

數字常識在國小數學科教學的重要性

許清陽

台南縣永康市大橋國小訓導主任

楊德清

國立嘉義大學應用數學系副教授

本文摘要

在數學有意義的學習領域裏，數字常識（number sense）已受到先進國家的重視。但在台灣數學的課程很少涉及到數字常識，數學教育學者、教室裏的數學教師和出版的刊物也很少討論數字常識；台灣的教育所強調的是計算結果所得到答案的精確性。雖然強調計算結果的精確性會得到較高的計算成績，但對數字常識的提升卻沒有幫助。

數字常識主要在強調數學教學中對數字意義化的重要性，擁有數字常識能力的人，對數字有較強的直覺感覺，能以各種不同的方式使用和解釋數字，並能創新數字的形式來解決問題，在不須使用紙筆計算的情境下，能以各種不同形式的數字瞭解方式做數學上的判斷，並能運用有效的策略來處理所面對的數字情境。這和傳統強調筆算的計算過程以得到精確答案的能力，顯然不同；也就是說，傳統數學考試成績好的學生，並不能代表有較好的數字常識。

國內的數學教育一直未能脫離機械的練習，學生對數學多半不感興趣，覺得枯燥乏味，而數字常識的教學強調數字的意義化，鼓勵學生探索不同的解題策略，能使學生生活化的運用數字，進而引發學生學習數學的興趣，由此可知數字常識教學的重要性。

關鍵字：數字常識、紙筆計算、有意義的學習。

壹、前言

台灣的數學教育一直都強調著筆算的技能、速度和唯一的正確答案。老師、家長所關心的是成績的高低，在乎的是學生對教材的精熟與否；不斷的複習和演算成了教師提高數學成績的不二法門，家長也滿足於這樣的模式所反應的成績。但這樣的教學模式對學生數學概念的發展是否有幫助，學生對數學的興趣是否和成績成正比，這是值得令人深思的問題。

學校中的數學教學重視算則的機械式演練與計算技能的熟練，孩子不知道數字真正的內涵，無法將數字意義化，面對新問題時只能依賴筆算及老師所教的算則，否則便無法解決問題；筆者曾經對國小五年級的學生測驗過這樣的問題：甲杯的水 40°C ，乙杯的水也 40°C ，將甲乙兩杯水混入丙杯中，請問丙杯是多少 $^{\circ}\text{C}$ ？測驗的結果令人驚訝，竟然大部份的小朋友都回答 80°C ，因為 $40^{\circ}\text{C} + 40^{\circ}\text{C} = 80^{\circ}\text{C}$ ，很顯然的學生是受到加法算則的影響，並沒有深入的思考問題背後所蘊含的意義，而且學生在學數學時是孤立於生活經驗之外，試想這樣的數學教學怎能引起學生的學習興趣及解決實際生活中的數學問題呢？

在數學有意義的學習領域裏，數字常識 (number sense) 已受到先進國家的重視。Everybody Counts (NRC, 1989) 主張數字常識教學應為小學數學教育的主要目標。澳洲教育研究中心 (Australian Education Council [AEC], 1991) 以及美國數學教師協會 (National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 1989) 皆認為，數字常識教學為中小學數學教育所不可缺少的主題。NCTM (2000) 今年所出版之「學校數學課程原則與標準」(The Principles and Standards for School Mathematics) 中更強調「本標準之中心旨在發展兒童數字常識的能力」(p. 32)。但在台灣數學的課程很少涉及到數字常識，數學教育學者、教室裏的數學教師和出版的刊物也很少討論數字常識；台灣的教育所強調的是計算結果所得到答案的精確性。雖然強調計算結果的精確性會得到較高的計算成績，但卻對數字常識的提升卻沒有幫助。依據 Yang (1997) 的研究發現，台灣學生在筆算技巧方面擁有較高的水準，但在解決不用計算的類似問題（如：估算）時，數字常識的能力顯然不能等同於筆算能力。此發現說明了，正確答案不是良好思考的指標，老師要測驗的不只是答案，而必須要使學生思考答案背後所蘊含的意義。在強調意義化學習的數學教學環境裏，了解什麼是數字常識有其必要性。

貳、數字常識的意義

數字常識 (number sense) 在最近幾年已受到許多先進國家，如：美國、英國、澳洲、瑞典及德國等國家所重視。但在國內數學教育界這個名詞顯然既新穎又陌生。什麼是數字常識呢？為什麼它在數學教育強調意義化與生活化的學習領域中，會逐漸受到重視？以下擬從數字常識的涵義與數字常識的特徵兩方面，來闡明數字常識的意義與內涵。

一、數字常識的涵義

數字常識是一種很難界定清楚的概念，它不是知識的本體，而是某種思考方式

(Sowder, 1992), 已引起數學教育學者的廣泛討論, 包括教室裏的教師, 課程的編寫者和研究者。雖然數字常識的定義很難清楚的界定, 但從學者專家對數字常識的分析與討論, 仍可一窺其整體脈絡。

早在數字常識還沒成為專有名詞前, 就有類似數字常識意義的看法。Brownell (1935) 認為, 依據有意義學習的理論 (Meaningful Learning Theory), 學習的測驗不只在檢驗機械式的計算能力, 真正的測驗是要測出掌握數字相關性智慧的能力, 這種能力是在處理計算情境時, 能了解在數學上和實際上的含意。

Sowder (1992) 認為數字常識是: (一) 有良好的概念組織網路, 使人能連結數字和運算特性的關係; (二) 一種可供辨認的能力, 這種能力是在比較數字時, 使用數字的大小、相對和絕對大小來做質與量的判斷; 並且能辨認計算的不合理性, 能運用非標準化的策略來進行心算和估算; (三) 能運用多種變化及創新的數字形式來解決問題。Howden (1989) 認為, 數字常識是一種對數字的特殊感覺, 是人們如何與他人和周遭世界產生關聯的直覺能力。

Yang (1997) 在研究中指出, 數字常識是指對數字和運算過程的了解, 它包括做數學判斷時所使用複雜方式的了解, 以及發展有用的策略來處理數字和運算。擁有數字常識能力的人, 意味著能運用數字和數量的方法來溝通、處理和解釋資訊。McIntosh, Reys, 和 Reys, Bana, 和 Farrel (1997) 認為, 數字常識是一個人對數字和運算的一般性了解, 能變通性的使用這種了解來做數學的判斷, 並發展出有用及有效的策略來處理所面對的數字情境。

由上述的文獻分析中可知, 數字常識雖然是一個很廣泛的概念, 但它總是在強調數學教學中, 對數字意義化的重要性, 擁有數字常識能力的人, 對數字有較強的直覺感覺, 能以各種不同的方式使用和解釋數字, 並能創新數字的形式來解決問題, 在不須使用紙筆計算的情境下, 能以各種不同形式的數字瞭解方式做數學上的判斷, 並能運用有效的策略來處理所面對的數字情境。這和傳統強調筆算的計算過程以得到精確答案的能力, 顯然不同; 也就是說, 傳統數學考試成績好的學生, 並不能代表有較好的數字常識。

二、數字常識的特徵

數字常識就像一般的常識 (sense) 一樣, 很難對它下一個明確的定義; 然而, 透過對數字常識特徵的描述, 有助於概念的釐清。以下將從數學教育家所做之研究報告分析數字常識的特徵。

(一) 了解數字的意義

NCTM (1989) 提到, 假如孩子要有意義的使用數字於日常生活情境, 那麼他們就必須了解數字的意義。Sowder 和 Schappelle (1994) 認為, 數字常識的最重要基礎是對數字意義的了解。Howden (1989) 曾經訪問一班一年級的學生, 要求學生告訴她“24”代表什麼意義? 一些學生能就他們生活經驗來回答這個問題; 例如, “二毛錢四分”, “兩打的鉛筆”, “兩打的蛋”, “四個五分錢和四個一毛錢”, “25 分錢取走一分錢”等等, 此即代表了解數字之基本意義。

(二) 數字的分解和組合

McIntosh, Reys,和 Reys (1992) 認為，數字的分解和組合與數字的等值形式 (equivalent form) 有關，主要在於了解數字的等值形式如何促進數字組合的運算。例如，運用心算解 24×25 時，可將其分解為 $6 \times 4 \times 25$ ，再組合成 6×100 ，如此即能不用紙筆輕易的解出答案。Carraher, Carraher,和 Schliemann (1987) 在口試數學的研究中發現，學生能夠使用分解的方法來解題。例如，當要求學生計算 $252 - 57$ 時，一位受試者將 252 分解成 $200 + 52$ ，並將 57 分解成 $52 + 5$ ，然後將兩個 52 相減，最後再從 200 減去 5 得到 195。數字常識發展較好的孩子，通常在運用數字的分解和組合的能力也較佳。

(三)了解數字的相對與絕對大小

數字大小意義的了解包括比較和排序數字；例如，學生知道 $\frac{1}{7}$ 比 $\frac{1}{8}$ 大，1299 比 1400 小。這個特徵也包括對大數 (large number) 的了解，能經常使用基準點 (benchmark) 來顯現它的大小。Markovits 和 Sowder (1994) 提到，在數字的領域中，了解數字的大小包括比較數字、辨認兩個數字之中哪一個較接近第三個數字、排序數字、及發現或辨認兩個數字之間的其他數字等能力。Sowder 和 Markovits (1989) 相信，數學課程投入更多作業在數字的大小上，能增進對數字和數字系統的了解。他們也相信對分數和小數有意義的了解，能幫助學生發展數字常識。

(四)基準點 (benchmark) 的使用

McIntosh, Reys,和 Reys (1992) 提到，基準點經常使用來判斷答案的大小，或將數字去尾數 (round) 使心算的過程變得容易。例如，學生要比較 74×0.47 和 37 時，當學生知道 0.47 比 $\frac{1}{2}$ 小時，他是以 $\frac{1}{2}$ 為基準點，而判斷 74×0.47

比 37 小。又如，當學生在判斷 $\frac{11}{12} + \frac{15}{16}$ 比 2 大或小時，他們是以 1 為基準點，因為 $\frac{11}{12}$ 和 $\frac{15}{16}$ 都很接近 1，而且都比 1 小，所以 $\frac{11}{12} + \frac{15}{16}$ 應該比 2 小。

Crites (1992) 研究發現，估算能力好的學生，在做估算時傾向利用分解／組合數字及多種基準點的策略。

(五)了解數字運算的相對影響

楊德清(民,89)認為，認知運算對數字的影響即是瞭解運算在不同的數字系統下 (包括整數與有理數) 以及不同情境下對結果所產生之影響。例如，孩子應該可以了解，當兩個數字相加時，如果每一個數字都超過 50，那麼它們的和一定會比 100 大。Behr (1989) 從兩方面來說明運算影響數字的特徵；其一，在計算問題裏當一個或更多的運算元改變時，了解如何補償 (compensate)，例如，假如 $350 - 287$ 是 63 那麼 $350 - 277$ 是多少？其二，了解在改變原來數字之後，其計算結果仍然相同，例如，如何利用 $452 - 238 = 214$ ，來發現 $447 - 233$ 的答案也是 214。Reys, Bestgen, Rybolt,和

Wyatt (1982) 研究指出，好的估算者常用到再形成 (reformulation) 及補償 (compensation) 的策略來進行估算。

(六) 變通性的應用數字與運算知識於計算情境

依據 McIntosh, Reys, 和 Reys (1992) 的說法，變通性的應用數字與運算知識於計算情境，包括做各種不同的決定：決定何種類型的回答是適當的 (精確或概算)，決定何種計算工具是有效的和容易理解的 (心算，估算... 等等)，選擇和應用策略，檢視資料和結果的合理性。這些特徵經常可以在孩子應用數字常識於心算和估算時，明顯的顯現出來。

從上述這些數字常識的特徵來看，目前台灣的數學教學很少涉及數字常識的領域，在先進國家正大力的重視數字常識教學時，我們是否也該將數字常識融入數學課程裏，讓數學教學更有意義及生活化。

參、數字常識的重要性

曾經聽到這樣一則故事，有一位國小老師是公認的數學教學名師，每次班上的月考數學成績，總是高過別班甚多，家長爭相的要將孩子送往他的班級，長久以來，這位老師一直很滿意他的教學方式。直到有一天，他的一位已畢業剛考上大學的學生回來找他，告訴他自己所選擇的科系原因時，這位老師聽完後，傷心難過了一個晚上，當下決定改變自己的教學方式。

原來這位學生是一位數學資優生，數學成績一直表現的非常優異，他的這位國小老師認為他一定會往數學方面發展，沒想到大學的科系他選擇了文學院，他告訴這位老師說，雖然數學成績很好，但他打從國小開始就覺得數學很枯燥，除了演算記一些公式外，實在不知道學數學有什麼樂趣可言，於是他選擇了文學院；這位老師在聽完學生的這番話後，開始思索自己的數學教學方式，最後他走出了成績的迷思，投入了建構教學的行列，開始追求有意義的數學教學。

這則故事道出了目前台灣數學教育的許多迷思。長久以來，國內的數學教育一直強調公式的記憶、答案的精確性、及快速的演算技巧，而對數字意義的了解，卻始終受到忽略；學生學習數學往往和生活情境脫離，數學對他們而言是枯燥乏味的。因此，雖然在傳統的數學測驗得到較高的成績，但卻無法提升學習數學的興趣，面對缺乏紙筆計算的情境，顯得束手無策；例如，要學生回答 $\frac{19}{20} + \frac{48}{49}$ 大約是多少？多數的學生回答「沒有紙筆計算無法得知答案」，在他們心中的第一個反應是，如何利用分母通分分子相加的策略來解題，這是老師教的解題策略，現在沒有紙筆計算，當然無法得知答案；學生很少注意到數字背後的意義， $\frac{19}{20}$ 和 $\frac{48}{49}$ 兩者都是很接近 1 的分數，其和應該接近 2，這種看似簡單，卻難倒多數學生的問題，說明了目前國內學生缺乏數字常識的情形，也點出了目前國內數學教育的一些迷思，數字常識的教學是重要的，也是目前國小數學教學所欠缺的。

一些研究顯示，在解決數字問題的情境裏，有許多學生缺少對數字的了解 (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, & Reys, 1980; Kouba, Brown, Carpenter,

Lindquist, Silver, Swafford, 1988; Reys, Reys, Nohda, Yoshikawa, & Shimizu, 1991; Threadgill-Sowder, 1984)。數字常識的缺乏似乎與學校所教授的標準算則有關，這些學生常不經意的使用這些標準算則來解決所有數字的問題。Kamii (1990) 的研究顯示，算則的教學會阻礙兒童數字常識的發展。Burns (1994) 建議，數學教學應該要做大幅度的改變；她認為，在教學過程中對孩子強化標準的計算算則，會阻礙孩子的學習，標準算則的教學會讓學生認為數學是一組神祕的和奇特的規則及講究步驟的集合體，它會干擾學生的學習，而認為學習數學就是要記憶這些程序步驟。

一些學者觀察台灣數學課上課情形發現，台灣的數學教育較重視計算的精確性，而美國的數學教學則給學生較多的估算練習 (Stigler, Lee, & Stevenson, 1990)。太過重視標準算則的練習及答案的精確性，會阻礙學生有意義的思考，因此，就目前我國國小的數學教學而言，數字常識的教學顯然有其重要性，它不僅能啟發學生學習數學的興趣，也能提升學生解決問題的能力。

肆、結語

國內的數學教育一直未能脫離機械的練習，教師在教數學時強調背誦數學規則與公式，不鼓勵學生去探討數字與運算之關係，因此學生對數學多半不感興趣，覺得枯燥乏味，而數字常識的教學強調數字的意義化，鼓勵學生探索不同的解題策略，能使學生生活化的運用數字，進而引發學生學習數學的興趣，由此可知數字常識教學的重要性。

參考文獻

- 楊德清 (民 89)。數字常識評量問題之發展與設計。教育部科技顧問室 89 年度補助研究計畫之部分。
- Australian Education Council. (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools*. Melbourne: Curriculum Corporation.
- Behr, M. J. (1989). Reflections on the conference. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 82-84). San Diego: San Diego University, Center for Research in Mathematics and Science Education.
- Brownell, W.A. (1935). Psychological consideration in the learning and the teaching of arithmetic. In *The Teaching of Arithmetic*, in the tenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematic (pp. 1-31). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Burns, M. (1994). Arithmetic: The last holdout. *Phi Delta Kappan*, 75(2), 471-77.
- Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1980). National assessment: A perspective of students' mastery of basic mathematics basic mathematics skills. In M. M. Lindquest (Ed.), *Selected issues in mathematics education* (pp. 215-257). Chicago: National Society for the Study of Educatoion, & Reston, VA: NCTM.
- Carraher, T. N., Caraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1987). Written and oral

- mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(2), 83-97.
- Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teachers*, 36 (6), 6-11.
- Kamii, C. (1990). Constructivism and beginning arithmetic (k-2). In *Teaching & Learning Mathematics in the 1990s*, 1990 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 22-30). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kouba, V. L., Brown, C. A., Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Silver, E. A., & Swafford, J. O. (1988). Results of the Fourth NAEP assessment of Mathematics: Number, operation, and word problems. *Arithmetic Teacher*, 35(8), 14-19.
- Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4-29.
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12, 2-8.
- McIntosh, A., Reys, B. J. & Reys, R. E., Bana, J., & Farrel, B. (1997). *Number Sense in School Mathematics: Student Performance in Four Countries*. MASTEC: Mathematics, Science & Technology Education Centre.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nation Research Council (1989). *Everybody Counts*. Washington, DC: National Academy Press.
- Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., Ishidda, J., Yoshikawa, S., & Shimizu, K. (1991). Computational estimation performance and strategies used by fifth- and eighth-grade Japanese student. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(1), 39-58.
- Reys, R. E., Rybolt, J. F., Bestgen, B. J., and Wyatt, T. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(3), 183-201.
- Sowder, J. T. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leihardt, R. & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 1-51). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Sowder, J. T., & Markovits, z. (1989). Effects of instruction on number magnitude. In C. A. Maher, G. A. Goldin, & R. B. Davis (Eds.), *Proceedings of Eleventh Annual Meeting: North American Chapter of the International Group for*

- the Psychology of Mathematics Education* (pp. 105-110). New Brunswick, NJ: Rutgers University Center for Mathematics, Science, and Computer Education.
- Sowder, J. T., & Schappelle, B. (1994). Number sense-making. *Arithmetic Teacher*, 41(2), 342-345.
- Stigler, J. W., Lee, S-Y., & Stevenson, H. W. (1990). *Mathematical knowledge of Japanese, Chinese, and American elementary school children*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Threadgill-Sowder, J. (1984). Computational estimation procedures of school children. *Journal of Educational Research*, 77(6), 332-336.
- Yang, D.C. (1997). *Number sense performance and strategies possessed by sixth and eighth grade students in Taiwan*. Doctoral dissertation, University of Missouri Columbia, 1995, Dissertation Abstracts International, 57, 3865A.

Astract

The purpose of this paper is to introduce the components of number sense and how teaching number sense is so important to elementary mathematics education.

The focus on teaching number sense is due to the overemphasis of mathematics education on standard written computation. The research evidence indicates that students have high performance on written computation do not necessarily accompany with the good number sense.

Keywords: Number sense、written computation、meaningful learning。

朱榮智博士

人生有智慧，就不會有無力感；

人生要有底，有底才厚實。