

## 第二章 圖形與空間教材的數學與認知結構

本章分成十節來討論國小幾何教材的數學與認知結構，一至四節分別為三角形、四邊形、多邊形、圓與扇形等平面圖形的部分；五至七節分別為正方體與長方體、球、柱體與錐體等立體圖形的部分；第八節則討論特殊的空間關係—垂直與平行；最後兩節則討論在國小裡簡單的幾何變換題材—全等與對稱及相似(放大或縮小)，而在附件一中，本書也收錄了「對稱圖形」以及「放大與縮小圖」的教學活動示例。

本章各節中的最後都會將所討論的題材做教學流程的說明，所羅列的教學活動目標與第三章中各節羅列的教學活動目標在分類上不同，是因為第二章與第三章的分析討論方式不同所致。而在附件二中，我們則把有關八十二年部編本「圖形與空間」所有相關的教材活動目標附上，讀者可逕行參考。

### 第一節 三角形

#### 一、三角形的分類與命名

數學上常透過三個邊的長度是否相等、三個角的角度是否相等以及其最大內角是直角、銳角或鈍角，將三角形分類與命名，本節討論這三種方式裡，所進行的三角形分類與命名活動。

##### (一) 邊長是否相等的三角形分類

依據邊長是否相等的關係來分類，可以將所有的三角形區分成如下三類：

##### 1. 三個邊都相等的三角形

如果三角形三個邊的長度都等長，稱呼這些三角形為三等邊三角形很適合，但是三個邊的長度都相等的三角形，它的三個角的角度也會相等。數學上稱各邊的長度都相等，而且各角的角度都相等的多邊形為正多邊形，因此我們直接稱呼

三個邊都相等的三角形為正三角形。

學童在進行三個邊都相等三角形的命名活動時，尚未理解正多邊形中「正」是邊與角都要相等的意義，因此本教材接受學童使用三等邊三角形這種非正式的數學名稱，也接受正三角形這種正式的數學名稱，並提醒教師們注意，當學童將三邊等長的三角形命名為正三角形時，他們心中正三角形名稱的意義和數學上正三角形的意義並不盡相同，因此在引入正多邊形的意義後，一定要回頭重新檢查或澄清，幫助學童理解正三角形是三個邊的長度都等長，三個角的角度也都相等的三角形的意義。

## 2. 恰有二個邊相等的三角形

如果一個三角形恰有二個邊的長度相等，稱呼這些三角形為二等邊三角形或等腰三角形都很恰當。在命名活動開始時，本教材先接受二等邊三角形這種非正式的數學名稱，但是在活動結束時，要求學童都使用等腰三角形這種數學上正式的名稱。

但是數學上常將有(至少)二個邊相等的三角形命名為等腰三角形，也就是說，恰有三個邊相等，以及恰有兩個邊相等的三角形都是等腰三角形，為了不讓學童混淆兩者的意義，首引等腰三角形命名活動時，本教材只討論恰有兩邊等長的三角形，但是當學童質疑正三角形是否也是等腰三角形時，建議教師透過問話：「正三角形有兩個邊相等嗎？所以正三角形是等腰三角形嗎？」，幫助學童形成正三角形也是等腰三角形的共識。

## 3. 三個邊都不相等的三角形

我們可以稱三個邊都不相等的三角形為不等邊三角形，在國小階段，這類三角形沒有特殊的性質可以討論，因此本教材不進行此類三角形的命名活動。

### (二) 角度是否相等的三角形分類

因為三角形邊和角的關係是相對的，學童可以仿邊長是否相等的命名方式，同步進行角度是否相等三角形的命名活動。依據角度是否相等的關係來分類，也可以將所有的三角形區分成如下三類：

#### 1. 恰有二個角相等的三角形

本教材定義有(至少)二個邊相等的三角形為等腰三角形，因為這樣的定義與

等腰三角形名稱的意義一致，至於兩個角相等的三角形是否也可以稱呼為等腰三角形，本教材認為等腰三角形的定義只能有一個，當學童察覺「兩等角三角形一定是兩等邊三角形，兩等邊三角形也一定是兩等角三角形」後，可以接受學童透過兩個角是否相等的方式來判斷一個三角形是否為等腰三角形，但是在課堂活動中，當學童使用兩個角相等的方式來命名等腰三角形時，建議教師透過問話：「兩個角相等的三角形，兩個邊也會相等嗎？兩個邊相等的三角形是等腰三角形嗎？」，澄清等腰三角形的定義。

## 2. 三個角都相等的三角形

本教材定義三個邊相等，三個角也相等的三角形為正三角形，因此接受學童命名三個角相等的三角形為三等角三角形，三個邊相等的三角形為三等邊三角形，等待引入正多邊形的意義後，再回頭澄清三個邊相等的三角形，三個角也會相等，三個角相等的三角形，三個邊也會相等，因此可以命名為正三角形，並形成三等邊三角形，三等角三角形和正三角形是同一個集合的共識。

如果學童已經先將三等邊三角形命名為正三角形，在討論角的分類時，再將三等角三角形命名為正三角形，但是沒有看到邊與角彼此會相等的關係時，會導至正三角形有兩種不同的定義。本教材建議教師透過問話「三個角都相等的三角形，三個邊也會相等嗎？三個邊都相等的三角形是正三角形，三個角都相等的三角形，也可以稱呼為正三角形嗎？」，讓正三角形的定義只有一個。如果班上多數學童都能察覺三個角都相等的三角形，三個邊也會相等；三個邊都相等的三角形，三個角也會相等，本教材也不反對教師定義三個邊相等，三個角也相等的三角形為正三角形。

## 3. 三個角都不相等的三角形

如同三個邊都不相等的三角形，在國小階段，這類三角形沒有特殊的性質可以討論，因此本教材也不進行此類三角形的命名活動。

### (三) 三角形內最大角是直角、銳角或鈍角的三角形分類

數學上透過三角形內最大角是直角、銳角或鈍角的方式，將所有的三角形區分成直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形三類。如果三角形內最大角是鈍角(另兩個角一定是銳角)，稱此類三角形為鈍角三角形；如果三角形內最大角是直角(另

二個角一定是銳角)，稱此類三角形為直角三角形；如果三角形內最大角是銳角（另二個角也一定是銳角），稱此類三角形為銳角三角形。

## 二、三角形的構成要素

頂點、邊和角是三角形的構成要素，在命名頂點、邊和角時，應幫助學童掌握它們的幾何特性，例如：三個邊是區隔圖形內部及外部的直線段，頂點是邊的端點重合為一點的地方，角是在頂點附近，由一邊要轉到另一邊的局部圖形。

給定三個不共線的點，可以決定唯一的一個三角形；給定滿足任兩邊和大於第三邊的三個邊，也可以決定唯一的一個三角形(**SSS**)；給定兩個邊和這兩個邊的夾角，也可以決定唯一的一個三角形(**SAS**)；但是，給定兩個邊及一個角（不是這兩個邊的夾角），只有在這個角是直角時，才能決定唯一的一個三角形(**RHS**)，如果這個角不是直角，可以有兩個不同的三角形。

雖然給定三個角，不能決定唯一的一個三角形（可以得到很多相似的三角形），但是給定兩個角和一個邊（不是這兩個角共有的邊），或給定一個邊和這個邊的兩個夾角，都可以決定唯一的一個三角形（前者是 **AAS**，後者是 **ASA**）。

本教材將角區分為圖形角、張開角與旋轉角三類（請參閱本叢書「國小數學教材分析一體積和角度」一冊的說明），其中張開角討論的是角張開程度的大小，旋轉角討論的是角旋轉程度的大小及旋轉方向，它們討論的重點都是角度，而圖形角是三角形構成要素的角，指的是三角形頂點的局部，或兩線段加上共同的頂點，並不涉及角度的概念。

## 三、三角形的定義

數學上透過邊、角是否相等及大小的關係區分出一些常見的三角形，依據八十二年課程標準中術語與符號部分，本教材引入正三角形（三等邊三角形或三等角三角形）、等腰三角形、直角三角形、鈍角三角形、銳角三角形與等腰直角三角形等的命名活動。

因為三角形的邊和角的關係是相對的，例如：若三角形有兩個邊相等，則這兩個邊相對應的兩個角也會相等；若三角形有兩個角相等，則這兩個角相對應的

兩個邊也會相等；若三角形中甲邊比乙邊長，則甲邊所對應的角會比乙邊所對應的角大；若甲角的角度比乙角的角度大，甲角所對應的邊也會比乙角所對應的邊長。

三角形的命名與定義可以透過邊，也可以透過角，以等腰三角形為例，可以透過有兩個邊相等的關係來命名，也可以透過有兩個角相等的關係來命名，本教材採取與數學名稱一致的方式來命名，定義有兩個邊相等的三角形為等腰三角形。

下面是本教材針對課程標準術語與符號部分的要求，出現的三角形定義：

- 三角形：平面上由三條首尾相連的直線段所圍成的封閉圖形，稱之為三角形。
- 直角三角形：本教材定義，三角形內最大的角是直角的三角形為直角三角形，也就是說，恰有一個直角及二個銳角的三角形是直角三角形，當學童有很多判斷直角三角形的經驗後，教師也可以接受學童透過「有一個角是直角的三角形」的方式來判斷一個三角形是直角三角形。
- 鈍角三角形：本教材定義，三角形內最大的角是鈍角的三角形為鈍角三角形，也就是說，恰有一個鈍角及二個銳角的三角形是鈍角三角形，當學童有很多判斷鈍角三角形的經驗後，教師也可以接受學童透過「有一個角是鈍角的三角形」的方式來判斷一個三角形是鈍角三角形。
- 銳角三角形：本教材定義，三角形內最大的角是銳角的三角形為銳角三角形，也就是說，三個角都是銳角的三角形是銳角三角形。
- 等腰三角形：本教材定義，(至少)有兩個邊相等的三角形為等腰三角形，因此正三角形也是等腰三角形。
- 正三角形：本教材定義，三個邊都相等,而且三個角都相等的三角形為正三角形，當學童能掌握三個角都相等的三角形，三個邊也會相等，三個邊都相等的三角形，三個角也會相等，教師也可以接受學童透過「三個邊相等」或「三個角也相等」的方式來判斷一個三角形是正三角形。
- 等腰直角三角形：本教材先定義直角三角形，再定義直角的兩個邊相等的三角形為等腰直角三角形，當然，等腰三角形中，兩腰的夾角為直角的三角形

也是等腰直角三角形。

#### 四、三角形的包含關係

##### (一)集合與包含關係

為清楚說明包含關係的意義，底下我們先介紹一些數學上集合的語言後，再介紹三角形的包含關係。

如果一個集合  $A$  中的每一個元素，都屬於另一個集合  $B$ ，我們稱集合  $A$  是集合  $B$  的部分集合，或稱集合  $A$  包含於集合  $B$ ，例如：三角形是由三條線段圍成的圖形，正三角形是由三條等長線段圍成的圖形，正三角一定是一個三角形，所以正三角形所成的集合包含於三角形所成的集合中。

數學上常使用范氏圖(Venn diagram)來表徵集合間的包含關係，圖 2-1-1 表示集合  $B$  包含於集合  $A$ 。

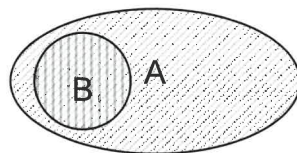


圖 2-1-1

圖 2-1-2 表示集合  $A$  和集合  $B$  的交集(共同元素所成的集合)是集合  $C$ 。

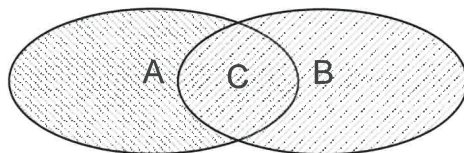


圖 2-1-2

圖 2-1-3 表示集合  $C$  包含於集合  $A$  和集合  $B$  的交集中，但是集合  $C$  不是集合  $A$  和集合  $B$  的交集。

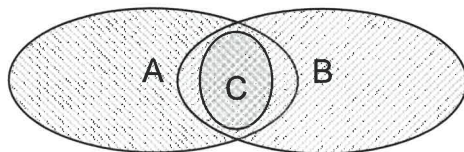


圖 2-1-3

圖 2-1-4 表示集合 A 和集合 B 的交集是空集合，沒有共同的元素。

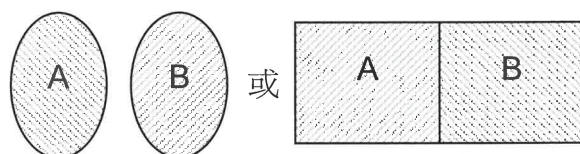


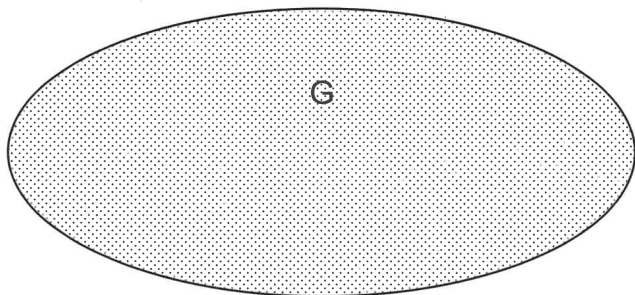
圖 2-1-4

## (二) 三角形的分類

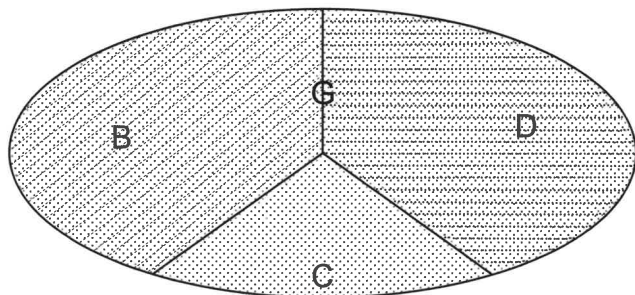
令 **A** 是正三角形所成的集合，**B** 是直角三角形所成的集合，**C** 是銳角三角形所成的集合，**D** 是鈍角三角形所成的集合，**E** 是等腰三角形所成的集合，**F** 是等腰直角三角形所成的集合，**G** 是所有三角形所成的集合。

圖 2-1-5 使用范氏圖表徵上面 7 個集合的包含關係，我們透過三角形內最大角是直角、鈍角或是銳角，將所有的三角形區分成直角三角形(**B**)、鈍角三角形(**C**)、銳角三角形(**D**)三個部分，因為每一個三角形，一定是直角、銳角或鈍角三角形，而且只能是其中的一種。

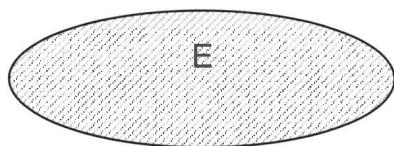
等腰三角形(**E**)和直角、銳角、鈍角三角形都有交集，它們的交集分別是等腰直角三角形(**F**)、等腰銳角三角形、等腰鈍角三角形。其中等腰直角三角形(**F**)是等腰三角形(**E**)和直角三角形(**B**)的交集，而正三角形(**A**)包含在等腰銳角三角形內，但是並不等於等腰銳角三角形。



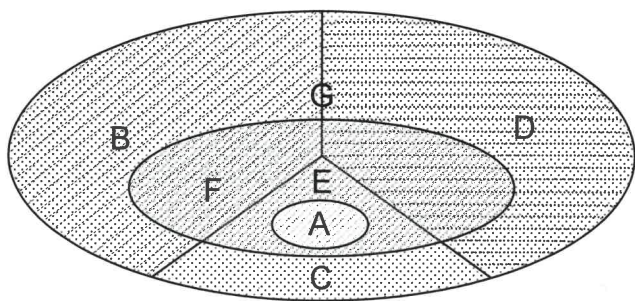
(G 表示所有三角形所成的集合)



(B、C、D 依序表示直角、銳角與鈍角三角形所成的集合，將所有的三角形(G)區分為三個部分)



(E 表示所有等腰三角形所成的集合)



(F 表示等腰直角三角形，是等腰三角形(E)與直角三角形(B)的交集；A 表示正三角形，是等腰三角形(E)與銳角三角形(C)交集的部分集合)

圖 2-1-5

## 五、三角形的畫法

三角形是由三個邊及三個角組成的，只要給定三個邊的長度(SSS)，或給定兩個邊的長度及這兩邊夾角的角度(SAS)，或給定一個邊的長度及兩個角的角度(AAS 或 ASA)，都可以決定一個三角形。

以正三角形的畫法為例，因為可以利用 SSS，SAS，ASA 三種方法畫出正三角形，在國小階段，SSS 的畫法可以滿足尺規作圖的約定，但是 SAS 與 ASA 的畫法必須使用量角器，若學童學會這三種畫法，就可以類比畫出其它形狀的三角形。

### (一) SSS 畫法

先畫出一條和給定邊長等長的線段 AB，再以線段的兩個端點 A 和 B 為圓心，給定的邊長為半徑畫弧，兩弧相交於 C 點，連接 A、C 兩點和 B、C 兩點，就可以得到一個正三角形 ABC。

### (二) ASA 畫法

先畫出一條和給定邊長等長的線段 AB，再以 A、B 為端點，線段 AB 為兩個角共同的邊，用量角器畫出夾角是 60 度的兩個角，這兩個角的另一個邊相交於一點 C，連接 A、C 兩點和 B、C 兩點，就可以得到一個正三角形 ABC。

### (三) SAS 畫法

先用量角器畫出一個 60 度的角，角的頂點是 A 點，接著以 A 為圓心，給定的邊長為半徑畫弧，分別交角的兩邊於 B、C 兩點，連接 B、C 兩點，就可以得到一個正三角形 ABC。

很多教師都察覺，教過三角形的畫法後，學童很快就會忘記了，主要的原因是圓規只能畫出和圓規金屬腳(圓心)等距離的點，圓規無法畫出一條直線段，而三角形是由三條直線段所圍成的圖形。教師應該幫助學童理解圓規畫出的弧上一點(假設半徑是  $r$ )和圓規腳那點連線的距離，以及長度是  $r$  的直線段，它們的長度相同的關係，例如：在一條直線段上，先用圓規畫出給定長度的線段，再比較畫出線段的長度，和畫出圓半徑的長度一樣長的關係。更重要的是，當學童畫出一個三角形後，應該要求學童說明為什麼可以這樣畫出三角形的理由，幫助學童澄

清三角形畫法的意義。

## 六、三角形任兩邊和大於第三邊

國小階段，可以透過下列三種方式，與學童溝通三角形任兩邊和大於第三邊的意義。

第一種方式是利用歐氏幾何中「兩點之間最短的路徑是連接這兩點的直線長」的公設。如圖 2-1-6，A、B 兩點間最短的距離就是線段 AB 的長度，在三角形 ABC 中，線段 CA 和線段 CB 的長度和一定比線段 AB 長，也就是說，三角形任兩邊的和的大於第三邊。

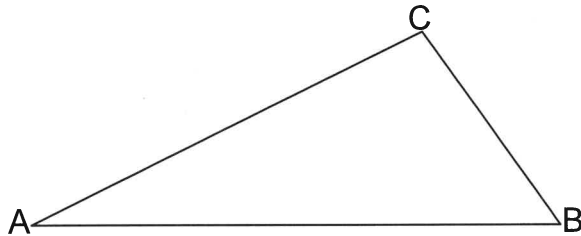


圖 2-1-6

第二種方式是固定兩邊(共端點)，透過觀察第三邊的變化，發現三角形任兩邊和大於第三邊的現象。如圖 2-1-7 中，拿出兩根竹籤，其中甲竹籤長  $a$  公分，乙竹籤長  $b$  公分( $a < b$ )，將兩根竹籤共端點的合在一起，假設共同的端點是 A 點，此時，這二根竹籤無法決定一個三角形；接著以 A 點為頂點，將兩根竹籤慢慢的張開，此時，這兩根竹籤開始可以決定一個三角形(SAS)，這個三角形的第三個邊，就是這兩根竹籤另外兩個端點 B、C 連成的直線段(此直線段一定比兩根竹籤的長度和小，比兩根竹籤長度差的絕對值大)，只要這兩根竹籤張開的角度小於 180 度，都可以決定一個三角形；當這兩根竹籤張開的角度等於 180 度時，又不可以圍成一個三角形。也就是說，從第三邊有一點長度開始，一直到和兩根竹籤的長度和相等之前，都可以圍成一個三角形，而這個三角形的第三邊的長度一定比另兩邊長度的和小。

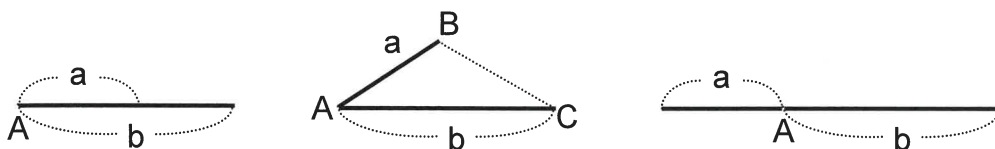


圖 2-1-7

第三種方式是固定一邊，透過觀察另外兩邊的變化，發現三角形任兩邊的和大於第三邊的現象。如圖 2-1-8，仿中間可以開合的吊橋來說明，當這座吊橋的橋面合成一條直線時(假設兩個端點是 A、B，線段 AB 長是固定的)，不能構成一個三角形，當橋面張開時(假設由 O 點張開，橋面的兩段 AO 和 BO，以 A、B 為頂點向上升起)，此時 AB、AO 和 BO 三線段不能圍成一個三角形，必須延長 AO 和 BO 才能構成一個三角形(假設 AO 和 BO 的延長線相交於 C 點)，這個三角形 ABC 的一邊 AC 一定會比 AO 長，另一邊 BC 一定會比 BO 長，所以 AC 和 BC 的長度合起來一定比 AB 長(AB 的長度是 AO 和 OB 的長度和)，也就是說，三角形任兩邊的長度和一定大於第三邊的長度。

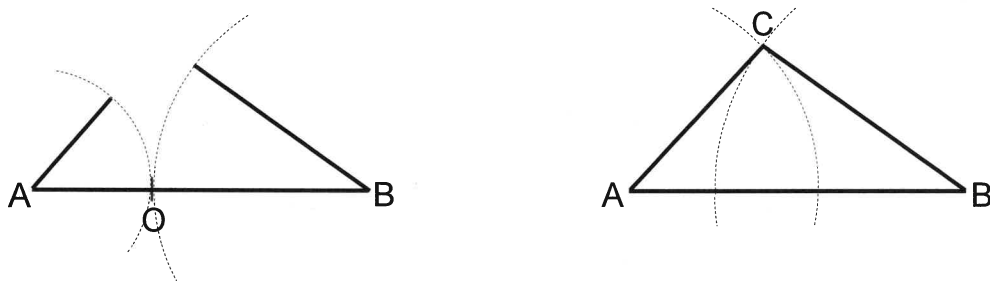


圖 2-1-8

## 七、三角形教學流程說明

表 2-1 是本教材與三角形教學有關的活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明，其中的「\*」表示參考活動，未在課本上呈現。

表 2-1

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	3	透過描繪實物的表面，分辨三角形、長方形、正方形和圓形等形狀。
1	6	4	透過說、讀、聽、做等練習，加強三角形、正方形、長方形和圓形等術語與圖卡、書空、…等的聯結。
1	6	5	透過塗色活動，加深學生對三角形、長方形、正方形和圓形等平面圖形的認識。
1	6	*2	熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。
1	6	*3	能用單一的平面圖形造出圖案，以加深對圓形、三角形的認識。
1	6	*4	(1)熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。 (2)找出圖形的規律。
1	6	*6	增強辨認顏色、形狀、大小。
2	6	1	在有背景或其他圖形下辨認三角形、正方形、長方形和圓形等圖形。
5	6	1	(1)描述三角形的畫法或描法。 (2)進行三角形的邊、頂點及角的命名活動。
5	6	2	透過複製三角形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素。
6	9	2	(1)從比較三角板的角認識直角。 (2)認識直角三角形。
8	3	4	透過量角器認識度的意義。
8	3	5	在度量化的情境下，解決兩個角的合成、分解問題，並以算式記錄。
8	3	6	在鐘面圖上，用度量化的方式，描述旋轉角的角度。
8	3	7	(1)認識銳角和鈍角。 (2)使用量角器畫出指定度數的角。
8	5	8	將一堆三角形依據邊長或角的大小關係，加以分類並命名。

8	5	9	(1)認識對角對邊的概念與名詞。 (2)經驗後察覺三角形中最大邊對最大角(或最大角對最大邊)及最小邊對最小角(或最小角對最小邊)。
8	5	10	認識等腰三角形和正三角形的特性。

在低年級階段，本教材將學童對三角形的認知定為在 Van Hiele 的第零層次視覺期，因此在第一冊第六單元，本教材先透過活動 3~5、參考活動 2~4 及 6，幫助學童使用三角形的名詞辨認並描述三角形的形狀；在第二冊第六單元活動 1，本教材進一步在有背景或其它圖形的干擾下，要求學童能辨識出三角形，並透過限制學童使用三角形、正方形、長方形拼成一個指定圖形的活動，希望學童在拼湊的過程中，經驗到兩個圖形的邊一樣長時，或頂點對齊時，兩個圖形比較容易合在一起，為引入三角形的構成要素鋪路。

中年級開始，本教材將學童對三角形的認知定為在 Van Hiele 的第一層次分析期，本教材在第五冊第六單元開始幫助學童認識三角形的構成要素，在活動 1 中，先要求學童畫出一個三角形，透過描述三角形的畫法或描法，進行三角形構成要素頂點、邊和角的命名活動。在活動 2 中，透過分別複製三角形的頂點、邊和角的活動，加深學童對三角形的頂點、邊和角意義的掌握。

第一至第五冊，本教材討論的都是三角形，並沒有自三角形中區分出課程標準術語與符號要求出現的三角形；第六冊開始認識這些三角形，第六冊第九單元活動 2，透過比較三角板的三個角引入直角，並幫助學童認識直角三角形；第八冊第三單元在活動 4~6 介紹角度的意義後，在活動 7 引入鈍角及銳角，在第八冊第五單元活動 8~10 中，更進一步依據邊長或角度的大小關係，幫助學童將三角形分類並命名，依據邊長的關係，本教材引入等腰三角形及正三角形，依據角度的關係，本教材引入直角三角形、鈍角三角形及銳角三角形。

## 第二節 四邊形

### 一、四邊形的分類與命名

數學上常透過四個邊的長度是否相等，四個角的角度是否相等，對邊是否平行，對角線是否平分、相等或垂直等關係，將四邊形分類與命名。本教材透過下列四種方式，進行四邊形的分類及命名活動。

#### (一) 邊長是否相等

依據邊長是否相等的關係來分類，可以將所有的四邊形分割成五類(見圖 2-2-1)：

第一類是四個邊都相等的四邊形(四個邊的邊長依序是  $a$ 、 $a$ 、 $a$ 、 $a$ )。

第二類是恰有三個邊相等的四邊形(四個邊的邊長依序是  $a$ 、 $a$ 、 $a$ 、 $b$ ，其中  $a \neq b$ )。

第三類是恰有二個邊相等，另兩個邊不相等的四邊形，又可以區分成對邊相等的四邊形(四個邊的邊長依序是  $a$ 、 $b$ 、 $a$ 、 $c$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  都不相等)，以及鄰邊相等的四邊形(四個邊的邊長依序是  $a$ 、 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  都不相等)。

第四類是兩組邊長分別相等的四邊形，又可以區分成兩組對邊分別相等的四邊形(四個邊的邊長依序是  $a$ 、 $b$ 、 $a$ 、 $b$ ，其中  $a \neq b$ )，以及兩組鄰邊分別相等的四邊形(四個邊的邊長依序是  $a$ 、 $a$ 、 $b$ 、 $b$ ，其中  $a \neq b$ )。

第五類是四個邊都不相等的四邊形(四個邊的邊長依序是  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  都不相等)。

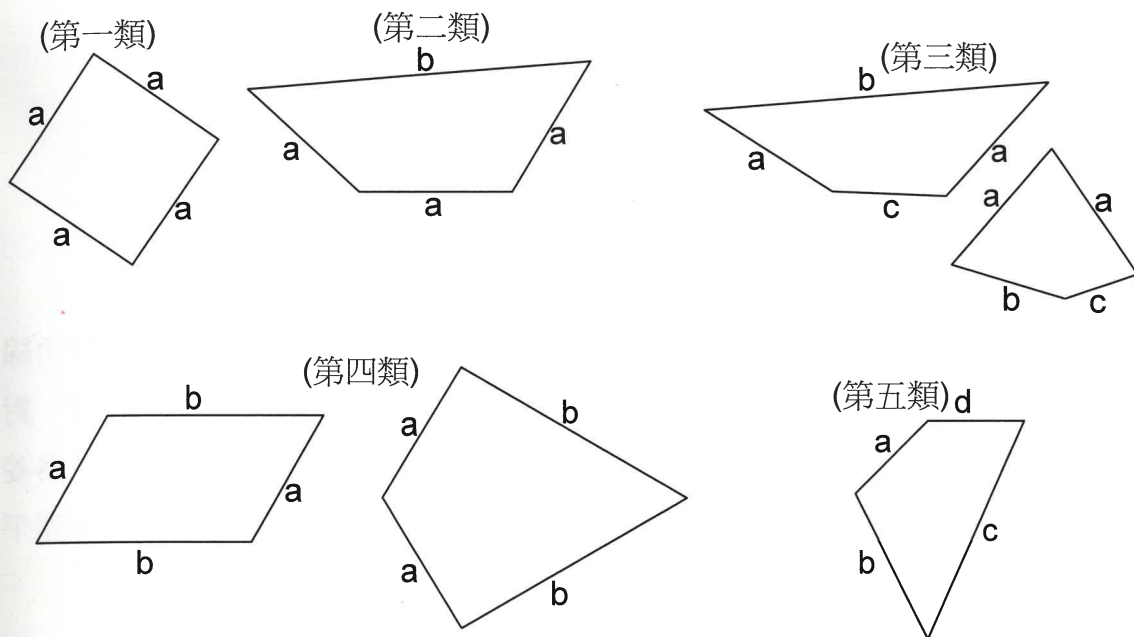


圖 2-2-1

雖然等腰梯形屬於第三類對邊相等的四邊形，平行四邊形屬於第四類兩組對邊分別相等的四邊形，箏形屬於第四類兩組鄰邊分別相等的四邊形，但是本教材並不透過邊長的關係進行這些四邊形的分類活動，因為透過平行或其它的關係來分類更恰當，例如：直角與對角線等。本教材只引入四個邊相等四邊形的命名活動，並稱呼四個邊相等的四邊形為菱形或等邊四邊形。

## (二) 角度是否相等

仿邊長是否相等關係的分類方式，也可以透過角度是否相等的關係，把所有的四邊形分割成五類，本教材只引入四個角角度相等(都是  $90^\circ$ )四邊形的命名活動，並稱呼四個角都是直角(都相等)的四邊形為長方形、矩形或等角四邊形。

## (三) 平行關係

我們可以很方便地描述三角形的邊和角的關係，因為三角形每一個邊都有一個對應的角，每一個角也都有一個對應的邊；但是無法方便地描述四邊形的邊和角的關係，因為四邊形每一個角分別有兩個對應的邊，每一個邊分別有兩個對應的角。雖然我們無法方便地描述四邊形的邊和角的關係，但是可以方便地描述四邊形邊和邊的關係，以及角和角的關係，因為四邊形每一個邊都有一個對應的邊和二個相鄰的邊，每一個角都有一個對應的角和二個相鄰的角。

依據有多少組對應邊平行的方式，可以將所有的四邊形區分成如下三類：

第一類是恰有兩組對應邊平行的四邊形，本教材稱之為平行四邊形。

第二類是恰有一組對應邊平行的四邊形，本教材稱之為梯形。

第三類是沒有任何一組對應邊平行的四邊形，本教材不討論。

#### (四) 對角線的關係

三角形沒有對角線，而四邊形有兩條相交的對角線，因此也可以透過對角線的關係來判斷四邊形的屬性，例如：對角線互相平分的四邊形為平行四邊形，對角線互相平分且等長的四邊形為長方形，對角線互相平分且垂直的四邊形為菱形，對角線互相平分、垂直且相等的四邊形為正方形，對角線互相垂直，但僅平分其中一條對角線的四邊形為箏形。

因為對角線不是四邊形的構成要素，透過對角線進行分類及命名活動，和這些四邊形數學上的名稱也沒有關係，因此本教材並不透過對角線的關係進行這些四邊形的命名活動。

箏形是相鄰兩邊分別相等的四邊形(四個邊的邊長依序是  $a$ 、 $a$ 、 $b$ 、 $b$ ，其中  $a \neq b$ )，這樣的邊長關係在描述上相當困難，因為學童在二年級已有線對稱圖形活動的經驗，因此本教材透過對角線進行箏形的命名活動，請注意，本教材不是透過對角線的關係來分類或命名，本教材只是透過對稱的現象來描述箏形。

## 二、四邊形的定義

國小階段，透過邊、角是否相等或對應邊是否平行的性質，區分出一些常見的四邊形，依據八十二年課程標準術語與符號部分的內容，本教材引入正方形(正四邊形或等邊且等角四邊形)、長方形(矩形或等角四邊形)、菱形(等邊四邊形)、平行四邊形、梯形、等腰梯形與箏形(鴛形)等特殊四邊形的命名活動。

下面是本教材給課程標準術語與符號部分要求出現四邊形的定義：

- 四邊形：平面上由四條首尾相連的直線段所圍成的封閉圖形稱為四邊形，四邊形可以區分成凸四邊形和凹四邊形兩種，如圖 2-2-2，凸四邊形內部任意兩點所連成的線段，一定都在該四邊形的內部，而且凸四邊形的每一個內角都

小於  $180$  度；凹四邊形內部一定可以找到兩個點，使這兩點所連線段的一部分在該四邊形的外部，而且凹四邊形一定有一個內角(旋轉角概念)大於  $180$  度。另一個判定方式是，若將四邊形的四個邊作延長線，若有一延長線與另一邊相交則為凹四邊形，否則即為凸四邊形。日常生活中熟悉的四邊形，例如：正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形與箏形等都是凸多邊形，本教材所討論的四邊形也都是凸四邊形。

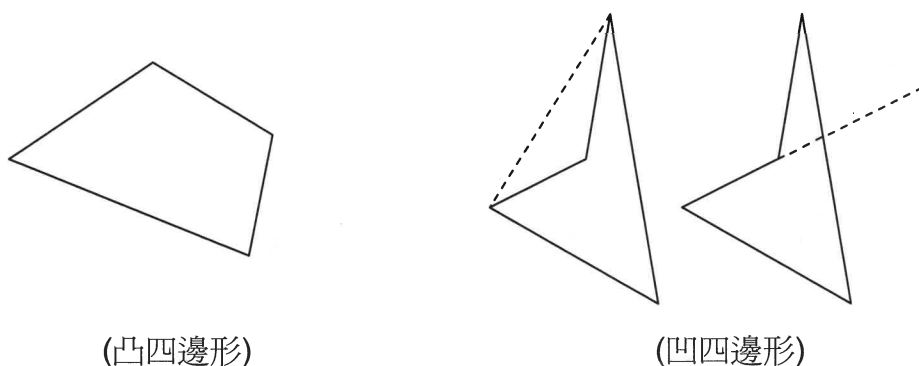


圖 2-2-2

- 長方形：本教材定義四個角都是直角的四邊形為長方形，又稱為矩形或等角四邊形，本教材不透過「四個角相等的四邊形」來定義長方形，主要的理由是在第七冊引入長方形的定義時，學童尚未學過四邊形的內角和是  $360$  度。
- 菱形：本教材定義四個邊都一樣長的四邊形為菱形，又稱為等邊四邊形。
- 正方形：本教材定義四個角都是直角，且四個邊都相等的四邊形為正方形，又稱為正四邊形或等邊且等角四邊形。
- 平行四邊形：平行四邊形可以有很多不同的定義方式，本教材定義兩雙對邊都平行的四邊形為平行四邊形，因為這種定義方式最符合平行四邊形的名字。
- 梯形：本教材定義恰有一雙對邊平行的四邊形為梯形，並建議教師透過「有一雙對邊平行，而另一雙對邊不平行」的方式定義梯形。我們在溝通梯形的定義時，常省略「恰」，將梯形的定義說成「有一雙對邊平行的四邊形」，「有一雙對邊平行」的說法很容易產生文字意義上的混淆，例如：解讀成「至少有一雙對邊平行」時，平行四邊形也是梯形，解讀成「恰有一雙對邊平行」時，平行四邊形不是梯

形，解讀成「至多有一雙對邊平行」時，除了平行四邊形外，所有的四邊形都是梯形。

- 箏形：有兩種定義箏形的方式，第一種是「對角線互相垂直，但僅平分其中一條對角線」；第二種是「有一條對角線，其兩側的對應邊都一樣長的四邊形」。因為學童已有線對稱圖形的舊經驗，本教材透過第二種方式定義箏形。中年級學童不易理解箏形定義的描述方式，本教材建議教師先拿出多個不同的箏形，透過這些四邊形的形狀很像一個小風箏的溝通方式，引入箏形的名字，再利用二年級線對稱活動的舊經驗，一個圖形對摺後，摺線兩邊能完全疊合的圖形叫做對稱圖形，幫助學童發現箏形是一個線對稱圖形，而且箏形有一條對角線(對摺的摺痕)，使其兩側的對應邊都一樣長，見圖 2-2-3。

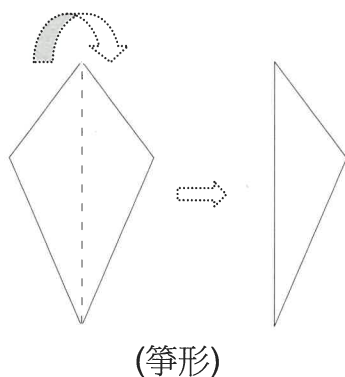


圖 2-2-3

- 等腰梯形：本教材定義不平行的那兩個邊相等的梯形為等腰梯形。

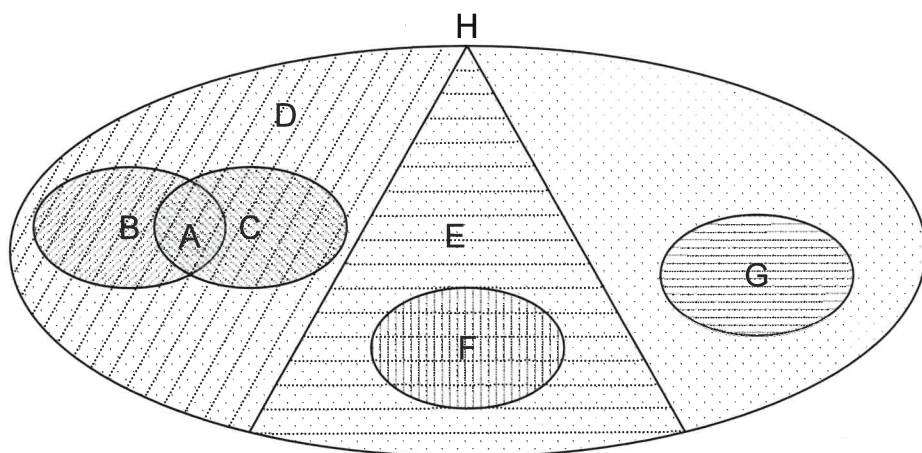
### 三、四邊形的包含關係

令 **A** 是正方形所成的集合，**B** 是長方形所成的集合，**C** 是菱形所成的集合，**D** 是平行四邊形所成的集合，**E** 是梯形所成的集合，**F** 是等腰梯形所成的集合，**G** 是箏形所成的集合，**H** 是四邊形所成的集合。

仿前節使用范氏圖表徵三角形集合包含關係的方式，也可以使用范氏圖溝通上面 8 個四邊形集合的包含關係。透過有幾雙對應邊平行的方式，可以將所有的四邊形分成恰有兩雙對邊平行，即平行四邊形(**D**)，恰有一雙對邊平行，即梯形

(E)，以及沒有對邊平行三類。

在圖 2-2-4 中，可以看到全部的四邊形被分成平行四邊形(D)、梯形(E)及沒有對邊平行的四邊形三類，其中菱形(C)和長方形(B)也是平行四邊形，所以包含於平行四邊形(D)，而正方形(A)是菱形(C)和長方形(B)的交集；等腰梯形(F)也是梯形，所以包含於梯形(E)；箏形(G)的對邊都不平行，所以包含於沒有對邊平行的四邊形。



(H 表示全部四邊形所成的集合，恰有兩雙對邊平行，即平行四邊形(D)，恰有一雙對邊平行，即梯形(E)，以及沒有對邊平行的四邊形將 H 區分成三類)

圖 2-2-4

下圖 2-2-5 和上圖 2-2-4 的概念相同，只是表徵的方式不同，在圖 2-2-5 中可以看到梯形(E)與平行四邊形(D)沒有交集，因為梯形一定不是平行四邊形，平行四邊形也一定不是梯形；正方形(A)是長方形(B)和菱形(C)的交集，因為正方形一定是長方形，正方形也一定是菱形；等腰梯形(F)包含於梯形(E)，因為等腰梯形一定是梯形；平行四邊形(D)、梯形(E)、箏形(G)的聯集並不是所有的四邊形(H)，因為有一些四邊形不是平行四邊形，不是梯形，也不是箏形。

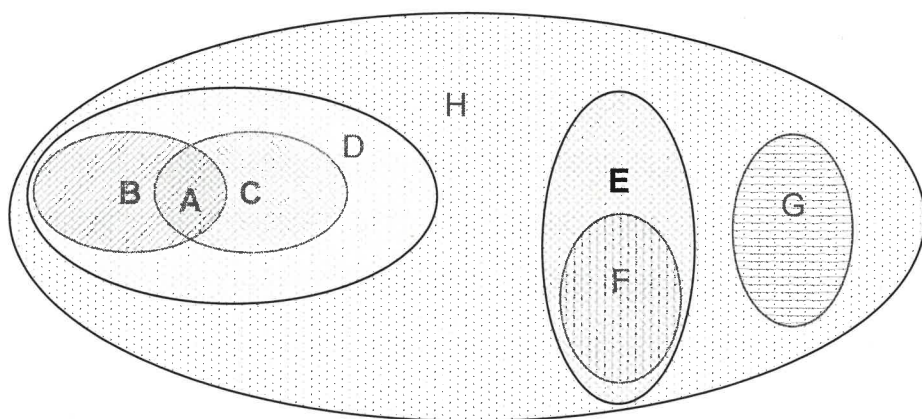


圖 2-2-5

在評量時，試題中常出現一些四邊形，要求學童寫出這些四邊形的名字，例如：試題中給定的四邊形是平行四邊形，因為平行四邊形一定是四邊形，學童在答案欄上寫四邊形，是否應該給分？使用平行四邊形的名字而不能使用四邊形的名字作答是一種約定俗成，習慣上，我們要求學童寫出限制最嚴格的圖形名稱。評量前，教師必須與學童溝通，形成所填名字必須儘量表示該圖形的所有特性的共識，例如：正方形的四個邊相等，四個角都是直角，作答時不可以將正方形記成長方形，因為正方形比長方形多了四個邊相等的特性。

#### 四、定義與定理

平行四邊形具有下列性質：

- a：兩雙對邊互相平行。
- b：一雙對邊平行且相等。
- c：兩雙對邊分別相等。
- d：兩雙對角分別相等。
- e：對角線互相平分。

我們可以透過平行線的性質以及三角形全等的定理，證明這些性質可以互推，例如：可以選擇「兩雙對邊互相平行」當做平行四邊形的定義，透過  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e$  的順序證明其它的性質都成立，也可以選擇「兩雙對邊分別相等」當做

平行四邊形的定義，透過  $c \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow e$  的順序證明其它的性質都成立。

在公理化的幾何層次，我們需要給平行四邊形一個定義，這個定義在理論上可以在  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$  中任選一個，因為它們都是邏輯等價，可以互推的，但是數學上都選用  $a$  當做平行四邊形的定義，因為它和平行四邊形的名字最符合。

當學童尚未達到公理化幾何層次時，只能透過定義來判斷一個四邊形是否為平行四邊形。當學童達到公理化的幾何層次，並且透過證明知道  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$  都等價之後(如果  $a$  是定義， $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$  都是定理)，可以透過定義，也可以透過定理來判斷一個四邊形是否為平行四邊形。國小階段的學童尚未達到公理化的幾何層次，無法透過證明形成定理，因此只能透過定義來判斷一個四邊形是否為平行四邊形，例如：面對一個四邊形，要求判斷該四邊形是否為平行四邊形時，學童只能透過定義  $a$  來判斷，不可以透過定理  $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$  來判斷。

教師可以給定一個已知的平行四邊形當做特例，要求學童檢查這個平行四邊形是否滿足  $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$  的性質，但是不宜宣告所有的平行四邊形都滿足  $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$  的性質，也暫不要求學童利用  $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$  的性質，來判斷一個四邊形是否為平行四邊形。

## 五、四邊形教學流程說明

表 2-2 是本教材與四邊形教學有關的活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-2

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	3	透過描繪實物的表面，分辨三角形、長方形、正方形和圓形等形狀。
1	6	4	透過說、讀、聽、做等練習，加強三角形、正方形、長方形和圓形等術語與圖卡、書空、…等的聯結。
1	6	5	透過塗色活動，加深學生對三角形、長方形、正方形和圓形等平面圖形的認識。

1	6	*2	熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。
1	6	*4	(1)熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。 (2)找出圖形的規律。
1	6	*6	增強辨認顏色、形狀、大小。
2	6	1	在有背景或其他圖形下辨認三角形、正方形、長方形和圓形等圖形。
2	6	2	透過觀察及套描活動，知道圖形板與其外框是同形狀。
2	6	3	在釘板上用橡皮筋圍出圖形。
2	6	4	用兩塊全等(形狀、大小一樣)的色板拼出一個圖形。
2	6	5	經驗一個圖形可由兩塊一樣的圖形所構成。
2	6	6	用一些三角形、正方形或長方形拼成一個指定的圖形。
2	6	7	用一些正方形或長方形拼成一個指定的圖形。
2	6	8	(1)由實際的拼排，經驗一個圖形可由幾個全等的圖形所構成。 (2)會將數據填入設計好的表中。
2	6	*1	(1)熟練三角形、正方形、長方形和圓形等圖形。 (2)透過操作的活動，知道圖形板與其外框是同形狀。
2	6	*2	用竹籤在桌子上排出圖形。
5	6	3	透過描繪活動，認識四邊形的邊、頂點和角。
5	6	4	進行四邊形的命名活動。
5	6	5	透過複製四邊形的邊、頂點及角的活動，加深了解其構成要素。
6	9	2	(1)從比較三角板的角認識直角。 (2)認識直角三角形。
6	9	3	(1)知道正方形、長方形都有四個直角。 (2)透過複製直角的活動，經驗垂直的意義。 (3)用紙摺出直角。

7	3	1	透過「指定一邊，做出直角另一邊」的方式，察覺垂直的意義。
7	3	2	察覺一線平行於另一直線的意義為同時垂直於第三直線。
7	9	1	認識平行四邊形和梯形，並加以命名。
7	9	2	透過對稱關係製作箏形、菱形，並加以命名。
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。			

在低年級階段，本教材將學童對四邊形的認知定為在 **Van Hiele** 的第零層次視覺期，因此在第一冊第六單元，本教材先透過活動 3~5、參考活動 2、4 及 6，幫助學童使用正方形和長方形的名詞辨認並描述圖形的形狀；透過分佈練習，在第二冊第六單元，本教材進一步在有背景或其它圖形的干擾下，要求學童能辨識出四邊形，並透過限制學童使用三角形、正方形、長方形拼成一個指定圖形的活動，希望學童在拼湊的過程中，經驗到兩個圖形的邊一樣長時，或頂點對齊時，兩個圖形比較容易合在一起，為引入四邊形的構成要素鋪路。

中年級開始，本教材將學童對四邊形的認知定為在 **Van Hiele** 的第一層次分析期，本教材在第五冊第六單元開始幫助學童認識四邊形的構成要素，在活動 3 中，先要求學童畫出一個四邊形，透過描述四邊形的畫法或描法，認識四邊形的頂點、邊和角；在活動 4 中，進行四邊形的命名活動；在活動 5 中，透過分別複製四邊形的頂點、邊和角的活動，加深學童對四邊形的頂點、邊和角意義的掌握。

第一至第五冊，本教材討論的都是四邊形，並沒有自四邊形中區分出課程標準術語與符號要求出現的四邊形；第六冊開始認識這些四邊形，第六冊第九單元活動 2，透過比較三角板的三個角引入直角；在活動 3，幫助學童知道正方形、長方形都有四個直角。在第七冊第三單元活動 1、2，引入垂直與平行的意義；在第七冊第九單元活動 1、2，更進一步依據邊長的大小關係或對應邊的平行關係，幫助學童將四邊形分類並命名，依據邊長的關係，本教材引入菱形及箏形，依據平行的關係，本教材引入平行四邊形及梯形。

## 第三節 多邊形

### 一、凸多邊形與凹多邊形

由直線段所圍成的封閉圖形，數學上稱之為多邊形，多邊形可以區分成凸多邊形和凹多邊形兩種。

在前節中，我們曾討論凸四邊形與凹四邊形的判定方式，多邊形的情形也相同。如果一個多邊形其內部任意兩點所連成的線段，一定都在該多邊形的內部，則稱該多邊形為凸多邊形，如果一個多邊形內部存在兩個點，使這兩個點所連成的線段，有一部分在該多邊形的外部，則稱該多邊形為凹多邊形；另一個判定方式是，將多邊形的各邊作延長線時，若有至少一延長線與另一邊相交則為凹四邊形，否則即為凸四邊形，本教材討論的對象都是凸多邊形。

### 二、多邊形與多邊形區域

三角形和三角形區域是兩種不同的圖形，如圖 2-3-1，由三條直線段頭尾相接所圍成的圖形稱之為三角形，這個三角形可以把平面區分成三角形(周界)、三角形內部、三角形外部三個部分，而三角形和三角形內部合起來的圖形稱之為三角形區域。

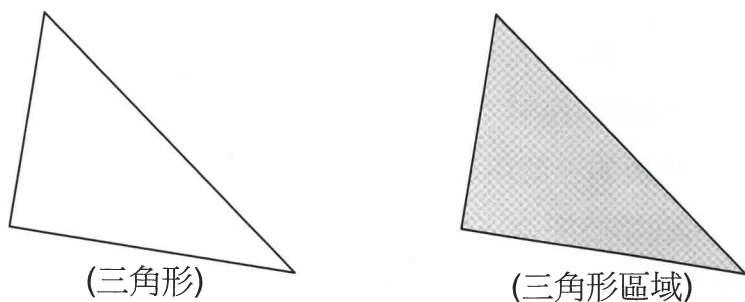


圖 2-3-1

在討論三角形的周長時，周長可以是三角形三個邊邊長的和，也可以是三角形區域周界的長度和；在討論三角形的面積時，面積是三角形區域的面積，三角形本身沒有面積，三角形圍成的區域才有面積。

在中文的日常用法中，常把三角形區域簡稱為三角形，長方形區域簡稱為長方形，圓區域簡稱為圓等，並沒有嚴格的區分  $n$  邊形和  $n$  邊形區域或圓和圓區域的意義，本教材提醒教師應該區分兩者的意義，並布置合理的問題情境。

低年級階段屬於視覺期，教師不必嚴格的區分多邊形與多邊形區域的意義，可以混用這兩種圖形，並將多邊形與多邊形區域都稱為多邊形，例如：將平面上畫出的三角形稱為三角形，拿出的三角形圖卡也稱為三角形。

中年級階段屬於分析期，開始要討論多邊形的構成要素，本教材並不嚴格要求學童區分多邊形和多邊形區域的意義，但是要求教師在布題時必須分辨出討論的重點是多邊形還是多邊形區域，並布置出合理的問題情境，例如：在討論三角形構成要素時，三角形的構成要素是頂點、邊和角，並不涉及三角形的內部，因此討論的對象應該是畫出的三角形，而不是三角形的圖卡。

另外在討論多邊形面積時，例如：長方形的面積是長方形及其內部所具有的性質，因此討論的對象應該是長方形區域，而不是長方形。本教材要求教師透過使用手將整個長方形區域抹過的方式，強調求的是長方形區域的面積。

### 三、等邊多邊形、等角多邊形、正多邊形的定義

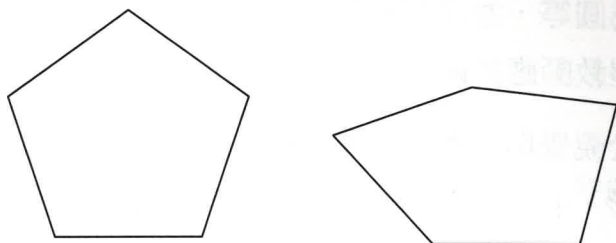
在多邊形中，只有三角形滿足等邊三角形一定是等角三角形，等角三角形一定是等邊三角形的關係，所以正三角形、等邊三角形、等角三角形是同一個集合。除了三角形之外，等邊  $n$  邊形( $n > 3$ )不一定是等角  $n$  邊形，等角  $n$  邊形( $n > 3$ )也不一定是等邊  $n$  邊形，也就是說，等邊  $n$  邊形( $n > 3$ )，等角  $n$  邊形( $n > 3$ )是不同的兩個集合，而正  $n$  邊形( $n > 3$ )是這兩個集合的交集。

#### (一) 等邊多邊形

本教材定義每一個邊都相等的多邊形為等邊多邊形，例如：等邊三角形、等邊四邊形、等邊五邊形、等邊六邊形等。菱形是等邊四邊形，但是菱形的四個角不一定是直角，因此等邊四邊形不一定是等角四邊形。

使用  $n$  根( $n > 3$ )一樣長的竹籤所圍成的  $n$  邊形是等邊  $n$  邊形，這些等邊  $n$  邊形的  $n$  個角不一定都相等(可以隨意的改變等邊  $n$  邊形的形狀)，因此，等邊  $n$  邊

形不一定是等角  $n$  邊形，如圖 2-3-2。



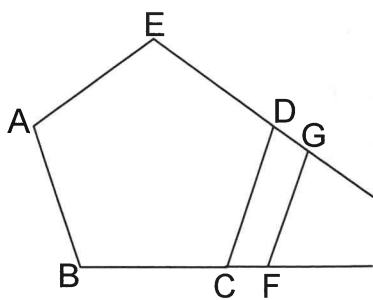
(等邊  $n$  邊形不一定是等角  $n$  邊形)

圖 2-3-2

## (二) 等角多邊形

本教材定義每一個角都相等的多邊形為等角多邊形，例如：等角三角形、等角四邊形、等角五邊形、等角六邊形等。長方形是等角四邊形，但是長方形的四個邊不一定都等長，因此等角四邊形不一定是等邊四邊形。

如圖 2-3-3，畫一個正五邊形  $ABCDE$ ，延長這個正五邊形的兩個邊  $BC$  和  $ED$ ，在延長線上分別取  $F$  和  $G$  兩個點，使線段  $CD$  和線段  $FG$  平行，則新五邊形  $ABFGE$  還是一個等角的五邊形，因為同位角相等，但是已經不是等邊五邊形，相同的，當畫出正  $n$  邊形( $n > 3$ )時，也可以仿上述方式，畫出一個等角的  $n$  邊形，而這個等角  $n$  邊形不是等邊  $n$  邊形。



(等角  $n$  邊形不一定是等邊  $n$  邊形)

圖 2-3-3

## (三) 正多邊形

本教材定義每一個邊都相等且每一個角都相等的多邊形為正多邊形，例如：正三角形、正四邊形(正方形)、正五邊形、正六邊形等都是正多邊形。

在數學上，大都使用量角器等分割圓心角，透過做出圓內接正多邊形的方式做出正多邊形，本教材認為要求學童畫出正多邊形太困難，透過等長的線段也不易做出正多邊形(因為不易控制等角)，因此提供多個正多邊形的圖像，要求學童透過檢查各邊是否都等長，各角是否都相等的方式，引入正多邊形的命名。

#### 四、全等多邊形

兩個多邊形如果能處處疊合，本教材稱這兩個多邊形全等，或稱這兩個多邊形是全等的多邊形。

兩個全等的多邊形，其頂點數一定相等，而且可以透過疊合，建立一個頂點對應一個頂點的對應關係，由此對應關係，也可以得到角的對應關係和邊的對應關係，兩個全等多邊形互相對應的角其角度都會相等，互相對應的邊其邊長都會相等。

反過來，兩個邊數或角數相等的多邊形，也可以建立頂點的對應關係，當其中一個多邊形的頂點按照順時針方向排列時，如果另一個多邊形的頂點也按照順時針的方向排列，就可以得到一組邊的對應關係和角的對應關係，如果有一組對應關係讓對應邊的邊長都相等，以及對應角的角度都相等，這兩個多邊形就能夠處處疊合，也就是說，這兩個多邊形是全等的多邊形。

如果其中一個多邊形的頂點按照順時針方向排列時，另一個多邊形的頂點按照逆時針的方向排列(也就是將圖形翻轉)，也可以得到一組邊的對應關係和角的對應關係，如果有一組對應關係讓對應邊的邊長都相等，以及對應角的角度都相等，這兩個多邊形就能夠處處疊合，所以這兩個多邊形也會全等，見圖 2-3-4。



圖 2-3-4

## 五、多邊形教學流程說明

表 2-3 是本教材與多邊形教學有關的活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-3

冊別	單元	活動	活動目標
9	11	1	(1)將一堆三~七邊形的圖卡，根據邊的個數加以分類並命名，命名為五邊形、六邊形、七邊形後，將全類命名為多邊形。 (2)討論給定的五(及六)邊形圖卡，檢查邊、角是否相等，由此認識正五(及六)邊形。
9	11	2	以疊合方式檢驗兩多邊形圖卡完全疊合後，確定此二多邊形逐邊、逐角皆相等，由此認識兩多邊形全等時，各對應邊皆相等，各對應角皆相等。

當學童有足夠三角形及四邊形的活動經驗後，本教材在第九冊第十一單元引入多邊形的教學活動，活動 1 可以分成兩個部分，第一部分是布置一堆 3~7 邊形的圖卡，要求學童依據邊的個數加以分類及命名，得到五邊形、六邊形、七邊形的名稱後，再將這些邊數不同的多邊形，都命名為多邊形；第二部分是討論給定的正五邊形及正六邊形的圖卡，檢查它們每一個邊是否都等長，每一個角的角度是否都相等，在確定每一個邊長及每一個角度都相等後，將這些多邊形命名為正五邊形及正六邊形。

**活動 2** 先以疊合的方式，檢驗這兩個多邊形圖卡可以完全疊合後，再逐邊確認這兩個多邊形所有的對應邊都等長，逐角確認這兩個多邊形所有的對應角都相等，幫助學童認識兩個多邊形全等時，對應邊都相等及對應角都相等的結果。

## 第四節 圓與扇形

### 一、圓

在平面上選定一定點  $O$ ，在平面上與定點  $O$  的距離是  $r(r > 0)$  的所有點所成的集合稱為圓，該定點  $O$  稱為圓心， $r$  稱為半徑。圓把平面區分成三個部分，圓的內部，圓(周界)和圓的外部，圓和圓的內部合起來稱為圓區域。圓本身有長度，圓區域的周界是圓周，圓周也有長度，圓的長度和圓周的長度相同，都簡稱為圓周長。請注意，圓心並不在圓的上面。

在中文的用語中，一個圖形是圓還是圓區域，必須靠前、後文的描述來判斷，但是在英文的用語中，很明確的區分圓和圓區域，如果不強調內部，只談一個圓，英文稱之為 **circle**，如果強調圓和圓的內部，英文稱之為 **disc**。

參考圖 2-4-1，圓上任一點與圓心所連成的線段稱為半徑，一個圓有無限多條半徑，而這些半徑的長度都相同，稱為半徑長。兩條半徑若能連成一條直線段，稱該直線段為直徑，一個圓也有無限多條直徑，而這些直徑的長度也相等，稱為直徑長，日常生活中常將半徑長簡稱為半徑，直徑長簡稱為直徑。圓上任兩點可以將圓分割成兩部分，都稱為圓弧，其中比較長的部分稱為優弧，比較短的部分稱為劣弧，如果兩部分一樣長，則稱為半圓。圓上任兩點所連成的線段稱為弦，直徑是圓中最長的弦，直徑剛好將圓區域分割成全等的兩部分，直徑的兩個端點剛好將圓分割成全等的兩個圓弧。



(AB 為直徑；CO 為半徑) (DE 為弦；DGE 為劣弧；DFE 為優弧；AFB 為半圓)

圖 2-4-1

## 二、圓周率

所有的圓都很像，也就是說，所有的圓彼此都相似，因此所有圓的直徑和半徑的比都相等，其比值剛好是 2；而數學史上人們是透過圓內接正多邊形求圓面積時，發現所有圓的圓周長和直徑長的比也會相等，數學上稱圓周長比直徑長的比值為圓周率，並將圓周率簡記成  $\pi$ 。

圓有圓周率，橢圓是否也存在橢圓周率？因為不同橢圓的長軸和短軸的比值並不一定相同，也就是說，各橢圓間並不一定滿足相似的關係，因此就所有的橢圓而言，並不存在橢圓周率。但是針對長軸和短軸的比值相等的橢圓，例如：長軸長是短軸長的二倍，它們之間都滿足相似的關係，因此它們的周長和長軸的比都相等，我們可以稱這個比的比值為這些相似橢圓的橢圓周率。

使用「做出一個圓，然後用尺精確量出圓周長和直徑長，再算出兩者的比值」的方式求圓周率，是國小階段最常見引入圓周率的教學方式，值得注意的是，圓周率是一個無理數，使用上述方式算出的圓周率是一個有理數(量出來的長度一定是有理數，有理數比有理數的比值一定是有理數，不會變成無理數)。上述教學方式只能得到圓周率的近似值，因為畫圓和測量都存在不可避免的誤差，例如： $\sqrt{2}$  公分是存在的，但是不可能用尺量出 $\sqrt{2}$ 公分長，而且使用尺量物長時受到最小刻度單位的限制，無法得到精確的答案，因此要算出圓周率是 3.14、3.1416 或其它

更精確的答案，是不可能在這樣的教學方式中做到的。

古代數學家計算圓周率，是透過圓內接多邊形來逼近圓，以求得較精確的答案，例如：西方的阿基米得，使用正多邊形的周長逼近圓周長的方式求圓周率的近似值，東方的劉徽，祖沖之，使用正多邊形的面積逼近圓面積的方式求圓周率的近似值。他們算圓周率近似值的方法，第一步先利用圓內接四邊形的邊長或面積求圓周率的近似值，然後將邊的數目加倍，利用圓內接正八邊形的邊長或面積求圓周率的近似值，再將邊的數目加倍，利用圓內接十六邊形的邊長或面積求圓周率的近似值，以此類推，當邊長數愈來愈多時，求出來的圓周率會愈來愈精確。

利用圓內接正多邊形來逼近圓的方式，可以得到一組愈來愈接近圓周率的數列，利用圓外切正多邊形來逼近圓的方式，可以得到另一組愈來愈接近圓周率的數列，這兩組不同的數列雖然都愈來愈接近圓周率，但是都無法確定圓周率的值，真正圓周率的值會介於這兩組數列之間，無法使用分數或小數來記錄，也就是說，圓周率是一個無理數。

### 三、畫圓的工具—圓規

圓規是畫圓的工具，圓規有兩個腳，其中一個腳的腳尖是金屬製成的，另一個腳的腳尖上綁著鉛筆或筆心，當我們張開圓規的兩個腳，固定金屬製成的腳尖，讓綁著鉛筆或筆心的腳尖繞著金屬製成的腳尖轉一圈，就能夠畫出一個圓，而金屬製成腳尖所點出的那一個點就是所畫出圓的圓心，圓規兩個腳尖的距離就是所畫出圓的半徑。

圓規只能畫圓，無法畫出圓區域，但是畫出的圓可以決定一個圓區域。圓規也無法直接畫出一條直線段，圓規只能畫出到圓心的距離等於半徑的點。參考圖 2-4-2，如果要畫出一條和指定線段(例如長  $a$  公分)一樣長的線段，必須先畫出一條直線段  $L$ ，再張開圓規的兩個腳尖，使兩個腳尖的距離和給定的線段一樣長(剛好是  $a$  公分)，以直線段  $L$  的一個端點  $A$  為圓心，畫弧交直線段  $L$  於  $B$  點，則線段  $AB$  的長就是  $a$  公分。

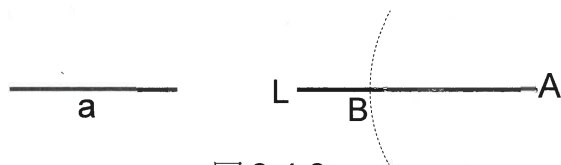


圖 2-4-2

#### 四、扇形

參考圖 2-4-3，扇形是和圓有密切關係的圖形，圓上的一段圓弧以及該圓弧兩端點和圓心連成的兩條半徑所合成的圖形稱為扇形，圓弧大於半圓的扇形稱為優扇形，圓弧小於半圓的扇形稱為劣扇形，半圓也可以視為一種扇形，日常生活中人們只注意小於半圓的劣扇形，本教材主要討論的對象也是劣扇形。

如果一個圖形是由共端點兩條等長的線段夾一段圓弧構成，此圖形並不一定是扇形，只有在以共端點的那一點為圓心，等長線段的長為半徑畫圓，所夾的那一段圓弧剛好是畫出圓的圓周之一部分時，這個圖形才會是一個扇形。當我們將圓錐展開成平面時，其側面的展開圖是一個扇形，這個扇形可能是優扇形，也可能是劣扇形。

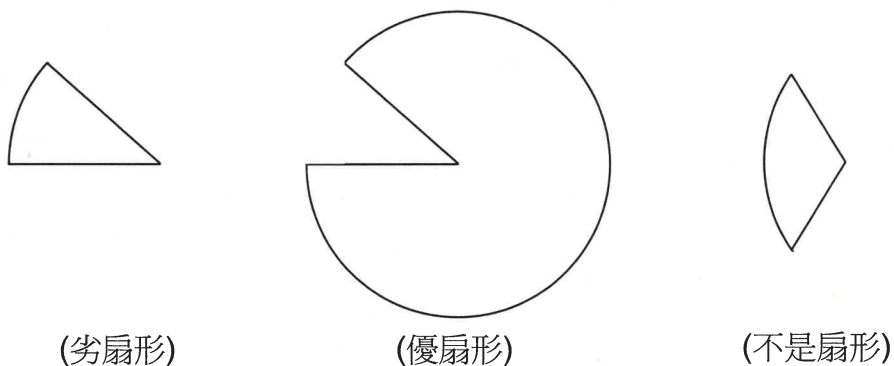


圖 2-4-3

#### 五、扇形的面積

透過圓心將一個圓區域等分割成 360 等份，其中每一等份都是一個全等的扇

形區域，如果將這個扇形區域視為單位扇形面積，單位扇形的面積會是圓面積的  $\frac{1}{360}$ 。如果有上述單位扇形面積的概念，一個扇形的夾角是 30 度時，它的面積就是 30 個單位扇形面積的和，也就是說，夾角 30 度的扇形面積是「(圓面積÷360)×30」或「圓面積× $\frac{30}{360}$ 」，將這種想法一般化，可以得到夾角是 a 度的扇形面積公式「(圓面積÷360)×a」或「圓面積× $\frac{a}{360}$ 」。仿上述引入扇形面積公式的方式，也可以透過單位弧長的概念引入扇形弧長的公式，夾角是 a 度的扇形，其弧長是「(圓周長÷360)×a」或「圓周長× $\frac{a}{360}$ 」。

因為學童對分割圓心角的概念並不成熟，本教材並不引入扇形面積或扇形弧長的公式，因為扇形是分割圓形得到的，因此透過分數概念，教師可以要求學童透過圓面積求出特殊扇形的面積，如下圖 2-4-4，四分之一圓或八分之一圓的扇形面積。

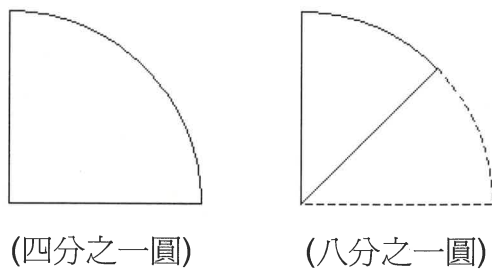


圖 2-4-4

## 六、圓與扇形教學流程說明

表 2-4 是本教材關於圓與扇形的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-4

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	3	透過描繪實物的表面，分辨三角形、長方形、正方形和圓形等形狀。

1	6	4	透過說、讀、聽、做等練習，加強三角形、正方形、長方形和圓形等術語與圖卡、書空、…等的聯結。
1	6	5	透過塗色活動，加深學生對三角形、長方形、正方形和圓形等平面圖形的認識。
1	6	*2	熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。
1	6	*3	能用單一的平面圖形造出圖案，以加深對圓形、三角形的認識。
1	6	*4	(1)熟練辨認長方形、正方形、三角形和圓形。 (2)找出圖形的規律。
1	6	*6	增強辨認顏色、形狀、大小。
7	7	5	(1)復習辨認圓形與非圓形。 (2)透過具體操作活動，認識圓周、圓心、半徑和直徑。
7	7	6	(1)用圓規畫圓。 (2)透過用圓規畫圓的活動，加深了解圓周、圓心和半徑。
10	3	1	將圓周率的近似值暫定為 3 倍多，從直徑算出圓周長或由圓周長算出直徑。
10	3	2	認識扇形及其構成要素—頂點、邊、圓心角和圓弧。
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。			

在低年級階段，本教材將學童對四邊形的認知定為 **Van Hiele** 的第零層次視覺期，因此在第一冊第六單元，本教材先透過活動 3~5、參考活動 2~4 及 6，幫助學童使用圓形的名詞辨認並描述圖形的形狀，因為圓形比多邊形容易區分，本教材沒有刻意再安排澄清圓形的活動。

中年級開始，本教材將學童對圓的認知定為在 **Van Hiele** 的第一層次分析期，在第七冊第七單元，開始幫助學童認識圓的構成要素，在活動 5 中，先要求學童複習如何辨識圓形和非圓形，在透過具體畫圓的活動，認識圓周、圓心、直徑和半徑。在活動 6 中，要求學童使用畫圓的工具—圓規來畫圓，以加深圓周、圓心、直徑和半徑的概念。

第十冊第三單元，在活動 1 中，本教材引入圓周率的概念，幫助學童發現所

◆國小數學教材分析

有圓的樣子都相同，圓周長大約是直徑長的 3 倍。在活動 2 中，先利用標有圓心的圓形紙卡製作扇形，並進行扇形的命名活動，接著要求學童由一堆圖卡中找出扇形圖卡，並實測這些扇形的邊和圓心角，幫助學童認識扇形的構成要素。

## 第五節 正方體與長方體

### 一、長方體與正方體的分類及命名

本教材對國小幾何教學活動中的分類及命名活動參考了皮亞傑對分類能力的發展所區分的三個階段，讀者可參考本章第二節的說明。

在立體圖形的分類及命名活動裡，會因為學童在不同的階段而有不同的重點，例如：學童在一年級時就已學會將長方體和正方體從圓柱體、錐體與球體中區分開來，但正式的命名是在二年級從紙盒製作的觀點切入；而三年級的構成要素分析也是為五年級的包含關係做準備，亦即認識正方體是長方體的一個特例；到六年級時便可從較高分析層次以圖形組成要素與圖形之間的關係來重新對各種立體圖形做分類活動，此分類並不是區分正方體與長方體的不同，而是在知道長(正)方體是四角柱的一個特例後，可因此與其它立體圖形區分開來，例如：柱體、錐體、球體等。所以本節在討論長方體與正方體的分類及命名活動上，也依此分為三個階段來說明。

#### (一) 視覺性的觀點—第一個階段

立體圖形的標準數學名稱如長方體、正方體、柱體、錐體與球體均為溝通方便而逐漸形成。而一般一年級及其之前的學童在未使用這些標準數學名稱時，也能夠以日常生活上的語言來溝通常見的立體實物，例如：像盒子、箱子、罐頭、櫃子等，或用尖尖的、三角形的、圓圓的，或像球的形狀等詞彙來描述。所以關於立體圖形的分類在兒童早期就可以透過此種語言來描述、溝通。本教材先透過積木及實物的造形活動，讓學童經驗平面與非平面的區別，再運用學生的語詞，讓學生辨認各種立體圖形，也讓學童加強以觸覺來辨認像長方體、圓柱體、球體、圓錐體等積木或實物，或透過黏土等來仿製球、盒子、圓柱、圓錐等實物。

本教材在學童二年級時，才正式以數學標準名稱來命名長方體與正方體，強調在長方體與正方體的立體物中，如果各面皆是正方形的立體物則稱為正方體，而有長方形的面時，則稱為長方體，所以有的長方體中也有幾個面是正方形，但只要有一個面以上是長方形就稱為長方體。同時本教材認為此時學童可以僅憑視

覺判斷而無需實際操作，即可認知長方體或正方體可緊密地堆疊在一起，而圓柱體、錐體和球體則都不行，但學童此時無法以構成長方體的要素，如各面需互相垂直的性質，來說明其能緊密堆疊在一起的理由，以區別長方體或正方體與其它立體圖形的不同。

## (二) 功能性的觀點—第二個階段

這個階段的重點是學童透過圖形的構成要素將幾何圖形分類，但暫時不強調以構成要素間的關係來討論各圖形集合間的包含關係。所以在三年級時，本教材透過製作紙盒的活動，重新認識由 6 個全等的正方形所組成的紙盒是正方體，而由 3 組相對而全等的長方形所組成的紙盒是長方體。也透過骨架的製作知道正方體由 12 條相等的邊所組成，而長方體是由 3 組邊，各組為 4 條相等的邊所組成。

從定義的觀點，正方體也是長方體的一種，此種包含關係在此階段雖然暫不強調，但本教材建議在此階段和小朋友溝通時，除了必須特別提出正方體加以討論的時候，在使用長方體的名詞時，皆包括正方體，但教學時仍以區分長方體與正方體為原則，例如：透過描述與觀察正方體與長方體紙盒，能知道正方體有 6 個全等的面、12 條等長的邊、8 個頂點；而長方體有 3 對全等的面、3 組等長的邊、8 個頂點。

## (三) 關係性的觀點—第三個階段

此階段強調幾何圖形所成集合與集合間的包含關係，可以從不同的觀點進行分類。本教材在五年級時，是以長方體與正方體來說，討論線與線的平行或垂直關係、面與面的平行或垂直關係、線與面的平行或垂直關係等，這些構成要素的關係，均無法用以區分長方體與正方體，不若三角形可以用三個角的大小關係區分出銳角、直角或鈍角三角形。所以本教材在五年級雖然討論了正方體與長方體上構成要素間的關係，但並不是用來區分正方體與長方體的不同，而是用作為討論垂直與平行這兩個重要的幾何性質的材料，也說明正方體是長方體的一種包含關係的理由，例如：讓學童先在一個長(正)方體中找出和指定邊互相垂或平行的其他邊，再討論長方體上邊和面的垂直現象，然後才討論長方體上相鄰的面互相垂直的現象，及長方體上相對的面互相平行的現象。關於垂直與平行的討論，讀者可參考本章第八節，而長(正)方體上的垂直與平行在本節討論。

本教材預估高年級階段的學童，其幾何思考能力大都已進入 Van Hiele 的分析層次，所以在五年級探討過長方體及正方體的結構關係後，到六年級在探討角柱的結構時，除了仿照了分析長方體結構的模式外，也引導學童認識長方體與正方體也是特殊的四角柱的包含關係。

## 二、長方體與正方體的定義

在前面討論長方體與正方體的分類及命名活動裡，我們可以看出，本教材在定義一個幾何物件時是逐步加深加廣的，一方面顧及兒童的語彙，一方面也顧及兒童的認知經驗。而下面我們討論長方體與正方體的定義時，則是比較由數學知識的觀點提出，特別是本教材認為學童在小學階段能掌握的幾何知識。

按數學的定義，一個六面體，若有三對互相平行的面構成的封閉圖形，且各面均為長方形，即稱為長方體，這個說法係由本教材在第六冊讓學童由紙盒製作的觀點而來，這樣的長方體是不含其內部的空心長方體，而第四冊用於體積教學前置教學的堆疊活動中，所使用的積木為強調實心的長方體，本節因為是在空間中討論立體圖形，故所討論的長方體均為強調空心的長方體，所以在第六冊中，討論對一個長方體而言，其上相對的面都是全等的長方形，故有 3 對全等的長方形、3 組等長的邊及 8 個頂點。進一步地，討論構成長方體要素間關係的分析，如相鄰的兩邊互相垂直，同一平面上不相鄰的兩邊互相平行，這平行的性質極易由「同時垂直於另一邊」而得知。

本教材在第九冊時，討論長方體上相鄰的兩面互相垂直，而不相鄰的兩面則互相平行，這平行的性質是由「垂直一面的直線，若也垂直另一面，則此兩平面互相平行」而得知，例如：在第十冊時，是先在空間中利用桌子有桌腳在地面與桌面間的現象，指出桌面與桌腳互相垂直，桌腳與地面也互相垂，則稱桌面與地面互相平行，然後才在長方體上討論面的垂直關係。但是在長(正)方體上，不在同一平面上不相鄰的兩邊的垂直關係，則需透過另一邊與其所在的面來討論其垂直關係，本教材並不討論。

如果從柱體的角度來觀察長方體或正方體，它們亦為四角柱的一種，亦即在空間中有兩個全等且互相平行的長方形或正方形，連接這兩個平面區域周界對應

的所有直線段，若均垂直於此兩平面，如此形成的集合稱為長方體或正方體，此時兩個全等且互相平行的長方形或正方形稱為底，另外的四個面稱為側面，同時垂直於兩底的線段則稱為高，例如：先介紹柱體是可以擺成從上到下的粗細都一樣，它的上面和下面這兩個面全等而且互相平行，然後再以長方體構成要素及其要素間的關係等性質重新討論角柱。關於柱體的說明，讀者可參考本章第七節。

另外，一個六面體，若有三對互相平行的面構成的封閉圖形，各面均為正方形，即稱為正方體。因此，從分類上來看，正方體是眾多長方體的一個特例，亦即正方體也是長方體的一種，所以一般我們討論長方體時是包含了正方體，不過也由於正方體在長方體中的特殊性，在溝通上我們有時也區分正方體與長方體的不同，例如：本教材在三年級時建議老師除了必須特別提出正方體加以討論外，在使用長方體的名詞時，皆包括正方體，但老師在和學生溝通時，則仍以區分長方體與正方體為原則。而對一個正方體而言，其上的面都是全等的正方形，故有 6 個全等的正方形、12 條等長的邊及 8 個頂點。

### 三、長方體與正方體的視圖、展開圖、骨架及透視圖

本教材除了透過一般日常生活常見的實物與學童溝通立體圖形外，也由於立體形體經常必須繪製於平面紙張上，所以在低年級開始就透過在平面上所表示的立體圖案，例如：用平面立體圖卡與學童溝通它們實際所表示的立體圖形。本教材在溝通這類圖卡時所用的名稱有視圖、展開圖、透視圖等，除視圖外，「透視圖與展開圖二個名稱均在第六冊藉分析長方體與正方體的構成要素時，有較正式的命名活動，以利於日後方便與學生溝通時用。

由於在中年級，本課程預估學童可以進入 **Van Hiele** 所謂的第一層次—分析期，所以在中年級為了幫助學童發展對長方體與正方體的構成要素分析，除了介紹透視圖與展開圖外，也引入了所謂的「骨架」來討論長方體與正方體的構成要素。

#### (一) 視圖

本教材在二年級下學期第六單元引入了視圖，但不必與學童介紹何謂「視圖」。本教材所謂的視圖不強調要遵守投影幾何條件的透視畫法，或出現在工程製

圖學的線條圖，而是比較強調所表達的立體圖形，例如：長方體或正方體的各面是正方形或長方形，但又需遷就於人在注視此類立體圖時必須有的透視感覺，故稱為視圖。

這類視圖在教材呈現時，比較強調邊的等長與平行，且正面需為正方形或長方形，故無透視畫法上所謂的遠視點，如下圖 2-5-1。

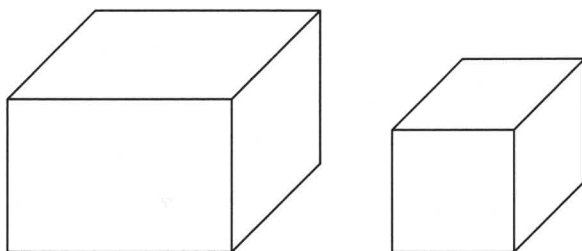


圖 2-5-1

## (二) 展開圖

本教材展開圖的引入是在三年級下學期第六冊中，讓學童在製作紙盒時，由先準備好的正方形圖卡製作成正方體紙盒，並討論其構成要素後，再讓學童將紙盒沿著一些邊將相鄰的面剪開，使它能攤平地放在桌面上，而且整塊仍然連成一整片，如此命名所謂的「展開圖」。

## (三) 骨架

本教材骨架的引入也是在三年級下學期第六冊中，透過描述「由一堆竹籤組成一長(正)方體燈籠骨架」的活動，討論正方體的頂點與邊的構成要素，並直接使用「骨架」一詞溝通。

## (四) 透視圖

在視圖上以虛線描出長方體所有看不見的邊即為透視圖。因為視圖特別強調邊的等長與平行，且正面需為正方形或長方形，所以在描繪時，只要從頂點做出與同組的其他邊的平行線至公共頂點即可由視圖獲得透視圖，如下圖 2-5-2。

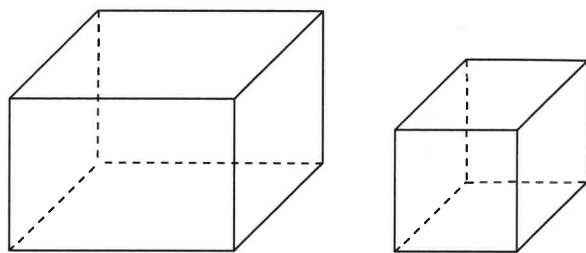


圖 2-5-2

由於中年級學童尚未學習「過給定一點作直線平行於另一線」的平行線畫法，故在三年級時，本教材採取將長方體的視圖上事先加上第八個頂點，再讓學童練習描繪，例如：讓學童將長方體和正方體的骨架與視圖對照後，再把視圖上所缺的三條邊以虛線補上而獲得透視圖，並命名為「透視圖」做為日後溝通之用。

#### 四、長方體與正方體上的垂直與平行關係

本教材在三年級下學期與四年級上學期在平面圖形的教材裡引入垂直與平行關係，例如：在第六、七冊討論垂直與平行關係時，所有直線皆假定位於同一平面上，讀者可參考本章第八節。

但在五年級上學期所討論的垂直與平行關係，則進一步擴充於立體圖形上，例如：在長(正)方體上，有 12 條邊係位於 6 個平面上。故本節僅就長(正)方體上的垂直與平行關係分別說明，而涉及空間中的垂直與平行關係的內容則與本章第八節相同。

##### (一) 長(正)方體上的垂直關係

###### 1. 邊與邊的垂直

長(正)方體各邊的垂直關係，本教材在五年級討論時皆以處在同一面上的直線(邊)為原則。故本教材在第九冊中，利用長方體各面均為長方形的事實，即可讓學童推得長方體各邊的垂直關係，希望學生能藉此練習簡單推理，但也接受學生使用三角板來檢查。

至於不在同一平面上的不相交兩直線，本教材暫不談論其垂直與否的關係。

###### 2. 邊與面的垂直

空間中，若一直線與平面相交且與該平面上過此交點之直線均垂直，則此一

直線垂直於一平面，本教材以此為定義。若一直線與平面相交，而平面上有相異兩條直線過此交點，且與此直線垂直，則此直線必垂直於平面上其他過此交點之直線，故按前述定義即此直線與該平面垂直，此為定理，例如：本教材第九冊中，先讓學童認識空間中相交的兩直線可決定一平面，接著定義一直線與一平面垂直的意義後，再讓學童檢驗一直線若與平面上過垂足的相異兩直線垂直，則該直線即垂直此一平面，最後才討論長方體上邊和面的垂直現象。關於空間中的直線與平面的垂直關係的討論，讀者可參考本章第八節。

此處需注意的是在五年級上學期以前，是以先有一平面後，才在此平面上取相交的兩直線度量其角度，本教材在第九冊討論空間中的直線垂直於平面時，是先有空間中相交兩直線來決定一平面的，意即希望能讓學童了解會有一個平面包含此相交的二直線。所以本教材建議教師宜區分定義層面與定理層面的教學的不同與前後關係。

### 3. 平面與平面的垂直

本教材在第十冊，利用直線垂直於平面的認識，來進行平面垂直於平面的關係討論，例如：本教材是在第七冊先從生活中看到的牆壁或圍牆垂直於地面的現象開始。接著，用三角板的一邊固定在紙板上，另一邊在桌面上轉動(轉幅在 30 度至 60 度之間即可)，顯示紙板垂直於桌面。然後再探討長方體的面與其相鄰面的垂直關係。接著再觀察三角柱體的某些相鄰的側面做為反例。

## (二) 長(正)方體上的平行關係

### 1. 邊與邊的平行關係

在長(正)方體上，互相平行的邊有三組，一組共四條。對一組中任一條而言，有另外兩條會分別與此邊同在長方體的一面上，其平行性質極易由「同時垂直於另一邊」而得，所以本教材主要是利用長方體各面均為長方形的事實，來討論長(正)方體上互相平行的邊。所以雖然在平面上，兩直線若同時垂直於第三直線，則此兩直線互相平行，此事學生可以透過平行的定義來了解，但是此結果不適用於討論長方體上不在同一平面的邊，所以本教材在高年級所討論的平行關係，皆以處在同一面上的線為限，例如：本教材是在第九冊討論一個長(正)方體上邊與邊的平行關係時，是先復習平面上同時垂直於一直線的兩線互相平行，接著討論長方

形上對邊的平行關係，再讓學童於長方體上找出和指定邊互相平行的其他邊。

但有一邊與此邊相對，卻無法同在長方體上的同一面上，本教材利用它來進行非形式演繹的教學，因為本課程認為由於高年級階段的學童的幾何思考能力大都已经進入 Van Hiele 的分析層次，同時也是學童由分析層次進入關係期(或非形式演繹期)的過渡時期，所以暫不強調幾何推理上所謂定義與定理的區分來系統地討論構成要素間關係的推演，但是在教學時仍然可以選擇某一構成要素間的關係，將它當成優先的定義，再試著讓學生覺察驗證另一構成要素間的關係，例如：本教材在第九冊，利用打開盒子或將長方體切成全等的兩個三角柱的方式，讓學生驗證討論原本看不出在同一平面上的另一條邊亦與討論中的邊相互平行的關係。

## 2. 平面與平面的平行

關於平面平行於平面，學童在四年級時，即認識到平面上兩直線互相平行的意義為兩直線同時垂於第三條直線。而空間中兩平面互相平行的條件也完全一樣，即兩平面同時垂直於一條直線，要說同時垂直於第三個平面也可以，例如：本教材在第十冊讓學童討論兩個牆壁或櫥櫃相對兩面的平行現象後，再討論長方體上相對兩邊互相平行的現象。

## 3. 邊與面的平行

直線平行於平面的定義，本教材是採取一直線及一平面同時垂直於另一條直線，要說成同時垂直於另一個平面也可以，例如：本教材在第十冊是藉由觀察單槓和地面平行的現象，讓學童認識直線和面互相平行的意義，再討論長方體上邊與面的平行關係。

## 五、長方體與正方體教學流程說明

表 2-5 是本教材關於長方體與正方體的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-5

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	1	透過積木及實物的造形活動，經驗平面和非平面的區別。
1	6	2	透過實物並運用學生的語詞，辨認球、圓錐、圓柱、長方體和正方體等圖形。
1	6	*1	(1)從觸摸中感覺物件的特色，如平平的、尖尖的、圓圓的、...。 (2)增強辨認長方體、圓柱體、球體、圓錐體等。
1	6	*5	複製球、盒子、圓柱、圓錐。
4	6	1	運用學生的語詞，進行正方體和長方體的命名活動。
4	6	2	將實物與平面立體圖對照，使學生能從平面立體圖認出實物。
4	6	3	透過說、讀、聽等練習，加強實物與平面立體圖的聯結。
4	6	4	學生用自己的話來描述造形的過程和想法。
4	6	5	仿造一個實心的正方體或長方體，其大小和事先準備的實物一樣。
4	6	6	用數量一定、形狀及大小相同的數學積木，堆積成各種可能的長方體或正方體。
4	6	*1	透過說、讀、聽等練習，加強實物與平面立體圖的聯結。
6	7	1	透過描述「由一堆正方形圖卡拼湊以圍成一正方體紙盒」的活動過程，在討論中凸顯正方體有 6 個面。
6	7	2	透過描述「由一堆長方形圖卡拼湊以圍成一長方體紙盒」的活動過程，在討論中凸顯長方體有 6 個面，12 條邊。
6	7	3	透過描述「由一堆竹籤組成一個正方體燈籠骨架」的活動過程，在討論中凸顯正方體有 8 個頂點，12 條邊。
6	7	4	透過描述「由一堆竹籤組成一個長方體燈籠骨架」的活動過程，在討論中凸顯長方體有 8 個頂點，12 條邊。
6	7	5	透過觀察正方體和長方體，經驗正方體有 6 個全等的面、12 條等長的邊、8 個頂點，長方體有 3 對全等的面、3 組等長的邊、8 個頂點。

6	7	6	透過將長方體和正方體的骨架與視圖對照的活動，在視圖中補上三條虛線得到透視圖。
9	15	1	在一個長(正)方體中找出和指定邊互相垂直的其他邊。
9	15	2	在一個長(正)方體中找出和指定邊互相平行的其他邊。
9	15	3	(1)認識空間中相交兩直線決定一平面，且可直接度量此相交兩直線所形成的角之大小。 (2)認識一直線與一平面垂直的意義。 (3)經驗一直線若與平面上兩直線垂直，即垂直於此平面。 (4)討論長方體上邊和面的垂直現象。
10	7	2	由觀察牆壁和地面(或櫥櫃相鄰兩面)的垂直現象，認識兩平面互相垂直的意義，並討論長方體上相鄰的面互相垂直的現象。
10	7	3	由觀察相對的兩個牆壁(或櫥櫃相對兩面)的平行現象，認識兩平面互相平行的意義，並討論長方體上相對的面互相平行的現象。
10	7	4	由觀察單槓和地面的平行現象，認識線和面互相平行的意義，並討論長方體上邊和面的平行現象。
11	11	1	透過由一堆立體中找出像柱子的立體的活動，認識柱體。
11	11	3	透過觀察角柱的立體模型，知道角柱頂點、邊和面的個數、底面全等、側面為長方形、側邊一樣長且垂直於底面、底面互相平行、側邊互相平行。
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。			

在低年級階段，本教材將學童對長方體與正方體的認知定位在 Van Hiele 的第零層次視覺期，所在第一冊第六單元活動 1、2 及參考活動 1、5 中，透過實物或積木，先以學童自然的語彙來進行辨識與簡單的分類活動。在第四冊第六單元活動 1~6 及參考活動 1 中，才對長方體與正方體進行正式的命名活動，一方面加強在平面立體圖中辨識各類立體圖形，一方面也對體積的教學進行了前置的堆疊活動，初步經驗了長(正)方體可緊密地做無空隙的堆疊，關於體積的教材說明，讀者可參考本叢書《體積和角度》一書。

中年級時，本教材將學童對長方體與正方體的認知定位在 Van Hiele 的第一

層次分析期。故在第六冊第七單元的活動 1~6 中，利用紙盒、骨架及視圖、透視圖、展開圖等與學童討論長方體與正方體的構成要素，並協助學童在平面紙張上描繪透視圖。

高年級時，本教材開始探討構成要素之間的關係，為由 Van Hiele 的第一層次分析期到第二層次關係期的過渡期，所以在第九冊第 15 單元活動 1~3 中，討論了長方體上邊與面的垂直與平行的關係，特別在活動 3 中，建議教師區分教學活動中定義與定理不同層面的處理，讓學童初步嘗試幾何推理。在第十冊第七單元活動 2、3 中，則藉由觀察牆壁和地面的垂直與平行的現象，認識平面互相垂直或平行關係的意義，在活動 4 中則藉單槓和地面的平行現象，認識線和面互相平行的意義，並討論長方體上邊和面的平行現象。在第十一冊第十一單元活動 1 與 3 中，在學童初步認識角柱含長方體後，再藉由長方體的構成要素及其關係來探討一般角柱，讓學童以構成要素的觀點來對立體圖形進行分類活動。

## 第六節 球

### 一、球

在空間上選定一定點  $O$ ，在空間中與定點  $O$  的距離是  $r(r > 0)$  的所有點所成的集合稱為球，該定點  $O$  稱為球心， $r$  稱為半徑，半徑的 2 倍稱為直徑。球把空間區分成三個部分：球的內部、球(周界)和球的外部，球和球的內部稱為球體，請注意，球心並不在球上面。

在數學上，球是不包含內部的，英文稱之為球面(sphere)，若要強調球體(球和球內部的聯集)，英文稱之為 Ball(球體)，相同的，圓也不包括內部，英文稱之為 circle(圓圈)，若要強調圓區域(圓和圓內部的聯集)，英文稱之為 disc(圓區域)。

在中文的日常用語中，這是圓的，可以指包含內部的圓區域，也可以指不包含內部的圓。相同的，這是球形(或球體)的，可以指包含內部的球，也可以指不包含內部的球，造成這種不加分辨的原因，可能與物體為實心或空心，常常是很明顯的，要不然就是很不容易判斷有關。

### 二、球心與球的半徑及直徑

雖然球的定義和圓的定義相同，都是與定點  $O$  的距離是  $r$  的所有點所成的集合，但是圓是一個平面圖形，當我們固定繩子的一端，並在另一端綁上鉛筆，很容易的可以畫出一個圓，並具體的看到圓心，雖然在畫出的圓中看不到半徑，但是可以透過連接圓心和圓上任意點的方式畫出半徑長，因此引入圓心、半徑及直徑的意義沒有困難。

在空間中無法透過球的定義畫出一個球，在空間中要造出一個球或球體，也相當的困難，因為無法確定造出來的立體是一個球或球體，而且不論使用吹泡泡、搓黏土或其它方法造球，都無法看到球心，因此無法連絡球面、球心和半徑及直徑的關係。就是給學童一個籃球，也無法看到球心及半徑，基於上述原因，再加上課程標準並沒有要求一定要討論球心與半徑，因此本教材選擇可以操作的「球的截面為圓」的現象，幫助學童檢查立體是否為球，引入球的初步概念。

任意的平面與球相截，其截痕一定是一個圓，反之，若有一個空間的封閉圖形不是球，則必可找到一個截面，而此截面不是圓。本教材透過上述性質引入球的概念，只是提供學童一種檢驗立體是否為球或球體的方法，本教材並不要求學童理解上述性質，也就是說，本教材不要求學童推論，如果有一個截面不是圓，這個立體就不是球，如果從不同方向切出來的截面都是圓，這個立體就是球體。本教材要求學童先直觀的判斷某一個立體不是球形，並察覺如果這一個立體不是球，那麼一定可以找到一個截面不是圓形，如果這一個立體是球，那麼不同方向切割出來的截面都是圓。

學童從小就有滾動皮球或其它立體的經驗，知道籃球或其它球形立體在平面上往任意方向滾動，其滾動的方式是一致的，不會改變，而橄欖球(或其它非球形立體)在平面上往任意方向滾動，其滾動的方式不一致，隨時會改變運動方式。依據上述經驗，學童也可以透過滾動立體的方式，判斷這一個立體是否為球。

### 三、球的教學流程說明

表 2-6 是本教材關於球的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-6

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	2	透過實物並運用學生的語詞，辨認球、圓錐、圓柱、長方體和正方體等圖形。
8	8	1	從日常生活中找出球體的物品。
8	8	2	察覺球體的截面都是圓形，並認識半球體。

在低年級階段，本教材將學童對四邊形的認知定位在 **Van Hiele** 的第零層次視覺期，因此在第一冊第六單元，本教材先透過活動 2，幫助學童使用球或球形名詞辨認並描述圖形的形狀。

中年級開始，本教材將學童對球的認知定為在 **Van-Hieie** 的第一層次分析期，在第八冊第八單元，開始幫助學童認識球，在活動 1 中，先要求學童找出日常生活中常用的球形用品；活動 2 中，再要求學童先直觀的判斷某一個立體不是球形，

◆國小數學教材分析

並察覺如果這一個立體不是球，那麼一定可以找到一個截面不是圓形，如果這一個立體是球，那麼不同方向切割出來的截面都是圓。本教材並沒有引入球心及半徑的概念。

## 第七節 柱體與錐體

### 一、柱體

空間中兩個全等且互相平行的封閉平面區域，以及在全等關係下，連接這兩個平面區域周界對應點的所有直線段，它們所成的集合稱為柱體。其中兩個全等且平行的封閉平面區域，稱為柱體的底，一般依擺放位置可以區分為上底與下底；底以外的其餘表面，稱為柱體的側面。同時垂直於兩個底面的線段，稱為柱體的高，而高的長度，一般也簡稱為柱體的高，上、下兩個底面的距離就是柱體的高。柱體一般以其兩個底面的形狀來命名，如果其底面是多邊形區域，則稱為角柱，如果其底面是圓區域，則稱為圓柱。下圖中圖 2-7-1 到圖 2-7-7 是七種不同的柱體。

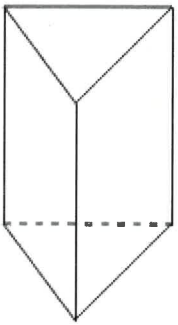
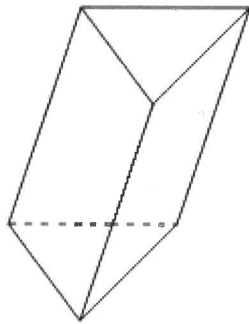


圖 2-7-1



(斜角柱)

圖 2-7-2

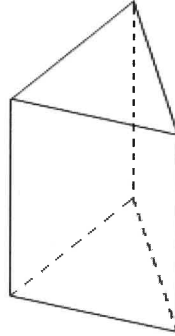


圖 2-7-3

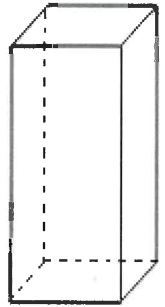


圖 2-7-4

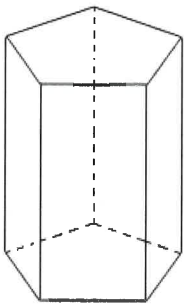
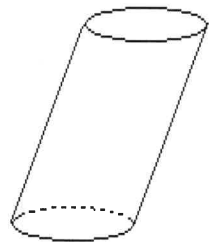


圖 2-7-5



圖 2-7-6



(斜圓柱)

圖 2-7-7

## (一) 角柱

隨著角柱底面形狀的不同，可以分別給予柱體不同的名稱以利區別，例如：底面是三角形區域的柱體稱為三角柱，底面是四邊形區域的柱體稱為四角柱，底面是五邊形區域的柱體稱為五角柱…，以此類推。而上圖中圖 2-7-1、圖 2-7-2、圖 2-7-3 都是三角柱，圖 2-7-1 中三角柱的側面是長方形區域，而圖 2-7-2 中三角柱的側面是平行四邊形區域，如果角柱的側面是長方形區域，一般稱為直角柱，直角柱側面有兩個邊和兩個底面都垂直，如果角柱的側面是平行四邊形區域，一般稱為斜角柱，斜角柱側面的邊和上下兩個底面都不會垂直，當直角柱的底面是正多邊形區域時，一般稱為正角柱，圖 2-7-3 是正三角柱，圖 2-7-4 是正四角柱，圖 2-7-5 是正五角柱。在國小階段討論的對象都是直角柱，並不討論斜角柱，因此本教材將直角柱稱為角柱。

「上、下兩個底面是全等的多邊形區域」，「上、下兩個底的周界所對應的邊互相平行」，「上、下兩個底面互相平行」，「側面都是長方形區域」，「側面的邊的長度都等長」，「側面的邊，分別垂直於上、下兩個底面」，「側面的邊都互相平行」，上述這些性質都是直角柱的特徵，當學童進行完直角柱的各種活動後，應該要察覺到這些性質。

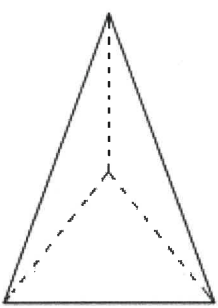
## (二) 圓柱

底為圓區域的柱體稱為圓柱。和角柱一樣，圓柱也可以區分為直圓柱和斜圓柱兩類，圖 2-7-6 是直圓柱，圖 2-7-7 是斜圓柱，直圓柱上、下兩個底面圓心的連線垂直於兩個底面，而斜圓柱上、下兩個底面圓心的連線和兩個底面都不垂直。國小階段討論的對象都是直圓柱，並不討論斜圓柱，因此本教材將直圓柱稱為圓柱。

「上、下兩個底面是全等的圓區域」，「上、下兩個底面互相平行」，「上、下兩個底面圓心的連線垂直於兩個底面」，「側面上，同時垂直於上、下兩個底面的線段都等長」，上述這些性質都是直圓柱的特徵，當學童進行完圓柱的各種活動後，應該要察覺到這些性質。

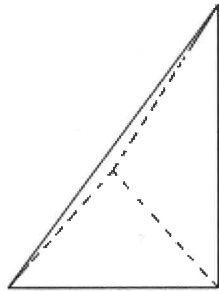
## 二、錐體

在空間中，給定一個封閉的平面區域，以及不在此平面區域上的一個點，則連接此給定的點與平面區域周界上任意點的所有直線段所成的集合，稱為錐體。決定此錐體的平面圖形稱為錐體的底，底面外的那一個給定點，稱為錐體的頂點，底面以外的錐體表面，稱為錐體的側面。錐體頂點到底面的距離，或由頂點垂直於底面的線段都稱為錐體的高。錐體一般以其底面的形狀來命名，如果其底面是多邊形區域，則稱之為角錐，如果其底面是圓區域，則稱之為圓錐。下圖中圖 2-7-8 到圖 2-7-14 是七種不同的錐體。



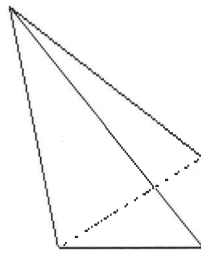
(底面是正三角形區域的正三角錐)

圖 2-7-8



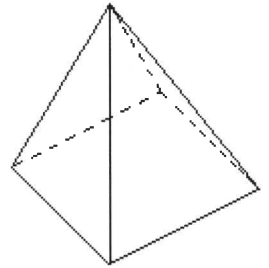
(底面是正三角形區域的斜三角錐)

圖 2-7-9



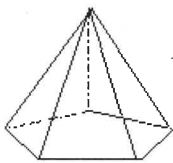
(底面不是正三角形區域的斜三角錐)

圖 2-7-10



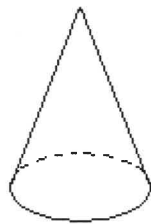
(正四角錐)

圖 2-7-11



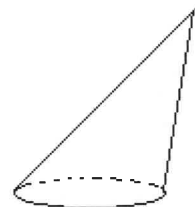
(正五角錐)

圖 2-7-12



(直圓錐)

圖 2-7-13



(斜圓錐)

圖 2-7-14

### (一) 角錐

隨著角錐底面形狀的不同，分別給予錐體不同的名稱以利區別，例如：底面是三角形區域的錐體稱為三角錐，底面是四邊形區域的錐體稱為四角錐，底面是

五邊形區域的錐體稱為五角錐…，以此類推。而上圖中的圖 2-7-8、圖 2-7-9、圖 2-7-10 都是三角錐，圖 2-7-8 中三角錐的底面是正三角形區域，其側面都是等腰三角形區域，而頂點到底面正三角形外接圓圓心的連線一定會和底面垂直，一般稱這種角錐為正角錐，圖 2-7-9 中三角錐的底面也是正三角形區域，其側面不是等腰三角形區域，而頂點到底面正三角形外接圓圓心的連線不會和底面垂直，圖 2-7-10 中三角錐的底面是三邊都不等長的三角形區域，側面都不是等腰三角形區域。過去國小課程所討論的錐體都是正角錐，其底面都是正多邊形區域，而頂點到底面正多邊形外接圓圓心的連線都會和底面垂直，圖 2-7-11 與圖 2-7-12 都是正角錐，圖 2-7-11 是正四角錐，圖 2-7-12 是正五角錐。

本教材只討論角錐的一般性質，並不刻意的區分正角錐或斜角錐，「錐體的側邊都是三角形」，「錐體的側邊都交於同一點」，上述這些性質都是角錐的特徵，當學童進行完角錐的各種活動後，應該要察覺到這些性質。

一個三角錐有 4 個頂點，其中不在底面上的那一個頂點，是決定錐體的頂點，而底面三角形區域的三個頂點，是形成角錐後產生的頂點，國小學童並不討論角錐是如何產生的，只討論給定的角錐有哪些性質，本教材定義尖尖的點就是角錐的頂點，將這四個點都稱為頂點，也不區分這些頂點不同的意義。

## (二) 圓錐

底面為圓形的錐體稱之為圓錐，和圓柱一樣，圓錐也可以區分為直圓錐和斜圓錐兩類，圖 2-7-13 是直圓錐，圖 2-7-14 是斜圓錐，直圓錐頂點到底面圓心的連線會垂直於底面，而斜圓錐頂點到底面圓心的連線不會垂直於底面，本教材只討論圓錐的一般性質，並不刻意的區分直圓錐或斜圓錐。

## 三、柱體和錐體構成要素的分析

柱體及錐體的構成要素都是頂點、邊和面，生活中的實物構造，屬於標準的柱體或錐體並不多，大部分實物的外貌都是複合結構，有些部分的截面比較大，有些部分配有凹凸的裝飾，數學上的描述都是以實物的理想化情境來考慮。

### (一) 角柱

角柱的構成要素為頂點、邊和面，這些構成要素的個數，分別依其底面的形

狀而不相同，下面列出角柱頂點、邊和面的個數和底邊的邊數間的關係。

- 頂點個數 = 一個底的邊數  $\times 2 = 2n$  ( $n$  角柱)
- 邊的個數 = 一個底的邊數  $\times 3 = 3n$
- 面的個數 = 一個底的邊數  $+ 2 = n + 2$

由上面的式子可以知道， $n$  角柱的頂點個數、邊的個數及面的個數一定會滿足「頂點的個數  $(2n) +$  面的個數  $(n + 2) =$  邊的個數  $(3n) + 2$ 」，數學上稱這個算式為尤拉公式，而尤拉公式對正多面體等立體圖形也成立。

## (二) 角錐

角錐的構成要素也是頂點、邊和面，其個數也和底邊有密切的關係，下面列出角錐頂點、邊和面的個數和底邊的邊數間的關係。

- 頂點數 = 底的邊數  $+ 1 = n + 1$  ( $n$  角錐)
- 邊的個數 = 底的邊數  $\times 2 = 2n$
- 面的個數 = 底的邊數  $+ 1 = n + 1$
- 角錐也滿足尤拉公式「頂點的個數  $(n + 1) +$  面的個數  $(n + 1) =$  邊的個數  $(2n) + 2$ 」。

## (三) 圓柱

決定圓柱的要素為底面的大小，以及兩個底面之間的距離，圓柱的粗細由底面半徑的長短決定，而圓柱的長短或高低由兩個底面的距離決定，因為圓柱底面圓區域的周界是曲線，側面為曲面，因此本教材不討論圓柱頂點、邊和面個數的問題。

## (四) 圓錐

決定圓錐的要素為底面的大小，以及頂點到底面的距離，和圓柱不同的是圓錐有一個頂點，因為圓錐底面圓區域的周界是曲線，側面為曲面，所以本教材也不討論圓錐邊和面個數的問題。

#### 四、柱體和錐體的展開圖

在理論上來說，立體的表面是無法展開的，因為立體只是一個形狀，並沒有厚度，只能透過拓印的方式，依其各面的相關位置，在平面將各個面拓印下來。為了能較具體地呈現立體各面展開的可能相對位置，本教材所討論的立體展開圖，是將立體想像成其內部是空心的，用紙做的模型，可以沿著此模型面的邊緣將其剪開。

剪出角柱和角錐的展開圖時，必須滿足剪開後相連的面保留有共同的邊，每一個面至少保留有一個邊和其它的面相連，所有的面要連結成一整塊，可以攤平成一個平面區域，而且可以再沿著相鄰的邊，摺回成原來的立體等這些條件。角柱和角錐可以有很多的展開方式，圖 2-7-15 和圖 2-7-16，分別是四角柱兩種不同的展開圖。

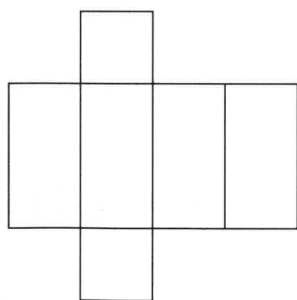


圖 2-7-15

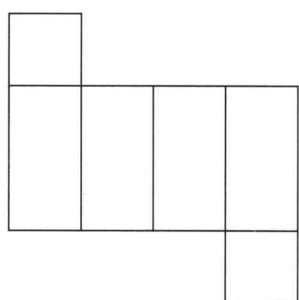


圖 2-7-16

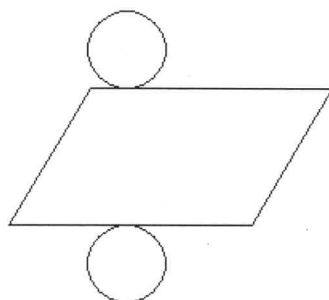


圖 2-7-17

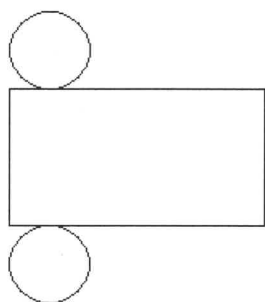


圖 2-7-18

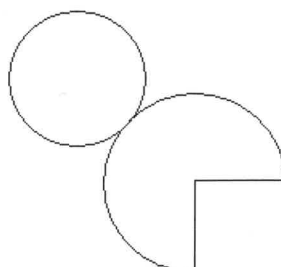


圖 2-7-19

圓柱和圓錐的底面是平面，側面是曲面，而其底部的圓周是曲線，因此圓柱和圓錐展開的方式和角柱與角錐不同。如果要讓展開後整個表面都能平攤在平面上，其底面的周界和側面理論上只能有一個點相連接，無法和角柱與角錐一樣，

保持一個直的邊相連接，圖 2-7-17 和圖 2-7-18 都是一個圓柱的展開圖，它們可以透過下列方式剪出：先將兩個底面沿著圓周剪開，使其分別和側面只保持一個理想化的連接點，再就側面上兩個底的邊緣各選定一個點，將這兩個點連接起來，如果這兩個點的連線和底面的邊緣不垂直，沿著這條線剪出來的展開圖是圖 2-7-17 圓柱的側邊展開成平行四邊形區域。如果這兩個點的連線和底的邊緣垂直，沿著這條線剪出來的展開圖是圖 2-7-18，圓柱側邊展開成長方形區域，習慣上，我們都選擇圖 2-7-18 當做圓錐的展開圖。

圖 2-7-19 是一個圓錐的展開圖，其剪開的方法和圓柱類似，先將底面和側面沿著底的邊緣剪開，使底面和側面只保持一個理想化的連接點，接著在底的邊緣上找一點，將這點和頂點連接起來，沿著這條線就能將側面剪成一個扇形。

直圓錐展開圖中扇形所夾的角度，和直圓錐底面的半徑以及頂點到底面圓周上任意點的距離(簡稱側邊長)有關係，假設一個直圓錐底面的半徑是  $r$ ，側邊的長是  $a$ ，那麼該直圓錐展開圖中的扇形區域，其半徑是  $a$ ，弧長是  $2\pi r$ ，假設該展開圖中扇形的夾角是  $\theta$  度，因為扇形的弧長和以  $a$  為半徑的圓周長滿足「 $2\pi r : 2\pi a = \theta : 360$ 」的關係，因此可以得到「 $\theta = 360 \times r \div a$ 」的結果。

學童不易理解上述公式，因此本教材只要求學童能剪出直圓錐的展開圖，並不要求學童畫出直圓錐的展開圖。如圖 2-7-20，教師畫直圓錐展開圖的時候應該注意，當  $2r = a$  時， $\theta$  會等於 180 度，所畫出的扇形是一個半圓，當  $2r > a$  時， $\theta$  會大於 180 度，所畫出的扇形會是一個優扇形(比半圓大)，當  $2r < a$  時， $\theta$  會小於 180 度，所畫出的扇形才是一個劣扇形。

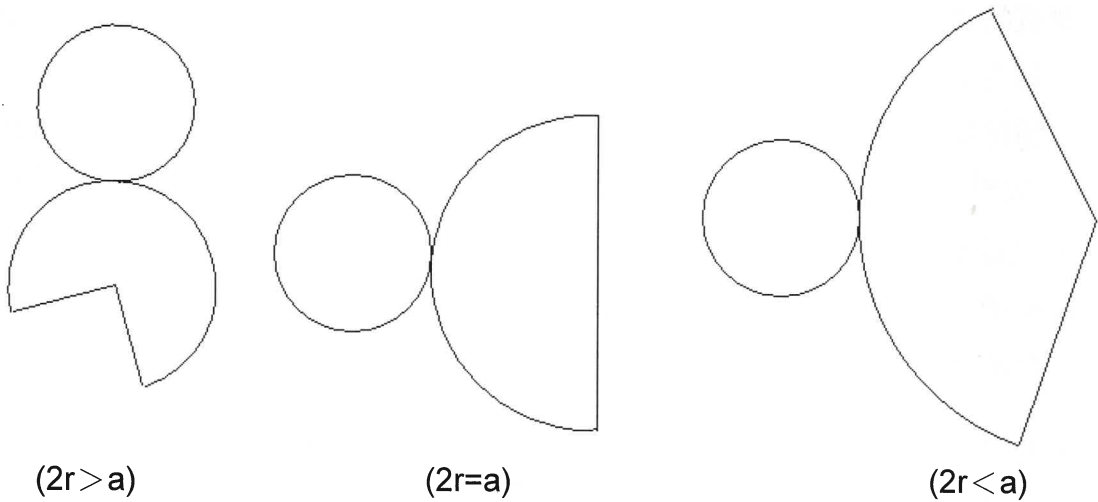


圖 2-7-20

### 五、柱體及錐體教學流程說明

表 2-7 是本教材關於柱體及錐體的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-7

冊別	單元	活動	活動目標
1	6	2	透過實物並運用學生的語詞，辨認球、圓錐、圓柱、長方體和正方體等圖形。
6	7	5	透過觀察正方體和長方體，經驗正方體有 6 個全等的面、12 條等長的邊、8 個頂點，長方體有 3 對全等的面、3 組等長的邊、8 個頂點。
10	7	2	由觀察牆壁和地面(或櫥櫃相鄰兩面)的垂直現象，認識兩平面互相垂直的意義，並討論長方體上相鄰的面互相垂直的現象。
10	7	3	由觀察相對的兩個牆壁(或櫥櫃相對兩面)的平行現象，認識兩平面互相平行的意義，並討論長方體上相對的面互相平行的現象。
10	7	4	由觀察單槓和地面的平行現象，認識線和面互相平行的意義，並討論長方體上邊和面的平行現象。
11	11	1	透過由一堆立體中找出像柱子的立體的活動，認識柱體。
11	11	2	透過由一堆立體中找出像尖頂的立體的活動，認識錐體。

11	11	3	透過觀察角柱的立體模型，知道角柱頂點、邊和面的個數、底面全等、側面為長方形、側邊一樣長且垂直於底面、底面互相平行、側邊互相平行。
11	11	4	透過觀察圓柱的立體模型，知道圓柱底面全等、底面互相平行。
11	11	5	透過觀察角錐的立體模型，知道角錐頂點、邊和面的個數、側面的形狀為三角形和側面共同的頂點為尖頂的性質。

在低年級階段，本教材將學童對柱體和錐體的認知定為在 **Van Hiele** 的第零層次視覺期，因此在第一冊第六單元活動 2，透過實物辨識球、圓錐、圓柱和長方體等圖形，並描述圖形的形狀。

中年級開始，本教材將學童對球的認知定為在 **Van Hiele** 的第一層次分析期，在第六冊第七單元活動 5，開始探討柱體的構成要素，透過觀察正方體和長方體，知道正方體有六個全等的面，十二個等長的邊，長方體有三對全等的面，三組等長的邊，八個頂點。

高年級開始，本教材開始探討構成要素之間的關係，第十冊第七單元活動 2、3、4，分別幫助學童認識長(正)方體上相鄰的面互相垂直的現象，相對的面互相平行的現象，以及邊和面互相平行的現象。第十一冊第十一單元活動 1、2，分別在一堆立體中找出像柱子一樣的立體，以及像尖頂一樣的立體，認識柱體和錐體，活動 3 透過觀察角柱的立體模型，知道角柱頂點、邊和面的個數，以及底面全等，側面為長方形區域，側邊一樣長且垂直於底面，兩底面互相平行，側邊互相平行等性質。活動 4 透過觀察圓柱的立體模型，知道圓柱底面全等，底面互相平行等性質。活動 5 透過觀察角錐的立體模型，知道角錐頂點、邊和面的個數，以及側面為三角形區域，側面的邊都交於同一點的性質。

## 第八節 垂直與平行

### 一、直角的命名

「直角」之名稱得自鉛直方向與水平方向所成之形象。此種形象在生活周遭的物體上隨處可見。數學上，若角以兩邊所指方向差的大小加以分類，角度等於一圓之半徑繞圓心旋轉四分之一圓時，則稱此角為「直角」。因為鉛直、直角與垂直三個用語在表達時，指涉了不同的情境，但三者實則又緊密相關，故本節在討論垂直前，也將直角在本教材中的處理在本節中做討論。另外，關於鉛直，本教材在第七冊第三單元中曾提到，認知心理學家發現，人腦有專責判斷直線傾斜度的神經細胞，所以我們才能判斷水平方向與鉛直方向。其實，不用認知心理學家來說，每個人都可以很自然的判斷自己是否直立站在地面上，也知道傾斜站立時容易跌倒，或在爬坡時感覺地面是斜的，以此觀點來看，鉛直並不難理解與溝通。

本教材在第六冊初步引入直角時是以透過三角板上各角的比較活動直接命名「直角」，再進行各個具有明顯直角特徵的物件上直角之比對，以察覺在不同方位上顯現的直角特徵，例如：從比較三角板的角中命名直角後，再以三角板上的直角比對出書本、書桌、窗戶上的直角所在，再引入了角度的測量工具的使用及報讀活動，知道直角是張開  $90$  度的角。在第六冊引入直角時，並未同時介紹銳角與鈍角等名稱，而是在第八冊中，才藉由與直角的比較來定義銳角與鈍角，強調在三角形的三個角中，比直角大的角是鈍角，比直角小的角是銳角。

透過適當的溝通，一般  $5$  歲的兒童可以在一堆直角與非直角的圖形卡中分辨出直角，這比在一堆非直角的圖卡中加以區別不同的角來得容易。同時在一些直角的圖形中，角的邊是否呈水平或鉛直，在比較方位不同的兩直角是否相等時，觀察者的反應是否敏感會影響他們的判斷，即使學童到  $10$ 、 $11$  歲時，仍然有很多會認為兩者不相等，故本教材建議教師宜注意此現象加強教學。雖然本教材在第六冊也討論平面圖形上的長方形或正方形中有四個直角，但此階段，本教材認為尚不宜以「有四個直角的四邊形都是長方形」做為長方形的正式定義，此部分的討論，讀者可逕行參考本章第二節。

雖然本教材在引入直角前已透過張開扇子的活動及其結果的描繪，例如：在第六冊中，讓學童認識了角的構成要素，但本教材對直角的初步命名活動，仍是先在三角板上做各角的比較活動以辨識直角，例如：透過比較三角板的角認識直角。到第七冊介紹所謂的旋轉角，是一射線繞其端點旋轉一個程度的量後，直角才有旋轉角量的意義。角量的最恰當數學意義是旋轉角量，而非圖形角或張開角。而本課程關於角的義意的引入則分為圖形角、張開角及旋轉角三個不同的階段來逐步豐富角的意義，有關的角不同定義方式的討論，讀者可參考本叢書《體積和角度》一冊。

## 二、垂直的命名

平面上兩相異直線之間的關係，可由兩直線相不相交，及相交後所成的角有多大來描述。相交所成的角有四個部分，合起來為一周角。對頂角相等，鄰角互補。若兩直線不相交，則稱兩直線(互相)平行。若兩直線相交，且其交角中有一個為直角，則其餘三個亦必為直角，此時稱兩直線互相垂直。

關於垂直的命名活動，本教材也是在第六冊引入，例如：讓學童在知道正方形、長方形都有四個直角後，透過複製直角的活動，經驗垂直的意義。此時的垂直意義也類似上節所指出的像直角的初步命名活動一樣，是圖象式的。然而垂直在數學上主要是強調兩相異直線間的關係，所以本教材在第七冊中進一步強調：

1. 垂直是兩直線之間的關係之一。
2. 垂直的名稱，是從所給直線為水平時，另一直線若呈鉛垂狀態，則可與水平線相交成直角而得。
3. 先有乙線垂直於甲線，將圖紙旋轉，亦可看成甲線垂直於乙線後，才有甲乙兩線互相垂直的說法。
4. 在乙線垂直於甲線時，甲線(水平線)先入為主，乙線後來為從。
5. 過指定點做直線垂直於已知直線。

### 三、平面圖形上的垂直和平行

本教材同意認知心理學家的發現，人腦有專責判斷直線的傾斜度的神經細胞，若以此來看平行的關係，則知兩直線平行的認知來自其傾斜度相同，而在操作層面上若有第三條相截直線參照，則其傾斜度的控制，來自與截線交角，因此平行關係也可採用與第三條直線同時垂直的定義，尤其在畫平行線的時候，使用與第三條直線垂直是具體有效的方式之一。另外對兩直線任意延長永不相交的平行定義，因兒童無法每次都準確地延長一直線至隨心所欲的長度，因此雖然知曉延長的意義，對任意延長，永不相交的意義，無法從具體的活動抽象而得，所以本教材採用可具體實施的平行定義，即兩直線若同時垂直於第三直線，則此二直線互相平行。此定義在平面幾何學中，確為可運作的定義，也符合一般的認知與數學內部的結構。

由於本教材採取平行的定義是由垂直而來，所以在第六冊第一次引入平行關係，是藉由討論長方形邊的垂直關係時，以同時垂直同一邊的兩邊，稱為平行的邊，例如：先從四邊形的邊中找出垂直的邊，再從垂直於同一邊的兩個邊經驗平行的意義。而在第七冊則進一步強調：

1. 平行是兩直線間的關係之一。
2. 先有乙線平行於甲線，此時甲線先入為主，乙線後畫為從。再由同時垂直於同一直線來看，亦可說成甲線平行於乙線，所以兩線互相平行。
3. 過指定點做直線平行於已知直線。

### 四、空間中的垂直和平行

本節主要在討論空間中的直線與平面的垂直與平行關係，涉及長方體部分的内容則與第五節相同。

#### (一) 直線垂直於直線

儘管在空間中考慮直線與直線的垂直關係，本教材主要仍然是考慮在空間中同一平面上處理，至於空間中不在同一平面上的兩直線是否有垂直的關係，本教材暫不談論，而長方體上的邊與邊的垂直關係，讀者可參考本章第五節。

## (二) 直線垂直於平面

如圖 2-8-1，設  $M_1$  和  $M_2$  是平面  $E$  上過  $P$  點的兩相異直線。若  $L$  與  $M_1$  和  $M_2$  均垂直，則  $L$  與平面  $E$  垂直。

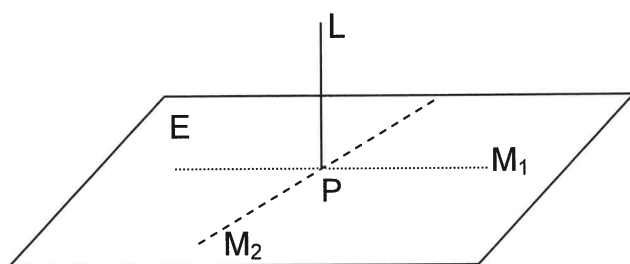


圖 2-8-1

換句話說，若  $L$  與兩相異直線垂直，則  $L$  垂直於此二直線所決定的平面，即此平面上任意過交點  $P$  的直線均與  $L$  垂直。

所以在五年級上學期，我們先讓學童認識到相交兩直線決定唯一的平面，再將此二直線的交角以量角器測量其度數，再以此測量直線交角的方法，用來判定直線是否與一平面上過其垂足的直線均垂直，以此來確定一直線是否與一平面垂直。接著才討論長方體上的邊與面的垂直關係，強調一邊與其相交的面，因為該面所含的另外兩邊皆垂直(因為是長方形)，所以可以判定長方體的邊與其相交的面均垂直，而可以不必再拿三角板來檢查。

另一方面，學童從旗桿、爬竿、電桿、柱等的觀察，或對繫繩立柱的實作中，就可以認識到直線垂直於平面的現象。但是本教材建議教師，可以將直線與平面垂直後固定住，再將整個系統做不同方向的轉動，再與兒童溝通直線仍然垂直於平面的現象。

## (三) 平面垂直於平面

設有平面  $E_1$  和  $E_2$ ，若自  $E_1$  上任意一點  $Q$  向  $E_2$  做垂線，且此垂線完全在  $E_1$  上，則稱  $E_1$  和  $E_2$  垂直，換句話說，若  $E_1$  包含  $E_2$  的某一垂線，則  $E_1$  和  $E_2$  垂直。

本教材在五年級下學期引入平面垂直於平面的活動，例如：利用五上對直線垂直於平面的認識，探討平面垂直於平面的關係。本教材先從生活中看到的牆壁或圍牆垂直於地面的現象開始。接著用三角板的一邊固定在紙板上，另一邊在桌

面上轉動，顯示紙板垂直於桌面。然後再探討長方體的面與其相鄰的面的垂直關係。最後再觀察三角柱的某相鄰的側面做為反例。

#### (四) 平面平行於平面

本教材在兩直線平行關係的處理上，採取以平面上兩直線同時垂直於第三條直線為平行的定義。在空間中討論兩平面互相平行的關係也仿此，即空間中兩平面同時垂直於一直線或一平面時，則此兩平面互相平行。例如：本教材在第十冊中，舉例桌面和地面同時垂直於桌腳後，再討論長方體上相對兩面互相平行的現象。

#### (五) 直線平行於平面

空間中，若一直線與一平面同時垂直於另一條直線或平面時，則此直線平行於該平面，例如：在第十冊中，先藉單槓和地面平行的現象，討論支持橫槓的柱子和地面垂直也和橫槓垂直，再討論長方體上邊與面的平行關係。

### 五、垂直與平行教學流程說明

表 2-8 是本教材關於垂直與平行的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-8

冊別	單元	活動	活動目標
6	9	2	(1)從比較三角板的角認識直角。 (2)認識直角三角形。
6	9	3	(1)知道正方形、長方形都有四個直角。 (2)透過複製直角的活動，經驗垂直的意義。 (3)用紙摺出直角。
6	9	4	(1)從四邊形的邊中，找出垂直的邊。 (2)從垂直於同一個邊的兩個邊，經驗平行的意義。
6	9	5	經驗以量角器做為刻度尺，報讀角的大小。

7	3	1	透過「指定一邊，做出直角另一邊」的方式，察覺垂直的意義。
7	3	2	察覺一線平行於另一直線的意義為同時垂直於第三直線。
8	3	7	(1)認識銳角和鈍角。 (2)使用量角器畫出指定度數的角。
9	15	1	在一個長(正)方體中找出和指定邊互相垂直的其他邊。
9	15	2	在一個長(正)方體中找出和指定邊互相平行的其他邊。
9	15	3	(1)認識空間中相交兩直線決定一平面，且可直接度量此相交兩直線所形成的角之大小。 (2)認識一直線與一平面垂直的意義。 (3)經驗一直線若與平面上兩直線垂直，即垂直於此平面。 (4)討論長方體上邊和面的垂直現象。
10	7	2	由觀察牆壁和地面(或櫥櫃相鄰兩面)的垂直現象，認識兩平面互相垂直的意義，並討論長方體上相鄰的面互相垂直的現象。
10	7	3	由觀察相對的兩個牆壁(或櫥櫃相對兩面)的平行現象，認識兩平面互相平行的意義，並討論長方體上相對的面互相平行的現象。
10	7	4	由觀察單槓和地面的平行現象，認識線和面互相平行的意義，並討論長方體上邊和面的平行現象。

中年級時的垂直與平行關係的教學，主要在平面上處理，在第六冊第九單元活動 2~5 中，先從三角板上認識直角，也知道正方形、長方形上都有四個直角，再藉直角讓學童經驗垂直與平行的意義，特別是在第六冊第九單元活動 5 中讓學童經驗以量角器做為刻度尺，知道三角板中的直角是張開 90 度的角。在第七冊第三單元活動 1~2 中，則讓學童透過「指定一邊，做出直角另一邊」的方式，察覺垂直的意義後，再讓學童察覺一線平行於另一直線的意義為同時垂直於第三直線。在第八冊第三單元活動 7 中，則利用直角區分出三角形中的銳角與鈍角。

高年級則強調在立體圖形與空間中處理垂直與平行關係的教學。在第九冊第十五單元活動 1~2 中，先討論長方體上的垂直與平行的關係，在活動 3 中才討論空間中的垂直關係。在第十冊第七單元活動 2~4 中，討論空間中的平行關係。

## 第九節 全等與對稱

### 一、幾何圖形的基本變換—平移、旋轉、鏡射

對於幾何圖形與幾何圖形關係的認識，近代幾何學家最常使用的方式之一，就是將幾何圖形變換成更適合做幾何探討的另一個圖形，也就是說，當我們想要解決某個幾何圖形相關的問題，但是遇到困難時，可以將該幾何圖形轉換成另一個幾何圖形，使原幾何圖形的困難問題，變成新幾何圖形的簡單問題，於是很容易的解決了新圖形的問題，然後再由所得的結果，逆轉還原成原來問題的結果。一般幾何圖形的基本變換包括平移、旋轉與鏡射。

#### (一) 平移

在平面上透過平行或垂直的移動，使原物件的位置產生移動的現象稱為平移，例如：在圖 2-9-1 中，將三角形向右移動；在圖 2-9-2 中，將長方形向上移動；在圖 2-9-3 中，也可以透過向右及向上移動，讓正方形產生斜角移動。

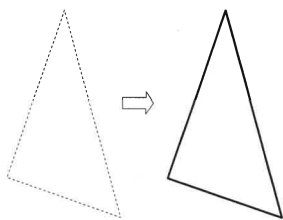


圖 2-9-1

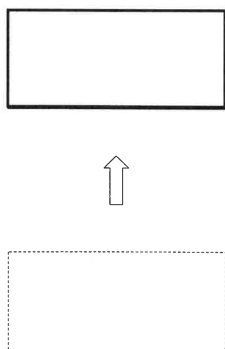


圖 2-9-2

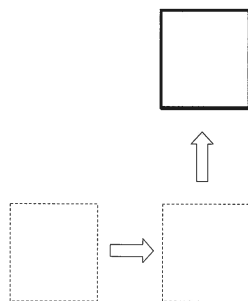
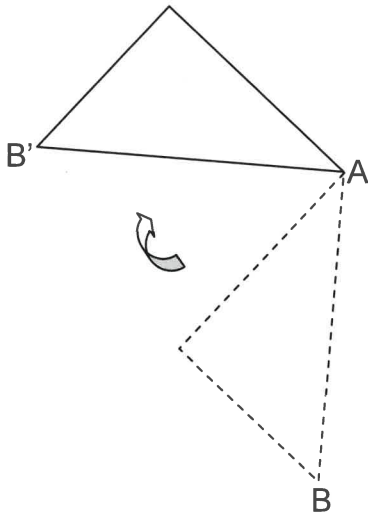


圖 2-9-3

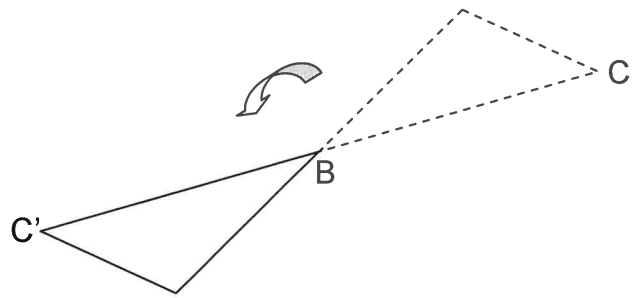
#### (二) 旋轉

在平面上，固定一個點，將圖形依順時針或逆時針方向旋轉，使圖形產生位移的現象稱為旋轉，例如：在圖 2-9-4 中，固定 A 點，以 AB 邊為軸，將三角形順時針旋轉 90 度)；或如圖 2-9-5 中，固定 B 點，以 BC 邊為軸，將三角形逆時針旋轉 180 度。



(順時針旋轉 90 度)

圖 2-9-4



(逆時針旋轉 180 度)

圖 2-9-5

### (三) 鏡射

鏡射為物件的投射活動，在低年級階段，本教材透過摺紙及剪紙活動，幫助學童認識線對稱圖形，或透過將圖形翻轉 180 度，使圖形產生位移，此時圖形並沒有改變，而圖形由正面轉為反面，例如：固定 AB 邊，將三角形翻轉 180 度如圖 2-9-6，這些都是鏡射的啓蒙活動。在高年級，本教材幫助學童澄清線對稱圖形的意義後，透過已知線對稱圖形的一半及對稱軸，要求畫出線對稱圖形另一半的方式，幫助學童察覺將圖形翻轉 180 度的意義。

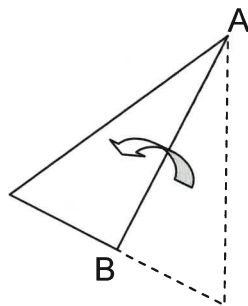


圖 2-9-6

## 二、全等圖形

全等是兩個圖形的一種關係，這種關係是指一個圖形經過平移、旋轉或鏡射

運動後，能與另一個圖形處處密合，也就是這兩個圖形的形狀一樣(相似)，而且面積大小也相等。假如將這兩個圖形上的圖案排除，使之單純化成為抽象的幾何圖形，由幾何學的定義來看，兩個幾何圖形滿足全等的關係，是指其對應邊相等，對應角也相等。本教材在第三冊第八單元，透過疊合的活動，認識全等圖形，第九冊第十一單元，幫助學童發現兩個多邊形全等時，其對應邊相等，對應角也相等。

### 三、對稱圖形

民六十四年國小課程同時引入線對稱圖形及點對稱圖形，其中點對稱圖形的教材，對國小學童而言相當困難，學童常無法理解點對稱圖形的意義，因此八十二年國小課程刪除了點對稱圖形，只留下了線對稱圖形的教材。本教材在實驗階段，爲了與六十四年課程銜接，編寫了點對稱圖形的教材，但是在正式版本中，將它給刪除了，以下所討論的都是線對稱圖形。

#### (一) 線對稱的意義

平面上的圖形，透過平移、旋轉與鏡射，可以得到與原圖形全等的圖形。給定一個平面圖形及一條對稱軸，可以透過線對稱這種鏡射概念，得到另一個全等的圖形。

數學上透過下列方式定義一個點對某一條線(對稱軸)的對稱點，見圖 2-9-7，平面上有一個點 A，一條直線 L，將直線 L 視爲對稱軸，由 A 點向直線 L 做垂直線，交點是 O 點，延長線段 AO，可以在直線 L 的另一側找到一個點 B，使得  $AO = OB$ ，則 B 點稱爲 A 點對直線 L 的對稱點。如果 B 點是 A 點對直線 L 的對稱點，A 點也會是 B 點對直線 L 的對稱點，一般也說 A、B 兩點對稱於直線 L。

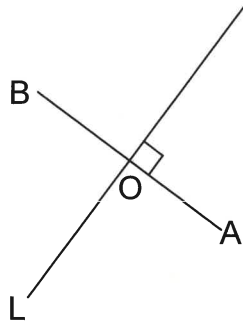


圖 2-9-7

仿定義一個點對某一條線(對稱軸)的對稱點的方式，也可以定義一個平面圖形對某一條線(對稱軸)的對稱圖形。見圖 2-9-8，平面上有一個圖形甲，一條直線  $L$ ，將直線  $L$  視為對稱軸，圖形甲上的每一個點  $P$ ，都可以找到一個對應於直線  $L$  的對稱點  $P'$ ，假設所有  $P'$  點所成的集合是圖形乙，則圖形乙是圖形甲對直線  $L$  的對稱圖形。如果圖形乙是圖形甲對直線  $L$  的對稱圖形，圖形甲也會是圖形乙對直線  $L$  的對稱圖形，一般也說圖形甲、圖形乙兩個圖形對稱於直線  $L$ 。

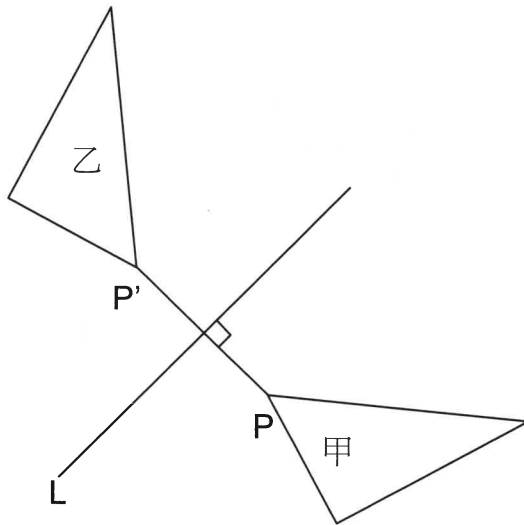


圖 2-9-8

## (二) 線對稱圖形的意義

參考下圖 2-9-9，在求平面圖形丙對直線的對稱圖形時，如果圖形甲對直線  $L$  的對稱圖形剛好是圖形甲本身，數學上稱圖形甲為線對稱圖形，直線  $L$  為線對稱圖形甲的對稱軸。而圖 2-9-10 中，以等腰三角形為例，選定底邊的垂直平分線當

作對稱軸時，等腰三角形對這一條線的對稱圖形是原等腰三角形本身，因此等腰三角形是一個線對稱圖形，而底邊的垂直平分線是等腰三角形的對稱軸。如果該等腰三角形不是正三角形，除了這一條線以外，以其它的線為對稱軸，都不會讓等腰三角形的線對稱圖形是原等腰三角形本身，也就是說，該等腰三角形是只有一條對稱軸的線對稱圖形。

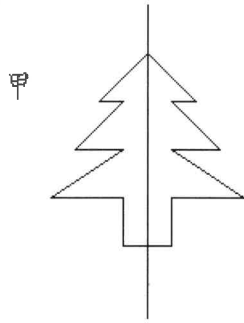


圖 2-9-9

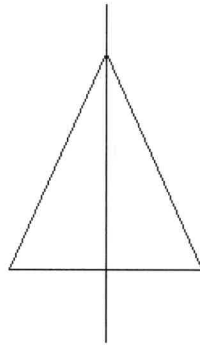


圖 2-9-10

再以一個三邊都不等長的三角形為例，見圖 2-9-11，以任意的直線為對稱軸，都不會讓該三角形與該三角形的對稱圖形重疊，因此該三角形不是線對稱圖形，再以正六邊形為例，見圖 2-9-12，在平面上可以找到六條直線當對稱軸時，正六邊形會與正六邊形的對稱圖形重疊，因此正六邊形是線對稱圖形，而且是有六條對稱軸的線對稱圖形。

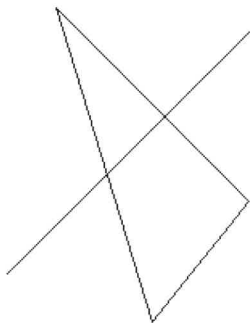


圖 2-9-11

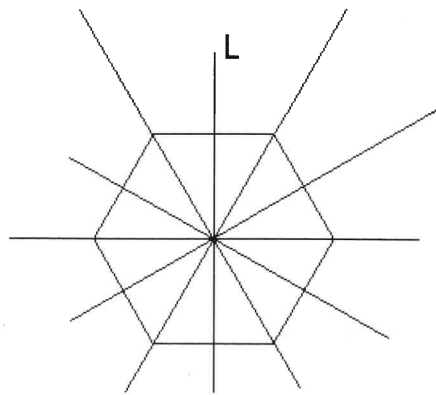


圖 2-9-12

### (三) 國小階段如何引入線對稱圖形

數學上是先定義一個點對一條直線(對稱軸)的對稱點，再定義一個圖形對一條直線(對稱軸)的對稱圖形，最後才透過如果一個圖形對直線  $L$ (對稱軸)的對稱圖形是自己本身的特殊情形，引入線對稱圖形及對稱軸的意義。

國小階段透過上述定義引入線對稱圖形，對學童而言不易掌握，因此本教材透過摺紙或剪紙活動引入線對稱圖形的意義，這是學童可以具體操作檢驗或製作的定義。將一個圖形對摺，被摺線分成的兩個部分如果完全疊合，本教材定義這個圖形是線對稱圖形，並稱摺線是這個線對稱圖形的對稱軸。

將一個線對稱圖形任意的對摺，被摺線分成的兩個部分未必能完全疊合，只有在兩部分完全疊合時，摺線才是這一個線對稱圖形的對稱軸，一個線對稱圖形的對稱軸可以只有一條，也可以有很多條。

讀者可參考本書附件一中所附的教學活動示例一(P.152)。

### (四) 已知線對稱圖形的部分，如何畫出完整的線對稱圖形

本教材提供「已知一個線對稱圖形的部分圖形，要求學童畫出完整線對稱圖形」的問題，嘗試將具體操作的定義，推廣到平面幾何學的定義。參考圖 2-9-14，已知圖形甲是一個線對稱圖形，直線  $L$  是圖形甲的對稱軸。

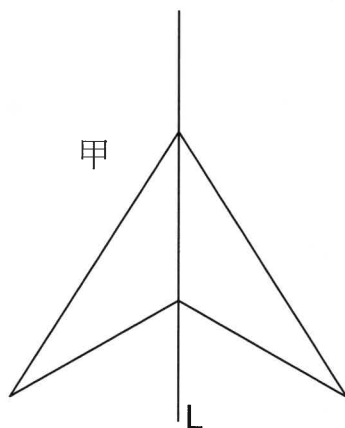


圖 2-9-14

而圖 2-9-15 中給定的是圖形甲的一部分，要求學童畫出完整的圖形甲。面對這一類的問題時，可以有下列兩種教學的方式：

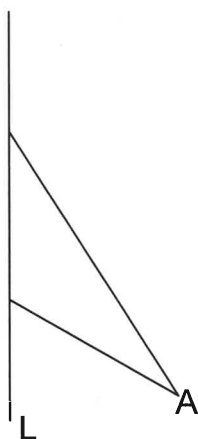


圖 2-9-15

第一種方式是直接宣告解題的步驟，要求學童找出部分圖形中的折點，畫出每一個折點對對稱軸  $L$  的對稱點(以  $A$  點為例，由  $A$  點向對稱軸  $L$  作垂線，垂足是  $O$ ，再延長  $AO$  線段，在對稱軸  $L$  的另一側找到一個點  $A'$ ，使得  $AO=OA'$ )，再連接這些對稱點，就可以得到完整的線對稱圖形甲。

第二種方式是透過具體操作線對稱圖形，幫助學童發現線對稱圖形對應點連線和對稱軸之間的關係，再透過對這種關係的掌握畫出完整的線對稱圖形，本教材就是透過這種方式，幫助學童自己畫出完整的線對稱圖形。給定一個線對稱圖形，透過對摺後被摺線分成的兩個部分會完全疊合的現象，要求學童觀察對摺後會重疊的兩個點，在打開鋪平後和對稱軸的關係，當學童發現對稱軸是這些對應點所連成線段的垂直平分線，就可以透過這個關係，畫出已知點對於對稱軸  $L$  的對應點，完成整個線對稱圖形。

#### 四、全等圖形與線對稱圖形的教學流程

表 2-9 是本教材關於全等圖形與線對稱圖形的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-9

冊別	單元	活動	活動目標
3	8	1	(1)憑直觀找出圖中不同的地方。 (2)用疊合的方法，說出這些圖形都是全等。
3	8	2	從一堆圖形中，找出全等的圖形。
3	8	3	透過剪、疊的活動知道兩個圖形是全等的。
3	8	4	描出全等的圖形。
3	8	7	透過摺紙的活動，觀察對稱的現象。
3	8	8	透過剪紙的活動，經驗對稱的現象。
3	8	*1	(1)透過對摺的方式，將原圖形分解成四個或八個全等的部分。 (2)將分解後的各部分拼回原圖形。
9	11	1	(1)將一堆三~七邊形的圖卡，根據邊的個數加以分類並命名，命名為五邊形、六邊形、七邊形後，將全類命名為多邊形。 (2)討論給定的五(及六)邊形圖卡，檢查邊、角是否相等，由此認識正五(及六)邊形。
9	11	2	以疊合方式檢驗兩多邊形圖卡完全疊合後，確定此二多邊形逐邊、逐角皆相等，由此認識兩多邊形全等時，各對應邊皆相等，各對應角皆相等。
11	7	4	透過剪紙(複寫或壓印)製造線對稱圖形，並對上述的製造活動進行反思，察覺摺痕兩邊的圖形摺疊後會重合，即全等。
11	7	5	給定一圖形，透過對摺的方式檢驗是否為線對稱圖形。
11	7	6	檢驗畫在方格紙上的圖形是否為線對稱圖形，並指出對稱軸兩邊互相對應的頂點、邊和角。
11	7	7	指出嵌入方格紙上的線對稱圖形：(1)對應點之連線和對稱軸互相垂直，(2)對稱軸平分對應點之連線。
11	7	8	在方格紙上畫出線對稱圖形。
本表中的「*」表示參考活動，未在課本上呈現。			

在低年級階段，本教材將學童對全等圖形和線對稱圖形的認知定為在 Van Hiele 的第零層次視覺期，因此本教材在第三冊第八單元活動 1~4、7、8 以及參考活動 1，先透過疊合的活動，幫助學童認識全等圖形，再透過摺紙及剪紙活動，幫助學童認識線對稱圖形，讓學童在視覺下，對全等圖形有一個初步的概念。

高年級開始，本教材先幫助學童探討兩全等圖形中邊與角的關係，再引入線對稱圖形的意義。在第九冊第十一單元活動 1、2，先以疊合的方式檢驗兩個多邊形圖卡完全疊合後，確定這兩個多邊形逐邊逐角都相等，由此認識這兩個多邊形的對應邊都等長，對應角都相等。第十一冊第七單元活動 4，本教材透過摺紙，幫助學童認識線對稱圖形，以及線對稱圖形中對稱軸、對應點、對應邊和對應角。活動 5 幫助學童察覺對稱圖形中的對稱軸是對應點連線的垂直平分線，透過上述關係的掌握，活動 6 要求學童完成給定部分圖形的線對稱圖形，活動 7 要求學童判斷給定直線是否為線對稱圖形的對稱軸，活動 8 則引導學童在方格紙上畫出線對稱圖形。

## 第十節 相似(放大或縮小)

### 一、相似圖形

設甲、乙分別是由直線段所圍成的多邊形，以甲多邊形為基準，如果乙多邊形的邊數和甲多邊形的邊數一樣，而且乙多邊形每一個邊的邊長，和對應於甲多邊形邊長的比值都是定值  $r$ ，乙多邊形每一個角的角度，和對應於甲多邊形的角度都相等，則乙多邊形的形狀會和甲多邊形的形狀一樣。當  $r=1$  時，乙多邊形和甲多邊形一模一樣，我們說乙多邊形和甲多邊形全等，或說乙多邊形和甲多邊形是全等圖形，當  $r \neq 1$  時，乙多邊形和甲多邊形的形狀一樣，但是面積的大小不同，我們說乙多邊形和甲多邊形相似，或說乙多邊形和甲多邊形是相似圖形。而相似圖形又可以依  $r$  值的不同，區分為放大圖與縮小圖兩種，當  $r > 1$  時，乙多邊形的面積比甲多邊形大，我們說乙多邊形是甲多邊形的放大圖；當  $0 < r < 1$  時，乙多邊形的面積比甲多邊形小，我們說乙多邊形是甲多邊形的縮小圖。

透過影印機放大的倍率，也可以得到邊長是曲線圖形的放大或縮小圖，因為不易與國小學童溝通兩相似圖形對應曲線長的比值或彎曲的程度，因此本教材不討論有曲線的圖形與其放大或縮小圖的關係，只討論由直線段所圍成的多邊形與其放大或縮小圖對應邊和對應角的關係。

### 二、相似圖形的合成

平面上兩圖形甲和乙相似，兩圖形所對應線段長度的比值是  $r$ ，平面上兩圖形丙和丁也相似，兩圖形所對應線段長度的比值也是  $r$ ，如果圖形甲和圖形丙，以及圖形乙和圖形丁合成的方式相同，則由甲和丙合成的圖形(甲+丙)，一定會和乙和丁合成的圖形(乙+丁)相似，而且兩個合成圖形所對應線段長度的比值還是  $r$ 。

在能夠放大或縮小的影印機以及電腦尚未發明之前，人們都透過打格子的方式來製作一個已知圖形的放大圖或縮小圖，而打格子畫出放大圖及縮小圖的方法，就是利用相似圖形合成的概念來完成的。

### 三、相似基本定理

在數學上，三角形有三個經常使用的相似形基本定理，第一個定理簡稱為 **AA** 相似定理，兩個三角形，如果對應二個角的角度分別相等，其所對應第三個角的角度也會相等，也就是說，兩個三角形，只要對應二個角的角度分別相等，所對應三個角的角度一定會分別相等，對應三個邊邊長的比值一定會相等，這兩個三角形一定相似。第二個定理簡稱為 **SSS** 相似定理，兩個三角形，如果對應三個邊邊長的比值相等，對應三個角的角度也一定分別相等，這兩個三角形一定相似。第三個定理簡稱為 **SAS** 相似定理，兩個三角形，如果有一個對應角的角度相等，而且這個角所夾的兩個對應邊的比值也相等，這兩個三角形一定相似。

當學童透過打格子的方式求一個圖形的放大圖或縮小圖時，必須透過這些定理，才能檢驗所畫出的圖形是否相似，國小學童無法理解這些定理的意義，因此本教材透過一些對打格子方式的限制，例如：限制「為正整數或其倒數，頂點必須在格子點上，所畫的線段儘量與格子線重疊」，儘量避免使用這些定理的機會。

### 四、放大或縮小

日常生活中學童常有照像的經驗，照片中呈現的是原物件的縮小或放大圖，但是因為照片常受到取景角度的影響，例如：面對大樓正面或是側面取景、距離大樓很近或很遠取景、角度向大樓頂層或底層取景，所取得的照片並不相同，而且常會失真，因此照片不是溝通放大或縮小圖的好教材。在學校裡，影印機是必備的教學器材，而影印機所印出來的放大或縮小圖，不會受到取景角度的影響，一定和原圖形相似，因此本教材建議教師多使用影印機取得放大或縮小圖，以利進行教學活動。

給定一個圖形，如何得到這個圖形二倍的放大圖或二分之一倍的縮小圖，當然，最方便的方法就是調整影印機的倍率，透過影印的方式得到圖形，只是透過影印取得放大圖或縮小圖的學童，無法掌握原圖形與放大圖或縮小圖之間的關係。

本教材引導學童透過打格子的方式，畫出一個圖形的整數倍放大圖或整數的倒數倍的縮小圖，幫助學童理解放大與縮小的意義。作法是先把一個簡單的直線

圖形，嵌入格子圖中，再透過影印機放大二倍，要求學童檢查原圖形與放大圖形間的關係，接著才要求學童透過上述關係的掌握，利用打格子的方法，自己畫出一個給定圖形的放大圖或縮小圖，以畫出甲圖形的二倍放大圖乙圖形為例，學童先在甲圖形上打格子，畫出大小一樣的正方形格子，接著在空白紙上打格子，畫出邊長是原正方形格子邊長二倍的對應格子圖，再透過對原圖形與放大圖形之間關係的掌握，在空白紙上對應畫出乙圖形。

因為畫出一個圖形的二倍放大圖，與畫出一個圖形的二分之一倍縮小圖，情形相似，六年級的學童如果理解透過打格子的方式畫出一個圖形二倍放大圖的意義，也會同步的使用打格子的方式畫出一個圖形的二分之一倍縮小圖。本教材建議教師，如果教學時間許可，或學童學習意願強烈，可以進行一個圖形二倍放大圖的二分之一倍縮小圖與原圖形是否相同的活動。

讀者可參考本書附件一中所附的教學活動示例二(P.163)。

## 五、相似(放大或縮小)教學流程

表 2-10 是本教材關於相似(放大或縮小)的教學活動目標，讀者可參考此表對照教學流程說明。

表 2-10

冊別	單元	活動	活動目標
10	14	1	由操作影印機的活動，經驗放大的意義，進而檢查原圖與放大圖之間的對應關係。
10	14	2	由操作影印機的活動，經驗縮小的意義，進而檢查原圖與縮小圖之間的對應關係。
11	13	3	把一個簡單的直線圖形，嵌入格子中，再加以放大 2 倍，檢查原圖與放大圖之間的對應關係。
11	13	4	自己畫格子做 2 倍放大圖，並利用與原圖同大的方格紙作 2 倍放大圖。

11	13	5	(1)把一個簡單的直線圖形，嵌入格子中，再加以縮小為 $\frac{1}{2}$ 倍，檢查原圖與縮小圖之間的對應關係。 (2)畫出 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖，並利用與原圖同大的方格紙作 $\frac{1}{2}$ 倍縮小圖。
11	13	6	在製作放大(縮小)圖之後，知道原圖是放大(縮小)圖的縮小(放大)圖。
12	12	1	(1)閱讀簡介圖。 (2)認識邊長關係的比例尺，並運用於地圖、室內平面圖的閱讀。

因為不容易檢驗，本教材在低、中年級並沒有引入相似圖形的教學活動，在第十冊第十四單元活動 1 與活動 2，本教材透過操作影印機的方式，幫助學童認識放大圖與縮小圖，進而檢驗原圖形與放大圖或縮小圖之間的關係。

在十一冊第十三單元活動 3 至活動 6，本教材引導學童透過打格子的方式，畫出一個圖形的放大圖與縮小圖，活動 3 先把一個簡單的直線圖形，嵌入格子圖中，再加以放大 2 倍，要求學童檢查原圖形與放大圖形之間的關係，活動 4 要求學童自己畫格子做 2 倍放大圖，活動 5 則進行畫縮小圖的活動，活動 6 幫助學童澄清放大與縮小的相互關係，在製做放大(縮小)圖後，知道原圖是放大(縮小)圖的縮小(放大)圖。在第十二冊第十二單元活動 1 中則進一步應用放大(縮小)圖以及比例尺的概念來認識地圖的用法。