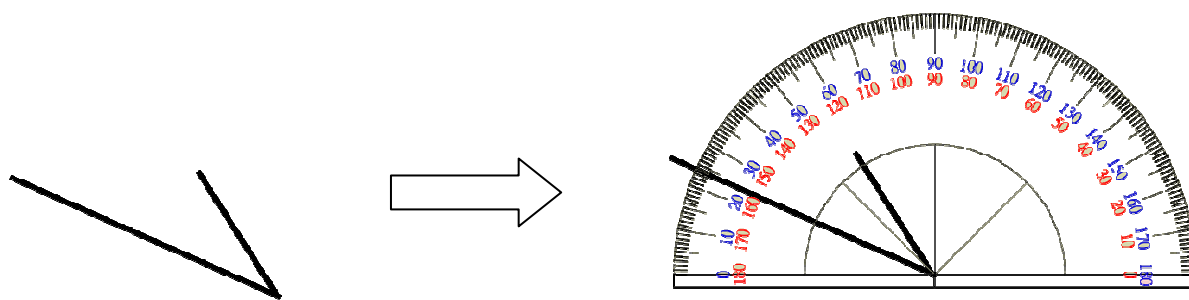
## 活動二：運用量角器測量角

活動目標：以量角器為測量工具，測量角的角度。

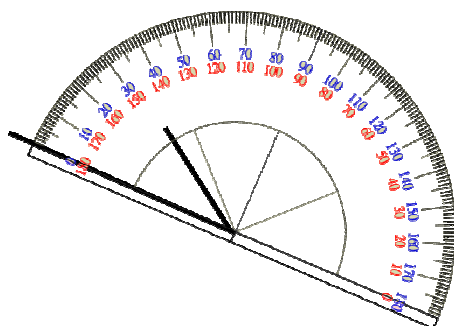
活動流程：

1. 教師在黑板上畫一個比 90 度小的角。請學童上台運用量角器量出角的角度，並說明測量角度要注意的事項，學童的說明應該包含下列各要項：

(1) 量角器的中心點要對齊角的頂點。

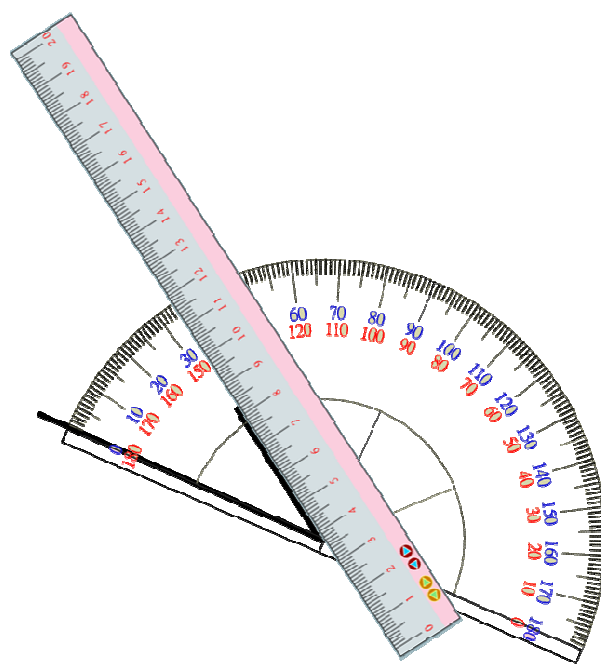


(2)旋轉量角器，讓角的一邊與0對齊。



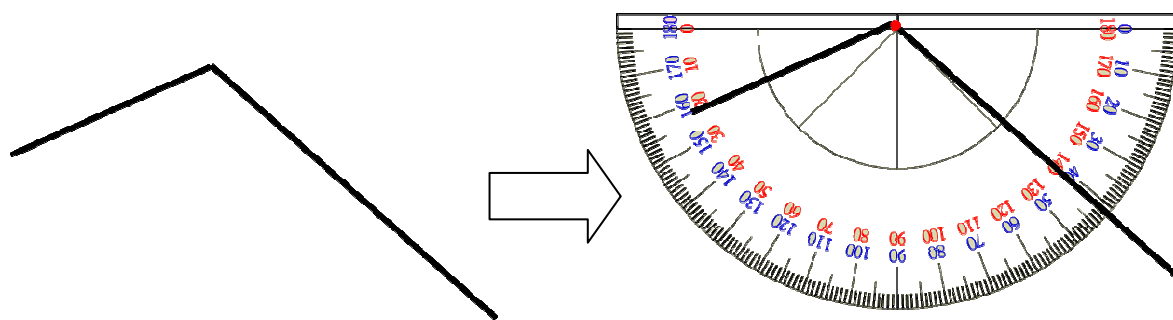
(3)角的一邊為0度，另一邊對齊的刻度，即為角的角度。

(4)若是另一邊不夠長，無法在量角器上報讀刻度時，可以運用直尺輔助報讀。

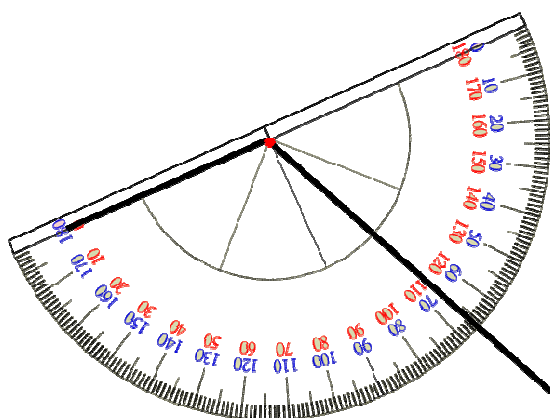


2. 教師在黑板上畫一個比90度大的角。請學童上台運用量角器量出該角的角度，並請學童說明測量角度要注意的事項，學童的說明應該包含下列各要項：

(1)量角器的中心點對齊角的頂點。



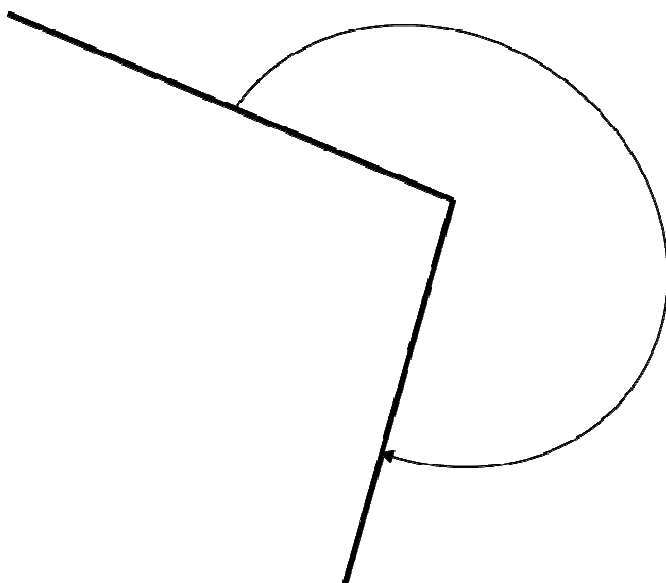
(2) 旋轉量角器，讓角的一邊與 0 對齊。



(3) 角的一邊為 0 度，另一邊對齊的刻度，即為角的角度。

3. 教師發下空白紙，先確認學童知道直尺的四個角都是直角，再讓他們用直尺畫兩個比直角大的角、兩個比直角小的角，然後用量角器量出各個角的角度，並記錄在另一張紙上。教師巡視行間，指導學童畫角並測量角的角度。
4. 學童兩人一組，交換畫了角的紙，並運用量角器量出各角的角度，將各角的角度記錄在紙上。教師巡視行間，觀察學童測量角的方法。

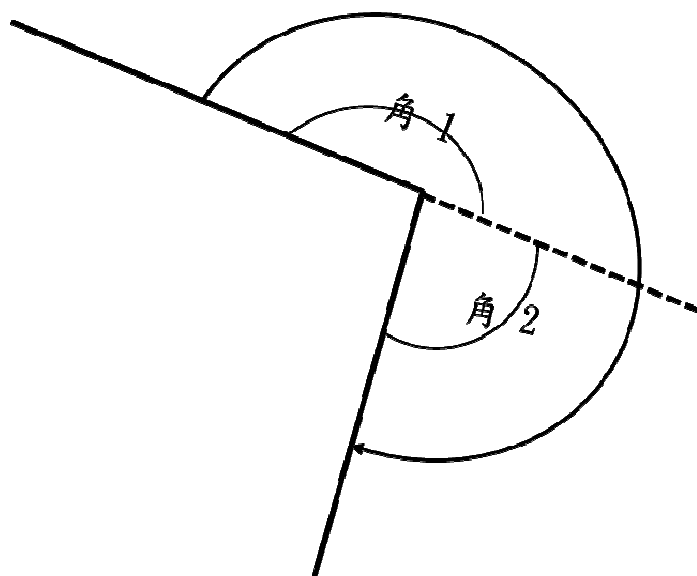
5. 教師讓學童兩人一組，討論彼此測量角度的方法。
6. 教師在黑板上畫出大於 180 的角，並以弧線標明始邊與終邊。



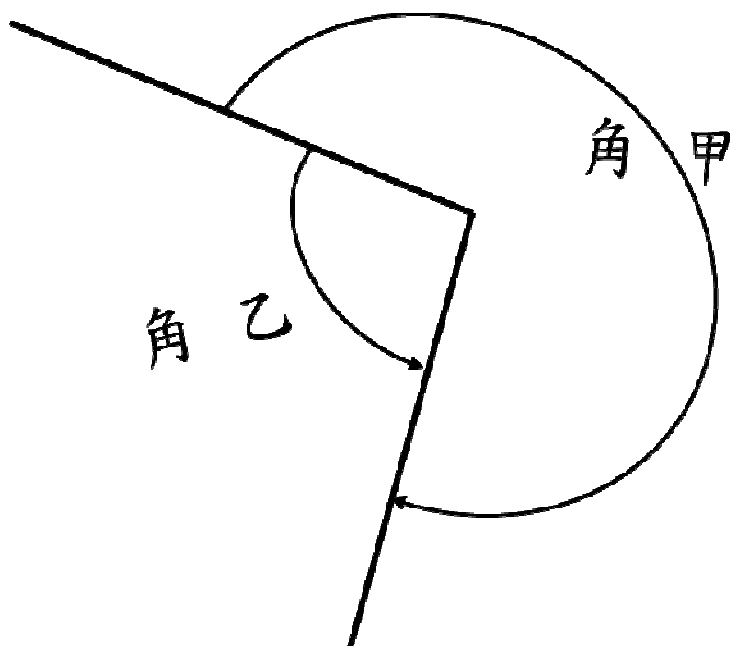
然後問學童：「如何用 180 度的量角器量出大於 180 度的角？」，請學童發表想法。

教師引導學童學習測量大於 180 度角的方法，如下：

- (1) 先延伸角的一邊，讓要測量的角變成兩個角—角 1 和角 2，其中角 1 為平角是 180 度，再量出角 2 的角度是 83 度，角 1 加上角 2 是 263 度，就可以知道要測量的角是 263 度。



- (2) 要測量的角稱為角甲，以角甲的始邊為始邊，依逆時針方向旋轉至角甲的終邊，可以成為另一個角，稱為角乙，角甲和角乙合起來是一個周角，也是 360 度。量出角乙是 97 度，再用 360 度減掉 97 度，所以，要測量的角甲是 263 度。

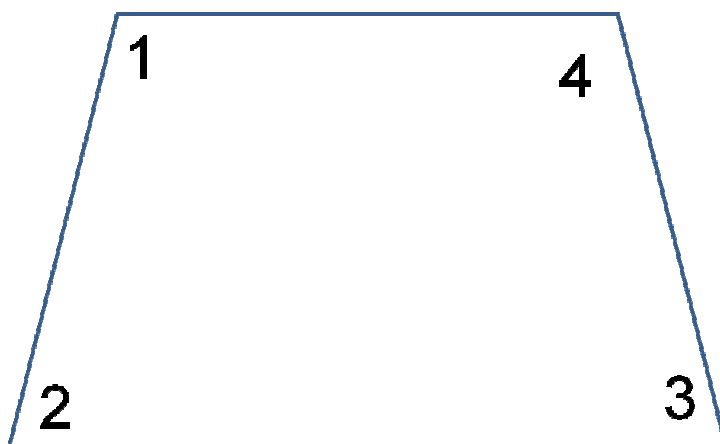


8. 教師發下學習單，讓學童運用量角器測量出學習單中各角的角度，教師巡視行間，適時協助學童正確的測量角的角度。

### 指定作業：

#### 習題一（配合活動二）

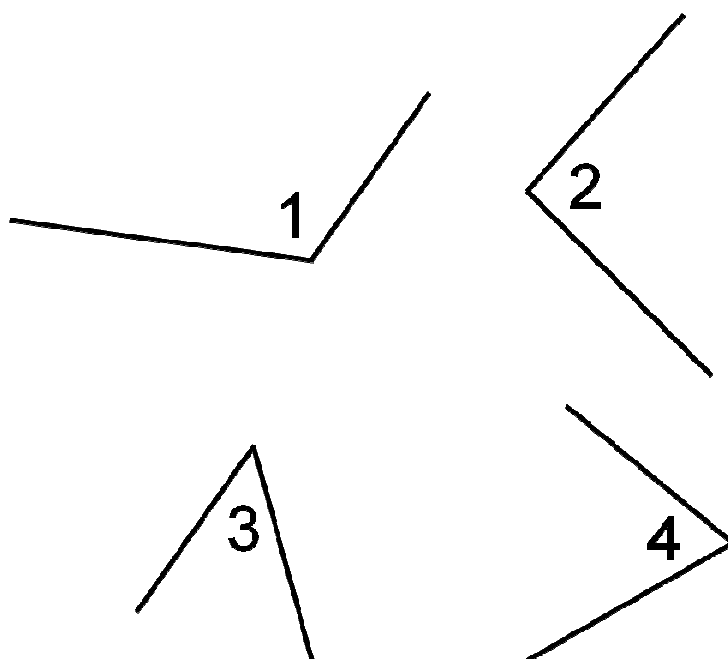
- (1) 下面哪些角比 90 度小？哪些角比 90 度大？



答：小於 90 度的角有 ( )

大於 90 度的角有 ( )

(2) 下面哪些角比 90 度小？哪些角比 90 度大？

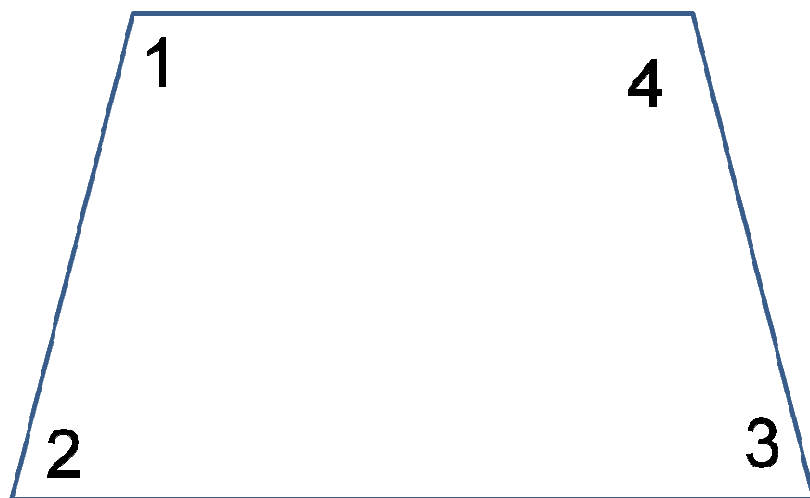


答：小於 90 度的角有 ( )

大於 90 度的角有 ( )

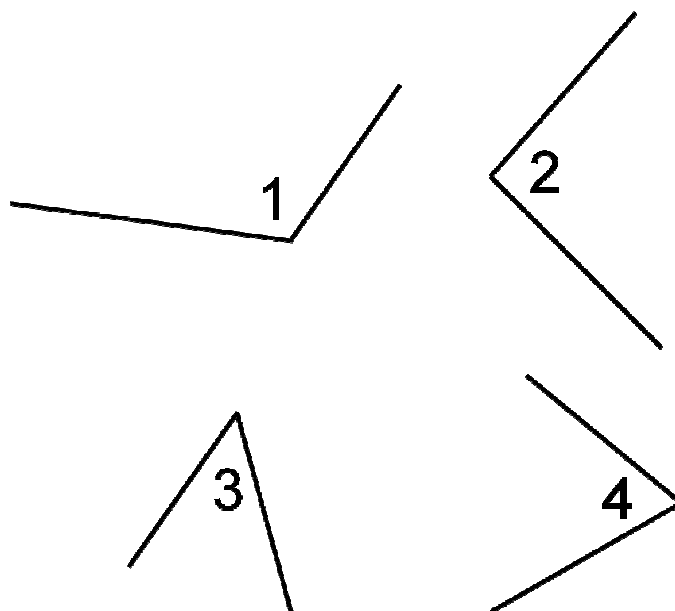
習題二（配合活動二）

(1)量出下列各角的角度。



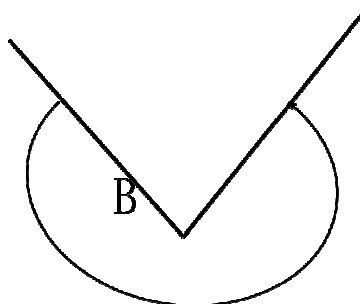
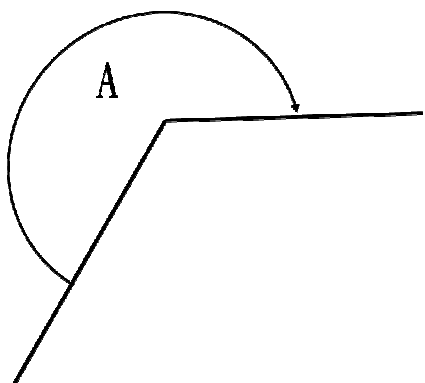
答：角 1 是(                    )；角 2 是(                    )  
 角 3 是(                    )；角 4 是(                    )

(2)量出下列各角的角度。



答：角 1 是(                    )；角 2 是(                    )  
 角 3 是(                    )；角 4 是(                    )

(3)量出下列各角的角度。



答：角 A 是(                    )；角 B 是(                    )

**指定作業參考解答：**

習題一

(1) 2、3，1、4

(2) 3、4，1、2

習題二

(1)104 度，76 度，76 度，104 度

(2)116 度，95 度，50 度，69 度

(3)240 度，280 度

**教學注意事項：**

1. 報讀角度的教學，必須讓學童先確認量角器的中心點要對齊角的頂點，角的始邊必須在 0 度，再由角的終邊在量角器上的刻度報讀角的角度。

2. 關於累數角度的度量的過程，要讓學童了解，不是在報讀刻度，而是由增加 1 度、5 度、10 度，知道數字越大、角度越大。
3. 當學童學習用量角器去測量一個角的角度時，可以讓學童學習先累數量角器上整十的數字，再點數中刻度或小刻度，如：(1) 某角的角度是 43 度，可讓學童先數「10」、「20」、「30」、「40」，再數「41」、「42」、「43」。(2) 某角的角度是 37 度，可讓學童先數「10」、「20」、「30」，再數「35」，最後數「36」、「37」。
4. 學童測量角度時，如果有小誤差，教師不宜認為學童的測量有誤，如：正確的角度是 57 度，學童的測量為 55～59 度都是可以接受的範圍。
5. 學童測量角度及報讀的方法錯誤時，例如：將 55 度報讀為 125 度，有下列兩個方法可以讓學童發現錯誤：(1) 讓學童先指出 0 度的位置，再 10 度、20 度…的累數，便可發現報讀錯誤。(2) 當學童已經知道直角等於 90 度，讓學童將這個角和直角比較，學童由這個角比直角小，知道這個角小於 90 度，進而發現報讀錯誤。

### 教學參考資料：

朱建正等(民 91)。國小數學教材分析－體積和角度。三峽：  
國家教育研究院。



## 第五章：容量與體積

撰寫者：謝堅

### 主題 5-1：體積、容量、容積、液量

#### 認知及數學結構：

國小課程體積教材中，討論的重點是固體的體積，而容量的教材中，討論的重點是液體的體積，因為它們討論的對象相同，本文將體積與容量合併在一起討論。

體積是物質所佔空間的大小，氣體、液體及固體都有體積，其中氣體的體積不易觀察，又很容易受到壓力的改變而影響其大小，因此國小階段不討論氣體的體積；液體的體積會隨意流動，國小階段利用容器當媒介，透過容量討論液體的體積；固體的體積很明確，國小階段直接討論固體的體積。

下面區分成體積與容量、容量與容積、容量與液量三部份，說明固體和液體體積的意義。

## 5-1-1：體積與容量

### 認知及數學結構：

固體的周界是固定的，因此比較容易測量出固體的體積，但是液體的周界不固定，例如地上的一灘水，水會流動，隨時會改變形體，因此無法直接測量液體的體積，必須先用容器將液體的體積固定後，才能測量出液體的體積。當我們將容器裝滿液體時，液體的體積稱為該容器的容量。

以玻璃杯為例，玻璃是固體，玻璃部份所佔的空間，稱為玻璃杯的體積；如果玻璃杯最多能裝 500 立方公分的水，我們稱玻璃杯的容量為 500 毫公升；如果玻璃杯的容量是 500 毫公升，指的是當它裝滿水時，水的體積是 500 立方公分。

由上面的說明可以知道，容量是用來溝通液體的體積，以玻璃杯為例，如果討論的重點是水的體積，我們會說玻璃杯裝滿了 500 立方公分的水，如果討論的重點是容器的容量，我們會說玻璃杯的容量是 500 毫公升。

## 5-1-2：容量與容積

### 認知及數學結構：

一粒米或一顆沙的體積是固定的，但是一堆米或一堆沙的情境和液體相同，會流動並隨時改變周界的形狀，因此可以類比容量的概念，用容積來描述米或沙的量。以一個長、寬、高都是 10 公分的容器為例，當這個容器裝滿液體時，我們稱該容器的容量是 1 公升，當這個容器裝滿米或沙等固體時，我們稱該容器的容積是 1 公升。

日常生活中有兩種描述米或沙的方式，第一種是用重量，現在的量販店中只販售包裝好的米，秤這些米的重量比測量這些米的體積方便，因此，包裝袋上都標示這包米有多重。第二種是用容積，在沒有塑膠袋包裝的年代，用容器裝米來販售，會比挖一些米來秤重量方便，因此米店在零售米時，會用固定的容器為單位裝米來販售，例如稱裝滿一個量斗的米為 1 斗米。我們也使用容積來溝通冰箱的大小，冰箱的容積是 650 公升，指的是冰箱內部完全裝滿固體時，這些固體的體積是 650 立方公寸(1 公寸=10 公分)。

### 5-1-3：容量與液量

#### 認知及數學結構：

學生必須先學會描述容器中有多少液量，才知道容器中最多裝了多少液體，教師可以透過倒水入容器的活動，幫助學生掌握液量的多寡，學生很容易發現，將液體倒入容器時，液體在容器中會愈來愈高，將液體倒出容器時，液體在容器中會愈來愈低。教師也可以透過倒水活動，幫助學生形成液量保留概念，例如將水先倒出後再倒回容器，水量還是一樣多；或幫助學生察覺等量的水，倒入不同的容器中，水量還是一樣多。

當學生能察覺容器中液體的高度和液量的多寡有關之後，就可以開始學習如何描述液量，並說出容器的容量是多少。例如將容器中的水倒入量杯中，測量出水有 5 毫公升，稱容器中水的液量是 5 毫公升，將容器中裝滿水再倒入量杯中，測量出水有 8 毫公升，稱容器的容量是 8 毫公升。

有刻度的量杯是測量液量的工具，常用的液量單位有公升、分公升、豪公升(公撮)和公秉(千公升)，其中 1 公升指的是將長、寬、高都是 10 公分正方體容器裝滿水的水量，1 公秉指的是將長、寬、高都是 1 公尺正方體容器裝滿水的水量，而 10 個 1 分公升合起來和 1 公升一樣多，1000 個 1 豪公升合起來和 1 公升一樣多。

## 5-1-4：體積與容量教學的迷失概念

### 認知及數學結構：

#### (一)最大容量與安全容量

日常生活中用杯子裝水的時候，很少將杯子裝滿水，因為移動裝滿水的杯子時，水會從杯中灑出來，因此裝水時，大約只裝八分或九分滿。

有兩種溝通杯子容量是 300 毫公升的方式，第一種是最大容量，指的是當杯子裝滿水時，水的體積是 300 立方公分，它是一個確定的量，每一個人測量出來的答案都一樣，數學上所討論的容量多是最大容量。第二種是安全容量，指的是儘量裝滿水，並且讓移動杯子時水不會灑出來時，水的體積是 300 立方公分，它不是一個確定的量，因為每一個人對水是否會灑出來的感覺不一定相同，日常生活中所稱的容量多是安全容量。

#### (二)「cc」是體積的單位

日常生活中常說「喝了 500cc 的水」，飲料包裝盒上也經常使用「500cc」描述瓶中有多少飲料，因此很多人都認為「cc」是容量的單位，這是不正確的說法。「cc」是英文「cubic centimeter (立方公分)」的簡記，而立方公分是體積的單位，因此「cc」是體積的單位，ml(毫公升)才是容量的單位。多數人混淆容量和體積的意義，因此誤認為「cc」是容量的單位。

以瓶裝的果汁飲料為例，有三種描述瓶中有多少果汁的方法，第一種是 500cc，第二種是 500g，第三種是 500ml。用 500cc 描述有多少果汁時，訴求的重點是瓶中果汁的體積，說明瓶中果汁的體積是 500 立方公分；用 500g 描述有多少果汁時，訴求的重點是瓶中果汁的重量，說明瓶中果汁的重量是 500g；也就是說，500cc 和 500g 描述的主角是果汁，而不是瓶子的容量。因為果汁的比重比 1 大，所以 500cc 的果汁比 500g 果汁多。

用 500ml 描述有多少果汁時，訴求的重點是瓶子的容量，說明瓶子的容量是 500ml。因為裝瓶時可能有誤差，因此瓶裝飲料的容量指的多是安全容量，而不是最大容量。容量 500ml 指的是瓶內所裝果汁的體積是 500cc。當我們將瓶子裝滿水，這些水的體積是最大容量，最大容量一定比安全容量大，因此用量杯測量倒出來的水時，水的體積會比 500cc 多。

## 主題 5-2：長(正)方體體積公式

### 5-2-1：長(正)方體體積公式

#### 認知及數學結構：

##### (一)體積的測量單位

和選擇單位面積的想法相同，因為點數排列整齊正方體的個數比較方便，因此數學上選擇正方體當作測量體積的單位，稱邊長 1 公分的正方體體積是 1 立方公分，稱邊長 1 公尺的正方體體積是 1 立方公尺。

##### (二)長邊、寬邊及高都是整公分的長方體體積公式。

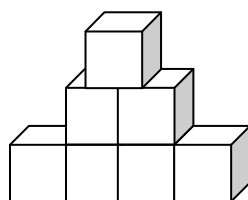
長方體體積公式和長方形面積公式很相似，引入公式的想法也相同，長方形面積公式是利用一排有幾個，有幾排單位面積的方式引入公式「長 $\times$ 寬」，長方體體積公式是利用一排有幾個，有幾排，合起來有幾層單位體積的方式引入公式「長 $\times$ 寬 $\times$ 高」。

但是入公式的流程並不相同，我們很容易在長方形上面覆蓋 1 平方公分的單位面積，並知道當將長方形蓋滿後，覆蓋單位面積的個數和就是長方形的面積。但是我們無法在長方體甲的內部塞入 1 立方公分的單位體積，必須用 1 立方公分的單位體積先複製一個和長方體甲一模一樣的長方體乙，先討論如何算出長方體乙的體積，再透過比對長方體甲各邊邊長的公分數和長方體乙各邊單位體積個數的關係後，才能引導出長方體的體積公式。下面

透過四個步驟，說明如何幫助學生理解長邊、寬邊及高都是整公分的長方體體積公式。

**步驟 1：**先建立單位體積 1 立方公分的概念，知道  $a$  個 1 立方公分合起來立體的體積是  $a$  立方公分。

學童知道邊長 1 公分的正方體體積是 1 立方公分，下圖中立體的體積和 7 個 1 立方公分合起來一樣大，所以圖中立體的體積是 7 立方公分。

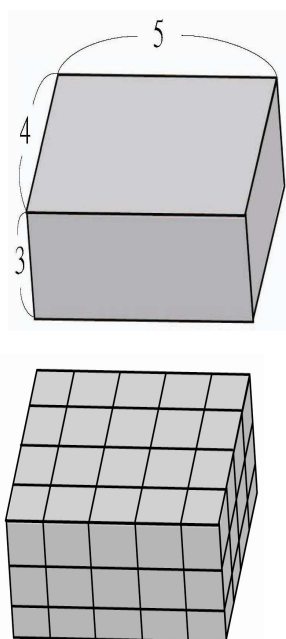


**步驟 2：**給定一個長方體甲，再用 1 立方公分的白色積木堆疊出一個和長方體甲一模一樣的長方體乙，求出長方體乙的體積，並用乘法算式記錄計算體積的過程。

教師拿出一個長 5 公分、寬 4 公分、高 3 公分的長方體甲，要求學生計算長方體甲的體積是多少立方公分，因為無法在長方體甲的內部塞入 1 立方公分的白色積木，無法點數長方體甲和幾個白色積木合起來一樣大，因此教師應要求學生先用白色積木複製一個和長方體甲一模一樣的長方體乙，長方體乙的體積會和長方體甲的體積一樣大。

長方體乙是用白色積木堆疊出來的，因此可以先用「一排有

5 個，有 4 排」的方法，利用乘法算式「 $5 \times 4 = 20$ 」算出長方體乙的底層是由 20 個白色積木合成的，接著再用「有 3 層」的方法，利用乘法算式「 $20 \times 3 = 60$ 」算出長方體乙是由 60 個白色積木合成的，並用併式「 $(5 \times 4) \times 3 = 60$ 」摘要的記錄解題過程。因為長方體甲和長方體乙一模一樣，所以長方甲的體積也是 60 立方公分。



**步驟 3：**察覺長方體甲長、寬、高邊長的公分數和長方體乙長、寬、高邊白色積木個數間的關係。

當學生能使用乘法「 $(5 \times 4) \times 3 = 60$ 」算出長方體乙的體積是 60 立方公分後，教師可以透過比對長方體甲和長方體乙，幫助學生察覺乘法算式中 5 是長方體乙長邊白色積木的個數，和長方體甲長邊的長度 5 公分有關，4 是長方體乙寬邊白色積木的個數，和長方體甲寬邊的長度 4 公分有關，3 是長方體乙高邊白色積木

的個數，和長方體甲高邊的長度 3 公分有關。

透過邊長公分數和白色積木個數的關係，教師接著幫助學生察覺長方體甲長邊是 5 公分，也就是底層一排和 5 個白色積木一樣多，寬邊是 4 公分，也就是最底層和 4 排白色積木一樣多，高邊是 3 公分，也就是長方體甲和 3 層白色積木一樣多。

**步驟 4：**利用長、寬、高邊的公分數，直接用乘法算出單位體積的個數，並形成長乘以寬乘以高公式算法的共識

長方體甲的長邊是 5 公分，表示底層一排和 5 個白色積木接起來一樣長，寬邊是 4 公分，表示底層是由 4 排白色積木合起來，因此可以透過長邊及寬邊的公分數，利用一排有幾個，有幾排的方式算出長方體底層的體積，並得到「長方體底層體積＝長邊的公分數×寬邊的公分數」的結果。

長方體甲的高邊是 3 公分，表示長方體甲有 3 層，因此可以透過高邊的公分數，利用有幾層的方法算出長方體甲的體積，並得到「長方體體積＝(長邊的公分數×寬邊的公分數)×高邊的公分數」的公式。當學生有一些利用上述公式的解題經驗後，教師可以將公式「長邊的公分數×寬邊的公分數×高邊公分數」簡稱為「長×寬×高」。

## 5-2-2：長(正)方體體積公式的迷思概念

認知及數學結構：

### (一)不宜透過堆疊白紙引入長方體體積公式

先拿出一張已知長邊和寬邊的長方形白紙，告訴學生這張白紙的面積是「長 $\times$ 寬」，再說明當很多張相同的白紙堆疊在一起時，就會疊成一個長方體，這個長方體體積的大小和高有關，得到長方體的體積公式是「長 $\times$ 寬 $\times$ 高」。想想看，這種教學方式合理嗎？

國小階段體積教學的重點是點數立體是由多少個單位體積合起來的，上面這種教學方式是本末倒置的教學，其目的是幫助學生記憶長方體的體積公式。教師們都知道，平面是沒有厚度的，如果很多張白紙堆疊在一起會變成一個長方體，已經預告一張白紙也是有厚度的，也就是說，每一張白紙都是長方體。

必須先知道長方體的體積是「長 $\times$ 寬 $\times$ 高」，才能透過上面的方法導出白紙所堆疊成成長方體的體積。例如一張白紙的長度是  $a$ 、寬度是  $b$ 、厚度是  $d$ ，可以利用長方體體積公式算出這張白紙的體積是  $axbxd$ ，因此當  $n$  張白紙堆疊成長方體時，長方體的體積是  $axbxd + axbxd + \dots + axbxd = axbx(d + d + d + \dots + d) = axbxnd$ ，也就是白紙所堆疊成成長方體的體積「長 $\times$ 寬 $\times n$ 張白紙的厚度」。

### (二)不宜透過在長方體盒內堆疊白色積木引入長方體體積公式

拿出一個內部長 5 公分、寬 4 公分、高 3 公分的木盒，先用邊長 1 公分的白色積木裝滿底層，並用乘法算式「 $5 \times 4 = 20$ 」算出底層有 20 個白色積木，接著裝第二和第三層，發現裝三層後能將木盒裝滿，再用乘法算式「 $(5 \times 4) \times 3 = 20 \times 3 = 60$ 」算出三層共有 60 個白色積木，導出長方體的體積公式是「長 $\times$ 寬 $\times$ 高」。想想看，這種教學方式合理嗎？

採用這種教學方式的教師混淆長方體木盒體積和長方體木盒容積的意義。體積是物體所佔空間的大小，長方體木盒的體積指的是木頭部份的體積，必須知道木頭厚度等資訊，才能求出長方體木盒的體積。

長方體木盒內能裝滿 60 個白色積木，指的是長方體木盒的容積是 60 毫公升，或堆疊出這 60 個白色積木的體積和是 60 立方公分，它們都與長方體木盒的體積無關。

## 主題 5-3：角柱及圓柱體積公式

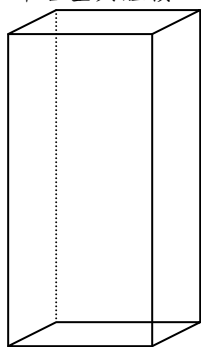
### 5-3-1：角柱的體積公式

認知及數學結構：

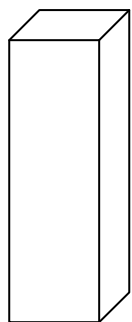
#### (一)柱體的體積

隨著柱體底面形狀的不同，可以給予柱體不同的名稱以利區別，例如底是圓形區域的柱體稱為圓柱，底是多邊形區域的柱體稱為角柱，其中底面是三角形區域的柱體稱為三角柱，底是四邊形區域的柱體稱為四角柱，底是五邊形區域的柱體稱為五角柱等，以此類推。

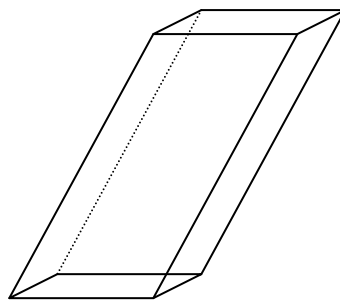
依據側面和底面是否垂直的關係，我們可以將角柱體區分成兩類，第一類是直角柱，直角柱的側面是長方形，側面和底面互相垂直；當直角柱的底面是正多邊形時，我們稱這類直角柱為正角柱。另一類是斜角柱，斜角柱的側面是平行四邊形，側面和底面不垂直。下圖中的圖一是直四角柱，其底是長方形、側面是長方形，側面和底面互相垂直；圖二是正四角柱，其底是正四邊形、側面是長方形，側面和底面互相垂直；圖三是斜四角柱，其底也是長方形，側面是平行四邊形，側面和底面不垂直。國小課程只討論直角柱，並將直角柱稱之為角柱。



圖一



圖二



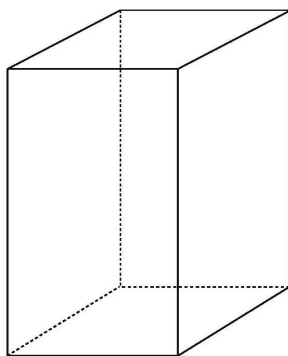
圖三

為了節省教學的時間，國小課本都沒有詳細說明引入角柱及圓柱體積公式的過程，只在形式上類比長方體體積公式，直接宣告角柱及圓柱的體積公式都是「底面積 $\times$ 高」。筆者同意不需要花太多的時間澄清柱體體積公式的意義，但是建議教師不能直接要求學童記憶柱體體積公式，仍要說明引入直角柱及直圓柱體積公式的過程，下面簡單說明如何引入直角柱及直圓柱的體積公式。

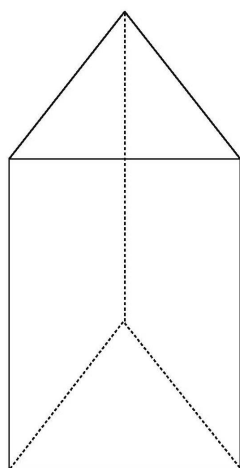
直四角柱就是長方體，長方體體積公式是學生的舊經驗，教師可以先將長方體的體積公式「(長 $\times$ 寬) $\times$ 高」改記成「底面積 $\times$ 高」，再說明為什麼其它直角柱的體積公式也是「底面積 $\times$ 高」。

以底面積都是 12 平方公分、高都是 8 公分的長方體和直三角柱為例(圖四)，因為長方體的底面積是 12 平方公分，所以直四角柱的底層是由 12 個 1 立方公分的小正方體組成，也就是直四角柱底層的體積是 12 立方公分，直三角柱的底面積也是 12 平方公分，所以直三角柱底層的體積也是 12 立方公分；直四角柱和直三角柱的高都是 8 公分，也就是都有 8 層，可以利用「底面積 $\times$ 幾層(高

的公分數)」算出直四角柱和直三角柱的體積是 96 立方公分，也就是直角柱都可以透過公式「底面積 $\times$ 高」算出體積。



圖四



圖五

## 5-3-2：圓柱的體積公式

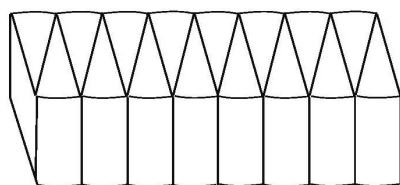
認知及數學結構：

### (一)圓柱

依據上、下兩底圓心的連線和底面是否垂直的關係，可以將圓柱體區分成兩類，第一類是直圓柱，直圓柱上、下兩底圓心的連線和底面垂直；第二類是斜圓柱，斜圓柱上、下兩底圓心的連線和底面不垂直。國小課程只討論直圓柱，並將直圓柱稱之為圓柱。

### (二)圓柱的體積

有兩種說明直圓柱體積公式「底面積 $\times$ 高」的方法，第一種是類比上面說明直角柱體積公式的方法，先算出底層的體積，再乘上層數就可以算出直圓柱的體積；第二種是類比引入圓面積公式的方法，先將直圓柱切成兩個半圓柱，再將兩個半圓柱都切成很多個全等的扇形柱，將這兩個切成扇形柱的半圓柱上下交錯疊合起來，會變成一個接近直四角柱的立體(圖五)，直四角柱的體積是「底面積 $\times$ 高」，所以直圓柱的體積也是「底面積 $\times$ 高」。



圖五

### (三)圓錐的體積

國小階段並沒有引入錐體的體積公式，教師們能透過觀察具體現象，幫助學生察覺角錐的體積是等底等高角柱體積的三分之一，圓錐的體積是等底等高圓柱體積的三分之一。

可以用玻璃或透明塑膠做出同底等高的圓柱和圓錐容器，先在圓錐中裝滿水，然後將水倒入圓柱中，學生可以發現倒3次水之後，圓柱剛好裝滿水，因此圓柱的容量是圓錐的3倍。如果學生理解容量就是液體體積的意義，就知道同底等高圓柱的體積是圓錐體積的3倍，也就是圓錐的體積是圓柱的三分之一。當我們將圓柱和圓錐容器改為角柱及角錐容器，也能得到同底等高角錐的體積是角柱體積三分之一的結果。

### 5-3-3：不規則物體的體積

#### 認知及數學結構：

多數人都聽過阿基米德在洗澡的時候，利用排容原理發現如何辨識皇冠是否慘了其它物質的故事，國小階段可以利用排容原理算出不規則立體的體積。教師可以準備一些 1 立方公分的積木(可以沉入水中)，以及一個裝滿水的盒子，先將 a 個積木完全沉入水中，再用量杯測量排出的水量，幫助學生察覺 a 個 1 立方公分積木所排出的水量是 a 毫公升。

如果教師認為上面活動產生的誤差很大，也可以透過比較活動，幫助學生察覺 a 個 1 立方公分白色積木的體積和 a 毫公升水的體積一樣大。例如拿出兩個相同的量杯，並裝了一樣多的水，先在其中一個量杯內放入 a 個白色積木，接著在另一個量杯內倒入 a 毫公升的水，幫助學生察覺兩個量杯中的水位還是一樣高，所以 a 個 1 立方公分積木和 a 毫公升水的體積一樣大。

當學生形成完全沉入水中物體的體積，和所排出水量的體積或量杯中升高的水量一樣多的共識後，就可以測量形狀不規則物體的體積，以測量一塊石頭為例，可以先將一個容器裝滿水，讓整個石頭沉入水中，再用量杯測量溢出來水的體積，溢出來水的體積就是石頭的體積。

**主題 5-1-1：體積與容量**

撰寫者：房昔梅

授課對象：國小五年級學生

**先備知識：**

1. 認識體積，並能計算長方體與正方體的體積。
2. 知道邊長 1 公分的正方體體積是 1 立方公分，記成  $1\text{cm}^3$ 。
3. 認識容量，並能以 1ml 為單位，報讀容量的刻度。

**教學目標：**

透過操作和觀察，了解物體排開的水量，和物體的體積是一樣的。

**教學時間：**40分鐘（一節課）**教學說明：**

1. 透過在原就盛有水的量筒中加入水的動作，幫助學童複習當量筒中的水位上升時，代表液量增加；相對的，把量筒中的水倒出部份，會看到水位下降，代表液量減少。
2. 教師透過在盛有水的量筒中投入積木的動作，引導學童觀察：當投入體積為 1 立方公分的積木時，量筒中的水位就會上升 1 小格（1 毫升），代表 1 立方公分和 1ml 一樣多，可以記成  $1\text{cm}^3 = 1\text{cc} = 1\text{ml}$ 。（水的體積比較少用立方公分來描述，cc 是立方公分的簡寫）。
3. 將積木投入裝滿水的容器中時，溢出的水量會和投入的積木體積相等。假設在裝滿水的容器中放入體積為 10 立方公分的積

木，將會溢出 10 cc（或 10ml）的水，因此可以記成：

$$10\text{cm}^3 = 10\text{cc} = 10\text{ml}。$$

4. 透過實作，引導學童察覺：計算不規則物體的體積時，只要將不規則的物體沒入水中，計算水位上升的刻度，就可以得知物體的體積。
5. 關於 ml 的說法，常用「毫公升」或「毫升」兩種，這兩種說法通用，以下皆以「毫升」表示。

### 教具準備：

1. 容量分別為 50ml（每一刻度為 1ml）和 250ml（每一刻度為 2ml）的透明量筒及 2000ml（每一刻度為 20ml）的透明量杯各一個。
2. 體積為 1 立方公分的正方體積木約 30 個。
3. 大型可盛水容器一個。
4. 不規則形狀且可沒入水中的物體若干個。

### 活動一、認識 1 立方公分積木的體積等於 1ml

**活動目標：**透過將積木沈入水中的活動，引導學童觀察 1 立方公分積木的體積等於 1ml。

### 活動流程：

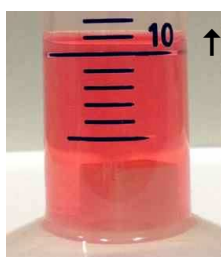
1. 教師拿出一支容量為 50ml 的量筒，在裡面倒入 10ml 的水，首先向學童展示並提問：這個量筒的每一個刻度代表幾毫升？說

說看，你是怎麼知道的？引導學童回答：1 毫升。因為從 10 毫升到 20 毫升之間共有 10 個刻度，所以我知道每一個刻度都是 1 毫升。

2. 教師接著提問：說說看，這個量筒中裝了多少毫升的水？請各組學童依序觀察後確認：量筒中有 10 毫升的水。



3. 接著教師拿出一個邊長 1 公分的正方體積木，向學童提問：這個小積木的體積是多少立方公分？引導學童回答：1 立方公分。
4. 教師把體積為 1 立方公分的積木放進盛有 10 毫升水的量筒中，使積木完全沒入水中。並且提問：說說看，量筒的水位有什麼變化？



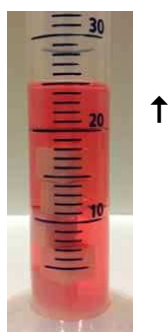
5. 學童分批觀察量筒中水位的變化後，回答：量筒的水位上升了 1 格，從 10 毫升上升到 11 毫升的刻度。
6. 教師提問：沒有放積木時，量筒的水位是 10 毫升的位置，放入積木後，量筒的水位指向 11 毫升，說說看，水位上升了幾

格？也可以說是幾毫升？

7. 引導學童回答：水位上升了 1 格，也就是 1 毫升。
8. 教師引導學童歸納：放進 1 立方公分的積木，水位就上升 1 毫升。說說看：積木的體積和水量有什麼關係？
9. 引導學童回答：投入的積木體積等於上升的水量。
10. 教師引導學童作成記錄： $1\text{cm}^3=1\text{cc}=1\text{ml}$ 。
11. 教師接著用同一個量筒，裝入 20ml 的水之後，向學童展示並提問：說說看，量筒中裝了多少毫升的水？讓學童依序觀察後確認：量筒中有 20 毫升的水。



12. 教師接著把 5 個體積為 1 立方公分的積木放進盛有 20 毫升水的量筒中，使積木完全沒入水中。並且提問：說說看，現在量筒的水位是多少毫升？



13. 學童分批觀察量筒中水位高度的變化後，回答：量筒的水位

刻度指著 25 毫升。

14. 教師提問：說說看，量筒的水位上升了幾格？也是幾毫升？

引導學童回答：量筒的水位上升了 5 格，也就是 5 毫升。

15. 教師向學童提問：你們知道量筒的水位為什麼會上升嗎？

16. 引導學童回答：因為放進了一些積木，放進量筒中的積木體積就等於上升的水量。

17. 教師作結論：同學們也可以這樣記： $5\text{cm}^3=5\text{cc}=5\text{ml}$ 。

18. 教師接著拿出 A、B 二支同樣裝了 20 毫升水的量筒，並請兩位同學上台。一位同學在 A 量筒中倒入 5 ml 水，另一位同學在 B 量筒中置入 5 顆體積為 1 立方公分的小積木，請同學分組往前觀察：A、B 二支量筒的水位都指著 25 ml 的刻度。教師向學生說明：這個現象可以證明  $5\text{cm}^3=5\text{cc}=5\text{ml}$ 。

19. 教師向學童展示一個已經投入 20 個體積為 1 立方公分的積木的量筒，首先提問：這個量筒的每一個刻度都是多少毫升？說說看，你是怎麼知道的？引導學童回答：這個量筒的每一個刻度都是 2 毫升。因為從 10 到 30 是 20 毫升，但是只有 10 個刻度，所以我知道一個刻度是 2 毫升。教師接著提問：量筒的水位是多少毫升？



20. 引導學童觀察後確認：量筒的水位是 130 毫升。

21. 接著教師當學童的面，將量筒中的積木全數取出後，對學童提問：現在量筒的水位是多少毫升的刻度？



22. 讓學童依序觀察後回答：量筒的水位指著 110 毫升的刻度。

23. 教師提問：剛才共拿出多少個 1 立方公分的小積木？請學童點數後回答：拿出 20 個小積木。

24. 教師繼續提問：拿出 20 個小積木後，水位下降幾毫升？說說看，你是怎麼知道的？

25. 引導學童回答：因為  $130 - 110 = 20$ ，所以我知道拿出 20 個小積木後，水位下降了 20 毫升。

26. 教師引導學童作成記錄： $20\text{cm}^3 = 20\text{cc} = 20\text{ml}$ 。

27. 如果學童難以相信積木的體積等於上升的水量，教師可以準備

一個裝滿水的量筒，放在一個大型可盛水的容器中。

28. 接著教師將 50 個體積為 1 立方公分的積木，投入裝滿水的量筒中，並使積木完全沒入水中，讓學童觀察水溢出的情形。

29. 教師向學童提問：能不能知道溢出的水量有多少？

30. 學童可能回答：因為  $50 \text{ cm}^3 = 50\text{cc} = 50\text{ml}$ ，所以放入 50 個 1 立方公分積木應該會溢出 50 毫升的水。

31. 教師提問：怎麼檢驗溢出的水是不是 50 毫升呢？

32. 引導學童將溢出的水倒入量筒中並報讀：溢出的水有 50 毫升。

33. 教師提問：50 個 1 立方公分積木的體積和 50 毫升水一樣多，怎麼記錄？

34. 引導學童作成紀錄： $50\text{cm}^3 = 50\text{cc} = 50\text{ml}$ 。

## 活動二、計算不規則物體的體積

**活動目標：**理解可以透過「固體體積與水的體積相等」的想法，計算不規則形體的體積。

### 活動流程：

1. 教師拿出一個不規則形狀的物體，請問學童：如何測量物體的體積？
2. 學童可能回答：我先拿一個可以放進物體的透明量杯，裝進足夠淹沒物體的水量，記下刻度。接著將物體放入量杯並沒入水

中，再記錄刻度。



500ml



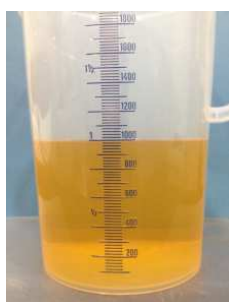
620ml

3. 最後將兩個刻度相減，計算上升的水量，就知道物體的體積。

上升的水量是  $620 - 500 = 120$  (ml)

所以不規則物體的體積就是 120 立方公分

4. 教師接著展示另一組量筒，請學童計算不規則物體的體積。



↑

5. 學童的作法如下：未放入物品前的水量是 1000ml，放入物體後

的水量是 1360ml；增加的水量是  $1360 - 1000 = 360$  (ml)

所以物體的體積就是 360 立方公分。

### 教學注意事項：

1. 教師在透明量筒中裝水讓學童觀察時，可以滴一些顏料在水


中，將水稍稍染色，方便學童觀察。

2. 學童觀察量筒中的水量時，教師應指導學童視線對齊水平面，以免觀察的角度不同，導致觀察結果不同。
3. 學童將溢出的水倒進量筒中檢驗時，必定會殘留部份水滴在大型容器中，部份學童可能因此質疑量筒中的水量不足。教師應向學童解釋：這類些微的誤差是可以被接受的。
4. 教師應注意量筒上的最小刻度，指導學童作正確的報讀。如果量筒的最小刻度是 1ml，學童可以報讀的最小單位就是 1 毫升；如果量筒上的最小刻度是 5ml，學童只能夠以 5 毫升為單位報讀；如果量筒上的最小刻度是 10ml，學童只能夠以 10 毫升為單位報讀。


### 指定作業：

- 一、每一個小積木的體積都是 1 立方公分。填一填，容器內的水會上升到哪個刻度？是多少毫升？



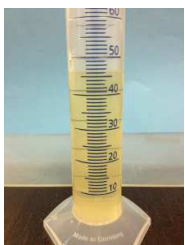
- (1) ，放進 23 個小積木後，是（    ）毫升。



- (2) ，放進 17 個小積木後，是（    ）毫升。



(3) 放進 18 個小積木後，是 ( ) 毫升。



(4) 放進 19 個小積木後，是 ( ) 毫升。

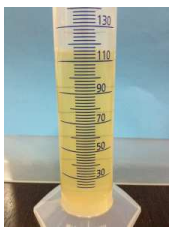


(5) 放進 16 個小積木後，是 ( ) 毫升。

二、填一填，積木的體積是多少立方公分：



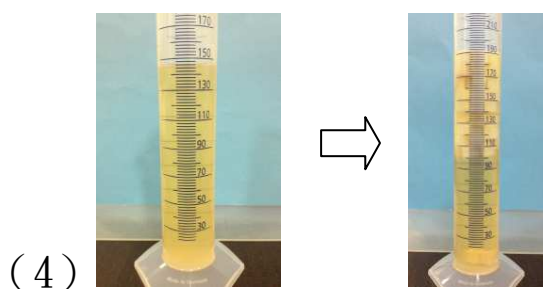
(1) 積木的體積是 ( ) 立方公分。



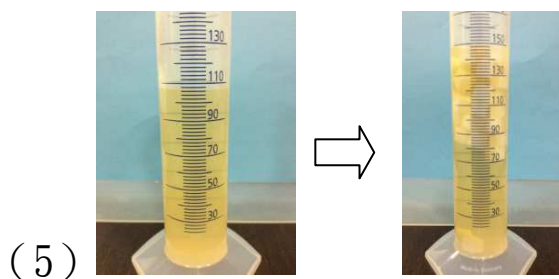
(2) 積木的體積是 ( ) 立方公分。



(3) 積木的體積是 ( ) 立方公分。



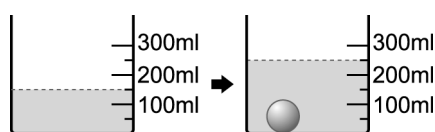
積木的體積是 ( ) 立方公分。



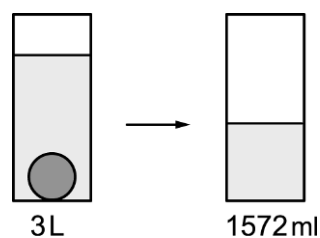
積木的體積是 ( ) 立方公分。

### 三、計算不規則物體的體積

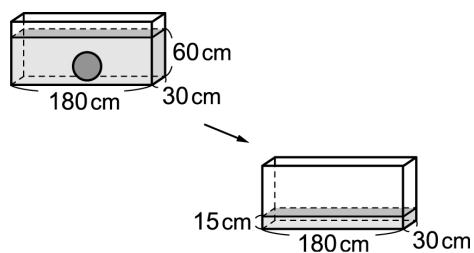
(1)



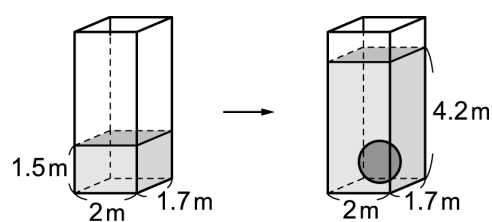
(2)



(3)



(4)



### 指定作業解答：

一、(1) 73 毫升 (2) 54 毫升 (3) 42 毫升

(4) 65 毫升 (5) 81 毫升

二、(1) 22 立方公分 (2) 28 立方公分 (3) 42 立方公分

(4) 46 立方公分 (5) 44 立方公分

三、(1) 100 立方公分 (2) 1428 立方公分

(3) 243000 立方公分 (4) 9.18 立方公尺

### 教學參考資料：

周筱亭等 (民95)。國小數學教材分析- 體積和角度。三峽：國家教育研究院。

周筱亭等 (民95)。國小數學教材分析- 重量和容量。三峽：國家教育研究院。

## 主題 5-2-1：長（正）方體體積公式

撰寫者：房昔梅

### ～長方體的體積公式

授課對象：國小五年級學生

先備知識：

1. 知道長方形面積公式，並能進行運算。
2. 知道邊長為 1 公分的正方體體積是「1 立方公分」，並能以 1 立方公分為單位，計數立體積木的體積。

教學目標：

透過以小正方體積木一層一層堆疊成長方體的活動，認識長方體的體積公式，並能進行運算。

教學時間：40分鐘（一節課）

教學說明：

1. 教師給定一個長方體積木甲，指導學童使用 1 立方公分的積木堆疊出一個和積木甲一模一樣的長方體乙，並算出所使用 1 立方公分積木的個數。
2. 引導學童使用乘法公式記錄計數 1 立方公分積木的過程。
3. 指導學童將長方體乙用透明膠帶黏貼固定後，再用長方體乙的各邊積木數比對積木甲的各邊長，確認長方體甲的長、寬、高邊各等於幾個積木。
4. 指導學童利用長、寬、高邊的積木數相乘，算出所需正方體積

木的總個數，形成以「長×寬×高」的公式計算長方體體積的共識。

5. 引導學童透過計算長方體體積的方式，計算複合形體的體積。
6. 教師引導學童探討：欲求出容器體積時，可以使用直接計算容器各部份的體積再相加；或計算容器外部體積後，扣除容器內部容積等兩種方法。

### 教具準備：

1. 教師為每位學童準備 1 立方公分的正方體積木約 30 個。
2. 教師準備若干個長 4 公分、寬 3 公分、高 2 公分的長方體實心積木供各組學童使用，每組 1 個。
3. 厚度為整公分的方形容器若干個。
4. 邊長為整公分的長方體及正方體積木若干個。

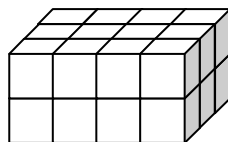
### 活動一、計數堆疊成長方體所需的 1 立方公分積木的個數

**活動目標：**透過點數 1 立方公分的正方體積木，計算長方體積木的體積。

### 活動流程：

1. 教師拿出一個長 4 公分、寬 3 公分、高 2 公分的長方體實心積木，向各組學童提問：這個積木的體積是多少立方公分？
2. 教師請每位學童使用桌面上的 1 立方公分積木堆疊成與積木甲

相同大小的長方體乙。



3. 教師提問：怎麼知道你堆出來的積木乙和積木甲一樣大呢？

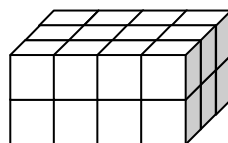
請學童比對積木甲和積木乙，進行檢驗。

4. 請學童拿出透明膠帶將堆疊好的積木乙各邊固定，接著依序進行長邊、寬邊及高邊的比對，確定積木乙的各邊長都和積木甲相等。

5. 教師提問：數一數，積木乙是用幾個白色積木堆成的？

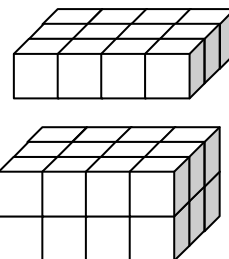
指導學童進行點數，並說明點數的方法。

6. 學童回答：是用 24 個積木堆成的。



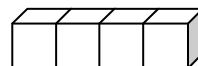
7. 說說看，你是怎麼數的？

學童回答：我先算出一層有 12 個積木，  
堆了 2 層， $12 \times 2$ ，就是 24 個積木。

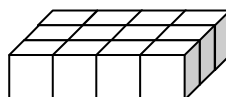


8. 教師提問：怎麼算出一層有幾個積木呢？

學童回答：我先算一排有 4 個積木，



一層有 3 排， $4 \times 3 = 12$ ，



就知道一層有 12 個積木了。

9. 教師請學童用一個乘法算式把數積木的過程記錄下來。

學童可能的記法如下： $4 \times 3 \times 2 = 24$

教師：說說看，算式中的數字各表示什麼？

引導學童回答：4 代表積木甲的長邊正好和 4 個積木合起來一樣長，表示一排有 4 個積木；3 表示積木甲的寬邊正好和 3 個積木合起來一樣長，表示一層共有 3 排積木，也就是  $4 \times 3 = 12$  個；2 表示積木甲的高邊正好和 2 個積木合起來一樣長，代表積木共有 2 層，共用了  $12 \times 2 = 24$  個積木。

10. 教師引導學童作結論：所以計算長方體體積，應該要知道哪些條件？引導學童回答：計算長方體體積時，只要知道長方體的長邊、寬邊和高邊的公分數，就可以把它想成是由幾個白色積木堆疊而成的，長邊代表一排有幾個，寬邊代表一層有幾排，高代表積木共有幾層；就可以用「長 $\times$ 寬 $\times$ 高」的算式計算長方體體積。
11. 接著，教師拿出一顆邊長各為 5 公分、5 公分和 10 公分的長方體積木，請問學童：如果不透過堆疊 1 立方公分的正方體積木，怎樣才能知道積木的體積？
12. 引導學童回答：只要量出各邊的長度，就可以想像成堆疊積木的樣子。
13. 教師提問：量出長方體各邊的長度代表什麼？
14. 引導學童回答：長邊代表一排有幾個，寬邊代表一層有幾排，高代表積木共有幾層；量出長方體的長、寬、高分別是 5 公

分、5公分和10公分，就可以把長方體積木想像成一組堆疊好的小積木：一排有5個小積木，每一層都排了5排小積木，往上堆疊了10層，就和長方體積木一樣大了。

15. 教師提問：怎麼數出這堆積木共有幾個呢？

16. 引導學童回答：一排5個積木，合併5排積木是一層，代表一層有 $5 \times 5 = 25$ 個小積木，每一個小積木都是1立方公分，每一層就有25立方公分。往上排了10層，代表全部的積木有 $25 \times 10 = 250$ 個，也就是250立方公分。用這種數積木的想法，就可以算出長方體積木的體積了。

17. 教師引導學童歸納：所以日後計算長方體的體積時，可以用什麼方法？

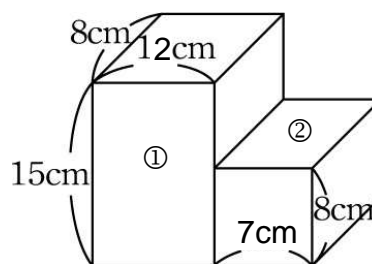
18. 引導學童回答：只要分別測量出長方體的長、寬、高再相乘，就可以計算長方體的體積了。

## 活動二、計算複合形體的體積

活動目標：透過計算長方體體積的方式，計算複合形體的體積。

活動流程：

1. 教師展示如下圖由兩個長方體組成的複合形體積木，請學童計算積木的體積，並說明想法。



2. 學童可能的作法一：

分別計算①和②兩個長方體積木的體積再相加。

作法如下：①  $15 \times 10 \times 12 = 1800$

$$\textcircled{2} \quad 8 \times 8 \times 12 = 768$$

$$1800 + 768 = 2568$$

答：2568 立方公分

3. 學童可能的作法二：

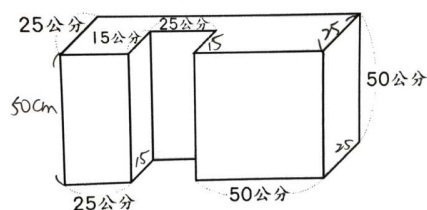
$$(10 + 8) \times 15 \times 12 = 3240$$

$$8 \times 7 \times 12 = 672$$

$$3240 - 672 = 2568$$

答：2568 立方公分

4. 教師展示如下圖的形體，請學童計算體積並說明想法：



5. 學童可能的想法一、

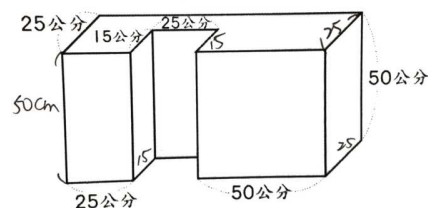
先將積木想成一個大的長方體（以虛線補足），再扣除中間較小的長方體（由虛線所補足的部份），作法如下：

$$\text{大的長方體：} (25 + 25 + 50) \times 25 \times 50 = 125000$$

$$\text{小的長方體：} 15 \times 25 \times 50 = 18750$$

$$\text{相減：} 125000 - 18750 = 106250$$

答：106250 立方公分



### 6. 學童可能的想法二、

將積木分成左、中、右等三個長方體，分別計算體積後相加。

作法如下：

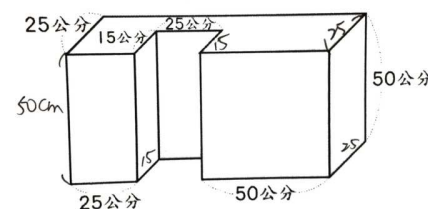
$$\text{左側長方體：} 25 \times 25 \times 50 = 31250$$

$$\text{中間長方體：} 25 \times 10 \times 50 = 12500$$

$$\text{右側長方體：} 25 \times 50 \times 50 = 62500$$

$$\text{相加：} 31250 + 12500 + 62500 = 106250$$

答：106250 立方公分



### 7. 教師展示如下圖容器，請學童計算容器的體積：

### 8. 學童可能的作法一、

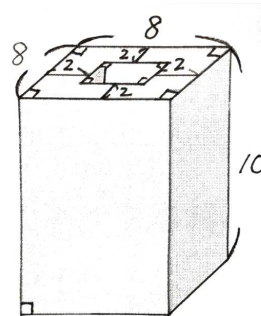
先將容器內容空心部份補足成實心長方體，計算體積後，再扣除補足部份的體積。作法如下：

$$\text{實心長方體體積：} 8 \times 8 \times 10 = 640$$

$$\text{補足部份的體積：} 4 \times 4 \times 8 = 128$$

$$\text{相減：} 640 - 128 = 512$$

答：512 立方公分



### 9. 學童可能的作法二、

將容器想成前、後、左、右及底部等五個長方體，分別計算出體積後相加。

作法之一：

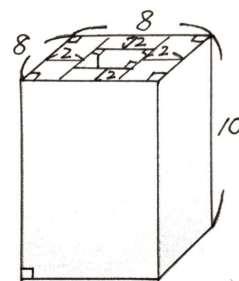
$$\text{先算左右：} (8 \times 2 \times 10) \times 2 = 320$$

$$\text{再算前後：} (4 \times 2 \times 10) \times 2 = 160$$

$$\text{計算底部：} 4 \times 4 \times 2 = 32$$

$$\text{相加：} 320 + 160 + 32 = 512$$

答：512 立方公分



作法之二：

$$\text{先算左右：} (8 \times 2 \times 8) \times 2 = 256$$

$$\text{再算前後：} (4 \times 2 \times 8) \times 2 = 128$$

$$\text{計算底部：} 8 \times 8 \times 2 = 128$$

$$\text{相加：} 256 + 128 + 128 = 512$$

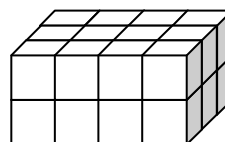
答：512 立方公分

### 活動三、計算柱體的體積

活動目標：透過計算長方體體積的方式，計算柱體的體積。

活動流程：

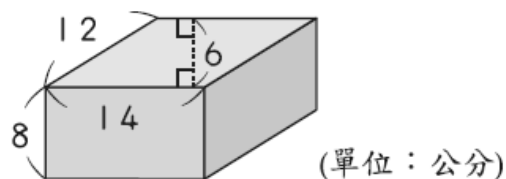
1. 教師展示如右圖的長方體積木



並請學童說明計算這個長方體體積的方法。

2. 引導學童回答：我先算出一層的體積，再乘以高有幾層，就可以算出長方體的體積。一層是  $4 \times 3 = 12$ ，這個長方體共有 2 層，所以用  $4 \times 3 \times 2 = 24$ ，就可以算出長方體的體積。

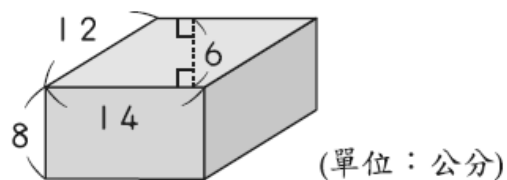
3. 教師提問：說說看，我們可以用計算長方體體積的方式，算出這個四角柱的體積嗎？為什麼？



4. 引導學童回答：因為柱體的兩個底全等，從上到下都一樣粗，所以可以用計算長方體體積的方法，先計算一層的體積，再把一層的體積乘以高有幾層，就可以算出四角柱的體積了。

5. 教師歸納：同學說的「一層的體積」，我們稱為「底面積」；所以只要我們可以用「底面積 $\times$ 高」的算式來計算各種柱體的體積。

6. 教師提問：下面這個柱體的底面是平行四邊形，請同學們計算這個柱體的體積。



7. 學童可能的作法一：

$$\text{先算底面積：} 14 \times 6 = 84$$

$$\text{再乘以高：} 84 \times 8 = 704$$

答：704 立方公分

8. 學童可能的作法二：

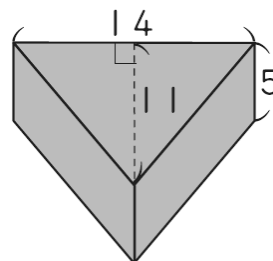
$$14 \times 6 \times 8 = 704 \quad \text{答：704 立方公分}$$

9. 教師揭示一個底面是三角形的三角柱，請學童計算體積：

10. 學童可能的作法：

$$14 \times 11 \div 2 \times 5 = 385$$

答：385 立方公分



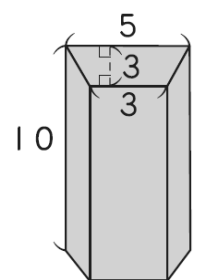
(單位：公分)

11. 教師揭示底面為梯形的四角柱，請學童計算體積：

學童可能的作法：

$$(5 + 3) \times 3 \div 2 \times 10 = 120$$

答：120 立方公分



(單位：公分)

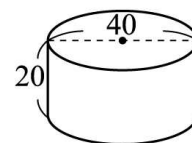
12. 教師揭示如右圖的圓柱，請學童計算體積。

(單位：公分，圓周率以 3.14 計算)

13. 學童可能的作法：

$$(20 \times 20) \times 3.14 \times 20 = 25120$$

答：25120 立方公分



教學注意事項：

1. 教師不宜透過堆疊白紙引入長方體體積公式，因為平面是沒有厚度的，如果很多張白紙堆疊在一起會變成一個長方體，已經

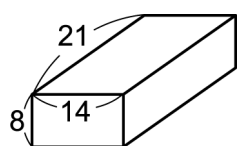
預告一張白紙也是有厚度的，也就是說，每一張白紙都是長方體。

2. 教師不宜透過「在長方體紙盒內堆疊白色積木」引入長方體體積公式。以免混淆長方體紙盒的體積和長方體紙盒容積的意義。
3. 教師在引導學童計算柱體體積時，首先應幫助學童澄清柱體的底面在哪裡？因為角柱可以有種不同的擺放方式，部份學童可能誤認為柱體的底面永遠在上、下方，而不考慮柱體的擺放方式。如果學童易混淆，初期教師可將柱體的兩個底分別朝向上、下方，待學童確認該形體為柱體無誤後，再以其他方式擺放，供學童觀察，培養學童判別柱體的能力。

### 指定作業：

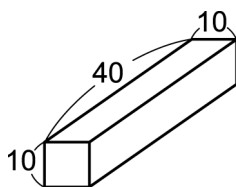
#### 習題一、計算長方體的體積：

(1)



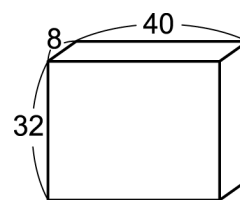
(長度單位：公分)

(2)



(長度單位：公分)

(3)

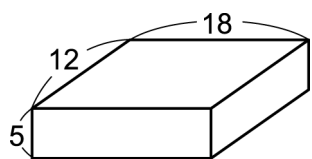


(長度單位：公分)

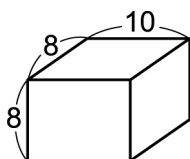
(4)

(5)

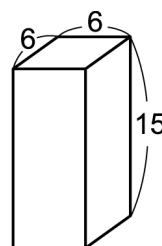
(6)



(長度單位：公分)



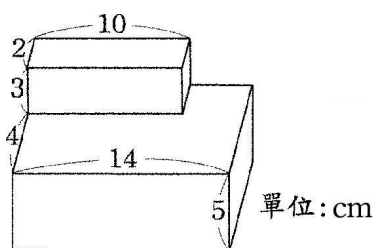
(長度單位：公分)



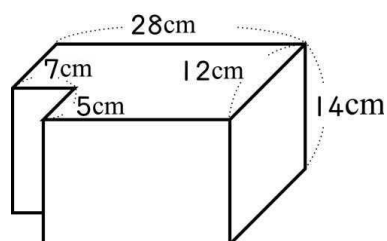
(長度單位：公分)

習題二、計算複合形體的體積：

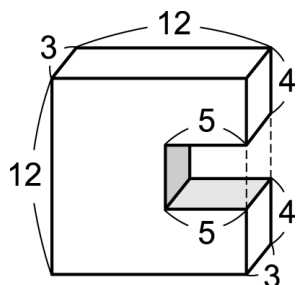
(1)



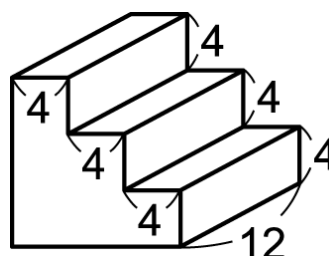
(2)



(3) 單位：公分

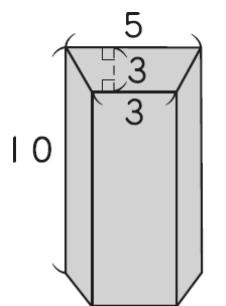


(4) 單位：公分



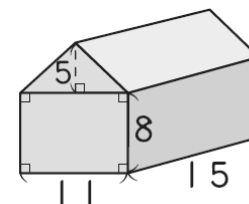
習題三、計算柱體的體積：

(1)



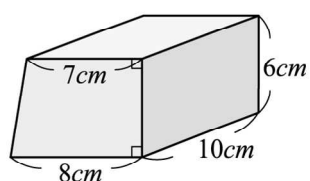
(單位：公分)

(2)

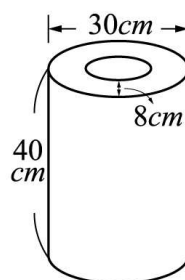


(單位：公分)

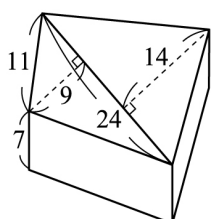
(3)



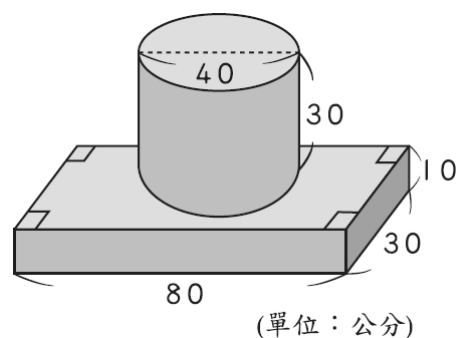
(4)



(5) (單位：公分)



(6)



### 指定作業解答：

一、計算長方體的體積：

(1) 2352 立方公分 (2) 4000 立方公分 (3) 10240 立方公分

(4) 1080 立方公分 (5) 640 立方公分 (6) 540 立方公分

二、計算複合形體的體積：

(1) 480 立方公分 (2) 4214 立方公分

(3) 372 立方公分 (4) 1152 立方公分

三、計算柱體的體積：

(1) 120 立方公分 (2) 4214 立方公分

(3) 372 立方公分      (4) 23336.48 立方公分

(5) 480 立方公分      (6) 61680 立方公分

**參考資料：**

**國小數學教材分析－體積和角度。國家教育研究院。**

## 數學領域教材原型研發編輯計畫－試教教學活動設計

一、教學主題：三角形的面積公式

二、教學年級：六年級

三、教學者：台北市文昌國民小學 吳欣悅教師

四、教學目標：透過切割或重組成長方形及直角三角形的方式，理解三角形面積的公式。

五、教學的重點：運用切割或重組成長方形及直角三角形的方式，導出三角形面積的公式。

六、活動目標：

【活動一】：知道直角三角形和長方形的關係。

【活動二】：運用直角三角形和長方形的面積公式算出三角形的面積。

【活動三】由直角三角形的面積算法導出三角形的面積公式

七、教學說明：

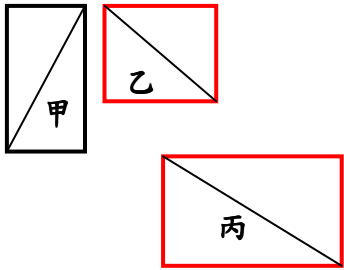
1. 如果教師直接引入三角形、平行四邊形、梯形的面積公式，而沒有說明如何導出公式時，容易讓學童在計算時只偏重在數字的代入，未能理解公式的真正涵意。
2. 進行活動前，教師先幫學生復習長方形的對角線可將長方形切割成 2 個全等直角三角形，幫助學童理解直角三角形的面積為長方形的一半；再透過切割或重組圖形成長方形或直角三角形的方式，利用乘法對加法、減法的分配律，幫助學童理解三角形面積的公式。

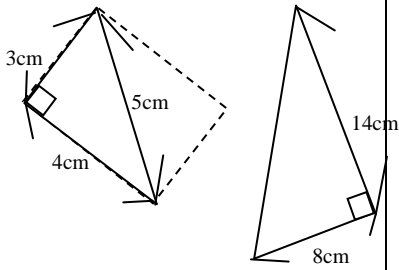
八、教學準備：

學習單、長方形圖卡 3 張（已切割與未切割成 2 組全等直角三角形各一組）、直角三角形圖卡 2 張、三角形圖卡 2 張

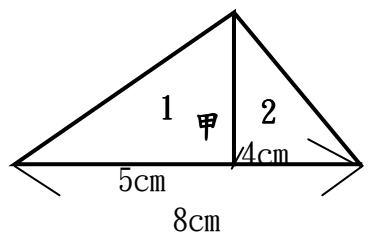
九、教學活動設計：

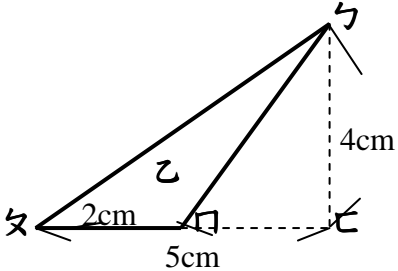
【活動一】：直角三角形和長方形的關係

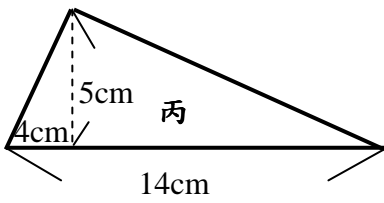
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
長方形可以切成 2 個全等三角形	<p>1. 教師展示 3 個長方形，長方形的對角線將長方形切成 2 個三角形。</p>  <p>2. 請學童觀察切割出的 2 個三角形的特點。</p>	<p>*教師整理學童的發表。</p> <p>(1) 是 2 個直角三角形。</p> <p>(2) 這 2 個直角三角形一模一樣。</p>	◎能說出長方形切出 2 個全等直角三角形

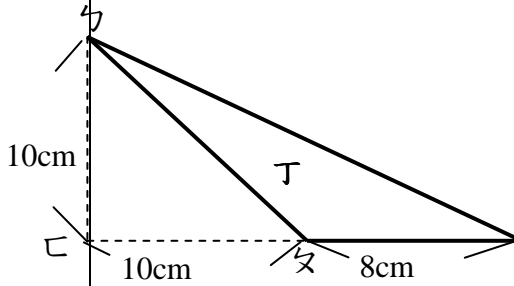
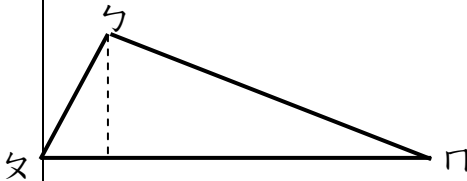
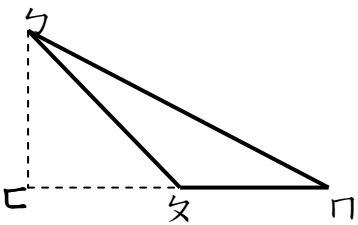
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>3. 如果知道長方形的長邊與寬邊的公分數，可不可以算出由對角線所切割出來的直角三角形的面積。</p> <p>4. 利用長方形面積公式算出直角三角形甲、乙的面積。</p> 	<p>(3) 也就是長方形切割成2個全等直角三角形。</p> <p>*因為長方形可以切割成2個全等直角三角形，所以一個直角三角形面積是長方形面積的一半，可以寫成長×寬÷2。</p> <p>*學生須先確認三角形的哪2個邊是長方形的長邊與寬邊，才能利用長×寬÷2 求出直角三角形的面積。</p> <p>直角三角形甲面積：  <math display="block">3 \times 4 \div 2 = \frac{3 \times 4}{2} = 6</math> </p> <p>直角三角形乙面積：  <math display="block">8 \times 14 \div 2 = \frac{8 \times 14}{2} = 56</math> </p>	<p>◎學童能說出直角三角形的面積是長方形面積的一半或 <math>\frac{\text{長} \times \text{寬}}{2}</math></p> <p>◎能利用 <math>\frac{\text{長} \times \text{寬}}{2}</math> 算出直角三角形甲、乙的面積。</p>

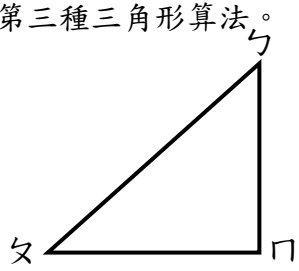
【活動二】：運用直角三角形和長方形的面積公式算出三角形的面積

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>算出三角形甲、乙的面積</p>	<p>1. 算出三角形甲的面積</p> 	<p>*1.請學童共同練習、教師解說</p> <p>(1) 將甲圖切割成2個直角三角形。</p> <p>(2) 直角三角形1夾住直角的兩邊是4cm、5cm，是長方形的長邊與寬邊，運用長方形面積的一半，求出直角三角形的面積，因此直角三角形1的面積是 <math>5 \times 4 \div 2 =</math></p>	<p>能切割出2個直角三角形，並算出面積。</p> <p>算出三角形1.2的面積</p>

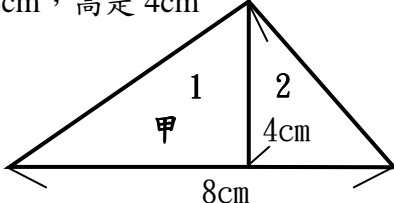
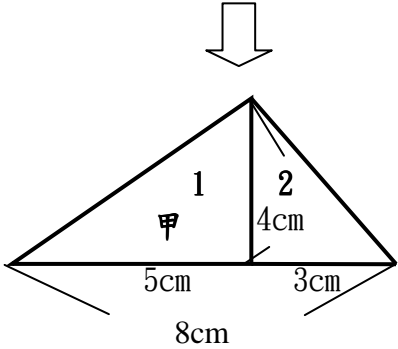
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>2. 算出三角形乙的面積</p> 	<p><math>\frac{5 \times 4}{2} = 10</math>，面積是 <math>10\text{cm}^2</math>。</p> <p>(3) 直角三角形 2 是 <math>3 \times 4 \div 2 = \frac{3 \times 4}{2} = 6\text{cm}^2</math>，面積是 <math>6\text{cm}^2</math>。</p> <p>(4) 甲圖是由 2 個直角三角形組合而成，所以面積是 <math>10 + 6 = 16</math>，直角三角形甲的面積是 <math>16\text{cm}^2</math>。</p> <p>(5) 列出算式</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">\begin{aligned} &amp; \frac{5 \times 4}{2} + \frac{3 \times 4}{2} \\ &amp;= \frac{5 \times 4 + 3 \times 4}{2} \\ &amp;= 16 \end{aligned}</math> </div> <p>*2. 教師解說</p> <p>(1) 從 <math>\triangle</math> 點和 <math>\triangle</math> 點各自延長三角形的兩個邊長，相交於 <math>\square</math> 點，形成直角三角形 <math>\triangle</math> 與直角三角形 <math>\triangle</math>。</p> <p>(2) 直角三角形中，夾住直角的兩個邊是長方形的長邊與寬邊以推算出直角三角形的面積。</p> <p>(3) 先算出直角三角形 <math>\triangle</math> 的面積 <math>5 \times 4 \div 2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10\text{cm}^2</math>；再算出直角三角形 <math>\triangle</math> 面積 <math>5 \times</math></p>	<p>能做出三角形 <math>\triangle</math> 與直角三角形 <math>\triangle</math>。</p> <p>算出三角形 1.2 的面積</p>

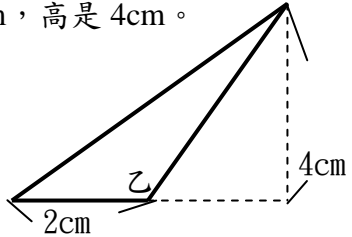
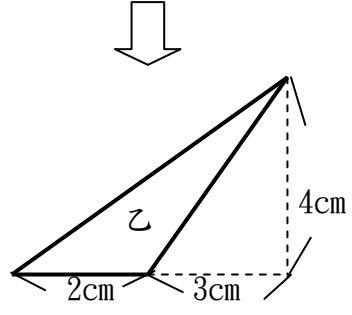
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>學童練習計算三角形的面積</p>	<p>同學自行列出算式(學習單)</p> <p>3.算出三角形丙的面積</p>  <p>4.算出三角形丁的面積</p>	<p>2 = 3 <math>3 \times 4 \div 2 = \frac{3 \times 4}{2} = 6</math> <math>\text{cm}^2</math>。</p> <p>(4) 將直角三角形勺勺乙的面積減去直角三角形勺勺丙面積，就可以得知乙圖的面積是 <math>10 - 6 = 4</math> <math>\text{cm}^2</math>。</p> <p>(5) 列出算式</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <math display="block">\begin{aligned} &amp; \frac{5 \times 4}{2} - \frac{3 \times 4}{2} \\ = &amp; \frac{5 \times 4 - 3 \times 4}{2} \\ = &amp; 4 \end{aligned}</math> </div> <p>*3.教師解說</p> <p>(1) 分別算出 2 個直角三角形的答案，再相加。</p> <p>(2) 列出算式。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <math display="block">\begin{aligned} 14 - 4 &amp;= 10 \\ &amp;= \frac{4 \times 5}{2} + \frac{10 \times 5}{2} \\ &amp;= \frac{4 \times 5 + 10 \times 5}{2} \end{aligned}</math> </div> <p>*教師解說</p> <p>(1) 過勺點做垂線，與勺</p>	<p>算出三角形丙丁的面積。</p> <p>能知道三角形的面積算法。</p> <p>能知道三角</p>

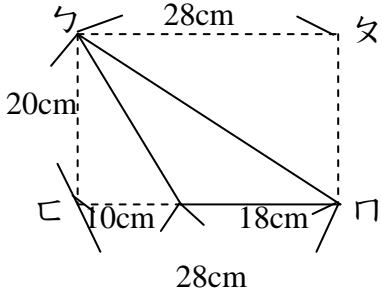
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	 <p>5. 第一種三角形算法。</p>  <p>【圖一】</p> <p>6. 第二種三角形算法</p>  <p>【圖二】</p>	<p>△邊的延長線相交於□點，形成直角三角形△□△與直角三角形△□△。</p> <p>(2) 分別算出 2 個直角三角形的面積之後再相減，就可以算出三角形△△□的面積。</p> <p>(4) 列出算式</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <math display="block">10 + 8 = 18</math> <math display="block">= \frac{18 \times 10}{2} - \frac{10 \times 10}{2}</math> <math display="block">= \frac{18 \times 10 - 10 \times 10}{2}</math> </div> <p>*讓學童說出三角形有哪些算法，教師再總結說明三角形的面積算法。</p> <p>*第一種</p> <p>(1) 當兩底角都是銳角如【圖一】，可以由頂點往底邊作垂線，將三角形切割成兩個直角三角形。</p> <p>(2) 分別算出 2 個直角三角形的面積之後再相加，就能得到原三角形的面積。</p> <p>*第二種</p> <p>(1) 當兩底角中有一個角是鈍角如【圖二】，可以先延伸底邊，再由頂點往底邊作垂線，形成大、小兩個直角三角形。</p> <p>(2) 分別算出 2 個直角三角形的面積之後再相減，就</p>	<p>形的面積算法。</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>7. 第三種三角形算法。</p>  <p>【圖三】</p>	<p>能得到原三角形的面積。 * 第三種 當兩底角中有一個角是直角如【圖三】，就能直接算出它的面積。</p>	

【活動三】：由直角三角形的面積算法導出三角形的面積公式

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>導出三角形面積公式</p> <p>驗證導出的公式與【活動二】的計算結果是否相同。</p>	<p>1. 以分數的形式列出算式並算出三角形甲的面積。教師先說明三角形的底為8cm，高是4cm</p>  <p>再提示畫上高之後的三角形的底被分割為5cm與3cm。</p> 	<p>* 教師示範列出三角形甲的面積算式與學童共同討論。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">\begin{aligned} &amp; \frac{5 \times 4}{2} + \frac{3 \times 4}{2} \\ &amp;= \frac{5 \times 4 + 3 \times 4}{2} \\ &amp;= \frac{(5+3) \times 4}{2} \end{aligned}</math> </div> <p>(1) 直角三角形 1.2 運用長方形的面積公式長×寬再除以 2 求出，也就是 <math>\frac{5 \times 4 + 3 \times 4}{2}</math>，我們再利用乘法對加法的分配律加以整理之後，可以發現算式可以寫成 <math>\frac{(5+3) \times 4}{2}</math>，此時的「5+3」是外接三角形頂點的長方形的「長」，也就是三角形的「底」；「4」是外接三角形頂點的長方形的</p>	

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>2. 以分數的形式列出算式並算出三角形乙的面積。</p> <p>教師說明三角形的底為3cm，高是4cm。</p>  <p>再提示說明加上輔助線之後，延長的底增加了3cm</p> 	<p>「寬」，也就是三角形的「高」。</p> <p>(2) 我們可以發現三角形的面積可以由<math>\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}</math>的方式算出答案。</p> <p>*2. 教師讓學童嘗試列出三角形乙的算式。</p> <p>(1) 學童如無法列出，教師與學童可以共同合作完成。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">\begin{aligned} 2+3 &amp;= 5 \\ \frac{5 \times 4}{2} &amp;- \frac{3 \times 4}{2} \\ &amp;= \frac{5 \times 4 - 3 \times 4}{2} \\ &amp;= \frac{(5-3) \times 4}{2} \\ &amp;= \frac{2 \times 4}{2} \end{aligned}</math> </div> <p>(2) 式子<math>\frac{5 \times 4 - 3 \times 4}{2}</math>經過整理之後，運用乘法對減法的分配律可以寫成<math>\frac{(5-3) \times 4}{2}</math>，「5-3」是三角形的底「2」，「4」是三角形的高。</p> <p>(3) 因此三角形的面積可以由<math>\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}</math>求出答案。</p>	$= \frac{\text{底} \times \text{高}}{2}$

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>教師再次證明運用 2 種方式，求出三角形面積</p> <p>3. 求出三角形勺勺門的面積</p> 	<p>*3. 利用「長方形面積的一半是直角三角形面積」的方法，求出三角形勺勺門的面積。</p> $\frac{28 \times 20}{2} - \frac{10 \times 20}{2}$ $= \frac{28 \times 20 - 10 \times 20}{2}$ $= \frac{560 - 200}{2}$ $= \frac{360}{2}$ $= 180$ <p>*利用「<math>\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}</math>」求出三角形勺勺門的面積。</p> $\frac{18 \times 20}{2}$ $= \frac{360}{2}$ $= 180$ <p>*學童可以發現 2 種方法求出的答案是一樣，所以三角形的面積公式可以寫成 <math>\frac{\text{底} \times \text{高}}{2}</math>，或是 <math>\text{底} \times \text{高} \div 2</math>。</p>	

九、教學注意事項：

- 此種導出面積公式的方式，需要運用「乘法對加法、減法的分配律」，以及將「除數寫在分母」的形式，例如： $8 \times 10 \div 2 \rightarrow$  寫成  $\frac{8 \times 10}{2}$  的方式，因此在正式進入面積的計算之前，須讓學童先熟悉乘法對加法、減法的分配律及將除數寫在分母的計算方式的寫法。
- 本教案試教對象為六年級學生，教師在運用此教案時，可以視對象之程度，將教學

時間彈性調整為 2-3 節。

3. 先練習乘法對加法、減法的分配律練習題：

$$(1) \quad 8 \times 10 + 9 \times 10 = (8 + 9) \times 10$$

$$(2) \quad 6 \times 4 - 3 \times 4 = (6 - 3) \times 4$$

$$(3) \quad 9 \times 5 + 4 \times 5 = (9 + 4) \times 5$$

4. 練習將「除數寫在分母」的計算方式：

$$(1) \quad 8 \times 7 \div 2 = \frac{8 \times 7}{2}$$

$$(2) \quad 19 \times 7 \div 2 = \frac{19 \times 7}{2}$$

$$(3) \quad 12 \times 5 \div 2 = \frac{12 \times 5}{2}$$

5. 再練習「乘法對加法、減法的分配律」，以及將「除數寫在分母」計算類型：

$$(1) \quad \frac{6 \times 4}{2} - \frac{3 \times 4}{2} = \frac{6 \times 4 - 3 \times 4}{2}$$

$$(2) \quad \frac{8 \times 5}{2} + \frac{12 \times 5}{2} = \frac{8 \times 5 + 12 \times 5}{2}$$

$$(3) \quad \frac{10 \times 5}{2} - \frac{3 \times 5}{2} = \frac{10 \times 5 - 3 \times 5}{2}$$

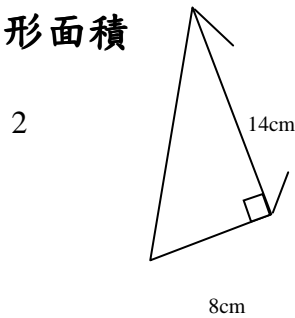
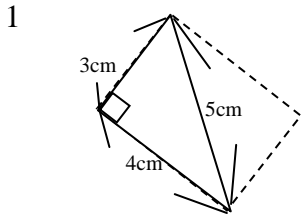
學習單

# 三角形的面積公式

六年 ( ) 班 ( ) 號姓名 ( )

一、 長方形的對角線將長方形切成 2 個三角形，這 2 個三角形有何特色？

## 二、 運用長方形的面積公式算出三角形面積

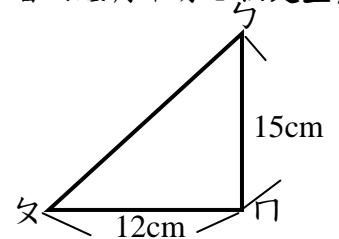
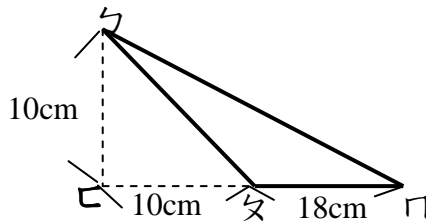
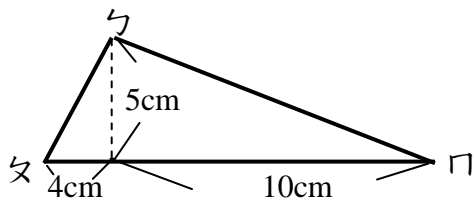


## 三、 運用長方形面積公式算出三角形面積的 3 種模式：

(1) 當兩底角都是銳角

(2) 當兩底角中有 1 個是鈍角

(3) 當兩底角中有 1 個是直角

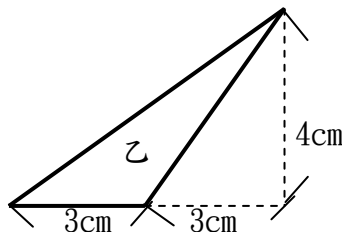
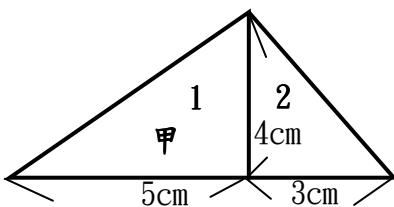


## 四、 導出三角形面積公式：(只需列式整理不需算出答案)

(1) 當兩底角都是銳角

(2) 當兩底角中有 1 個是鈍角

(3) 當兩底角中有 1 個是直角



五、 所以三角形的面積公式可以寫成 ( )

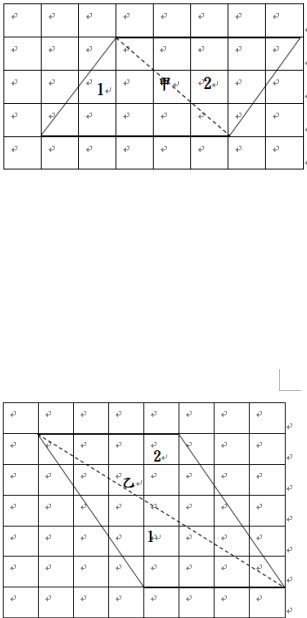
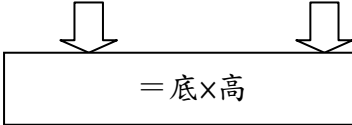
六、 我的學習心得：(30-50 字)

## 數學領域教材原型研發編輯計畫－試教教學活動設計

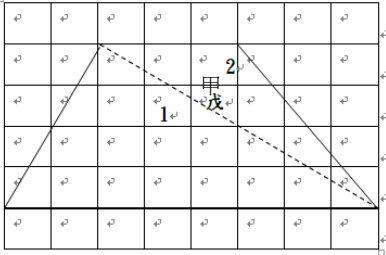
- 一、教學主題：梯形面積公式的導出與應用
- 二、教學年級：六年級
- 三、教學者：台北市文昌國民小學 吳欣悅教師
- 四、教學目標：1. 透過切割成三角形的方式，理解平行四邊形、梯形面積的公式。  
2. 運用梯形面積公式推導出平行四邊形和三角形面積公式。
- 五、教學的重點：1. 運用切割成三角形的方式，導出平行四邊形、梯形面積的公式。  
2. 固定下底及高，透過上底長短的改變，察覺可以利用梯形面積公式推導出平行四邊形和三角形面積公式。
- 六、活動目標：
- 【活動一】：運用三角形面積公式導出平行四邊形面積公式。
- 【活動二】：運用三角形面積公式導出梯形面積公式。
- 【活動三】：利用梯形面積公式推導出平行四邊形和三角形面積公式
- 七、教學說明：
- 如果教師直接引入三角形、平行四邊形、梯形的面積公式，而沒有說明如何導出公式時，容易讓學童在計算時只偏重在數字的代入，未能理解公式的真正涵意。
  - 進行活動前，教師先幫學生復習長方形的對角線可將長方形切割成2個全等直角三角形，幫助學童理解直角三角形的面積為長方形的一半；再透過切割或重組圖形成長方形或直角三角形的方式，利用乘法對加法、減法的分配律，幫助學童理解三角形面積的公式。
  - 此教學進行時學童已知道三角形面積的公式，再運用三角形的面積公式導出「平行四邊形面積的公式」、「梯形面積的公式」。
  - 試教之學生為六年級的學生，因此在進行公式的引導時，主要是讓學童運用不同的思維導出面積公式。
- 八、教學準備：學習單、教學 ppt、釘板×9、橡皮筋×18（紅色×9、黃×9）
- 九、教學活動設計：
- 【活動一】：運用三角形面積的公式導出平行四邊形公式

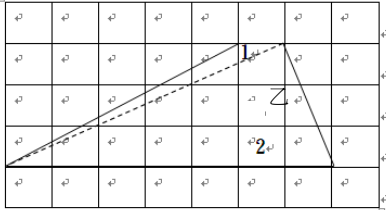
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
算出平行四邊形甲的面積	複習三角形的面積公式 $底 \times 高 \div 2$ 或 $底 \times 高 \times \frac{1}{2}$ 或 $\frac{底 \times 高}{2}$ 1. 算出平行四邊形甲面積	* 教師提示之前學過的三角形面積公式  * 讓學生運用三角形面積公式算出平行四邊形面積 引導學童發現，在計算平行四邊形面積時，可以先依照平行四邊形的一個對角線切成兩個三角形，再利用三	◎能說出三角形面積的公式為 $\frac{底 \times 高}{2}$



教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>算出平行四邊形乙的面積</p>	<div data-bbox="395 286 707 454" data-label="Image"> </div> <p data-bbox="384 1016 746 1055">2. 算出平行四邊形乙面積</p> <div data-bbox="395 1115 691 1335" data-label="Image"> </div> <p data-bbox="384 1977 778 2056">3. 教師讓學童觀察前兩題列出的式子，將式子與甲乙兩</p>	<p data-bbox="815 253 1158 286">角形面積的公式做計算。</p> <p data-bbox="826 300 1193 573">(1) 切成如圖的兩個三角形。 (2) 算出三角形1與三角形2的面積。 (3) 只需要列出算式，不用算出最後的答案。</p> <div data-bbox="900 645 1110 902" data-label="Equation-Block" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math display="block">\begin{aligned} &amp; \frac{5 \times 3}{2} \times 2 \\ &amp;= \frac{5 \times 3 \times 2}{2} \\ &amp;= 5 \times 3 \end{aligned}</math> </div> <p data-bbox="815 1016 1193 1339">*讓學生運用三角形面積公式算出平行四邊形面積 引導學童發現，在計算平行四邊形面積時，可以先依照平行四邊形的一個對角線切成兩個三角形，再利用三角形面積的公式做計算。</p> <p data-bbox="826 1352 1193 1626">(1) 切成如圖的兩個三角形。 (2) 算出三角形1與三角形2的面積。 (3) 只需要列出算式，不用算出最後的答案。</p> <div data-bbox="900 1686 1131 1944" data-label="Equation-Block" style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math display="block">\begin{aligned} &amp; \frac{4 \times 5}{2} \times 2 \\ &amp;= \frac{4 \times 5 \times 2}{2} \\ &amp;= 4 \times 5 \end{aligned}</math> </div>	<p data-bbox="1222 253 1385 432">◎能將平行四邊形切割成兩個三角形</p> <p data-bbox="1222 636 1385 864">◎能運用三角形面積的公式列出平行四邊形的面積算式</p> <p data-bbox="1222 1592 1385 1821">◎能運用三角形面積的公式列出平行四邊形的面積算式</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>圖形做對照。</p> 	<p>(1) 教師引導學童觀察「5」在平行四邊形甲圖中指哪一個部份。 學童可以觀察出「5」代表平行四邊形甲的底，「3」是「高」。</p> <p>(2) 平行四邊形乙，讓學生自行觀察說出「4」代表平行四邊形乙的底，「5」是「高」。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math display="block">\begin{aligned} \text{甲} &amp; \frac{5 \times 3}{2} \times 2 \\ &amp;= \frac{5 \times 3 \times 2}{2} \\ &amp;= 5 \times 3 \end{aligned}</math> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <math display="block">\begin{aligned} \text{乙} &amp; \frac{4 \times 5}{2} \times 2 \\ &amp;= \frac{4 \times 5 \times 2}{2} \\ &amp;= 4 \times 5 \end{aligned}</math> </div> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  <p>=底×高</p> </div>	<p>◎能說出數字在圖形上所代表的意義。</p> <p>◎能導出平行四邊形的面積公式</p>

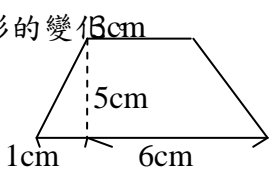
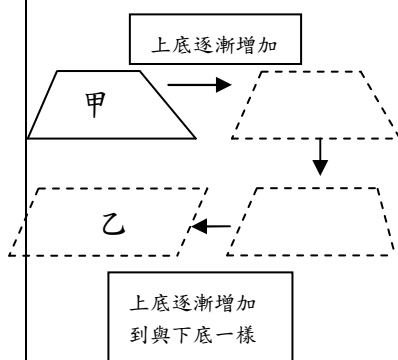
【活動二】：由三角形的面積公式導出梯形公式

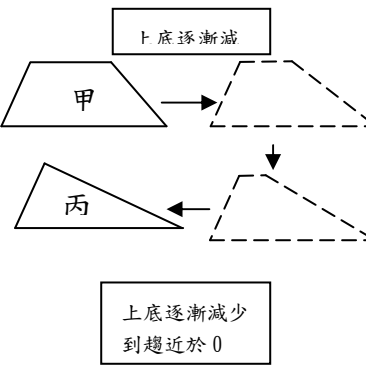
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>觀察列出的梯形面積算式</p>	<p>1. 算出梯形甲的面積。</p> 	<p>* 教師與學生共同計算 引導學童發現，在計算梯形面積時，可以先依照梯形的一個對角線切成兩個三角形，再利用三角形面積的公式做計算。</p> <p>(1) 切成如圖的兩個三角形。</p> <p>(2) 算出三角形 1 與三角形 2 的面積。</p> <p>(3) 只需要列出算式，不用算出最後的答案。</p>	<p>◎學童能將梯形甲切割成兩個三角形</p> <p>◎列出梯形甲面積</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>2. 算出梯形乙的面積</p>  <p>3. 教師讓學童觀察前 2 題列出的式子，將式子與圖形做對照。梯形甲</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-bottom: 20px;"> <math display="block">\frac{3 \times 4}{2} + \frac{8 \times 4}{2}</math> <math display="block">= \frac{3 \times 4 + 8 \times 4}{2}</math> <math display="block">= \frac{(3 + 8) \times 4}{2}</math> </div> <p>* 教師與學生再共同計算一題</p> <p>引導學童發現，計算梯形面積時，也可在梯形中往另一個方向的對角線，切成兩個三角形，再利用三角形面積的公式做計算。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 切成如圖的兩個三角形。</li> <li>(2) 算出三角形 1 與三角形 2 的面積。</li> <li>(3) <b>只需要列出算式，不用算出最後的答案。</b></li> </ol> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-bottom: 20px;"> <math display="block">\frac{1 \times 3}{2} + \frac{7 \times 3}{2}</math> <math display="block">= \frac{1 \times 3 + 7 \times 3}{2}</math> <math display="block">= \frac{(1 + 7) \times 3}{2}</math> </div> <p>* 教師引導學童觀察：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) (3+8) 在梯形甲圖形中指哪一個部份。</li> </ol> <p>學童可以觀察出「3」代表梯</p>	<p>的算式</p> <p>◎ 學童能將梯形乙切割成兩個三角形。</p> <p>◎ 列出梯形乙面積的算式</p> <p>◎ 學童能說出與數字相對應</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-bottom: 20px;"> <math display="block">\frac{3 \times 4}{2} + \frac{8 \times 4}{2}</math> <math display="block">= \frac{3 \times 4 + 8 \times 4}{2}</math> <math display="block">= \frac{(3+8) \times 4}{2}</math> </div> <div style="text-align: center; margin-bottom: 20px;">  </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-bottom: 20px;"> <math display="block">= \frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2}</math> </div> <p><b>梯形乙</b></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-bottom: 20px;"> <math display="block">\frac{1 \times 3}{2} + \frac{7 \times 3}{2}</math> <math display="block">= \frac{1 \times 3 + 7 \times 3}{2}</math> <math display="block">= \frac{(1+7) \times 3}{2}</math> </div> <div style="text-align: center; margin-bottom: 20px;">  </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <math display="block">= \frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2}</math> </div>	<p>形甲的上底              「8」代表梯形甲的下底。              (2)「4」在梯形甲圖形中指哪一個部份。              學童可以觀察出「4」代表梯形甲的高。</p> <p> </p> <p>*教師讓學童嘗試說出「梯形乙」中，數字和圖形意義的相互對照。              (1) (1+7) 在梯形乙圖形中指哪一個部份。              學童可以觀察出「1」代表梯形乙的上底              「7」代表梯形的下底。              (2)「3」在梯形乙圖形中指哪一個部份。              學童可以觀察出「3」代表梯形的高。              教師總結梯形甲和乙的計算結果，可以發現：              梯形面積的公式為  <math display="block">\frac{(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高}}{2}</math></p>	<p>的上底、下底與高。</p> <p> </p> <p>◎學童能說出與數字相對應的上底、下底與高。</p> <p> </p> <p>◎學童能運用切割成兩個三角形方式求出梯形面積。</p>

【活動三】：利用梯形面積公式推導出平行四邊形和三角形面積公式

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>觀察梯形上底的變化</p>	<p>1. 教師讓學童運用釘板操作，固定梯形的「下底」和「高」的長度，及其中一個斜邊，讓學童兩人一組操作，將「上底」逐漸增加或減少，請學童觀察圖形的變化。</p>   <p>2. 固定梯形甲的「下底」和「高」的長度，將「上底」逐漸縮小，請學童觀察圖形的變化。</p>	<p>*讓學生將操作結果記錄在學習單上，並在釘板上留下自己認為最特別的兩個圖形。</p> <p>*討論各組認為最特別的圖形。</p> <p>*學童可以經由操作看到圖形逐漸變化，當上底增加到與下底一樣長都是7公分時，教師可以詢問學童發現了什麼？</p> <p>(1) 師問：此時的圖形與什麼形狀相同？ 學童回答：「平行四邊形」。</p> <p>(2) 運用梯形公式算出平行四邊形乙的面積。</p> $\begin{aligned} & (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2 \\ & = (7 + 7) \times 5 \div 2 \\ & = 7 \times 5 \\ & = \text{底} \times \text{高} \end{aligned}$ <p>當上底與下底一樣長時</p> <p>也就是平行四邊形)</p>	<p>◎學童能觀察出圖形變化成平行四邊形。</p> <p>◎學童能運用梯形公式算出平行四邊形乙的面積。</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
		<p>*學童可以看到圖形逐漸變化，當上底逐漸減少為「0」時，教師可以詢問學童發現了什麼？</p> <p>(1) 師問：此時的圖形與什麼形狀相同？ 學童回答：「三角形」。</p> <p>(2) 運用梯形公式算出三角形丙的面積。  <math>(0+7) \times 5 \div 2</math>  <math>= 7 \times 5 \div 2</math> (也就是三角形)</p> <p style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">當上底趨近於0時</p> <p>*教師總結： 運用梯形面積公式也可以算出平行四邊形或三角形面積。</p>	<p>◎學童能計算出結果和平行四邊形是一樣。</p> <p>◎學童能觀察出圖形變化成三角形。</p> <p>◎學童能計算出結果和三角形是一樣。</p>

九、教學注意事項：

6. 此種導出面積公式的方式，需要運用「乘法對加法、減法的分配律」，以及將「除數寫在分母」的形式，例如： $8 \times 10 \div 2 \rightarrow$ 寫成 $\frac{8 \times 10}{2}$ 的方式，因此在正式進入面積的計算之前，須讓學童先熟悉乘法對加法、減法的分配律及將除數寫在分母的計算方式的寫法。
7. 本教案試教對象為六年級學生，教師在運用此教案時，可以視對象之程度，將教學時間彈性調整為2-3節。
8. 先練習乘法對加法、減法的分配律練習題：
  - (4)  $8 \times 10 + 9 \times 10 = (8 + 9) \times 10$
  - (5)  $6 \times 4 - 3 \times 4 = (6 - 3) \times 4$
  - (6)  $9 \times 5 + 4 \times 5 = (9 + 4) \times 5$
9. 練習將「除數寫在分母」的計算方式：

$$(4) \quad 8 \times 7 \div 2 = \frac{8 \times 7}{2}$$

$$(5) \quad 19 \times 7 \div 2 = \frac{19 \times 7}{2}$$

$$(6) \quad 12 \times 5 \div 2 = \frac{12 \times 5}{2}$$

10. 再練習「乘法對加法、減法的分配律」，以及將「除數寫在分母」計算類型：

$$(4) \quad \frac{6 \times 4}{2} - \frac{3 \times 4}{2} = \frac{6 \times 4 - 3 \times 4}{2}$$

$$(5) \quad \frac{8 \times 5}{2} + \frac{12 \times 5}{2} = \frac{8 \times 5 + 12 \times 5}{2}$$

$$(6) \quad \frac{10 \times 5}{2} - \frac{3 \times 5}{2} = \frac{10 \times 5 - 3 \times 5}{2}$$

6. 因試教年級為六年級學生，所以在學生已知道平行四邊形與梯形面積的公式下，讓學生再從另一個角度思考倒出公式的方法。

## 數學領域教材原型研發編輯計畫—試教教學活動設計

一、教學主題：公斤、公克的分、小數倍單名數及複名數化聚

二、教學年級：五年級

三、教學者：桃園縣私立有得雙語中小學 魏慶雲教師

四、教學目標：能順利的進行重量單位中公斤與公克的分小數倍化聚。

五、教學的重點：利用「加法策略」、「乘法策略」、「減法策略」、「除法策略」及「換單位策略」等，進行重量單位的化聚。

六、活動目標：

【活動一】：能進行小數倍及分數倍高階重量單位「公斤」化為低階重量單位「公克」。

【活動二】：能進行低階重量單位「公克」聚為小數倍或分數倍高階重量單位「公斤」。

七、教學說明：

- 關於重量的單位，學生已經熟悉了整數倍公斤與公克的化聚，在這樣的基礎下，本單元的目標是讓學生也能輕鬆簡單的進行分小數倍的化聚。
- 為了達成「簡單、輕鬆」的教學目標，教學重點聚焦在「 $1\text{kg}=1000\text{g}$ 」的基本觀念上，並從中推衍出分、小數倍的化聚方式：
  - $0.1\text{kg}$  是  $0.1$  個  $1\text{kg}$  等於  $1000\text{g}$  乘以  $0.1$  等於  $100\text{g}$ 。
  - $1\text{g}$  等於  $\frac{1}{1000}$  公斤。
- 在小數倍的化聚上，所有的計算都根據以下的策略：
  - 大單位(公斤)化為小單位(公克)時，都乘以  $1000$ 。
  - 小單位(公克)化為大單位(公斤)時，都乘以  $0.001$ 。
- 在分數倍的化聚上，計算方式則根據以下的策略：
  - 大單位(公斤)化為小單位(公克)時，以分數的值乘以  $1000$ 。
  - 小單位(公克)化為大單位(公斤)時，都乘以  $\frac{1}{1000}$
- 由於學生的先備知識中已經很熟悉整倍數的重量單位化聚，所以一旦分、小數倍重量單位的單名數化聚學會後，複名數的化聚就可以結合學生的先備知識順利的學會了。
- 此活動設計為二節課的教學。

八、教學準備：

學習單

九、教學活動設計：

【活動一】：小數倍及分數倍的公斤化為公克或複名數

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>複習舊經驗</p> <p>引入小數倍、分數倍的概念 純小數倍</p>	<p>1. 先複習舊經驗： 「5 kg=5000 g」。</p> <p>2. 接著提問： 「一塊黏土是 0.3 公斤， 和幾公克一樣重？」</p> <p>(1) 以乘法計算 因為 1 公斤是 1000 公克 所以 0.3 公斤等於 1000 公克乘以 0.3</p> <p>(2) 化為分數 因為 0.3 等於 <math>\frac{3}{10}</math> 所以 0.3 公斤等於 1000 公克乘以 <math>\frac{3}{10}</math></p> <p>(3) 換單位 0.3 公斤是 0.3 個 1 公斤 因為每個 1 公斤是 1000 公克 所以 0.3 個 1 公斤就是 0.3 個 1000 公克</p>	<p>1. 教師引導學生複習： 5 公斤是 5 個 1 公斤， 也就是 5 個 1000 公克， 或者可以視為 1000 公克<math>\times</math>5=5000 公克</p> <p>2. 當學生無法理解時，可以利用學生較易感知的蘋果箱開啟學習，再同構至重量單位，如： 「如果有一個盒子裡面裝了 1000 個蘋果，那麼 0.3 盒是幾個蘋果？<math>\frac{3}{10}</math> 盒是幾個蘋果？」</p> <p>(1). 先說明 0.3 盒有幾個蘋果。 0.3 盒是 1000 乘以 0.3 等於 300 個蘋果</p> <p>(2). 再說明 <math>\frac{3}{10}</math> 盒有幾個蘋果： 因為 <math>\frac{3}{10}</math> 盒是將 1 盒除以 10 再乘以 3 所以可以將 1000 除以 10 再乘以 3 等於 300 個蘋果</p>	<p>實作評量 (參與討論)</p> <p>實作評量 (回答問題)</p>
<p>帶小數倍化為單名數</p>	<p>3. 教師布題：3.9 kg 是多少公克？ 解題說明： 因為 3.9 公斤是 3.9 個 1 公斤 也就是 3.9 個 1000 公克 所以 3.9 公斤等於</p>	<p>3. 讓學生了解相同概念可以用在所有小數倍的公斤化為公克的題型上</p>	<p>實作評量 (回答問題)</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>1000 公克乘以 3.9 就是 3900 公克</p> <p>4. 學生自行練習：「0.56 公斤是幾公克？」</p> <p>5. 請學生上台展示答案，並說明使用的解題方法。</p>	<p>4. 學生自行練習</p>	<p>學習單 (第 1 題)</p>
帶小數倍化為複名數	<p>6. 教師布題：「5.89 公斤相當於幾公斤幾公克？」 解題說明： 5.89 公斤是 5 公斤加上 0.89 公斤而 0.89 公斤是 0.89 個 1 公斤是 0.89 個 1000 公克等於 1000 乘以 0.89 等於 890 公克 所以 5.89 公斤等於 5 公斤 890 公克</p> <p>7. 學生自行練習：「6.95 公斤是幾公斤幾公克？」</p> <p>8. 請學生上台展示答案。</p>	<p>6. 利用「換單位法」進行單位的化聚</p> <p>7. 學生自行練習</p>	<p>實作評量 (回答問題)</p> <p>學習單 (第 2 題)</p>
分數倍公斤化為公克	<p>9. 教師布題：「<math>3\frac{75}{100}</math> 公斤是幾公克？相當於幾公斤幾公克？」 解題說明： 因為 <math>3\frac{75}{100}</math> 公斤是 3 公斤加上 <math>\frac{75}{100}</math> 公斤 其中的 3 公斤等於 3000 公克是學生以前已經學會的概念 因此只需要處理 <math>\frac{75}{100}</math> 公斤</p>	<p>一般正常狀態下，重量不會以分數狀態表示。但是做小數倍的化聚時，往往會用到整數乘以小數的計算過程，若學生對於這樣的計算不熟練，就必須回到整數乘以分數的方式進行教學。因此，分數倍的化聚就成為一項重要墊步練習。</p>	<p>實作評量 (發表)</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>的部分</p> <p>而 <math>\frac{75}{100}</math> 公斤等於 1000 公克</p> <p>乘以 <math>\frac{75}{100}</math> 就是 750 公克</p> <p>所以 <math>3\frac{75}{100}</math> 公斤等於 3750 公克相當於 3 公斤 750 公克</p> <p>10. 教師布題：「<math>\frac{8}{5}</math> 公斤是幾公克？」</p> <p>解題說明： 因為 1 公斤等於 1000 公克</p> <p>所以 <math>\frac{8}{5}</math> 公斤就會是 1000 公克除以 5 乘以 8 會等於 1600 公克</p> <p>11. 學生自行練習：</p> <p>「<math>\frac{53}{100}</math> 公斤是幾公克？」</p> <p>「<math>4\frac{7}{20}</math> 公斤是幾公斤幾公克？」</p>	<p>11. 學生自行練習。</p>	<p>實作評量 (發表)</p> <p>學習單 (第 3、4 題)</p>

【活動二】：公克聚為小數倍或分數倍的公斤或複名數

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>公克聚為小數倍公斤</p>	<p>1. 教師布題：「800 公克是幾公斤？」</p> <p>引導學生進行以下解題： 因為 1000 公克是 1 公斤 所以 1 公克是 0.001 公斤</p>	<p>教師引導學生了解由公克聚為公斤可以使用「換單位法」。</p>	<p>實作評量 (回答問題)</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	800 公克就是 800 個 0.001 公斤 因此 800 公克等於 0.001 公斤乘以 800 等於 0.8 公斤		
單名數轉變為帶小數倍的公斤	2. 教師布題：「6890 公克是幾公斤？」 解題說明： 6890 公克是 6890 個 0.001 公斤 就是 6.890 公斤		實作評量 (發表)
複名數轉變為小數倍的公斤	3. 教師布題：「一袋水果重 3 公斤 700 公克，是幾公斤？」 解題說明： 3 公斤 700 公克是 3700 公克 等於 3700 乘以 0.001 公斤 等於 3.7 公斤	解題說明時也可以先將 3 公斤分離出來，僅僅處理 700 公克的部分。	實作評量 (回答問題)
單名數聚為分數倍公斤	4. 教師布題：「4603 公克是幾分之幾公斤？」 解題說明： 因為 1000 公克是 1 公斤 所以 1 公克是 $\frac{1}{1000}$ 公斤 4603 公克就等於把 4603 乘以 $\frac{1}{1000}$ 公斤等於 $\frac{4603}{1000}$ 公斤	利用「換單位法」進行解題	實作評量 (回答問題)
複名數聚為分數倍公斤	5. 教師布題：「6 公斤 350 公克是幾分之幾公斤？」 解題說明： 350 公克等於	可先說明 6 公斤的部分，可以直接轉為分數表示法的整數部分，無須再做轉換。需要處理的僅是 350 公克的部分。	實作評量 (回答問題)

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	$350 \times \frac{1}{1000} = \frac{350}{1000} \text{ (kg)}$ <p>因此 6 公斤 350 公克 是 <math>6 \frac{350}{1000}</math> 公斤</p> <p>6. 學生自行練習：「10 公斤 75 公克等於幾分之幾公斤？」請學生自行練習。</p>	<p>學生自行練習</p>	<p>實作評量 (解題)</p>

十、教學注意事項：

1. 在十進位教學中有：

$462 = 4 \times 100 + 6 \times 10 + 2 \times 1$  的活動，

因而當教師遇到小數的教學時往往也習於以：

$4.62 = 4 \times 1 + 6 \times 0.1 + 2 \times 0.01$  的方法進行教學。

但在本單元中，若將 4.62 公斤視為

$4 \times 1$  公斤 +  $6 \times 0.1$  公斤 +  $2 \times 0.01$  公斤，

則必須分別定義 0.1 公斤、0.01 公斤及 0.001 公斤等於多少公克，形成多單位的概念，如此一來不僅增加學生學習上的負擔，而且也無法應付非十進位的單位換算（如：公斤與英磅間的換算）。

2. 為避免造成學生的學習負擔，本單元的教學設計均聚焦在

$1\text{kg} = 1000\text{g}$ ， $1\text{g} = \frac{1}{1000}$  公斤的計算方式上。

3. 儘管在單位的化聚上有許多方法，但是其中的「換單位法」可以囊括所有題型。因此教學時，除了剛開始可以介紹各種解題方法外，其他時間可以聚焦在「換單位法」，以增進學生學習成效。

4. 一般正常狀態下，重量不會以分數狀態表示。但是做小數倍的化聚時，往往會用到整數乘以小數的計算過程，若學生對於這樣的計算不熟練，就必須回到整數乘以分數的方式進行教學。

## 〈學習單〉

請依題意寫出正確的答案

題目	算式
1. 0.56 公斤是幾公克？	
2. 6.95 公斤是幾公斤幾公克？	
3. $\frac{53}{100}$ 公斤是幾公克？	
4. $4\frac{7}{20}$ 公斤是幾公斤幾公克？	
5. 10 公斤 75 公克等於幾分之幾公斤？	
6. 大賣場賣的米一包重 3.6 公斤，是幾公斤幾公克？	
7. 在重量為 2.823 公斤的箱子裡放入 2.6 公斤的蘋果，共是幾公斤幾公克？	
8. $\frac{7}{5}$ 公斤的綠豆吃掉 $\frac{3}{10}$ 公斤，剩下幾公斤幾公克的綠豆？	
9. 爸爸買了二顆西瓜，其中一顆重 2 公斤 452 公克，另一顆重 5 公斤 60 公克，二顆西瓜共重多少公斤？	

## 數學領域教材原型研發編輯計畫－試教教學活動設計

一、教學主題：角的直接比較

二、教學年級：三年級

三、教學者：新北市新店區中正國民小學 詹婉華教師

四、教學目標：能直接比較張開角的大小。

五、教學的重點：先讓學童了解張開角的意義，再由疊合幾何扣條的活動，讓學童進行角的直接比較。

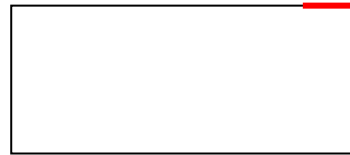
六、活動目標：

【活動一】：透過幾何扣條張開的程度，認識張開角。

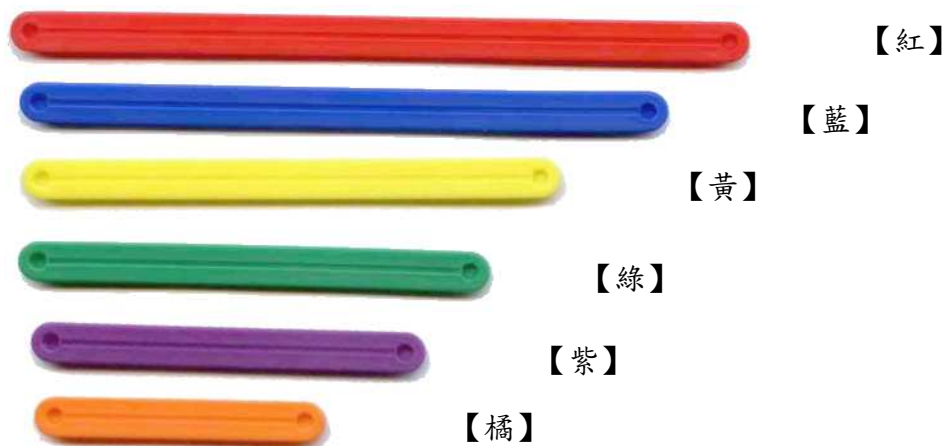
【活動二】：能透過操作幾何扣條，直接比較張開角的大小。

七、教學說明：

1. 生活中所說的角，如牆「角」、「角」落、牛「角」，和學童數學學習上的「角」有所不同，學童會因生活中的角，對「角」的概念產生混淆。
2. 在國小階段關於角的教學，大多是由封閉的圖形讓學童認識角，例如：教師會問學童長方形的哪兒有角？讓學童指出或描繪出長方形的角，再由其它圖形認識角。然而，學童可能因此以為角的大小和圖形的面積或邊長有關。所以，宜由張開角進行角的教學，排除圖形面積的干擾，並讓學童了解角的大小和邊長無關。






3. 幾何扣條是國小數學教學常用的教具及學具，有 6 種尺寸，最長的是紅色幾何扣條，最短的是橘色幾何扣條，可以拼出許多不同的幾何圖形。教師可運用幾何扣條進行張開角的操作及描繪活動，讓學童了解角的大小不受邊長的長短所影響。

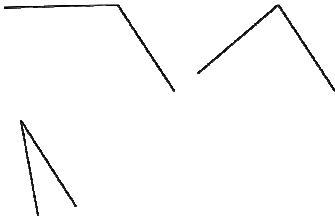



- (1) 教師讓學童觀察幾何扣條張開的程度，張開的程度改變，角的大小也跟著改變。
- (2) 教師運用不同幾何扣條改變某個角的邊長，讓學童發現邊長改變，角的大小不變。
4. 當學童了解張開角的意義後，才能讓學童進行角的直接比較。關於角的直接比較，可以讓學童運用不同長度的幾何扣條，進行不同的張開程度的比較活動。

八、教學活動設計：

【活動一】：透過幾何扣條張開的程度，認識張開角。

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>認識張開角</p>	<p>1. 教師將幾何扣條組合成一個角，並改變幾何扣條張開的程度。 教師提問：什麼在改變？</p>  <p>2. 教師操作幾何扣條，讓幾何扣條張開的程度越來越大，並提問：張開的大小是如何改變？</p> <p>3. 教師張開幾何扣條，沿著扣條的內側在黑板畫下第 1 個角。</p>  <p>指著第 1 個角，問：是不是很像我們之前學過的角？</p> <p>4. 接著將幾何扣條其中一邊張開的程度更大後，畫下第 2 個角，再將幾何扣條張開的程度更大後，畫下第 3 個角。</p>  <p>【角 1】 【角 2】 【角 3】 教師提問：這三個都是什</p>	<p>1. 扣條的一邊不動，只張開另一邊。 教師引導學童從幾何扣條張開的程度在改變，進而回答：張開的大小改變了。</p> <p>2. 教師讓學童確認幾何扣條張開的程度越來越大。</p> <p>3. 教師藉此說明畫下的角也是一個角，角包含：2 條直線和 1 個頂點。</p> <p>4. 教師可以將扣條張開和角 1 一樣大，再將扣條先疊合在角 2 上，然後慢慢張開扣條的一邊，直到扣條和角 2 疊合，再將扣條疊合在角 3 上，然後慢慢張開扣條的一邊，直到扣條和角 3 疊合，讓學童發現當幾何扣條張開的程度越大，畫下的角度也越大。</p>	<p>◎能回答：張開的大小改變了。</p> <p>◎能回答：張開得越來越大。</p> <p>◎能回答：它們都是角。</p> <p>◎能回答：扣條張開的越大，畫下的角度也越大。</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>麼？扣條張開的越大，角度會如何改變？</p> <p>5. 教師操作幾何扣條，讓張開的程度越來越小，並提問：張開的大小如何改變？</p> <p>6. 教師拿著張開的幾何扣條，以不同的方向在黑板畫下第4個角，接著將幾何扣條張開的程度變小，畫下第5個角，再讓幾何扣條張開的程度變小，畫下第6個角。</p>  <p>【角4】 【角5】 【角6】</p> <p>教師提問：這三個都是什麼？扣條張開的越小，角度會如何改變？</p> <p>7. 發下幾何扣條，讓學童自己改變幾何扣條張開的程度，在白紙上描繪3個不同的角。並讓學童上台發表畫角的想法。</p> <p>8. 教師拿出不同顏色的2組幾何扣條。</p>  <p>教師提問：哪一組幾何扣條張開的程度會最大？</p>	<p>5. 教師需讓學童確認幾何扣條張開的程度越來越小。</p> <p>6. 教師可以將扣條張開和角4一樣大，再將扣條先疊合在角5上，然後慢慢合起扣條的一邊，直到扣條和角5疊合，再將扣條疊合在角6上，然後慢慢合起扣條的一邊，直到扣條和角6疊合，讓學童發現當幾何扣條張開的程度越小，畫下的角度也越小。</p> <p>7. 讓學童由描繪中察覺幾何扣條張開的程度越大，描繪出來的角越大；張開的程度越小，描繪出來的角越小。</p> <p>8. 學童可能受到扣條長短的影響，而有「長的幾何扣條的角&gt;短的幾何扣條的角」的想法。</p>	<p>◎能回答：張開得越來越小。</p> <p>◎能回答：扣條張開的越小，畫下的角度也越小。</p> <p>◎能描繪不同的角並發表自己的想法。</p> <p>◎能說出自己的想法。</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>9. 先將 2 組扣條一起張開至一樣的大小，再操作讓學童發現橘色幾何扣條可以張開比紅色幾何扣條還要大的角。</p> <p>10. 畫下邊長不同但大小相同的角，並運用幾何扣條，讓學童確認邊長改變但張開的程度不變。並說明：這個角的邊的長短和角的大小無關。</p> <p>11. 教師運用幾何扣條畫下不同方向且邊長長短不同的角，並運用幾何扣條，讓學童確認邊長改變或方向改變，但張開的程度不變。並說明：角的大小和邊長的長短、角的方向無關。</p>	<p>9. 讓學童發現短的幾何扣條可以張開成比長的幾何扣條還要大的角，也就是「短的幾何扣條的角 &gt; 長的幾何扣條的角」，所以邊長的長短和角的大小無關。</p> <p>10. 學童可察覺角的大小和邊長的長短、角的方向無關。</p>	<p>◎能知道角的大小和邊長的長短、角的方向無關。</p>

【活動二】：能透過操作幾何扣條，直接比較張開角的大小

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>角的直接比較</p>	<p>1. 教師用紅色幾何扣條組合一 45 度的角，並將此角稱為「紅角」；用綠色幾何扣條組成一 90 度的角，並將此角稱為「綠角」。</p> <p>教師問：紅角和綠角，哪一個角比較大？</p> <p>如何確認綠角比紅角大？請學童上台說明及操作。</p> <p>2. 教師將紅角繼續張開到和綠角一樣大。</p>	<p>1. 學童需將綠角疊在紅角上，進行比較。</p> <p>2. 讓學童知道紅角必須繼續張開，才能變成和綠角一樣大，所以原來的紅角比綠角小。</p>	<p>◎能回答：綠角比紅角大。</p> <p>◎能說出確認的方法。</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>3. 教師拿起紅角，要學童運用手上的扣條做一個比紅角大的角。讓學童上台進行比較，並說明比較兩個角的大小的方法。</p> <p>4. 教師拿起綠角要學童運用手上的扣條做一個比綠角小的角。讓學童上台進行比較，並說明比較兩個角的大小的方法。</p> <p>5. 讓學童分組用不同顏色的幾何扣條，進行張開不同角的大小比較活動。</p> <p>6. 學童 2 人一組，玩比角大小的遊戲。</p>	<p>3. 引導學童進行角的直接比較。</p> <p>4. 引導學童進行角的直接比較。</p> <p>5. 學童可進行的活動如下：                      (1) 用扣條先做出一個角，再用另一組扣條做出一樣大的角。                      (2) 用扣條先做出一個角，再用另一組扣條做出比它大的角。                      (3) 用扣條先做出一個角，再用另一組扣條做出比它小的角。                      (4) 由扣條張開的程度比較二個角的大小。</p> <p>6. 遊戲進行方式：                      (1) 教師發給每一組寫著「大」、「小」的紙卡各 1 張。                      (2) 學童先決定自己幾何扣條張開的大小。                      (3) 紙卡寫字的面朝下，抽取 1 張紙卡並翻開紙卡，若紙卡寫「大」則較大的角獲勝，若紙卡寫「小」</p>	<p>◎能正確操作並說明。</p> <p>◎能正確操作並說明。</p> <p>◎能進行角的大小比較活動。</p> <p>◎能比較角的大小。</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	7. 讓學童發表如何比較 2 個角的大小的方法。	則較小的角獲勝。 (4)重複前述(2)和(3)的活動。 (5)比賽 5 次後，獲勝次數較多者勝利。	◎能說出比較的方法。

九、教學注意事項：

1. 在黑板上畫下幾何扣條的角時，宜注意角的構成要素為 1 個頂點和 2 個邊，所以要描繪幾何扣條的內側而非外緣。
2. 關於角度大小的直接比較，學童可能由直觀來比較出角度的大小，此時可以促使學童以幾何扣條疊合及張開的活動來檢驗直觀是否正確。
3. 宜多讓學童運用不同長度的幾何扣條進行直接比較的操作活動，包括：二組幾何扣條的角一樣大、較長幾何扣條的角比較短幾何扣條的角大、較長幾何扣條的角比較短幾何扣條的角小。
4. 疊合幾何扣條進行角的大小比較時，宜提醒學童注意，必須先對齊頂點，才能進行比較。
5. 在教學的歷程中，應不斷確認學童是否知道甚麼是角，要學童指出角。

## 數學領域教材原型研發編輯計畫－試教教學活動設計

- 一、教學主題：角的合成與分解
- 二、教學年級：四年級
- 三、教學者：新北市新店區中正國民小學 詹婉華教師
- 四、教學目標：能做角的合成、分解並用算式記錄。
- 五、教學的重點：透過旋轉角的合成與分解的歷程，幫助學童理解角度相加或相減的意義，並用算式記錄。

### 六、活動目標：

【活動一】：透過畫旋轉角，進行角度的合成活動，並用加法算式記錄。

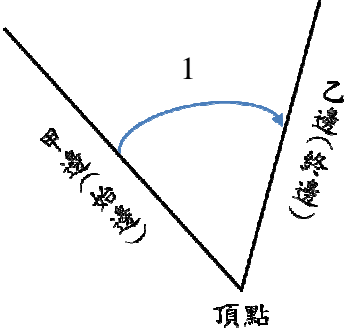
【活動二】：透過畫旋轉角，進行角度的分解活動，並用減法算式記錄。

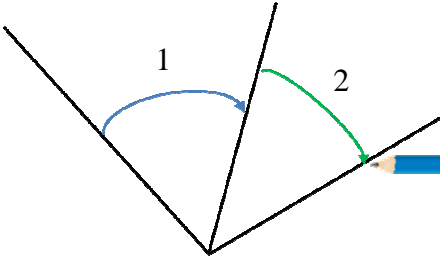
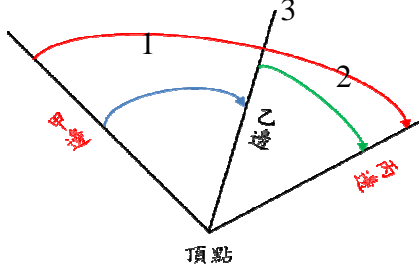
### 七、教學說明：

1. 關於角的加法和一般生活中我們所熟悉的數量加法有所不同。學童可以用加法「 $35+45=80$ 」算出「小明有 35 顆糖果，小華有 45 顆糖果，二人合起來共有 80 顆糖果」，並掌握解題活動的意義。但學童用加法「 $35+45=80$ 」算出「角 A 是 35 度，角 B 是 45 度，合起來是 80 度」時，可能只是透過類比題目語意的方式解決問題，並不表示他們能掌握角度合成的意義。同樣的，學童在學習角的減法時，所寫的減法，也可能只是透過類比題目的語意的方式解決問題，而非真的理解角度的分解意義。
2. 教師透過角度旋轉二次後，和另一個角的比較角度活動，讓學童理解角度合成的意義，也透過旋轉角度和比較角度的活動，讓學童理解角度分解的意義。

### 八、教學活動設計：

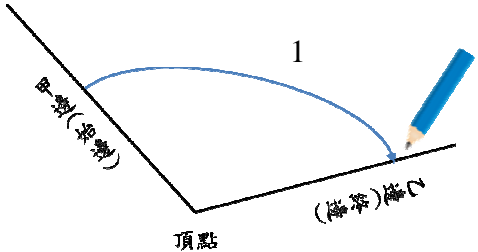
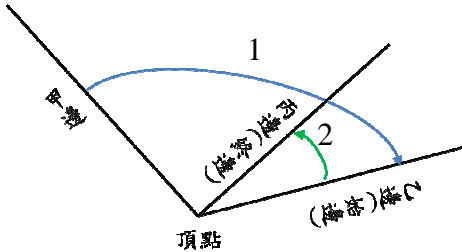
【活動一】：透過畫旋轉角，進行角度的合成活動，並用加法算式記錄

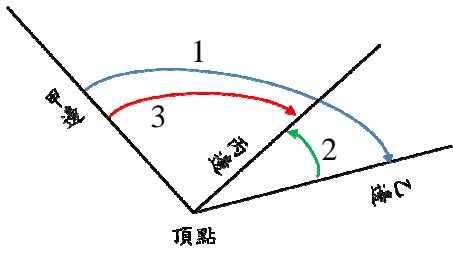
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
角度的合成	<p>1. 教師在黑板上以甲邊為始邊、乙邊為終邊，旋轉竹籤順時針方向畫下一個旋轉角，稱為「角 1」。並標明角 1 的始邊為「甲邊」，終邊為「乙邊」。</p>  <p>教師提問：哪一邊是角 1 的始邊？哪一邊是角 1 的終</p>	<p>1. 教師讓學童說出角 1 的始邊及終邊，並指出頂點的位置。</p>	<p>◎能回答：甲邊是角 1 的始邊，乙邊是角 1 的終邊。指出頂點。</p>

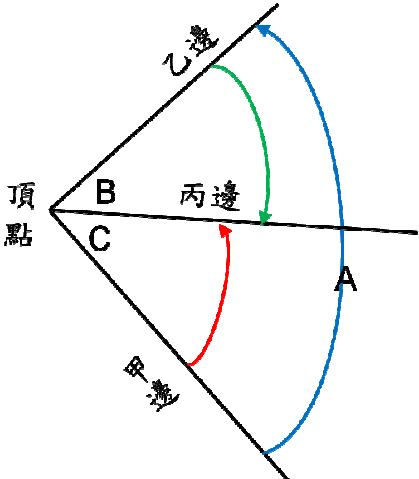
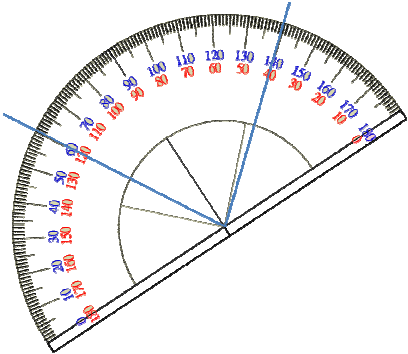
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>邊？指出角 1 的頂點。</p> <p>2. 教師以乙邊為始邊，運用竹籤繼續以順時針方向畫下另一個旋轉角，稱為「角 2」。並標明角 2 的始邊為「乙邊」，終邊為「丙邊」。</p>  <p>教師提問：哪一邊是角 2 的始邊？哪一邊是角 2 的終邊？指出角 2 的頂點。</p> <p>3. 教師請學童上台，運用竹籤，以甲邊為始邊、丙邊為終邊，旋轉竹籤。</p> <p>教師提問：如何記錄甲邊為始邊、丙邊為終邊的角？</p> <p>學童發表想法後，再請學童上台在黑板上表示出以甲邊為始邊、丙邊為終邊的角，並將這個角稱為「角 3」。</p>  <p>4. 教師提問：角 1 和角 2 合起來和哪一個角一樣大？</p> <p>教師提問：如何知道角 1 和角 2 的角度有多大？</p> <p>讓學童用量角器來量。</p>	<p>2. 教師讓學童說出角 2 的始邊及終邊，並指出頂點的位置和角 1 的頂點位置相同。</p> <p>3. 教師讓學童正確表示以甲邊為始邊、丙邊為終邊的角。</p> <p>4. 教師引導學童說出角 1 和角 2 合起來和角 3 一樣大。</p> <p>學童上台進行測量出角 1 和角 2 的角度。</p>	<p>◎能回答：乙邊是角 2 的始邊，丙邊是角 2 的終邊。指出頂點。</p> <p>◎能表示以甲邊為始邊、丙邊為終邊的角。</p> <p>◎能回答：角 1 和角 2 合起來和角 3 一樣大。</p> <p>◎能正確量出角 1 和角 2 的角度。</p>

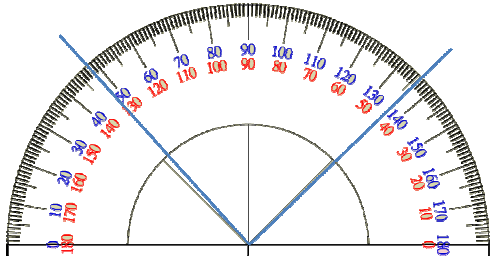
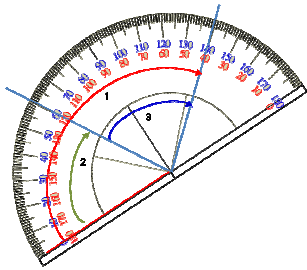
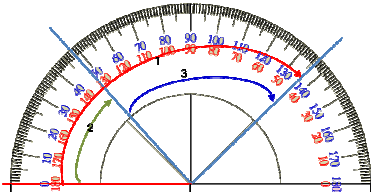
教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>5. 教師提問：角 1 和角 2 合起來是幾度？你怎麼知道的？可以用算式表示嗎？</p> <p>教師接著提問：不用量角器測量，可以知道角 3 的角度有多大嗎？你怎麼知道的？</p> <p>6. 教師讓學童運用量角器測量角 3 的角度，確認角 3 的角度就是角 1 和角 2 合起來的角度，並記錄角 1 + 角 2 = 角 3。</p> <p>7. 教師讓學童上台運用竹籤以逆時針方向畫下一個旋轉角，稱為「角 A」。並依教學活動 2、3 的方式，畫下「角 B」和「角 C」。</p> <div data-bbox="384 1480 754 1805" data-label="Image"> </div> <p>依活動 4、5、6 的方式，讓學童說出角 A 和角 B 合起來的角度等於角 C 的角度，並運用量角器量出角 A 和角 B 的角度，再以加法算式記錄角 A + 角 B = 角 C。</p>	<p>5. 教師引導學童運用加法算式算出角 1 和角 2 合起來的角度。 如：角 1 是 60 度，角 2 是 45 度，寫出 60 度 + 45 度 = 105 度。</p> <p>教師引導學童說出因為角 1 和角 2 合起來和角 3 一樣大，所以，角 1 和角 2 合起來的角度，就是角 3 的角度。 如：角 1 是 60 度，角 2 是 45 度，角 1 和角 2 合起來是 105 度，角 3 就是 105 度。</p> <p>6. 教師引導學童用加法算式記錄。</p> <p>7. 教師讓學童學習運用量角器量出兩個角的角度合起來等於第三個角的角度，並以加法算式記錄。</p>	<p>◎能用加法算式表示角 1 和角 2 合起來的角度。</p> <p>◎能回答：角 1 和角 2 合起來的角度，就是角 3 的角度。</p> <p>◎能測量角 3 的角度。</p> <p>◎能記錄角 1 + 角 2 = 角 3。</p> <p>◎能說出兩個角的角度合起來等於第三個角的角度，並以加法算式記錄。</p>

【活動二】：透過畫旋轉角，進行角度的分解活動，並用減法算式記錄

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
角度的分解	<p>1. 教師在黑板上以甲邊為始邊、乙邊為終邊，旋轉竹籤以順時針方向畫下一個旋轉角，稱為「角1」。並標明角1的始邊為「甲邊」，終邊為「乙邊」。</p>  <p>教師提問：哪一邊是角1的始邊？哪一邊是角1的終邊？指出角1的頂點。</p> <p>2. 教師以乙邊為始邊，運用竹籤以逆時針方向畫下另一個旋轉角，稱為「角2」。並標明角2的始邊為「乙邊」，終邊為「丙邊」。</p>  <p>教師提問：哪一邊是角2的始邊？哪一邊是角2的終邊？指出角2的頂點。</p> <p>3. 教師提問：以甲邊為始邊，順時針旋轉竹籤到丙邊，可不可以畫出一個角？ 學童發表想法後，再請學童上台在黑板上表示出以甲邊為始邊、丙邊為終邊的角，並將這個角稱為「角3」。</p>	<p>1. 教師讓學童說出角1的始邊及終邊，並指出頂點的位置。</p> <p>2. 教師讓學童說出角2的始邊及終邊，並指出頂點的位置和角1的頂點位置相同。</p> <p>3. 教師讓學童正確表示以甲邊為始邊、丙邊為終邊的角。</p>	<p>◎能回答：甲邊是角1的始邊，乙邊是角1的終邊。指出頂點。</p> <p>◎能回答：乙邊是角2的始邊，丙邊是角2的終邊。指出頂點。</p> <p>◎能表示以甲邊為始邊、丙邊為終邊的角。</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	 <p>4. 教師提問：角 1 大還是角 2 大？ 角 1 拿掉角 2 後，會剩下哪個角？</p> <p>教師提問：如何知道角 1 和角 2 的角度有多大？ 讓學童用量角器來量。</p> <p>5. 教師提問：角 1 拿掉角 2 後剩下的角度是多少？你怎麼知道的？可以用算式表示嗎？</p> <p>教師接著提問：不用量角器測量，可以知道角 3 的角度有多大嗎？你怎麼知道的？</p> <p>6. 教師讓學童運用量角器測量角 3 的角度，確認角 3 的角度就是角 1 拿走角 2 後的角度，並記錄角 1 一角 2 = 角 3。 教師提問：角 1 拿角 2 後，會剩下</p>	<p>4. 教師讓學童說出角 1 大。 學童由剛剛操作的歷程，可以知道角 1 拿掉角 2 後會剩下角 3。</p> <p>5. 教師引導學童運用減法算式算出角 1 拿掉角 2 後的角度。 如：角 1 是 120 度，角 2 是 30 度，寫出 <math>120 \text{ 度} - 30 \text{ 度} = 90 \text{ 度}</math>。 教師引導學童說出因為角 1 拿走角 2 後會剩下角 3，所以，角 1 拿走角 2 後的角度，就是角 3 的角度。 如：角 1 是 120 度，角 2 是 30 度，角 1 拿走角 2 後剩下 90 度，角 3 就是 90 度。</p> <p>6. 教師引導學童用減法算式記錄。</p>	<p>◎能回答：角 1 大。</p> <p>◎能回答：剩下角 3。</p> <p>◎能正確量出角 1 和角 2 的角度。</p> <p>◎能用減法算式表示角 1 拿走角 2 後的角度。</p> <p>◎能回答：角 1 拿走角 2 後的角度，就是角 3 的角度。</p> <p>◎能測量角 3 的角度。</p> <p>◎能記錄角 1 一</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>哪個角？用算式記記看。</p> <p>7. 教師讓學童上台運用竹籤以逆時針方向畫下一個旋轉角，稱為「角A」。並依教學活動2、3的方式，畫下「角B」和「角C」。</p>  <p>依活動4、5、6的方式，讓學童說出角A拿走角B後的角度等於角C的角度，並運用量角器量出角A和角B的角度，再以減法算式記錄角A-角B=角C、角A-角C=角B。</p> <p>8. 教師在黑板上畫下一個角，並在角上放上量角器。</p>  <p>教師提問：不移動量角器，可以用什</p>	<p>7. 教師讓學童學習運用量角器量出第一個角拿掉第二個角後會剩下第三個角，並以減法算式記錄。</p> <p>8. 學童可能會從60度，以疊數方式解題，教師可以引導學童運用角度分解的方法來解題。 先做出角1及角2，角1=140度、角2=60度，知道角1拿走角2，會和角3的角度一樣大，運用140度-60度=80度，知道角3=80度。</p>	<p>角2=角3、角1-角3=角2。</p> <p>◎能說出第一個角拿掉第二個角後會剩下第三個角，並以減法算式記錄。</p> <p>◎能用角度分解的方法，算出角的角度。</p>

教學內容摘要	主要問題與活動	說明	評量重點
	<p>麼方法知道這個角的角度是多少？</p> <p>學童發表想法，讓運用角度分解方法的學童上台用減法算式記錄。</p> <p>9. 教師在黑板上再畫下一個角，並在角上放上量角器。</p>  <p>教師提問：不移動量角器，可以用什麼方法知道這個角的角度是多少？</p> <p>學童發表想法，讓運用角度分解方法的學童上台用減法算式記錄。</p>	 <p>9. 教師引導學童運用角度分解的方法來解題。 先做出角 1 及角 2，角 1 = 136 度、角 2 = 48 度，知道角 1 拿走角 2，會和角 3 的角度一樣大，運用 <math>136 \text{ 度} - 48 \text{ 度} = 88 \text{ 度}</math>，知道角 3 = 88 度。</p> 	<p>◎能用角度分解的方法，算出角的的角度。</p>

九、教學注意事項：

1. 在角度的合成、分解教學前，宜確認學童已了解旋轉角的意義且能標示旋轉角，以及能正確的使用量角器測量某個角的角度。
2. 進行角度的合成、分解教學時，教師宜進行都是順時針方向與都是逆時針方向的旋轉角合成活動，以及先順時針方向再逆時針方向旋轉與先逆時針方向再順時針方向的旋轉角分解活動，讓學童了解，不論是順時針方向或逆時針方向都能合成或分解角度。
3. 進行角度角度的合成、分解教學時，宜確認學童已理解順時針方向旋轉及逆時針方向旋轉的意義。

## 數學領域教材原型研發編輯計畫－試教教學活動設計

一、教學單元：體積與容量

二、教學年級：五年級

三、教學者：臺北市國立台北教育大學附設實驗國民小學 房昔梅教師

四、教學目標：

透過操作和觀察，了解物體排開的水量，和物體的體積是一樣的。

五、活動目標：

活動一·透過將積木沈入水中的活動，引導學童觀察 1 立方公分積木的體積和 1ml 的水一樣多。

活動二·理解可以透過「固體體積與水的體積相等」的想法，計算不規則物體的體積。

六、能力指標

5-n-19 能理解容量、容積和體積間的關係。

七、先備知識：

1. 認識體積，並能計算長方體與正方體的體積。

2. 知道邊長 1 公分的正方體體積是 1 立方公分，記成  $1\text{cm}^3$ 。

3. 認識容量，並能以 1ml 為單位，報讀容量的刻度。

八、教學說明：

1. 透過在原就盛有水的量筒中加入水的動作，幫助學童複習當量筒中水位上升，代表液量增加；相對的，把量筒中的水倒出部份，會看到水位下降，代表液量減少。

2. 教師透過在已盛水的量筒中投入積木的動作，引導學童觀察：當投入體積為 1 立方公分的積木時，量筒中的水位就會上升 1 小格(1 毫升)，代表 1 立方公分和 1ml 一樣多，可以記成  $1\text{cm}^3 = 1\text{cc} = 1\text{ml}$ 。(水的體積比較少用立方公分來描述，cc 是立方公分的簡寫)。

3. 將積木投入裝滿水的容器中時，溢出的水量也會和投入的積木體積相等。假設在裝滿水的容器中放入體積為 10 立方公分的積木，將會溢出 10 cc 或 10ml 的水，因此可以記成： $10\text{cm}^3 = 10\text{cc} = 10\text{ml}$ 。

4. 透過實作，引導學童察覺：計算不規則物體的體積時，只要將不規則的物體沒入水中，計算水位上升的刻度，就可以得知物體的體積。

5. 關於 ml 的說法，常用「毫公升」或「毫升」兩種，這兩種說法通用，以下皆以「毫升」表示。

九、教學準備：

1. 容量分別為 50ml (每一刻度為 1ml) 和 250ml (每一刻度為 2ml) 的透明量筒及 2000ml (每一刻度為 20ml) 的透明量杯各一個。

2. 體積為 1 立方公分的正方體積木約 30 個。

3. 大型可盛水容器一個。

4. 不規則物體若干個。

十、教學活動設計：

【活動一】：認識 1 立方公分積木的體積等於 1ml

教學內容	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>透過教師的操作，讓學生觀察並了解物體排開的水量，就是物體的體積</p>	<p>1.教師拿出一支容量為 50ml 的量筒，在裡面裝進 10ml 的水，向學生展示並提問：說說看，量筒中裝了多少毫升的水？</p>  <p>2.教師拿出一個邊長 1 公分的正方體積木，問學生：這個小積木的體積是多少立方公分？</p> <p>教師把體積為 1 立方公分的積木放進裝了 10 毫升水的量筒中，使積木完全沒入水中。並且問：說說看，量筒中水位有什麼變化？</p>  <p>3.教師問：沒有放積木時，量筒中的水是 10 毫升，放入積木後，量筒中的水位上升到 11 毫升的刻度，說說看，水位上升了幾格？也可以說是幾毫升？</p>	<p>1.為使所有學生可以看清楚，建議同時以投影片呈現。</p> <p>2.這裡的用意是希望學生能看到量筒中的水上升了 1 格，從 10 毫升上升到 11 毫升。</p> <p>3.確認學生知道水位上升了 1 格，也就是 1 毫升。</p>	<p>◎能回答：量筒中有 10 毫升的水。</p> <p>◎能回答：1 立方公分。</p> <p>◎能回答：量筒中的水上升了 1 格，從 10 毫升上升到 11 毫升。</p> <p>◎能回答：水位上升了 1 格，也就是 1 毫升。</p>



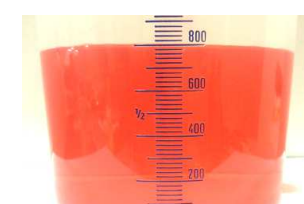

	<p>4. 放進 1 立方公分的積木，水</p> <p>位就上升 1 毫升。說說看：放進的積木和上升的刻度有什麼關係？</p> <p>5. 教師問：體積 1 立方公分的積木和 1 毫升的水一樣多，用算式怎麼記？</p> <p><b>【重新佈題】</b></p> <p>6. 教師拿出容量為 50ml 的量筒，在裡面裝入 20ml 的水，向學生展示並提問：說說看，量筒中裝了多少毫升的水？</p>  <p>再把 5 個體積為 1 立方公分的積木放進量筒，使積木完全沒入水中。要學生說說看，現在量筒中水位的刻度是多少毫升？</p>  <p>7. 教師問：量筒中的水位上升了幾格？也就是幾毫升？</p>	<p>4. 讓學生說出積木的體積和水量的關係。(水的體積加積木的體積讓水位從 10 毫升上升到 11 毫升)，多出來的一毫升就是積木的體積。</p> <p>5. 教師引導學童記錄：<math>1\text{cm}^3 = 1\text{cc} = 1\text{ml}</math>。</p> <p>6. 讓學生觀察後回答。</p> <p>希望學生能看到量筒中的水上升了 5 格，從 20 毫升上升到 25 毫升。</p> <p>7. 學生可能的回答：量筒中的水上升了 5 格，也</p>	<p>◎能回答：投入的積木體積等於上升的水量。</p> <p>◎能記錄：<math>1\text{cm}^3 = 1\text{cc} = 1\text{ml}</math>。</p> <p>◎能回答：有 20 毫升的水</p> <p>◎能回答：量筒中的水 25 毫升。</p> <p>◎能回答：量筒中</p>
--	--	--	---

	<p>8.教師問：你們知道量筒中的水為什麼會上升嗎？</p> <p>9.體積 5 立方公分等於 5 毫升水的體積，用算式怎麼記？</p> <p><b>【重新佈題】</b></p> <p>10.向學生展示一個已經投入 20 個體積為 1 立方公分的積木的量筒，並提問：說說看，現在量筒中有多少水？</p>  <p>11.當著學生的面，教師將量筒中的積木全數取出後，問學生：現在量筒中的水位指著多少毫升？</p> 	<p>就是 5 毫升。</p> <p>8.學生可能的回答：因為放進一些積木，放進量筒中的積木體積就等於水位上升的體積。</p> <p>9.教師引導學童記錄：<math>5\text{cm}^3 = 5\text{cc} = 5\text{ml}</math>。</p> <p>10.讓學生觀察後回答。</p> <p>11.讓學生觀察後回答。</p>	<p>的水上升了 5 格。</p> <p>◎能說明水為什麼會上升。</p> <p>◎能記錄：<math>5\text{cm}^3 = 5\text{cc} = 5\text{ml}</math>。</p> <p>◎學生可能的回答：量筒中有 130 毫升的水。</p> <p>◎學生可能的回答：量筒中的水是 110 毫升。</p>
--	---	--	--

	<p>教師再問：剛才共拿出多少個 1 立方公分的小積木？</p> <p>教師又問：拿出 20 個小積木後，水位下降幾毫升？</p> <p>12. 體積 20 立方公分和 20 毫升水一樣多，用算式怎麼記？</p> <p>13. 如果學生對於上面進行的活動還是不瞭解，教師可以進行如下的活動：</p> <p>① 準備一個裝滿水的量筒，放在一個大型可盛水的容器中。並將 50 個體積為 1 立方公分的積木，投入裝滿水的量筒中，並使積木完全沒入水中，讓學生觀察水溢出的情形。</p> <p>② 教師問：能不能知道溢出的水量有多少？</p> <p>③ 用什麼方法可以檢查溢出的水是不是 50 毫升呢？</p>	<p>12. 教師引導學生作成記錄：<math>20\text{cm}^3=20\text{cc}=20\text{ml}</math>。</p> <p>13. 讓學生觀察後回答。</p> <p>② 希望學生理解：因為 <math>1\text{cm}^3=50\text{cc}=50\text{ml}</math>，所以放入 50 個 1 立方公分積木應該會溢出 50 毫升的水。</p>	<p>◎能回答：拿出 20 個小積木。</p> <p>◎能回答：拿出 20 個小積木後，下降 20 毫升。</p> <p>◎能記錄：<math>20\text{cm}^3=20\text{cc}=20\text{ml}</math>。</p> <p>◎能回答：可以。</p> <p>◎能回答：把溢出的水入量筒中，可以知道溢 50 毫升水。</p>
--	--	--	---

	④50個1立方公分積木的體積和50毫升水一樣多，怎麼記錄？	④引導學生作成紀錄： $50\text{cm}^3 = 50\text{cc} = 50\text{ml}$ 。	◎能記成 $50\text{cm}^3 = 50\text{cc} = 50\text{ml}$ 。
--	-------------------------------	---	---

【活動二】：計算不規則物體的體積

教學內容	主要問題與活動	說明	評量重點
透過教師的操作，讓學生觀察並了解：不規則形狀的物體體積，也會等於排開的水量。	1.教師拿出一個不規則形狀的物體，問學生：如何測量這個物體的體積？   2.教師接著展示另一組量筒，請學童計算不規則物體的體積。  	1.學童可能的回答： 我先拿一個可以放進物體的透明量杯，裝進足夠淹沒物體的水量，記下刻度。 。接著將物體放入量杯並沒入水中，再記錄刻度。 最後將兩個刻度相減，計算上升的水量，就知道物體的體積。  原先的水位刻度是800ml 放入物體後的水位是900ml 水位上升的刻度是 $900 - 800 = 100$ (ml)  所以不規則物體的體積就是 120 立方公分  2.學生可能的回答： 原先的刻度是800ml， 放入物體後的刻度是1140ml 水位上升的刻度是 $1140 - 800 = 340$ (ml)， 所以物體的體積就是 340 立方公分。	◎能說明計算不規則物體體積的方法。  ◎能了解：不規則形狀的物體體積，也會等於排開的水量。

## 十一·教學注意事項：

1. 教師在透明量筒中裝水讓學童觀察時，可以滴一些顏料在水中，將水稍稍染色，以方便學童觀察。
2. 學童觀察量筒中的水量時，教師應指導學童將視線對齊水平面，以免觀察的角度不同，導致觀察的結果不同。
3. 學童將溢出的水倒進量筒中檢驗時，必定會殘留部份水滴在大型容器中，部份學童可能因此質疑量筒中的水量不足。教師應向學童解釋：這類些微的誤差是可以被接受的。
4. 教師應注意量筒上的最小刻度，指導學童作正確的報讀。如果量筒的最小刻度是 1ml，學童可以報讀的最小單位就是 1 毫升；如果量筒上的最小刻度是 5ml，學童只能夠以 5 毫升為單位報讀；如果量筒上的最小刻度是 10ml，學童只能以 10 毫升為單位報讀。

## 數學領域教材原型研發編輯計畫－試教教學活動設計

一、教學單元：複合形體的體積

二、教學年級：五年級

三、教學者：臺北市國立台北教育大學附設實驗國民小學 房昔梅教師

四、教學目標：

能應用長方體和正方體的體積公式，透過切割或填補，計算複合形體的體積。

五、活動目標：

針對不同的立體圖形，能應用長方體和正方體的體積公式，選擇適當的策略，透過切割或填補，計算出複合形體的體積。

六、教學說明：

- 1.布題一、方便學童透過「填補」的方式計算出體積。
- 2.布題二、可切割，也可填補，但切割的計算步驟較簡單。
- 3.布題三、可切割，也可填補，兩種策略的計算步驟差不多。
- 4.布題四、是階梯狀的立體，因為可以切割成全等的六個長方體，因此難度並不高。即便使用填補策略，也不會太麻煩。
- 5.布題五、是一個中空的長方體，使用填補策略，計算過程較單純；相對的，如果切割成四個長方體再計算，過程可能繁複些。
- 6.由於學生已經具備計算複合圖形面積的經驗，知道可以透過「切割」或「填補」的策略解題，因此，本節課的教學重點在於：學生在面對複合形體時，如何選擇解題策略，順利解題，以及認識不同的解題策略，提升自我的解題能力。

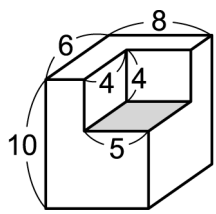
七、教學準備：

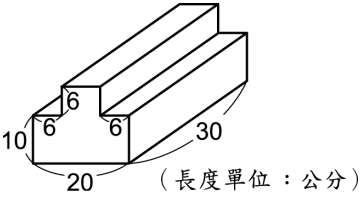
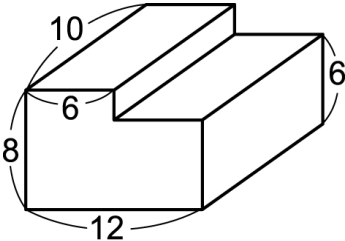
教師準備：布題的大圖、解題用紙、實物。

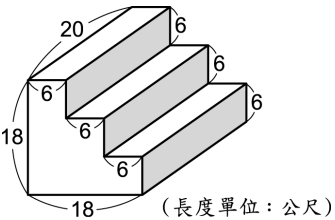
學生準備：白板筆

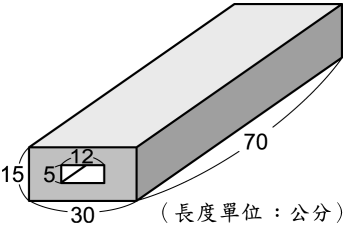
八、教學活動設計：

【活動一】：能應用長方體的體積公式，透過切割，計算複合形體的體積。

教學內容	主要問題與活動	說明	評量重點
教師布題	<p>【布題一】</p> <p>1.教師透過積木圖提問：想一想，有什麼方法可以算出這個積木的體積？把你的想法和算法記錄下來。</p>	 <p>(長度單位：公分)</p>	◎能夠理解题目的要求。
學生解題上台發表	<p>2.教師先請學生個別解題，再請學生上台發表。</p>	<p>❖學生可能的回答：</p> <p>①我把這個積木補滿，形成一個大的長方體，先算出大長方體的體積，再減去填補上去的長方體體積，就可以得到答</p>	◎能夠記錄想法和計算的結果

教學內容	主要問題與活動	說明	評量重點
教師帶領學生討論	<p>3.如果學生有不同作法，教師應帶領學童比較不同作法的差別。</p>	<p>案。(兩步驟問題) ②其他。</p> <p>❖本題使用填補策略較容易解題，切割策略比較麻煩，估計不會有學生使用。</p>	<p>◎能夠辨別不同解題策略的異同</p>
教師布題	<p><b>【布題二】</b> 1.教師透過積木圖提問：想一想，有什麼方法可以算出這個積木的體積？把你的想法和算法記錄下來。</p>	 <p>(長度單位：公分)</p>	<p>◎能夠理解題目的要求。</p>
學生解題上台發表	<p>2.學生個別解題後，教師請不同作法的學童上台發表。</p> <p>3.由於學生已經具備計算複合圖形面積的經驗，知道可以透過「切割」或「填補」的策略解題，本題的以切割或填補的方式都可以順利解題，差別在於作法的選擇，但兩種策略對學生而言都不算困難。</p>	<p>❖學生可能的回答：</p> <p>①我把這個積木切成上下兩個長方體，分別計算體積後再相加，就可以得到答案。</p> <p>②我把這個積木的左右上角補滿，形成一個大的長方體，再減去填補上去的兩個長方體體積，就可以得到答案。</p> <p>③其他</p>	<p>◎能夠記錄想法和計算的結果</p>
教師帶領學生討論	<p>4.如果出現不同做法，教師應帶領學生比較不同作法的差別。</p>		<p>◎能夠辨別不同解題策略的異同</p>
教師布題	<p><b>【布題三】</b> 1.教師透過積木圖提問：想一想，有什麼方法可以算出這個積木的體積？把你的想法和算法記錄下來。</p>	 <p>(長度單位：公分)</p>	<p>◎能夠理解題目的要求。</p>
學生解題上台發表	<p>2.學生個別解題後，教師請不同作法的學童上台發表</p>	<p>❖學生可能的回答： ①我把這個積木切成上下</p>	<p>◎能夠記錄想法和計算</p>

教學內容	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>教師帶領學生討論</p>	<p>表。</p> <p>3.這題無論使用切割或填補，都很容易算出答案。教師可透過本題，了解學生較熟練的策略。</p> <p>4.如果出現不同做法，教師應帶領學生比較不同作法的差別。</p>	<p>兩個長方體，分別計算體積後再相加，就可以得到答案。</p> <p>②我把這個積木切成左右兩個長方體，分別計算體積後再相加，就可以得到答案。</p> <p>③我把這個積木的右上角補滿，形成一個大長方體，計算出體積之後，再減去右上角的長方體體積，就可以得到答案。</p>	<p>的結果</p> <p>◎能夠辨別不同解題策略的異同</p>
<p>教師布題</p>	<p>【布題四】</p> <p>1.教師透過積木圖提問：這是一個階梯狀的形體。想一想，有什麼方法可以算出這個積木的體積？把你的想法和算法記錄下來。</p>	 <p>(長度單位：公尺)</p>	<p>◎能夠理解题目的要求。</p>
<p>學生解題上台發表</p>	<p>2.學生個別解題後，教師請不同作法的學生上台發表。</p> <p>這個形體雖然會切成六塊，但這六塊全等，所以計算上的難度並不高。重點在於：如何協助學童看出：可以切成全等的六個長方體。</p>	<p>❖學生可能的回答：</p> <p>①我把這個積木切成六個完全相同的長方體，先計算出一個的體積，再乘以六，就可以得到答案。</p> <p>②其他</p>	<p>◎能夠記錄想法和計算的結果</p>
<p>教師帶領學生討論</p>	<p>3.如果出現不同做法，教師應帶領學童比較不同作法的差別。</p>		<p>◎能夠辨別不同解題策略的異同</p>

教學內容	主要問題與活動	說明	評量重點
<p>教師布題</p> <p>學生解題上台發表</p> <p>教師帶領學生討論</p>	<p><b>【布題四】</b></p> <p>1.教師透過如右的積木圖提問：這是一個中空的長方體。想一想，有什麼方法可以算出這個積木的體積？把你的想法和算法記錄下來。</p> <p>2.學生個別解題後，教師請不同作法的學生上台發表。</p> <p>這題用「填補」策略可能比較簡便，用「切割」策略則稍繁複，但難度並不高，學生應可順利解題。</p> <p>3.如果出現不同做法，教師應帶領學生比較不同作法的差別。</p>	 <p>❖學生可能的回答：</p> <p>①我先算外部體積，再減去內部體積，就可以得到答案。</p> <p>②我把這個積木切成四個長方體，分別計算體積後再相加，就可以得到答案。</p> <p>③其他</p>	<p>◎能夠理解題目的要求。</p> <p>◎能夠記錄想法和計算的結果</p> <p>◎能夠辨別不同解題策略的異同</p>



國民小學數學教材原型 B 冊 / 謝 堅 主編  
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院，2013.12

1. 數學教育
2. 中小學教育
3. 教材與教法

國民小學數學教材原型 B 冊

主 編 者：謝 堅

作 者：吳欣悅 房昔梅 詹婉華 謝 堅 魏慶雲  
(依姓氏筆畫順序排列)

發 行 人：柯華葳

出 版 者：國家教育研究院

編 審 者：數學領域教材原型研發編輯委員會

主任委員：陳昭地

副主任委員：謝 堅

委 員：丁斌悅 吳欣悅 李政憲 李政豐 周筱亭 房昔梅  
張東輝 曹博盛 陳彥廷 傅淑婷 黃幸美 詹婉華  
魏慶雲 蘇進發  
(依姓氏筆畫順序排列)

編輯小組：吳欣悅 周筱亭 房昔梅 張東輝 黃幸美 詹婉華  
謝 堅 魏慶雲  
(依姓氏筆畫順序排列)

編輯助理：張淑娟、蔡敏冲

出版年月：102 年 12 月

版 次：初版

電子全文可至國家教育研究院網站 <http://www.naer.edu.tw> 免費取用

非賣品

本書經雙向匿名審查通過  
(著作財產權歸教育部所有，請勿侵害)