

心算與珠心算之探究

張盈盈

國立嘉義大學國民教育研究所研究生

楊德清

國立嘉義大學數學教育研究所副教授

一、前言

心算 (mental computation) 不但可以增進個體對數字的了解與運算的彈性 (Markovits & Sowder, 1988), 更是日常生活中不可或缺的工具, 比紙筆計算更常使用, 而有關心算之重要性與益處的論述亦不在少數 (Cobb & Merkel, 1989; Josephina, 1960; McIntosh, 1990; Reys, 1985b; Sowder, 1990)。美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000) 所出版之學校數學課程與評量標準 (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics)、學校數學原則與標準 (Principles and Standards for School Mathematics)、及許多數學教育相關之研究報告, 也都強調心算的重要性 (Australian Education Council, 1991; Japanese Ministry of Education, 1989; Mathematical Sciences Education Board, 1990)。我國目前之正式數學課程中並未包含心算相關之主題, 然而吾人卻常在電視或報紙上, 看到關於兒童珠心算比賽的報導; 同時在琳瑯滿目的民間補習教育中, 發現所謂的「珠心算」才藝班, 以及這些才藝班所創造的「小神童」。然而珠心算究竟是什麼呢? 又與心算有何不同呢?

二、心算的定義與特質

心算是指在腦 (心) 中快速地解題, 不需其他計算及紀錄工具, 便能算出精確結果的過程。但並非在心中進行紙筆算則的運算, 而是運用對數與計算之理解以及各種算術性質來簡化問題的思考策略 (Reys, Reys, & Hope, 1993)。

教育學者對於心算有兩種不同的看法, 一是行爲的觀點, 另一則是建構的觀點 (Reys & Barger, 1992)。不同觀點之下, 課程的安排與教學的方式也有所差異 (Reys, Reys, Nohda, & Emori, 1995)。

(一) 行爲觀點

視心算爲一基本技巧, 爲紙筆計算或估算的必要條件, 藉由直接教導與練習而

精通熟練 (Shibata, 1994)。認為心算的技能是由外在的經驗與教導而獲取，並在筆算或估算的過程中執行。

至於課程的編排則與其他學習主題無異，重視教學內容--建立什麼樣的策略（心算算則），與教學方法--進行什麼樣的教學 (Reys et al., 1995)。

(二)建構觀點

視心算為一高階的思考程序，策略的產生與執行同等重要 (Resnick, 1986; Sowder, 1992b)。當學生遭遇對其有意義且需要計算的問題時，基於對數字的直覺性理解，會產生自己的心算策略 (Reys et al., 1995)。

教學上，並不直接教導算則，鼓勵學生自行發展計算策略。藉由學習者導向的教學，以學生自己創造的解題策略取代教師提供的標準算則。因此課程組織、教育哲學觀、與教學技術都要有所改變 (Reys et al., 1995)。

上述兩種觀點最大的差異在於心算過程中，策略的來源是經驗性的抑或自發性的。行為的觀點傾向於經驗主義，主張心算策略的發展需藉由直接傳授。其優點在於學生能快速學習到心算的策略，且反覆練習精熟之後，解題速度與計算能力將明顯提昇。然而單向灌輸卻可能阻礙學生的創造力，過度練習則可能抑制學生的思考，造成沒教過就不會做的情形發生。建構的觀點主張由學生自行發展心算的策略，其目的在於簡化計算的難度，同時在策略探索的過程中，加深對數字與運算的了解 (Markovits & Sowder, 1988)。許多數學教育者、研究者及認知心理學家則都支持建構的觀點 (Reys & Nohda, 1994)。

Plunkett (1979) 認為心算是一種心理思考的過程，與標準算則比較，具有下述特徵與差異：

(一)瞬間的計算 (fleeting)

心算運作主要是靠短期記憶 (張春興, 民 80)。短期記憶是訊息處理的中間站，對傳入之訊息有儲存時限 (約 20 秒)，僅能暫時保存並進行心理運作，若不繼續加以處理，就會遺忘。因此，心算的過程十分短暫。

(二)多變的 (variable)

同一個题目的解法將因個人的思考模式不同而具有變異性。例如： 5×36 可以先算 5×30 再加上 5×6 ；或先算 5×40 再減去 5×4 ；或變成 $5 \times 6 \times 6 = 180 \dots$ 等等。通常是在解題的當下針對某個题目所創造出來，因此同一人在不同的時點對相同的题目解法可能不同。

(三)彈性的且適用於题目中的數字

解題具有彈性，採用適於該題的解題方法。例如：解 $63 - 58$ 、 $63 - 31$ 、 $63 - 8$ ，會用不同的方法計算。

(四)主動的 (active)

使用者對於解題方法有明確的選擇，要如何計算也由其本身操控。

(五)整體的 (holistic)

將數字視為一個整體，以完整的數 (complete number) 來進行運算。例如： $112 - 76 \rightarrow 76 + 24$ (到 100)，再 $+ 12$ (等於 112)， $24 + 12 = 36$ 。相反的，傳統算則先算 $12 - 6$ ，再算 $10 - 7$ ；容易忽略 $10 - 7$ 的意義是 $100 - 70$ 。

(六)建構性的 (constructive)

由問題的其中一部份為起點開始建構答案。例如： $12 + 23 : 12, 22, 32, 33$ ；是由 12 開始計算，當然也可以由 23 開始起算。

(七)不須以紙筆等外在工具進行計算。

(八)對數字與運算有充分的理解

只有在充分了解數字與運算的情形之下，才能針對特定的題目選擇適當的方法，並流暢的運用數字與運算性質。

(九)圖像性的 (iconic)

在心中出現數字或與數字相關的圖像 (例如：數線...等)。

(十)通常在算出正確答案之前會先以估算的方式算出一近似值

例如： $232 + 24 \rightarrow 252, 256$ ； $25 \times 5 \rightarrow 100, 125$ 。其中 252、100 就是答案的近似值。

(十一)計算的限制性

無法應用於較困難的計算，例如： 378×62 。

三、珠心算的定義與特質

珠心算是指珠算式心算 (mental & abacus computation)；它是以熟練的珠算技能為基礎，透過腦中的算盤影像完成珠算運算的計算方法 (廖正輝，民 90；陳大江、蘇樹軍，民 90；朱希安，民 90)。珠算是以算盤為工具來計算，當使用者熟稔珠算之後，將算盤的影像映射於腦中，並依照珠算的操作模式在腦中進行運算，就是所謂的珠心算。是一種速度非常快的計算方法。

相較於電算器及電腦，珠算顯得較不符合經濟效益，因而出現了不須使用算盤的「中國心算」，也就是珠心算 (廖正輝，民 90)。因此在計算方法和步驟上，珠心算和珠算完全相同，但是在學習的過程中，一定要先學習珠算的運珠，才能學習心算；珠算基礎如奠定的快速且正確，心算便能得心應手。所以珠算是學習珠心算的根基，珠心算是珠算的高級表現 (廖正輝，民 90)。

珠心算的學習過程由具體到抽象，符合皮亞傑的認知發展進程 (李瑛琳，民 87)。進入 (珠) 心算的階段之後，當使用者看到或聽到數字時，便直接在腦中譯成算珠運算，將結果輸出；在速度上會較筆算快許多，且沒有位數限制。此外，運算係在使用者腦中進行，不需要攜帶任何計算工具，如電算器等，使用上十分方便 (廖正輝，民 90)。且加、減、乘、除、四則運算、開方等題型皆可使用，運用的範圍廣 (台灣省商業會，民 90)。

四、心算與珠心算的異同

(一)相似之處

心算與珠心算最大的共同點在於兩者均不須外在的計算工具，在日常生活的使用上相當便利。其次，兩者之計算過程均十分短暫，其中珠心算的速度更與一般的電算器不相上下，甚至更快，且均不會將計算過程以紙筆紀錄下來。再者，心算與珠心算均在心中出現圖像，只不過心算所出現的圖像是數字或其表徵，而珠心算所出現的是算盤而已。

(二)相異之處

1.在基礎方面：

心算是以數字、運算及其之間的關係之理解為基礎，靈活運用數字關係、運算性質...等來簡化問題便於計算；珠心算則不一定需具備良好的概念網路，僅需熟記公式與運珠口訣，即可計算出正確答案。

2.在計算工具方面：

心算不使用任何工具，是一種將數字在心裡運作而獲得結果的思考過程(Reys, 1984)；珠心算表面上不需要其他計算工具便能算出精確結果，實則以心中的「虛盤」為工具計算。

3.在特徵方面：

心算並不特別講求計算的速度，珠心算則十分強調速度，並以此為號召。若由 Plunkett (1979) 所提心算的性質來看，兩者亦有所差異，例如：心算的解題策略係由使用者依不同的題目或情境下思考解決方式，多變且具有彈性；珠心算的運算基礎是由許多公式組合而成，必須熟記口訣與運珠口語，並不斷的練習與反覆的運算（廖正輝，民 90），以達快速與正確的目標，欠缺解題的主動性、多變性與彈性，若持續一段時間未複習珠心算的法則與公式，則珠心算的能力與速度將大為降低。心算有計算上的限制，對於較為複雜或多位數的運算，力有未逮，然而對於珠心算而言，多位數的乘除甚至更複雜的計算，均不無可能，尤其對比賽選手來說，更是輕而易舉。

歸納言之：心算是一種具有彈性的計算方式，其策略來自於對概念的了解，其過程是一種高階的思考程序 (Reys & Barger, 1992)。珠心算是一種計算技術，係將算盤的影像映射在腦中，並在腦中完成珠算運算，其運珠技巧有一定的規律及口訣。因此，具心算能力者與具珠心算能力者的解題策略及思考過程會有所差異。茲以一實際的案例說明之：

筆者曾以「估計 $\frac{97}{99} \times \frac{12}{25}$ 的乘積 ①大於 $\frac{1}{2}$ * ②小於 $\frac{1}{2}$ ③等於 $\frac{1}{2}$ ④無法估計」為題，訪談一位珠心算三段的國小六年級學生。這位受訪學生一看到題目便立刻在紙上寫出 $\frac{1164}{2475}$ ，並開始約分，但由於該乘積並無法約分成接近 $\frac{1}{2}$ 的分數，因而使其陷入膠著狀態，最後無法給予答案而作罷。該名學生固然可以利用珠心算迅速寫出精確的乘積，卻忽略其可行性。

反之，心算是一種「量」的操作 (manipulation of quantities) (Reys & Barger, 1992)，心算能力佳者，基於對數字與運算概念的了解，在具備數字常識 (number sense) 的情況之下，會發現 $\frac{97}{99}$ 接近 1，又 $\frac{12}{25}$ 小於 $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ ，故兩數之乘積小於 $\frac{1}{2}$ ；換言之，係以“1”及“ $\frac{1}{2}$ ”為參考點 (benchmark) 來計算。而此種思考模式正呈現了有效率、有意義、以及彈性的解題策略。

五、結論：心算與珠心算的價值及教學建議

心算之所以受重視的原因在於其植基於對概念的瞭解而非算則的記憶，有助於思考、推理、歸納等能力的提昇（Reys & Barger, 1992）。其次，心算也是增進數字常識（number sense）的方法之一（Sowder & Wheeler, 1989; Reys, Reys, & Hope, 1993）；在探索新方法（心算策略）的同時，對於數字與運算的了解會隨之增加（Beberman, 1959; Markovits & Sowder, 1988; Plunkett, 1979）。再者，心算在估算的過程中是絕對必須的，例如以估算 54×4 為例：先取原數的近似值，如 $54 \rightarrow 50$ ，再心算出答案的近似值，如 $50 \times 4 = 200$ 。此外，心算不須藉由其他工具，面對問題時能夠直接反應，迅速得到答案，在日常生活中使用的機會較大，可說是生活中應備的技能（Sowder, 1990）。

許多相關的研究與報告（Markovits & Sowder, 1988, 1994; Plunkett, 1979; Reys & Barger, 1992; Sowder, 1990, 1992）皆證實心算融入正常的數學教學中，對兒童的思考與推理能力具正面的影響，能幫助兒童作有意義的學習，同時亦是幫助兒童發展數字常識能力的途徑之一。因此心算融入教學是必須的。至於該如何將心算融入教學中，筆者謹提供若干具體建議：

- (一)在教導傳統計算法則之前，先鼓勵兒童作心理的運算與思考：算則的教學侷限了兒童思考與創造能力的發展；然而心算的教學則可以激發兒童獨立思考的特質，並經由以心智的思考與新奇的方式探索數字與數字以及數字與運算間之關係，以增進學生對數字結構的覺察與瞭解。
- (二)開發幫助兒童發展心算能力之教學活動：教師佈題時可以實際生活情境為素材，因為生活中運用心算的機率很高，若能將生活情境與教學相連結，進而發展運用心算之教學活動，不但讓數學課更生活化，也讓兒童瞭解他(她)們所習得的心算能力是帶得走的能力。具備心算的能力可以幫助他(她)們隨時解決生活中與數有關之問題。
- (三)讓教師瞭解心算教學的重要性並知道如何進行心算的教學：學生是否擁有良好的心算能力，與教師是否重視心算有很大的關係（Reys, Reys, & Hope, 1993）。因此教師必須了解心算的重要性，並將其列為教學目標之一，課堂上多提供學生使用心算的機會，鼓勵學生以心算解題，並與全班分享不同的解題策略，逐步發展其心算能力。

國內有關心算方面的研究並不多見，82 年新版課程標準及九年一貫數學能力指標亦未曾強調心算。如何藉由心算能力的培養以增進孩子的思考能力、數字常識能力...等等，值得我們深入思考與研究。

至於珠心算之功能與價值，國內的相關研究極稀，而社會大眾的看法則相當分歧。陳萬發（民 90）認為珠心算有助於計算能力的提昇與智能的開發；廖蕙婉（民 90）則認為珠心算除了訓練計算能力之外，「學習過程中反覆的練習，累積了耐力、毅力與快速反應的能力；定期的能力測驗考試，提供了孩子承受壓力的學習機會」。從學校教師的觀點而言，有的教師認為：

「學過珠心算的學生，在計算時會比較依賴珠心算，但並不會因此影響其解題策略的提出。在國小階段，由於學生能快速解題，反而成為他們喜歡數學的原因，

故而有正面的影響。如果說珠心算對學生有負面的影響，則與個人的學習風格有關。因其在各科的學習上，都較為草率，使珠心算成為他機械化學習的原因。」(徐俊仁，私人通訊，民 90)。

有的教師則認為：

「國小階段，對學習表現本來就較為出色的學生而言，學過珠心算與否並沒有太大的差異，兩者在建構教學的過程中均有良好的表現；但對於學習表現較差的學生而言，學過珠心算者，較容易依賴珠心算，並造成建構教學時的阻礙，未學過珠心算者的建構過程反而較為順利。」(張道行，私人通訊，民 90)

從家長的觀點而言，有的家長認為：

「學習珠心算的孩子，計算能力強，數學成績一直都很好。...做應用題就還好，沒有特別好或不好。」(房治華，私人通訊，民 90)

有的家長則認為：

「珠心算是一種快速計算的技巧，但缺乏思考，對孩子的理解與思考能力沒有幫助。而且計算過程中所使用的算則與學校所教的成人算則不同，恐怕會影響孩子的學習。.....學珠心算的孩子，注意力比較集中，腦筋也比較靈活。」(何秀蘭，私人通訊，民 90)

有關珠心算的價值始終是爭論不休的話題。珠心算對計算速度、計算能力、注意力等有其正面的影響，然而在科技時代的現今，是否需要花這麼多的時間在計算能力的訓練上，卻忽略了思考與解題能力的訓練？另外，使用者是否真正了解他們所算出來的數字所代表之意義，或者只是盲目地背誦公式計算答案？是否不斷地追求速度卻忽略了邏輯性的思考與合理性的判斷...？都是值得我們深入思考的問題。

參考文獻

- 台灣省商業會 (民 90)。珠算小百科。民 90 年 9 月 27 日，取自：http://www.tcoc.org.tw/ABACUS/abacus_10.htm
- 朱希安 (民 90)。珠心算教育前景廣闊。民 90 年 9 月 27 日，取自：http://www.tcoc.org.tw/ABACUS/abacus_9_2.htm
- 李瑛琳 (民 87)。讓珠心算回歸生活吧！中華珠算學術研究學會年刊，3, 38-41。
- 張春興 (民 80)。現代心理學。台北市：東華。
- 陳大江、蘇樹軍 (民 90)。對兒童素質教育中運用珠心算開發智能的思考。民 90 年 9 月 27 日。取自：http://www.tcoc.org.tw/ABACUS/abacus_9_2.htm
- 陳萬發 (民 90 年 10 月 31 日)。小朋友學珠算心算不好嗎。自由時報，第 15 版。
- 廖正輝 (民 90)。台灣心算教育的探討。民 90 年 9 月 27 日，取自：http://www.tcoc.org.tw/ABACUS/abacus_9_2.htm
- 廖蕙婉 (民 90 年 11 月 5 日)。珠心算能力有助數學的學習。自由時報，第 15 版。
- Australian Education Council. (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools*. A joint project of the States, Territories and the Commonwealth of Australia, Australian Education Council, and the Curriculum Corporation. Carlton, Australia: Curriculum Corporation.

- Beberman, M. (1959). Introduction to C. H. Shutter & R. L. Spreckelmeyer, Teaching the Third R. Washington: Council for Basic Education. Cited in S. Josephine, Mental arithmetic in today's classroom, *Arithmetic Teacher*, 1, 199-207.
- Cobb, P., & Merkel, G. (1989). Thinking strategies: Teaching arithmetic through problem solving. In P. R. Trafton & A. P. Shulte (Ed.), *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp.70-81), Reston, VA: NCTM..
- Japanese Ministry of Education. (1989). *Curriculum of Mathematics for the Elementary School*. Tokyo: Printing Bureau.
- Josephina, Sr. (1960). Mental arithmetic in today's classroom. *Arithmetic Teacher*, 7, 199-207.
- Mathematical Sciences Education Board (1990). *Reshaping School Mathematics: A Philosophy and Framework for Curriculum*. Washington, DC: National Academy Press.
- Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number sense. In M. J. Behr, C. B. Lacampagne, & M. M. Wheeler (Ed.), *PME-NA: Proceedings of the Tenth Annual Meeting* (pp. 58-64). Dekalb, IL: Northern Illinois University.
- McIntosh, A. (1990). Becoming numerate: Developing number sense. In S. Willis (Ed.), *Being Numerate: What Counts* (pp. 24-43). Hawthorn, Australä: Australian Council for Educational Research.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in Schools*, 8, 2-5.
- Resnick, L. B. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter (Ed.), *Perspectives on Intellectual Development: The Minnesota Symposia on Child Psychology* (pp. 159-194). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Reys, B. J. (1985b). *Identification and Characterization of Mental Computation Algorithms Used by Seventh and Eighth Grade Students on Visually and Orally Presented Mental Computation Exercises*. Doctoral dissertation, University of Missouri Columbia, Dissertation Abstracts International, 46/11A, 3279.
- Reys, B. J., & Barger, R. H. (1992). Mental computation: Evaluation, curriculum, and instructional issues from the United States perspective. In R. E. Reys & N. Nohda (Ed.), *Computational Alternatives for The Twenty-first Century: Cross-cultural Perspectives from Japan and the United States* (pp. 31-47). Reston, VA: NCTM.
- Reys, B. J., Reys, R. E., & Hope, A. E., (1993). Mental computation: A snapshot of second, fifth and seventh grade student performance. *School Science and Mathematics*, 93(6), 306-315.
- Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The*

- Elementary School Journal*, 84(5), 5-15.
- Reys, R. E., & Nohda, N. (1994). *Computational alternatives for the twenty-first century: Cross-cultural perspectives from Japan and the United States*. Reston, VA: NCTM.
- Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., & Emori, H. (1995). Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(4), 304-325.
- Shibata, R. (1994). Computation in Japan from the Edo Era to today: Historical reflection on the teaching of mental computation. In R. E. Reys & N. Nohda (Ed.), *Computational alternatives for the twenty-first century: Cross-cultural perspectives from Japan and The United States* (pp. 19-30). Reston, VA: NCTM.
- Sowder, J. T. (1990). Mental computation and number sense. *Arithmetic Teacher*, 37(7), 18-20.
- Sowder, J. T. (1992b). Making sense of numbers in school mathematics. In G. Leinhardt, R., & R. Hatrup (Ed.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1-51). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Sowder, J. T., & Wheeler, M. M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 130-146.

人生不一定球球投的是好球，但是有歷練的強打者，隨時都可以揮棒。

摘自「證嚴法師靜思語錄」