第一部份
比與線段圖

導　讀

本書旨在對國小之比與線段圖的教材進行分析，期使教師能掌握比與線段圖的教材內涵，以利教學。但對於教材分析並非漫無目的或天馬行空式的無所不談，筆者也有自己堅持的知識論、課程觀、教學觀及其他與教材有關的理論等等，這些觀點有些明說、有些隱藏於字裡行間，大部份都已詳細敘述於相關的書本之中，例如《國小數學教材分析----整數的數概念與加減運算（研習會，民89）》、《國小數學教材分析----分數的數概念與運算（研習會，民90）》、《目標導向的發展式(GODS)數學課程及整數分數教材分析研究（陳竹村，民90）》等書。

筆者的知識論、課程觀、教學觀及其他與教材有關的理論等等，事實上也就是82年版部編本所隱藏的觀點，在本書第一部份之第一章對這些觀點略做重點式的摘要，若有描述不清之處，還請讀者再參考其他書本的說明。

在第一部份之第二章，首先針對與比之教材有關的名詞略作解釋，再進一步地說明筆者分析82年版部編本中，與比及線段圖有關的教材處理理念之所得。

在第二部份是整理82年版部編本中，與比及線段圖有關之教材內的教學活動，並加以表列與說明，以利於教師在面對九年一貫數學領域能力指標時，教學設計的參考。

第 壹 章

目標導向的發展式（GODS）數學課程簡介

一、九年一貫課程綱要之數學領域能力指標訂定之批判

此次的教育改革，在民主時代風潮裡，依教育改革委員會所提的十大基本能力為主軸的理念之下，九年一貫數學領域的課程改革來自於某一群人（包括學科專家、學科教育專家及第一線的國中小校長和教師）共同議決國中小學數學課程內容----若干能力指標。但長久以來，數學課程因數學家的支配，總是難脫百科全書課程理論及工具主義課程流派的影響，使得此次九年一貫數學領域內能力指標所指向的國民中小學數學課程內容依舊琳琅滿目。

近年來國小數學教育的現況是，在分數的教材方面，將近半數以上的學童，無法理解異分母分數加減、分數乘以分數及分數除以分數的運算過程。至於把這些運算用於情境文字題的能力，也不會比理解的人多。而這些題材仍屬於九年一貫數學領域的能力指標內，到底這些題材被選取的理由為何呢？筆者欲借此突顯課程決策的矛盾性。

不論是82年版課程標準數學科亦或是九年一貫數學領域能力指標的決策方法，都像是美國「實踐的課程(practical curriculum)」學者施瓦布(J. J. Schwab)所建議的「實踐的課程」方法：課程應由「課程集體(curriculum group)」來審議(deliberation)。然而兩者的課程理念卻類似「泰勒的課程基本原理」。但對於課程的決策方法，或課程理念上都有些無法周全之處，以致徒留課程的缺憾甚為可惜。

施瓦布認為課程審議的主體應是「課程集體」，他在《實踐四：課程教授要做的事情》一文中，提出了「課程集體」的完整構想。他建議以學校為基礎建立「課程集體」，該集體由校長、社區代表、教師、學生、教材專家、課程專家、心理學家和社會學家等組成。他並特別建議在「課程集體」中產生一位主席來領導課程審議的過程。該主席必須對審議過程技能嫻熟，善於發現課程四大要素（教師、學生、教材、環境(milieu)）間的不平衡，他

必須是課程文獻的經常閱讀者，還必須是博雅教育（liberal education)的堅定追求者（Schwab, 1983）。

施瓦布的實踐課程旨在使課程在實際的學校教學中能儘可能的實踐，期使課程設計和課程實踐沒有差距，而同時他也提供了一種「學校本位課程」的發展模式。

反觀此次九年一貫課程數學領域能力指標的審議，其「課程集體」之成員，包括學校校長、教師、教材專家、心理學家，但實際主導課程設計及審議的卻是教材專家，其他成員少有參與實際活動。筆者認爲不論是82年版課程標準國小數學教材綱要或是九年一貫課程數學領域能力指標仍屬於學科教材專家所主導的課程內容或模式。這樣的課程內容，由於未關注校長和教師（實踐者）的聲音（教學現場的實際問題與意見），及心理學家的觀點（學生的認知發展等心理因素），是故在實施的過程和結果後，恐與原先的期望有相當大的落差，而學生的學習困擾也將會衍生諸多社會問題。

另外，依據「泰勒的課程基本原理」而言，學校的教育應從(1)研究「學習者本身」當中；(2)研究「當代校外生活」當中；(3)「學科專家的建議」當中；三方面去尋找目標。這樣的教育目標的尋找才可能顧及學習者、社會及學科專業等的需要與發展。但泰勒也警告我們只管尋找教育目標可能會塞爆了學童的腦袋，所以他提出了兩個篩子：「哲學」和「學習心理學」，來篩選已被尋找的教育目標。筆者同意泰勒的觀點，不可選取過多的能力指標，也不可選取超過多數學童能力範圍的能力指標，以免造成學童學習的夢魘（黃炳煌，民79)。

筆者的願望是，再減少國中小學童的數學教材內容，例如前述的異分母分數加減法、分數乘以分數、分數除以分數運算及比例問題的成人算則等，應考慮移往國中，而部分國中教材移往高中。希望藉此減低國中小學生的課業負擔，以利其身心發展。

二、九年一貫課程數學領域能力指標的意義與解讀

對於九年一貫數學領域內的能力指標，例如N-3-15：「能在情境中理解比、比例(包括正比例和反比例)、比值、率（百分率、ppm)的意義」（教育部，民90）。如果考慮其中的一個細目「能在情境中理解比的意義」，當做一個教材設計的目標，應如何設計一個路徑及教學法來達成這個能力指標中的細目呢？當然，首先是教材設計者或教師對於這個「能力指標及其細目」如何解讀，雖然對於數學家或某些數學教育專家而言，這個能力指標及其細目應有其明確的意義，但事實不然。根據卡爾 (Wilfred Carr, 1995)在《For Education: Towards Critical Educational Inquiry》一書提出：對於理論與實踐的落差 (gap)，常源自於理論家（學科專家或學科教育專家）與實踐者(教師)的種種意識型態、價值觀等的差異所造成的。同樣地，對於這些能力指標，不論數學家、數學教育家或教師們都有其各自不同的解讀。筆者認爲，課程綱要的文件中最好能包含這些能力指標的更仔細清楚的說明文字，而這些說明文字應由筆者在前言所引施瓦布(Schwab)的「課程集體」來審議，而審議的過程與結果也應關注施瓦布(Schwab)之「折衷的藝術」及「實踐的藝術」觀點。也就是說「課程集體」的每一成員應儘可能的發表意見，並尋求折衷性的共識，以利教學實踐活動。

先解讀了能力指標，確定其意義後，再來考慮用何路徑及方法手段來幫助學生達成能力指標。當然，對於路徑與方法的選擇，總是因人而異的。但筆者欣賞82年版部編本（依據82年教育部頒定的課程標準之國小數學科教材綱要，由教育部台灣省國民學校教師研習會開發之國民小學數學科實驗課程，後經由教育部國立編譯館所修改及出版，簡稱爲82年版部編本）對於路徑和方法的選擇，並將82年版部編本的課程理念，整理而另名之爲「目標導向的發展式數學課程（The Mathematics Curriculum of Goal-Oriented Development-Style）」，簡稱爲GODS數學課程。筆者在《國小數學教材分析----整數的數概念與加減運算》及《國小數學教材分析----分數的數概念與運算》二書已詳述了此課程。

三、目標導向的發展式數學課程的意義

一般而言，對於課程所確定的某一學習目標，設計一個由若干個活動所組成的路徑(path)，經由這些活動的實施學童得以達到此一學習目標，但這些活動應被設計爲一連串的問題，並把解題活動的權利還給學童。或者這樣說，對於某一學習目標，透過設計一連串對於學童的合理活動，在學童親自參與或進行這些合理活動後，可各自達到一定程度的學習目標。也就是說，學童在經驗這些有目標導向 (goal-oriented)的合理活動中，各取所需，各自建立與發展各自的概念。

依此，這樣的課程設計是課程專家中的理想課程，同時也是活動課程、實踐課程、人本主義的課程。

「目標導向」意味者此課程不是漫無目的的任由學童發展，活動內容是指向學習目標的，例如82年課程標準的數學教材綱要，或九年一貫的數學能力指標等等應被視爲學習目標。「發展式 (development-style)」意指：課程理念爲，在教師不要示範解題的情形下，學童表現各自的認知階段，並發展各自的認知階段。以數學的認知發展而言，是指學童的某數學概念發展。

這樣的課程設計並非首創，在以前的國小自然科課程中已有局部的使用，例如養雞、養蠶、種豆等的觀察，除此之外尚有其他學科也都部分的使用此種教學理念，讀者可尋找尋找。但眞正完整的把此精神徹底付諸設計的是82年版國小數學課程部編本及其前身----實驗本。

筆者在面對現職教師的演講中，調查教師們要幫助學童建立「玫瑰花」、「乘涼」、「神轎」、「18＋7＝25」、「18＞7」、「$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$」、...這些表徵的意義，可以透過下列方式：(1)親自參與具體活動；(2)旁觀具體活動；(3)透過錄影帶等動態媒體觀察具體活動； (4)觀察具體物；(5)觀看圖片或幻燈片等靜態平面媒體；(6)用語言文字來描述具體活動；(7)用語言文字描述其特性（或特徵）。其中(1)～(6)的方式是用實例來架構該表徵的意義，而(7) 是把大人（專家）的看法和觀點加諸於學童身上。而教師們普遍同意(1) 的方式，讓學童親自參與具體活動是最有效建立表徵意義的學習活動

，而且學童能長久的記憶，但由於上課時間的壓力，大部分的學習內容教師們無法使用(1) 的方式。另外，所有教師都同意提供實例是幫助學童建立表徵意義最好的手段。

GODS數學課程即主張，學童親自參與合理的具體活動（解題活動）是最有效建立數學表徵意義的學習活動。並主張教師應退居爲布題者，把解題活動還給學童，並選擇適當的問題、適當的時間、適當的學童及適當的解題策略進行發表及合理性討論，以促進學童概念的形成與發展。

四、目標導向的發展式數學課程之主要成份

以往的數學教學大多停留在傳統的教學：下定義，解說概念，遇有問題，教師示範解題，學童模倣，定義式數學課程即是根據這樣的教學法及考量數學知識的邏輯性和或多或少的一些教育心理學觀點來發展的數學課程。這種定義式數學課程，自有其發展的由來及存在的價值，但在國民中小學的階段，由於是義務教育、是強迫教育，這種只能適合部份學童的課程，是否應重新檢討而選擇另一種課程呢？筆者在此提出另一種數學課程：GODS數學課程供教育界及數學教育界參考。

「GODS數學課程」是依一個一個概念爲發展主軸，其主要成份爲：(1)如何發展學童的某一概念（例如整數的加法概念）；(2)與此概念有關的數學語言之學習；(3)與此概念有關之問題相對於社會上大多數成人所使用的算法（簡稱爲成人算則）之學習；以下是筆者「GODS數學課程」摘要成下表，並於表後再進一步說明GODS數學課程的主要內容。

表一：發展式數學課程的主要成份摘要表

	數學內容的學習	數學語言的學習	成人算則的學習
主題	關心學童的數學概念是否形成與發展。	關心學童數學語言的學習與發展。	關心學童對於成人算則的理解。
主要內容	(1)教學者應確定概念是什麼？例如數概念是什麼？整數加法概念是什麼？......等（GODS數學課程主張：學童的整數加法概念是指學童在經驗「一個一個整數加法問題的解題活動」後，並從中抽離的共同性質稱之）。 (2)教學者透過什麼手段來幫助學童概念的形成和發展？（GODS數學課程主張：透過學童用自己的方法解決一個一個不同類型的整數加法問題是形成與發展整數加法概念的唯一手段，不承認教師解說概念可以形成概念，不承認教師示範解題—學童模仿是有效形成概念的方法）。 (3)教師是否應了解 整數的加減乘除問題類型分別有那些？ 分數的加減乘除問題類型分別有那些？ 小數的加減乘除問題類型分別有那些？ 對等問題的問題類型分別有那些？ (4)教師是否應了解學童在面對同一個問題時，有那些不同解題策略？或者知道在那裡可查得到這些不同的解題策略？爲何學童會有不同的表現？面對這些不同的表現教師的立場應如何？（GODS數學課程主張：課堂中不論是教師或學童不可比較優劣，教師不可下結論。） (5)在學童各種類別的學習內容增加及授課時間的雙重壓力下，教師必須了解什麼方法可以加速數學概念的發展？（GODS數學課程同意杜威強調「反身性思維(reflective thinking)」對概念學習的重要性，並由此主張透過 (a)解題後要求學童記錄「解題過程紀錄」；(b)解題後請學童發表和討論其解題過程及其合理性；(c)解題後要求學童記錄「算式摘要紀錄」等都可使「反身性思維」成爲具體活動，而加速概念的發展。）	(1)那些數學語言是學童必須學習的？（GODS數學課程主張：算式摘要紀錄、解題過程紀錄、問題紀錄，列式、併式紀錄及逐次減項紀錄是學童必須學習的）。 (2)這些數學語言中，每一個項目的意義分別是什麼？ (3)這些數學語言中，每一個項目對學童有什麼幫助？ (4)這些數學語言中，每一個項目引入的先後次序應怎樣較合理？也就是這些數學語言引入的流程和時機應怎樣較合理？	(1)對於不同類型的問題（例如分數乘法問題），成人算則是指什麼？成人算則是什麼樣的人發明的？ (2)成人算則在社會文化的地位爲何？成人算則會不會隨著時空改變？ (3)學童應不應該學習這一個個的成人算則？也就是問學習成人算則對學童有什麼幫助？（GODS數學課程主張：其一在課堂時間足夠，其二學童能理解，這兩種條件下才可進行。） (4)各種類型問題的成人算則對於不同的成人可能有不同的意義詮釋，使用那一種意義來引入成人算則，對學童而言比較容易理解？ (5)各種類型問題的成人算則應如何引入較合理？ (6)學童學習了這些成人算則後，課程或教師是否要求學童把成人算則當做標準算法？

在第一個部份「數學內容的學習」方面有幾點必須先確定，其中 (a)什麼是概念，例如什麼是〞5〞的數概念、什麼是 〞13〞的數概念、什麼是整數加法概念、什麼是分數乘法概念、......等等應該先界定，(b) 再談怎麼發展學童的概念的細節。對於與學童的概念發展有關的數學教育內涵有些學

者稱之為「數學的內容」（黃敏晃，民82年）。

幫助學童發展概念，在現代的教育界應已形成共識，但是所存在的歧見在於(1)概念是什麼的界定，(2)透過什麼手段來幫助學童形成與提昇概念。至於概念形成的重要性等後面再討論之。

在第二部份「數學語言的學習」方面，應分析與某一概念有關的數學語言有那些，例如算式摘要紀錄、解題過程紀錄、問題紀錄、列式活動、逐次減項紀錄等等，在國小數學教育稱之為「數學格式」，它們是某些前段所言「數學內容」的表徵（或稱為格式記錄）。學童為何要學習這些呢？也就是說學童學了這些數學語言有什麼幫助？進而再考慮引入各種格式紀錄的流程應如何比較合理？

在第三個部份「成人算則的學習」方面，應分析成人算則是什麼？學童應不應該學習？或可以不可以學習？教師對於成人算則應站在什麼立場？如果學童要學或可以學成人算則，那應如何引入較合理？

五、傳統數學課程與發展式數學課程的比較摘要

筆者以下表說明傳統數學課程的教學與GODS數學課程的比較：

表二：傳統數學課程教學與GODS數學課程的比較摘要表

	傳統數學課程	發展式數學課程
教學主張	下定義，解說概念，教師示範解題，學童模仿。	教師布題，學童自行解題，以形成概念，引入算式等數學語言做為概念的表徵。
概念發展	概念未必形成與提昇，即概念未必有發展。	肯定概念有形成與提昇，即概念必有發展。
缺點	(1)由於大多數學童沒有概念的形成與發展，故所習得的數學符號也不見得具有意義。 (2)「示範—模仿」的教學就像給學童「魚」吃，而不是教學童釣「魚」，養成學童在面對新問題時，總是等待別人的示範解題。 (3)由於「示範—模仿」的教學過程中，不確定學童已理解或學會，故造成不知不覺中遺棄了學童而沒有跟上進度。	(1)由於學童使用自己發明的解題策略解題，當然顯得較為笨拙。如果考試的試題須要在有限的時間內快速的計算時（不知這樣的考試是評量數學能力，還是評量反應速度的能力），學童的考試成績在低中年級會較不理想，但在高年級則未必。 (2)由於「在須要快速計算能力的考試」中，尤其在低中年級階段，成績比較差，故必須面對家長、學校主管及同事的執疑。你是教師，你有說理的能力嗎？還是要屈服？
優點	對於考試成績的表現有速效，故而易於維持教師的聲望。	(1)由於概念有發展，必然促成智力成長。 (2)眞正的理解（自己發明的解法，不是別人示範的），可以長久記憶。 (3)養成遇到問題主動探索、尋求解答的習慣。
備註	誇張的說，像是在餵學童毒藥來維持學習，當停止餵食即停止學習。	教書者的良心，為了學童日後的學習著想。

六、「數學」和「算術」兩學科的區別

現在五十歲以上的人們大概還記得，他們小學時的教科書叫「算術」而不是「數學」。其中「算術」一詞來自英文的 「algorithm」，意指演算法、計算法等，而那時「算術」學科的內容的確較重視計算規則的學習與熟練，後來經過學者家的思考而認定「理解」這些計算規則（簡稱爲成人算則）是有助於數學的學習，經過課程的改革並改名爲「數學」，但對於數與計算教材大部份內容仍侷限於如何增進這些計算規則的理解。但筆者認爲「數學」學科的主要成份是數學概念的形成與發展，也認爲只要數學概念形成和發展的夠好就等同於建立了面對新問題的解題工具。

另一方面，由於科技的進步，傳統只注重計算規則的熟練的課程所訓諫出來的學童，雖不乏有數學高成就者，但多數的學童在不理解計算規則的意義之下，恐只相當於一部廉價的計算器而已。讀者可以觀察傳統市場內的多數老年人，他（她）們並未學習上述的這些計算規則，但它們多數並未有面對數字問題的困擾。

在國民教育是全民教育的前提下，課程的設計應使每一位「正常」的學童，在學習活動中皆有所斬獲，而不是爲少數學童所設計的。筆者認爲借幫助學童形成與發展數學概念，建立數學語言的意義，也進而建立解決數學問題的解題工具，可以達到教育的目標之一：使學童心智得以成長。

從教育家的另一個理想「教育需傳承前人的智慧，使人類文明得以延續」來看，以往的「數學學科」偏重於成人算則這種專家所發明的、又經濟又有效率的解題策略的傳承是可以理解的，但人類文明和智慧的延續爲何須落於兒童的肩上呢？也就是說，筆者雖然同意「教育需傳承前人的智慧，使人類文明得以延續」的理念，但質疑執行的時間點。可否允許學童擁有較豐富的基本概念、建立較多的解題工具後，再引入成人算則或專家的知識，因爲這些對於學童都相當難以理解。

七、命名活動的重要性

當學童在首次接觸一個新物件（例如實物、事件、新數量、概念、....等）時，教師或大人不要先告訴學童此新物件的名稱叫什麼，而是讓學童自己嘗試說說看，這樣讓學童嘗試說出新物件稱呼的活動叫「**命名活動**」。

雖然學童對於一個新物件所命的名稱往往不是社會文化所使用的名稱，但學童在嘗試命名的過程中必然對此新物件加以觀察、把玩、反復思索以尋找貼切的名稱，透過如此的程序學童必然看到此新物件的若干性質，而可以加速與此新物件有關的概念的形成和成長。換句話說，命名活動透過杜威的主張：「反身性思惟」而加速了與此新物件有關概念的形成和提昇。

命名活動的另一項功能是培養學童的類推能力，也是GODS數學課程重視的教學活動。以正整數爲例，82年版和九年一貫課程標準都規定國小學童要認識到一億以內的整數，如果所有整數都需要教師或大人一一給予稱呼，那所需耗去的時間將相當可觀。如果以整數名稱來看，不論是讀音（數詞）或記號（數字），大部份是可以使用已習得的部份讀音和記法來類推的，例如當學童已習得30以內的「唱數活動」、「數數活動」、「說讀聽寫做活動」後，學童在面對「30個花片再累加1個花片該怎麼說」時，可以用 「20個花片再累加1個花片是 ㄦˋ ㄕˊ ㄧ」來類推。筆者認爲：當學童在面對一個新數量（新物件）時，給學童嘗試命名的機會，一來可加速學童數概念的形成和提昇，二來可以培養學童對在面對新物件（新學習）時類推的能力。

從上段的分析而知，有些整數在讀法和記號是可以由之前已習得的整數來類推，例如31、32、33、......、99、......等等，而有些整數是無法類推的，例如1、2、3、......、9、10、12、20、100、101、110、200、1000、1001、1010、......等等，教師在引入新數時，應特別注意學童對於不可類推的「關鍵數」，例如10、100、1000、......等的相關學習活動。

分數、小數、比及比例式也應透過命名活動來加速概念發展及培養類推能力。在比及對等問題的教材中，比的記錄活動、對等問題的解題活動摘要紀錄的引入活動等等都應讓學先嘗試命名，由於學童已較成熟，預期已有相

當好的表現。

教師應注意：在命名活動中學童所嘗試的命名應受到尊重，不做優劣的比較，不做合理性的批判，甚至於要常多加鼓勵，如此下次的命名活動才得以進行。至於教師最後提出的標準名稱，應強調並非這個名稱多好，只是社會上的大多數人都是如此稱呼，而學童要和社會上的人溝通不得不使用這一個標準的稱呼。

八、數與計算教材的主要課題----發展新計數單位

國小數與計算教材所處理的內容其實大多在於發展新計數單位。首先熟悉「1」單位的計數活動，再逐步發展比「1」大的整數爲新計數單位，例如「10」、「100」、「5」、「13」、「23」、......等等，要發展這些新計數單位至應用自如，該有那些內涵呢？如熟悉新單位的計數活動、新單位與「1」單位的關係（如化聚活動、轉換活動）、多個新舊單位合併使用、......等等。待學童能熟悉若干個比「1」大的新單位之一切有關活動後，再逐步發展比「1」小的新單位，例如「$\frac{1}{2}$」、「$\frac{1}{5}$」、「$\frac{1}{10}$」、「$\frac{1}{12}$」、「$\frac{1}{100}$」、「0.1」、「0.01」、「$\frac{3}{5}$」、.......等等。然後也發展若干個比 「1」大的新單位與若干個比 「1」小的新單位混用所成的新單位，例如把帶分數與帶小數當新單位。

更進一步地，數與計算教材也發展「關係」爲一新計數單位，例如「 3枚郵票賣20元，12枚郵票賣多少元？」，是爲了幫助學童發展把對等的兩量「3枚郵票賣20元」 這個關係，看成是一個新計數單位，透過兩量同次數的累加，或同樣的等分割活動，以解決問題。這樣對具有關係的兩量施予同方法的操作（累加或等分割活動），即是把此關係看成爲新計數單位。

許多數系都是因新計數單位的發現或定義才產生的，例如實數系及複數系等等。筆者認爲國小數與計算教材除了借以發展學童解決問題的能力之外，不斷地發展新計數單位以爲日後學習數學的基礎，亦是另一重要的目標。

九、兼顧數學概念與數學語言學習的解題工具發展模型

GODS數學課程主張透過下列步驟及流程，來幫助學童把「算式」發展成「解題工具」，又兼顧學童數學概念的形成與發展：

(一)、帶學童到起跑點，使學童有能力參與接下來的合理的具體活動，即提出符合學童生活及認知能力的情境問題，讓學童自行解題。

(二)、安排合理的具體活動給予學童親自進行，活動內容包括：教師布題、學童自行解題及得到結果。

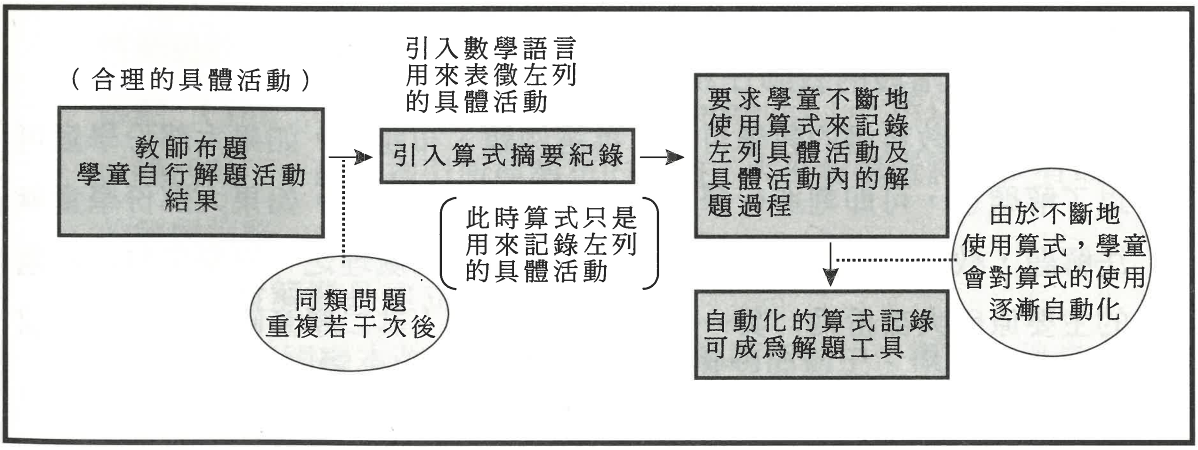
(三)、待學童對某類運算問題形成解題活動類型之後，引入算式，將上述具體活動進行摘要記錄。

(四)、經過不斷地記錄，並要求學童把算式用來記錄解題過程中的步驟，學童會加快記憶一些算式。因此在限制情境中，經過不斷地使用算式記錄，學童對於算式的使用會逐漸自動化。

(五)、這些自動化的算式記錄即可成爲解題工具。

由於篇幅的限制，筆者只簡單地摘要「如何幫助學童把『算式』發展成爲『解題工具』」，其仔細的說明讀者可參考《國小數學教材分析----分數的數概念與運算》、《目標導向的發展式(GODS)數學課程及整數分數教材分析研究（陳竹村，民90a）》二書，或《國小數學解題工具發展模型的探討（陳竹村，民90b）》一文，本圖爲此發展模型的流程。

圖一：解題工具發展模型----幫助國小學童使「某一算式」成爲「解題工具」的新架構



十、目標導向的發展式數學課程之新教學流程的理由與實務

針對GODS數學課程希望教師是一個布題者，不要示範解題給予學童模倣，這樣改變的教學方式，筆者提供一些實務性的建議給予教師期能對國小教師們有點幫助。

（一）、新教學流程

GODS數學課程和82年版部編本國小數學課程建議教師採用下列的教學流程：教師佈題、學童獨自或分組解題、溝通與發表討論，並以此教學流程及相關的數學知識和教育理念設計成教學活動。教師若不是依此教學流程來進行82年版國編本教學指引設計的教學活動，將衍生許多無法處理的疑難問題，相對地，別的版本的教科書（不論是否是數學）是否完全適用這樣的教學流程也不得而知。

（二）、教師角色的改變

以上述教學流程來看，教師的角色應由課堂活動中的「主角（主講者）」轉變爲「導演（引導）」。以往教師是課堂活動中的「主角」，教師依教科書的教學目標，挑選例題、解釋題意、示範解題、說明解題過程、總結、然後再舉若干例題要求學童模仿解題。而依82年版國編本所建議的教學流程來看，希望教師變成一個課堂活動中的「導演」，教師依教科書的教學目標，挑選例題，解釋題意後，不再示範解題，把解題活動還予學童，教師負責掌控課堂活動的其餘流程得以順暢進行，例如秩序的維護、發表樣本及發表者的選取、......。

（三）、布題階段的教師任務

教師依教科書的教學目標，挑選例題、布題後，如果大部份學童可以了解題意，可即刻進行學童獨自或分組合作解題，如果大部份學童無法解題，教師應分析學童無法解題的原因分別處理之。而學童無法解題的主要原因大部份爲：其一學童不了解題意；其二學童缺乏先前概念或預備經驗。

當學不解題意義時，建議教師可依下列程序幫助學童了解題意。首先教師應檢查題目裡是否有生字、新詞，若有，應先加以解釋其意義。在確定學童已了解生字、新詞的意義之後，再檢查學童是否了解題意，如果尚有相當數量的學童不了解題意，可能原因是學童對題目所付予的注意力不夠，教師可要求學童多（出聲）唸幾遍（二～四）題目，使學童的注意力集中於解讀題目上。最後若仍有相當數量的學童不了解題意，（對於情境文字題，例如：「一盒草莓 23顆，8盒共有多少顆？」）由於題意中大部份含有情境（包含語意及動作），因此教師可以布置情境或演示題意，可更進一步地幫助學童能了解題意（對於低年級學童尤其有效）。致於若尚有少數學童不了解題意，應於大部份學童解題進行中個別指導或課後個別指導，以利於課堂活動的推進。雖然學童對於文字題題意的了解與否繫於學童的語文能力，教師應知：學童了解文字題題意是學習數學的基礎，幫助學童了解題意，實不可輕忽。

如果學童是因爲缺乏先前概念或預備經驗而無法解題，此時教師可以對該問題進行概念分析，對於所布給學童待解的問題，學童需要能解決先前那些問題類型（即先前概念）後，才能解決此一問題。進一步地，用分析的結果（先前所需的問題類型）一一檢測，對於無法解題的類型應進行解題活動（教學指引中每一活動最前面的預備經驗即列有說明是先前的册別、單元及活動序號）。由於82年版國編本用螺旋式設計，對於同一序列的教材（例如分數乘法教材）是逐漸加深加廣的方式，及活動設計（一個活動內所布的問題）儘可能的合符Vygotsky的近發展帶觀點 （the zone of proximal developmenet），所以在教師循序進行教學活動下，教學指引所建議布的問題，大部份學童將至少有最低層次的解題策略。

(四)、學童解題是建立概念的根本

82年版國編本強調數學學習寓於解題活動中；概念的建立來自於經驗解題活動並抽取同一解題活動類型的共同特性（楊美伶，民83）。而

經驗解題活動卻不是別人所能代勞的，即別人的經驗只是別人的經驗，不太會是學習者自己的經驗，在沒有經驗解題活動的情形下，學習者也無法建立概念。雖然有人可以由觀察別人解題活動或過程中，經學習者自己在心裡或紙筆順過後等同於經驗，並可累積這些經驗而形成概念，但應只是少數人而已。

(五)、學童解題階段的教師任務

當學童解題時，教師除了幫助少數尚未了解題意的學童外，尚有什麼重點工作呢？其實教師應該行間巡視以處理下列的事務性任務：

(1)找回不專心於解題活動或小組討論的學童（常規管理）。

(2)幫助少數仍不了解題意的學童，使其了解題意（用前面所述方法）。

(3)幫助少數仍無法解題的學童，使其能順利解題（提示或和其討論）。

(4)尋找不同的解題活動類型和錯誤的解題活動，以做為下一階段活動發表與溝通討論的樣本（避免不必要的發表與討論）。

(5)如果教師使用分組合作解題，教師可以偶而參與某小組內的解題討論，以增進學童分組討論的效律。

(六)、學童獨自解題V.S.分組合作解題

依據82年版國小數學課程標準中的實施方法之教學方法：主張數學課室內討論是很重要的，不論是解題或解題後的發表（教育部，民 82）。為了使每位兒童有充份參與討論、發表意見的機會，課程標準更進一步的主張：教師可考慮將四至六人編為一合作學習小組（教育部，民82）。若學童解題是概念建立的觀點來看，在課堂活動中，不論是分組與否，教師在某一活動的最後仍必須確定學童能獨自解決該活動內的問題類型或達成活動所規範的目標。筆者認為低年級學童討論較無效率、常規也較難掌控，分組合作學習可能不是每位教師都能勝任，教師可用逐漸增加次數的方式，使分組合作學習模式能逐步的有效率。教師應注意：如果使用分組合作解題，也必須另覓時間檢查學童是否達成此活動目標，

即能在活動所要求的方法或條件限制下，解決此活動內所布的各問題。

（七）、發表與討論加速概念的建立

由於發表者爲了向他人說明其解題過程必定會先在心中順過其解題過程， 或者在說明的時候順過其解題過程，而此反省過程使學習者更易抽取同類問題之解題活動的共同特性，以形成概念。而討論者也會拿自己的解法和發表者的比較而達到反省的功能，另外從質疑、辯論的過程也能加速概念的建立。教師應注意：並非所有解題活動後都須發表討論，否則課堂時間將不足。要不要發表討論的判準大約是：是否爲新問題類型、有格式記錄要成爲社會共識或各種解題策略預期可以促進其他學童的認知發展（或稱數學概念發展）。

（八）、學童發表與討論階段的教師任務

在此階段教師有那些該做及不必做的事呢？筆者建議如下：

(1)避免成爲發表者的傳聲筒，給發表者機會學習把話「說大聲」、「說清楚」。

(2)避免流於發表者與教師兩人的對話，以免台下其他學童秩序大亂。

(3)教師站到台下學童群中，當做是學童（討論者）之一。

(4)教師也應不時留意沒有注意傾聽、沒有參與討論或不守秩序的學童，並採用可行的技巧處理之，例如要求沒有注意傾聽的學童複述發表者說了什麼。

(5)教師也應確保學童的討論不離題，中、高年級可使用教學指引所建議的解題過程溝通模式（參見82年版部編本第五、七冊教學指引之緒論）。

(九)、教師要不要做總結

這是一個習慣傳統教學的教師不以爲然的大事，大多數的教師或大人總喜歡說教，不說一些自認爲有智慧的話，總結得就不是教師或大人。然而教師必須思考：「以長遠來看，總結對於學童有什麼幫助？又有什麼害處？」，個人認爲只要教師做總結後，學童將出現要學會所有教學法（教師下令的結果）或趨於統一解法（教師無意中透漏了各種解題法的優劣），而不再有所謂的學童自發的解法，進而影響學童的學習與發展。筆者建議教師不要做總結。

第 貳 章

比與線段圖的教材分析

一、相關名詞的意義

在國小數學科與比有關的教材方面，(1)在64年的部編本國小數學教科書內有比、比值及成正反比例的教材（國立編譯館，民71）；而(2)82年的課程標準也在高年級目標列入「比、比值、比例的初步認識」及「理解數量的簡易變化關係」兩（教育部，民82）；及(3)九年一貫國小數學領域的能力指標也列入 N-3-15：能在情境中理解比、比例（包括正比例和反比例）、比值、率（百分率、ppm）的意義（教育部，民 90）。由此可知這方面的教材是幾次課程修定的共識，大家都認爲其重要。但對於比、比值、比例式、比例問題及成正反比例等名詞的意義，似乎不見得有相同的看法。筆者並無意於統一這些名詞的意義，由於常有人混淆這些名詞，故在此提出筆者的看法，或許有利於澄清它們其意義，以幫助教師們。

【比的定義】：依據64年版部編本國小數學教科書的定義，比是指兩量倍數關係的另一種說法或記法，例如「5塊餅乾是2塊餅乾的倍，這種關係也可以寫做5：2，讀做五比二」（國立編譯館，民71）。另外依據82年版部編本的定義，比是指並置的兩對應關係量的紀錄，例如「小華拿 3個布偶，去跳蚤市場換了5部玩具車」可以記爲 「3：5」。本書採用82年版部編本的定義爲比的意義。

【對等關係與比】對等關係一詞是82年版部編本所採用的專有名詞。該版本認爲認爲對等關係是指兩數量 A、B之間，由於某種原因，而產生一種配對關係，就稱此兩數量A與B有對等關係。在數學上有人用有序數對（A，B）來記錄，也有人用「比」的符號 「A：B」來記錄此兩數量A與B的對等關係。例如張三的鐵線是10公尺長重10公斤，李四的鐵線是20公尺長重18公斤，而王五的鐵線是15公尺重16公斤，…。上述各個例子的描述，皆產生一個對等關係，10公尺對10公斤，20公尺對18公斤，15公尺對16公斤，…。進一步地，82年部編本採用「比」的符號「：」，來記錄這些對等關係，如記

成「10：10」、「20：18」及「15：16」等等。

【對等關係的種類：組合、母子、交換及密度】依據情境（語意）的不同，對等關係可以分爲下列四類：(1)若兩數量A及B爲同類量（被測量的性質相同），且A與B都是同一全體量中的部分時，可稱爲一種**組合的對等關係**；(2) 若此兩數量爲同類量，且一數量是全體量，另一數量是全體量的部分量時，可稱爲一種**母子的對等關係；** (3)若A、B分別描述兩個（堆）物件，於某種因素（性質），使這兩個（堆）物件具有相同的價值，可以交換，而形成A與B的對等關係，則可稱爲一種**交換的對等關係**；最後，(4)若 A、B不爲同類量，且此兩數量是描述同一物件的不同性質，A、B的比值是做爲密度的描述時，A與B間的關係，可稱爲一種**密度的對等關係**。這四種類型的對等關係分別舉例如下：

(1)組合：一種親子遊戲中**3**個小孩，需要**2**個大人來協助。

(2)母子：一打襯衫有**12**件，其中有**4**件是藍色的。

(3)交換：小華拿了**135**本雜誌到圖書館換了**9**本小說。

(4)密度：**30**立方公分的水重**30**公克。

【比的等價或相等】比的等價即比的相等，對於64年版，由比先引入比值後，用兩個比的比值相等來定義這兩個比相等。82年版認爲這種方式太過抽象，無法解釋比的情境問題中比值的意義爲何，故倒過來先引入比的相等，再引入比值。另一個原因，由於82年版部編本對於「比」的引入方式的改變，使得「比」的相等不再可以用比較量除以基準量的商（倍數）來定義。雖然一個對等關係（A：B）的前項（A）與後項（B），同乘（除）以一數時，則產生另一個等價的對等關係（比）；或者，當使用比值來描述一個對等關係時，兩個比值相等的對等關係是等價的對等關係（比），而這種等價的比即爲比的相等。因此82年版部編本採用在量情境中討論，它們是相同的交換方式，相同的組合方式，相同的含量（母子的對等關係）或相同的密度，來引入比的相等。例如張三的鐵線長10公尺重10公斤，某甲的鐵線長15公尺

重15公斤，兩人的鐵線每1公尺的重都是1公斤，而把兩個對等關係的等價關係記成「10：10＝15：15」。換言之，64年版是直接透過比的前項除以後項的抽象定義來引入比值，再由比值相等與否來定義兩個比是否相等，不管相等在量情境中的意義爲何。而82年版是反過來先關心比的相等在量情境中的實際意義，並用此來架構抽象數學的意義。

【比、最簡整數比與比值】在數學上大家都同意比值是比的量化結果，而不論比值的定義如何總不致於違反「A：B的比值是$\frac{A}{B}$」的規則。64年版部編本數學教科書的比值定義是前項A除以後項 B 或$\frac{A}{B}$，其意義應是每一單位的B對應（配對、包含、......）$\frac{A}{B}$個單位的 A，例如王五的鐵線是 15公尺重16公斤，其比是 15:16，而其比值$\frac{15}{16}$應是鐵線每一公斤的長度是$\frac{15}{16}$公尺。由於該版本之比的定義（倍數關係的另一種記法），本身就相當的數值化，故用比的倍數值爲比的比值，沒有多大的新概念。而82年版部編本，是在多個相等的對等關係中，透過活動經驗，嘗試對各個給定的對等關係，列出與它們相等的比，而且由各個相等的比產生**最簡整數比**皆相同，這個最簡整數比是各個對等關係的共同特性，介紹使用「每多少個對多少個」的語言來描述這個最簡整數比，並檢驗透過「每多少個對多少個」的關係，可以製作出來原始情境中描述的對等關係。例如一個對等關係「黃伯伯有15平方公尺的田地，其中有9平方公尺種白菜」，可以記成「15：9」，而這個對等關係也有許多相等的對等關係，如「15：9＝5：3＝30：18＝10：6＝………」，這些相等的對等關係，也成爲一個等價類，此時可選用最簡單整數比「5：3」，來代表這一個等價類，並說這些相等的對等關係都是「每5個對3個」（或說每 5平方公尺田地有 3平方公尺種白菜）。進一步地，當最簡整數比（例如：「A：B」）具有「每A個對B個」的意義時，建議教師繼續詢問學童「每A個對B個時，多少個對1個」的問題，例如：「每5公升的沙拉油重 4公斤，多少公升重1公斤？」，而形成「5：4 ＝ $1\frac{1}{4}$」的結果，溝通$1\frac{1}{4}$爲 5：4的比值的共識。即對於一個比「A：B」是透過找一個後項爲「 1 」而且和「A：B」相等的比，如「A：B＝X：1」，此時叫「X」爲「A：B」的比值。

【比例問題與對等問題】筆者區別對等問題與比例問題旨在方便溝通與突顯兩者的差異。比例問題指的是64年版課程所進行像這樣的問題：已知一比較量對基準量的比，而且已知一個比較量（或基準量），求基準量（或比較量）的問題。例如「六年級參加夏令營男生和女生人數的比是4：3，女生有63人，男生有多少人？」。另外，對等問題是指：兩等價的對等關係「A：B＝C：D」中有一項是未知數的情境文字題問題。而依對等關係的量情境之分類方式，對等問題亦可依情境演變爲四種問題類型：組合問題、母子問題、交換問題及密度問題等。其問題類型舉例如下：

(1)組合問題：一種親子遊戲3個小孩需要2個大人來協助，有15個小孩將參加遊戲，需要多少大人來協助？

(2)母子問題：成衣廠裡包裝襯衫，每1打中有4件藍襯衫，要包裝 6打需要幾件藍襯衫？

(3)交換問題：小明想知道用幾部舊小汽車可以換 3個布偶，而他是拿了14部舊小汽車換到了6個布偶。算算看，用幾部舊小汽車可以換3個布偶？

(4)密度問題：3公升的水重3公斤，幾公升的水重10公斤？

【比例式及比例式填充題】82年版把「8：100＝2：25」稱作比例算式，簡稱爲比例式，而把「8：100＝(　)：25」稱作比例式塡充題。由於82年版部編本統一地把所有算式視爲某些數學具體活動的紀錄（或表徵符號），這些具體活動包含一串程序：教師布題、學童解題及結果（參見《國小數學教材分析--------整數的數概念與加減運算》一書）。以比例式「8：100＝2：25」而言，應是這些具體活動 （包含：教師布置對等問題，學童針對此類問題的解題活動，並能得到結果）的符號表徵。其中教師應布的對等問題，例如「小英買8枝鉛筆花了100元，用同樣的買法，小華買多少枝鉛筆要付25元？」。筆者建議讓學童形成(1)使用比的符號來記錄對等關係及(2)使用等號「＝」來記錄兩個等價的對等關係（比）的兩項共識（參見本書第二部分活動示例10-6-7進行的內容）後，才進行問題與解題結果的摘要紀錄，即使用比例式「$\frac{9}{7}:1=\frac{36}{7}:4$」來記錄問題與結果 （參見本書第二部分活動示例

10-10-9）。至於比例式填充題，82年版部編本認爲，和其他算式填充題一樣，它是某類情境文字題的問題記錄，例如「18＋25＝( )」是加法情境文字題「教室原有18個磁鐵，老師再買了25個磁鐵後，共有多少個磁鐵？」的問題記錄，而比例式填充題「8：100＝(　)：25」是對等問題「小英買8枝鉛筆花了100元，用同樣的買法，小華買多少枝鉛筆要付 25元？」的問題記錄。筆者建議讓學童能掌握部分的對等問題之解題活動之後，教師才可在重新布題的情況下，要求學童先進行用比例式填充題把問題記下來，再進行解題活動。教師應注意，82年版部編本建議教師，不可布置純數學的比例式填充題給予學童解題，理由是學童的比例概念發展不夠成熟，而使得此比例式填充題過於抽象。除非在對等問題和比例式填充題並置的情形下布題則可允許。

【數量關係與函數】數量關係是指具有某一對應關係的兩組數量，例如粽子個數和它們的價錢，正方形的邊長和它們的面積等，都是一種數量關係。在數學上，對於具有對應關係的兩組數量$(x_1, x_2, .., x_n)$與$(y_1, y_2, .., y_n)$，注意，其次序不可調換，希望找到某一個特定的函數$y = f(x)$，來描述這兩組數量的對應關係，以進一步地利用這個對應關係來預測另一個不在觀察資料裡的x，它的對應項y會是什麼。例如物理學上的自由落體運動，實驗者透過實驗得到兩組對應數據：秒數（$t = 1,2,3,....$）與距離（呎）（$s = 16,64,144,....$），經過分析與嘗試錯誤找到了一個函數$s(t) = 16 \times t \times t$，爾後就可以利用此函數來預測某一特定秒數時的下落距離。像這樣的兩組數量（數學上常把一組稱爲「自變量」，一組稱爲「應變量」），一些學科領域的學者都會遇到，而且想要尋找一個函數來描述兩組數量的對應關係，用以預測一個已知「自變量」的未知「應變量」。

【正比例與反比例】數學上有許多不同類型的數量關係，而「**正比例**」與「**反比例**」是比較簡單且日常生活中較常使用到的兩種數量關係。雖然「正比例」與「反比例」都是函數，但是國小學童尚無函數的概念，若由函數關係引入「正比例」與「反比例」，對國小學童而言過困難，故而82年版部編本透過對應項的比的比值關係引入「正比例」與「反比例」。當所有對應

項的比的比值都相同時，稱這兩組數量成「正比例」；當我們把其中的一組數量先取**倒數**，再求這組倒數和另一組數量的對應項的比的比值，如果這些項的比值都相同時，稱這兩組數量成「反比例」。由上述說明可以推論出：如果甲組數量和乙組數量成「正比例」，那麼乙組數量和甲組數量也會成「正比例」；如果甲組數量和乙組數量成「反比例」，那麼乙組數量和甲組數量也會成「反比例」；如果甲組數量的倒數與乙組數量成「正比例」，那麼甲組數量和乙組數量成「反比例」。

天數（天）	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
總數（元）	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240

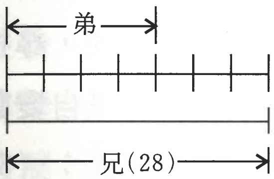
（小華每日存20元，並把天數和所存結果記錄成表。）

【比例式與成正比例的差異】以上表爲例，本書認爲所謂的成正比是指有序的兩組數量之間的關係，當然必須具有對應項的比都相等的性質，也就是其比值都一樣。由於其比都相等，當然可以寫出許多的比例式，例如「1：20＝2：40」 等等，故比的相等是成正比的條件。當數量只有兩組時，我們說天數（1，2）和總數（20，40）這兩組數量成正比例，而其成正比例的條件是，其對應項的比相等，即1：20＝2：40。筆者記得在有些數學課程會把兩組數量成正比例中的「正」省略，而簡稱爲成比例，例如兩三角形的對應邊成比例。

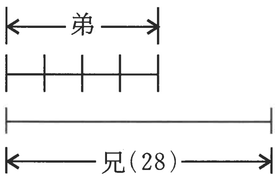
【百分率、命中率、打擊率】在母子對等關係（前比例項是後比例項的一部分，例如「親子遊戲，每組須2個大人，一組共5人」，例如「小華投籃球，投進了10球，共投了40球」）中，其比的比值根據不同情境的文化術語會給不同的「率」之名稱，如佔有率、打擊率、命中率、?壘率、.....等等。例如前述小華投籃球的進球數和投球數，我們說他的命中率0.25。如果把這個對等關係（比）的後項看成（假設）是 100，那與原對等關係（比）等價而後項是 100的對等關係之前項之值即爲百分比或百分數，例如前述小華如果有相同的水準，投100次他應該可以進 25次，，如果用百分數表示爲百分之25，記爲25%。所以25%也是用來表示小華的命中率，我們稱小華的命中

率用百分數來表示爲25%。

【成比例線段圖的意義】82年版部編本的成比例線段圖（簡稱爲線段圖）指的是用數條成比例的線段來表徵問題中所描述的數量，在線段圖中，必須滿足下列兩個條件，第一，圖中應標示每一條線段所代表的是什麼；第二，這些線段的長度應成比例地表現問題中的數量關係。亦可說線段圖是數學問題（尤其是對等關係及分數問題）的多重關係示意圖。而製作成比例的線段圖，對學童而言，需要透過活動的討論與澄清始能做到。以對等問題爲例，在圖中各線段的長度必須符合原問題中的數量關係之要求下，將使欲表徵的兩對等數量關係具體化，對於在分數量感或比例概念陌生的學童，尤其有重要的幫助。以「哥哥有28顆電池，弟弟有的電池是哥哥的$\frac{4}{7}$倍」爲例，作出的線段圖可能如下之兩種：



或



【成比例線段圖的重要性】使用不同的表徵形式來表現一個數學物件，是數學能力的一項指標，反映能由不同的觀點來掌握此數學概念。**線段圖**是圖象表徵的一種，使用線段圖來表現文字描述的問題，常能使問題中數量間的關係具體化。當學童能用成比例的線段圖來表現對等關係、對等問題或分數問題中的數量後，可以進一步地依對等問題或分數運算問題的題意加以操作成比例線段圖，因而獲得結果。換言之，成比例線段圖可以是許多國小數學問題的圖象表徵之一，其優點是對於對等問題與分數問題有其可具體操作的特性，因此是國小許多數學問題的一個解題表徵工具。

【交換問題】對生活在沒有錢幣的「以物易物」時代的人們，應比較容易了解什麼是「交換問題」。那時的人們常見這樣的「交換」，如張三用2隻牛與李四的 100隻雞交換。進一步地延伸，可以詢問：「使用同樣的交換

方式，必須有幾隻牛才換得到400隻雞？」，這樣因交換所衍生的問題稱之爲「**交換問題**」。時至今日，錢幣變成必然的交換物，如市場裡老王的2個橘子和買菜阿英的10元交換等等，幾乎所有交易物品是透過錢幣來定交換量。

【數量關係】人類總想於有限多個的數列中，尋求其規律用以推測有限之外，如下一個會是什麼數字。像是某些玩樂透者，就想從已往的開獎號碼中，找出其規律以預測下一期的號碼。在數學領域內，尋求規律是相當重要的事，它可以簡化複雜的現象，以利一般人理解，更可進一步地應用於預測和控制未來。但所有與數字有關的現象，並非全都具有規律，或有時只是局部具有規律而已，例如儲蓄金額與利息的關係，在某一儲蓄金額的範圍內，是有受其固定利率的規範，而具有規則，但當儲蓄金額過大時，銀行即允許顧客採用利率議價方式，那時儲蓄金額與利息的關係即不再具有規律。在數量關係上，找規則的類型大約有這三類：(1)單獨一個數列，尋找其自身依序出現的規則；(2)兩組對照數列，把其中一組數列看成是自變數，另一組是應變數，尋找其是否具有某一單變數（或一元）函數關係；(3)三組以上的對照數列，此時能找出的函數就變得相當複雜了，例如有可能是多變數（或叫多元）函數關係。在國小階段建議引入的等差與等比數列是屬於第一類，成正比與成反比是屬第二類，而不論是等差數列、等比數列、成正比及成反比都是數量關係教材中較簡單的啓蒙活動。

【等差數列與等比數列】等差數列是一組依序排列的數，其每一後項減前項的差爲一定値者，例如「2,4,6,8,10,12」、「12,24,36,.....,96」及「1,3,5,7,9,11,.....」，其中前二例爲有限等差數列，後一例爲無窮等差數列。由於學童對於不確定數量掌握困難，在國小階段，不討論有限或無窮，而且儘量只給予有限的數列，並只給予等差數列之名稱。等比數列是一組依序排列的數，其每一後項除以前項的商爲一定値者，例如「2,4,8,16,32,64」、「$1,3,9,27,81,..3^{20}$」及「$2,1,\frac{1}{2},...,(\frac{1}{2})^{10},..$」等都是等比數列，由於國小未引入次方符號，故不引入後兩者。最後，教師應注意數學上雖使用

英文字母來表示等差或等比數例，例如《$a^n | a^n = 3n+5$，$n=1,2,3,...,100$》，但由於過於抽象請勿使用。

二、教材處理理念

【對等問題的重要性】筆者同意大部分數學教育家的看法，比例概念對於國中小學童數學概念發展的重要性。但如何幫助學童們發展比例概念呢？根據筆者在《國小數學教材分析----整數的數概念與加減運算》一書中GODS數學課程的觀點而言，對於數與計算教材的主要成份應包含數學內容的學習、數學語言的學習及成人算則的學習三大部分，而每個部分也應有其相對的看法，筆者將另闢章節說明之，此處先強調GODS數學課程主張，學童的比例概念是指學童在經驗「一個一個對等問題和比例問題（參見本章第一節）的解題活動」後，並從中抽離的共同性質稱之。據此觀點，強調學童的比例概念是來自於學童的解題經驗，而非比例的數學定義。也因此突顯對等問題在比例概念發展上的重要性。事實上，對等問題多為生活上經常遇到的實際問題，例如交易問題、飲料果汁的濃度等，而國高中的理化亦經常碰到，若能讓學童發展不同類型的對等問題之解題策略，一方面可使學童易於處理國高中的理化問題，也可進而促使學童比例概念的成熟發展。而至於比例問題筆者認為那是人造的問題，實際的生活情境中似乎沒有，筆者建議如同82年版部編本把比例問題留待國中再處理。

【比例教材與GODS數學課程中數學內容之主張】根據GODS數學課程之數學內容的學習方面，教師的重點工作或關心的主題是學童的比例概念是否形成與發展，因此(1)教學者應確定比例概念是什麼？(2)教學者透過什麼手段來幫助學童形成與發展比例概念？ (3)教學者應了解對等問題的問題類型（數學問題中大人用比例算則來解決的）有那些？ (4)教學者也應了解學童在面對這些問題時，將會有怎樣的解題策略？而這些問題的相對主張筆者整理於下表：

表三：GODS數學課程對比例概念的主張

教學者應了解的問題	GODS數學課程的主張
(1)教學者應確定比例概念是什麼？	比例概念是指「一個一個的對等問題、比例問題或其他大人用比例成人算則來解決的情境文字題之解題活動」的共同特性即是。
(2)教學者透過什麼手段來幫助學童形成與發展比例概念？	由於學童的解題表現源自於其多方面的數學概念發展，導致於其擁有的解題工具多寡不同。教學者應多加肯定與鼓勵這些學童的不同解題策略，課堂中不論教師或學童不可比較不同解題策略之間的優劣。
(3)教學者應了解對等問題的問題類型（數學問題中大人用比例算則來解決的）有那些？	教學者應了解什麼是對等問題、比例問題及是否尚有其他情境文字題，這些問題大人們都是使用比例成人算則來解題的。其中對等問題是國小數學科重要的數學問題，它們有那些類型教師們應了解之。
(4)教學者也應了解學童在面對這些問題時，將會有怎樣的解題策略？或者在那裡可以查得到？爲何學童會有不同的表現？面對這些不同表現教學者的立場應如何？	透過學童用自己的方法解決一個一個不同類型的對等問題、比例問題或其他大人用比例成人算則來解決的情境文字題是形成與發展比例概念的最好手段，至於教師解說概念，及教師示範解題—學童模仿都不是有效形成概念的好方法。

【比例教材與其數學語言之主張】GODS數學課程認爲，當學童的某一數學概念，例如比例概念，發展至某一雛型之後，應進一步地引入相關的數學語言，例如比例式及比例算式塡充題，一來可用以表徵比例概念及其解題活動，二來待其熟悉後，可以做爲學習其他數學概念的解題工具。筆者建議讓學童形成(1)使用比的符號來記錄對等關係及(2)使用等號「＝」來記錄兩個等價的對等關係（比）的兩項共識（參見本書第二部分活動示例10-6-7進行的內容）後，才進行問題與解題結果的摘要紀錄，即使用比例式 「$\frac{9}{7}:1=\frac{36}{7}:4$」 來記錄問題與結果（參見本書第二部分活動示例10-10-9）。 82 年版部編本並未引入比例式算式塡充題來記錄對等問題，筆者認爲，教師可於六年級階段嘗試引入，即在布置某一對等問題給予學童解題之前，先要求學童「用一個算式塡充題把問題記下來」後再算算看。但出現比例式塡充題後，由於國小階段學童的比例概念發展未成熟，所以不建議教師布置純數字的比例式塡充題給予學童解題。

【比例成人算則】對於各種數與計算教材的運算問題，GODS數學課程主張：**在學童可以理解，及上課時間夠用兩條件下，可以引入「成人算則」的學習活動**。在學童習得「成人算則」之後，一來可以提昇其解題效率，二來理解「成人算則」也可使其心智成長，三來和社會上成人溝通與比較後增強學童的信心（陳竹村，民 90a）。一般而言，比例成人算則指的是大人們在面對對等問題或比例問題時，所採用的解題策略稱之。以「小英買 8枝鉛筆花了100元，用同樣的買法，小華買多少枝鉛筆要付 25元？」爲例，大人會先用比例式填充題「8：100＝(　)：25」把這個對等問題記下來後，可能會下列幾種方式解題：(1)使用把前比例項（或後比例項）之前項與後項同乘或同除一不爲0的數，可得到一個相等比的觀點來解題， 即計算前比例項之後項的$\frac{1}{4}$倍正好是25，所以括號( )應是8的$\frac{1}{4}$ 倍；(2)使用比例內項的乘積等於比例外項的乘積的觀點來解題，即100×(　)＝8×25，再得到(　)＝ 2；或(3)把比看成分數，如$\frac{8}{100}=\frac{(\ )}{25}$，再使用交叉相乘相等的方法解題。 這三種解題策略都可稱之爲比例的成人算則，其中後兩者對國小學童都過於抽象而不易理解，故82年版部編本建議在國小階段不要引入。

【依GODS數學課程的解題工具發展模型來設計比例教材】GODS數學課程主張，使用第一章的九、介紹的解題工具發展模型來引入各種數與計算教材中的算式，例如整數加減乘除等（參見《國小數學教材分析------分數的數概念與運算》或《目標導向的發展式數學課程及整數分數教材分析》二書），此引入模式能兼顧學童數學概念的較有效發展，及減輕學童記憶容量的負擔。同樣地，對於比例式的引入也採用此模型，其流程爲 (1)進行這樣的具體活動：教師布置各種類型的對等問題，學童解題此問題及得到結果，並且重複若干次此具體活動， (2)待預估學童對這些問題形成解題活動類型之後，才引入比例式來摘要記錄教師布置的問題、學童的解題活動方式及問題的結果， (3)在不斷地使用比例式來記錄這些具體活動中，希望學童能自動化地使用比例式（即不需要再計算），並用這些自動化的比例式來解決對等問題或比例問題。但由於 (a)對等問題的問題類型實在有夠多，故形成解題活

動類型不易，連帶地，比例式自動化不易及比例概念也不易發展，同時（b）不同類型的對等問題，其解題活動方式也有相當的差異，也使得學童形成解題活動類型不易。基於這些理由，82年版部編本花大部份的時間處理流程中（1）部份的具體活動，即布置各種類型的對等問題給予學童解題，也引入比例式來摘要記錄這些具體活動，但難以進行使學童比例式自動化成為解題工具部份的活動（建議國中教材處理之）。

【對等問題的解題關鍵】對等問題是一個情境文字題，也就說它是一個使用語言或文字來描述某個活動或情境的數學問題。(1)以「3枚郵票賣20元，12枚郵票可以賣多少元？」為例，學童可以布置實際情境，操作情境即可得到答案，而在操作情境中，學童事實上是**把前比例項的兩數量同時累加 4次**，即可得到12枚郵票可賣得80元。(2)以「小英買8枝鉛筆花了 100元，用同樣的買法，小華買多少枝鉛筆要付25元？」為例，學童必須**把前比例項的兩個數量同時等分割成4份**，可得小華買2枝鉛筆要付25元。(3)以「小英買8枝鉛筆花了100元，用同樣的買法，小華買5枝鉛筆要付少元？」為例，學童必須**把前比例項的兩個數量同時等分割成8份再合成其中的5份**，可得小華買5枝鉛筆要付62.5元。(4) 以「小英買8枝鉛筆花了 100元，用同樣的買法，小華買29枝鉛筆要付少元？」為例，學童必須**把前比例項的兩數量同時累加3次，及再加上把前比例項的兩個數量同時等分割成8份再合成其中的 5份**，才可得小華買29枝鉛筆要付或662.5元。筆者認為，(a)對等問題的這些具體操作活動是比例的概念本質，讓學童有機會具體的操作這些對等問題的活動是幫助學童發展比例概念的有效方法；(b)以前比例項轉換成後比例項的倍數來看，以上四種問題分別是整數倍、單位分數倍、眞分數倍及帶分數倍轉換四種類型的對等問題，是對等問題難易分類的方式（維度）之一；(c)教學者不可直接給予學童比例的成人算則，而剝奪學童具體操作這些累加、等分割活動的機會，進而妨礙學童比例概念的發展。(d)換言之，學童能具體操作這些累加、等分割活動，是解決對等問題的關鍵，也是重要的數學方法。

【對等問題的難易因素之一：未知數的位置】對等關係是指兩數量A、B間，由於某種原因，而產生一種配對關係，則稱此兩數量A與B有對等關係，在數學上用有序數對(A，B)表示，或用比的符號表示成 「A：B」。當將A與B的對等關係與其他Am與Bm的對等關係視爲等價類（集），則 「A：B」蛻變爲「每A個就有B個」的比的關係，因此，比的關係與對等關係間的關係，恰如有理數與分數間的關係一般，是一個等價類與構成這一個等價類的個體之間的關係。在對等關係尚未質變爲比的關係之前，對等問題是以一個對等關係爲基礎，經由對等關係中兩量同步地重覆或等分割活動，製作另一個等價的對等關係，由於此時尚未具有等價類的概念，此種製作活動並不可逆；雖然做爲基礎的對等關係(A：B)與被製作出來的對等關係(Am：Bm)，可以記作「A：B＝Am：Bm」，但是此時的等號可能只具備「變成」的語意，而不必然是表示等價關係，如同在初次引入 「2＋3＝5」的紀錄時，等號是「得到」的意義，而非「2＋3」與 「5」等價的意義（參見第四冊第五單元）。按照語文理解的習慣，是以先前的敘述，來理解後續的敘述，例如：在 「8個蘋果賣100元，多少個蘋果會賣25元？」的對等問題，是以「8個蘋果賣100元」的對等關係爲基礎，來推論（製作）「 2個蘋果賣25元」，爲了討論的方便，用「8：100＝(　)：25」來代表這個問題，等號之前的對等關係「8：100」稱爲「前比例項」，而等號之後的對等關係稱爲「後比例項」；又例如：「多少個蘋果賣25元時？8個蘋果賣100元。」，是以「(　)：25」的前比例項爲基礎，來製作「8：100」的對等關係。礙於概念的發展，等價的對等關係尚不被視爲同一類時，上述的兩個例題，在意義上，是完全不同的問題。當對等問題的未知數在後比例項中時，由於作爲推論基礎的對等關係是已知，所以它是正向的對等關係轉換活動，或簡稱爲「**正向活動**」；相對地，當對等問題的未知數在前比例項中時，作爲推論基礎的對等關係中，有部分未知，故而須由轉換後獲得的對等關係（已知），反向地推論轉換前的對等關係，或簡稱爲「**逆溯活動**」。由概念發展的觀點來看，逆溯活動的能力發展於正向活動之後，須先累積正向活動的經驗，對正向活動已有預期時，才有

可能發展逆溯活動，此種發展上的順序，宛如「32＋19＝(　)」與「(　)＋19＝51」兩個問題間的關係，當學童開始學習合成活動時，如果作爲合成活動基礎的起始量未知時，解題時較易發生困難。因此本書認爲有必要區分「正向活動」與「逆溯活動」的對等問題。

【對等問題的難易因素之二：轉換的方式】在進行對等關係的轉換活動時，其轉換的方式影響問題的難度。當前比例項透過整數倍的轉換來獲得後比例項時，可以透過前比例項的重複實施（把前比例項的兩數量同時累加若干次）來完成解答，例如「5個蘋果可以換3個奇異果，15個蘋果可以換幾個奇異果？」或「5：3＝15：(　)」的問題，15中有3個5，所以須要進行3次交換，一次換到3個奇異果，三次交換共得9個奇異果。當前比例項透過**單位分數倍的轉換**來獲得後比例項時，則進一步地需要對前比例項中的兩量，同步地進行等分割活動（在整數範圍時爲等分活動），例如：「15個蘋果可以換9個奇異果，5個蘋果可以換幾個奇異果？」「15：9＝5：(　)」，把15三等分割，其中的一份是5，因此把9三等分割，其中一份是3，即爲答案；最後，當前比例項透過眞分數倍或假分數倍的轉換來獲得後比例項時，除了要將前比例項進行同步的等分割活動外，需再進行重覆製作的活動，例如：「15：9＝10：(　)」，在眞分數倍或假分數倍的轉換中，尙含有尋找公共單位的步驟，例如：需使用15和10的公因數來做公共單位，才能決定等分割的份數及需重覆製作的次數。由概念發展的觀點，學童先發展重複製作的活動，後發展等分割的活動，因此本教材認爲有必要區分整數倍、單位分數倍、眞分數倍（包含假分數倍）等三類轉換問題。另外，當前比例項是透過假分數倍的轉換來獲得後比例項時，學童也可能是使用帶分數倍的轉換來獲得後比例項的，例如「15：9＝35：(　)」，有些學童透過假分數倍（$\frac{7}{3}$倍）轉換來實施具體活動，以求取答案。也有些學童是使用帶分數倍（$2\frac{1}{3}$倍）轉換來求取答案的。

【對等問題的難易因素之三：前比例項的數值範圍】在作爲運算基礎的前比例項中，所使用的數值範圍，亦影響問題解決的難度，故而本教材依其

難度區分為：(1)整數對整數，例如：「$5:3=\frac{1}{3}:(\quad)$」；(2)分數對整數，例如：「$\frac{1}{2}:3=(\quad):\frac{1}{6}$」；(3)分數對分數，例如：「$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=(\quad):\frac{1}{6}$」。由於分數與小數概念及其乘除運算能力，學童較晚發展，因此對等問題的發展次序，亦宜應由整數範圍，逐漸擴充至分數或小數範圍。

【對等問題的難易分類】根據上述對等問題之難易分析來綜合言之，本書將對等問題分別依**問題情境**、**未知數的位置**、**前比例項至後比例項的轉換方式**及**前比例項的數值範圍**等四個解決問題的難易因素來分類，換句話說，在對等問題的分類中，本書確認此四個難易向度：(1)依問題情境來看，交換問題較易（與生活情境較接近，所以學童較熟悉），其次是組合和母子對等問題，而密度對等問題最難（受物理性質的干擾）（參見本章第一節對等問題的情境分類）；(2)正向活動易於逆溯活動；(3)前比例項是後比例項的整數倍、單位分數倍、眞（假）分數倍由易而難；(4)前比例項的數值中，整數對整數、整數對分數（或分數對整數）、分數對分數是由易而難。

依上述的觀點本書把對等問題分類如下，並於括號內說明82年版部編本先後順序的安排：

(1)整數對整數的整數倍轉換之正向活動問題（第九册以交換問題進行）
(2)整數對整數的整數倍轉換之逆溯活動問題（第十册以交換問題進行）
(3)整數對整數的單位分數倍轉換之正向活動問題（第十一册第六單元）
(4)整數對整數的單位分數倍轉換之逆溯活動問題（第十一册第六單元）
(5)整數對整數的眞分數倍轉換之正向活動問題（第十一册第六單元）
(6)整數對整數的眞分數倍轉換之逆溯活動問題（第十一册第六單元）
(7)分數對整數的整數倍轉換之正向活動問題（第十册第十單元）
（註：不包含帶分數和假分數對整數）
(8)分數對整數的整數倍轉換之逆溯活動問題（第十册第十單元）
（註：不包含帶分數和假分數對整數）
(9)分數對整數的單位分數倍轉換之正向活動問題（第十一册第十單元）

（註：第十二冊第九單元帶分數對整數的正向活動，並擴及帶分數和假分數倍）

(10)分數對整數的單位分數倍轉換之逆溯活動問題（第十一冊第十四單元），（註：第十二冊第十一單元帶分數對整數的逆溯活動，並擴及帶分數和假分數倍）

(11)分數對整數的眞分數倍轉換之正向活動問題（第十一冊第十單元）（註：不包含帶分數和假分數對整數）

(12)分數對整數的眞分數倍轉換之逆溯活動問題（第十一冊第十四單元）（註：不包含帶分數和假分數對整數）

(13)分數對分數的整數倍轉換之正向活動問題（未進行）

(14)分數對分數的整數倍轉換之逆溯活動問題（未進行）

(15)分數對分數的單位分數倍轉換之正向活動問題（未進行）

(16)分數對分數的單位分數倍轉換之逆溯活動問題（未進行）

(17)分數對分數的眞分數倍轉換之正向活動問題（未進行）

(18)分數對分數的眞分數倍轉換之逆溯活動問題（未進行）

【比例概念的啓蒙活動】根據前述分析，82年版部編本在第九册時，選用「對等問題」中前比例項為整數對整數，而且前比例項到後比例項為整數倍轉換的「交換問題」來做為比例概念學習的前置經驗，其理由是解題對學童而言較易。在此階段是初引入對等問題，教學者勿使用「比」的專有名詞。

【交換問題的問題類型】在整數對整數（指前比例項）的交換問題中，依前比例項（先說的對等關係）為描述對象，交換問題可區分為：(1)一對多（「多」指2以上的整數，此類型指交換問題中前比例項的前項是1而後項大於等於2的整數，於此類推）、(2)二對多及(3)多對多等不同類型。 82年版部編本在課程設計上，即依其難度因素，分別在第九册第九、十、十二單元逐步地進行交換問題，教師宜注意：有些教學指引及本書中雖然常以比的

方式，來描述交換問題的類型，但是與學童討論交換問題時，宜暫時以單位量轉換的觀點來進行。

【一對多交換問題的問題類型】一對多的交換問題依其未知數（x）位置的不同，可以進一步地區分爲下列四類：(1)1:b=c:x，(2)1:b=x:d；(3)1:x=c:d；(4)x:b=c:d。其中(1)及(2)是「正向活動」的對等問題，而（3）及(4)是「逆溯活動」的對等問題。另外，其中第一類一對多交換問題相當容易，學童用累加或乘法即可解題，而且在文字題的語意描述和乘法問題相差不多，故建議將此類問題直接放入習作裡，不刻意在課堂教學活動中進行。其他如二對多及多對多的交換問題類型也是如此分類，讀者不難類推，故本書不再詳述，亦可參考82年版部編本教學指引第九册。

表四：一對多對等問題類型及問題實例表

問題類型	問題實例
1:b=c:x	1袋包子有4個，6袋包子有多少個？
1:b=x:d	1個蘋果賣9元，老闆賣多少個蘋果可收到27元？
1:x=c:d	1包口香糖有幾片時，4包合起來才會是20片？
x:b=c:d	幾袋花生可以換3公斤鹽時，5袋花生可以換15公斤的鹽？

【成比例線段圖的功能】82年版部編本在整數加減乘除教材的處理時，並未引入特殊式樣的圖像表徵，來作爲表徵問題和解決問題的工具，但也鼓勵學童使用各種圖像表徵，來幫助解題或發表解題策略。直到遇到困難度較高的分數問題（例如分數乘除法、異分母加減等問題）時，該版本才刻意地引入成比例線段圖來表徵這些分數問題及對等問題，用此特殊圖象表徵的理由，在於它可以進行多次的具體等分割及再合其數份之活動（此活動爲分數問題與對等問題之解題活動的特性），並保留這些活動的痕跡，一來，這些具體操作活動是進一步數學抽象思考的基礎，二來，保留具體活動痕跡能幫助檢查解題過程及反思解題過程，進而促成其相關運算概念的較快速發展。簡言之，成比例線段圖是被引入用來幫助學童，在面對分數問題及對等問題之解題活動時，可用的解題工具，及學童用以幫助發表其解題過程的工具。

【指導學童作成比例線段圖的建議】82年版部編本在作圖活動中，有兩

個重要的建議：第一：作線段圖是將對文字敘述的理解，用圖像再呈現出來，所以建議教師先協助學童產生心像，例如：「閉著眼睛想想看，有兩條線，一條是紅線，另一條是藍線，而且1條藍線和4條等長的紅線接起來一樣長」，當能產生心像，再把心像實際地畫下來，是一件比較容易的事；第二：在成比例的作圖要求下，以重複較短的線段（例如：紅線）來作較長的線段（例如：藍線），是比較容易操作的狀況，而由較長的線段透過等分割來製作較短的線段，在操作上是相當困難的事，所以82年版部編本建議在有些作圖的經驗後，宜與學童討論作圖的策略，幫助學童察覺由較短的線段開始畫比較容易。

【比教材的處理流程】本章前節已談過，82年版部編本及本書皆主張，比是某一對等關係的紀錄，例如「3公尺長鐵條重4公斤，可記為3：4」、「5部玩具汽車換3個布偶，可記成5：3」等等。在此定義之下，本書建議重新安排與比有關之教材的處理流程，(1)先進行「對等問題類型中，整數對整數之整數倍正向與逆溯活動」之解題活動，期使學童在對等問題之解題活動中經驗對等關係；(2)在多個對等關係的情境下，討論用比的符號來記錄對等關係：(3)在多個同類對等關係（其先說的前項與後說的後項，分別都是同類量）並置下，例如「小華用5部玩具汽車換3個布偶」、「小英用10部玩具汽車換6個布偶」、「阿信用7部玩具汽車換4個布偶」、.....等等，討論那些換法是相同的換法（此處由於是交換類型的對等關係，所以說是相同的換法，如果是組合類型的對等關係，則稱之為相同的組合），再把相同的換法記錄成「5：3＝10：6」，而把不同的換法記為「 5：3≠7：4」。在比的記錄中，本書建議只引入相等與不相等，而不建議引入比的大小（有些數學把比的大小定義為其比值之大小）。(4)最後，在面對等問題時，再使用比的紀錄符號「：」及等號來摘要記錄此問題的問題、解題活動方式及結果，也就是使用比例式「5：3＝10：6」來記錄對等問題「小華用5部玩具汽車換3個布偶，用同樣的換法，小英用10部玩具汽車可以換多少個布偶？」,及其解題活動方式及結果。

【成正比教材的理念】由於「正比例」是數量關係之一種，現階段學童大部份無法在沒有任何提示之下主動找出兩組數量的關係，故而筆者建議在教學活動中直接要求學童求出對應項的比的比值，在所有比的比值都相等的情境下，約定這兩組數量是成「正比例」。根據杜威對於概念學習的觀點，雖然概念的本質確是指同類事物的共同性質，但概念的習得須反例才得以成型（陳竹村，民90）。是故在教學活動中也應提示兩組數量不是成「正比例」的非例子，要求學童判斷是否成「正比例」。

【倒數的引入】在作線段圖的相關活動中，已建議教師進行透過作線段圖求出整數的倒數的活動經驗，只是學童當時並不知所求的答案即爲整數的倒數而已，也就是說當時進行了倒數的活動，但未引入倒數的專有名詞給予學童。由於在引入「反比例」的定義時，會使用到倒數的語詞，因此建議教師先透過解決一些「被乘數是整數或眞分數，乘數未知，積數是 1」的算式塡充題，塡入答案後，將各個計算完的算式並置於教室黑板上，介紹倒數的意義：對於一數$\frac{2}{3}$而言，有另一數$\frac{3}{2}$和原數的相乘的結果爲 1時，稱這另一數$\frac{3}{2}$是$\frac{2}{3}$的倒數。（讀者若有閱讀困難可參考第二部份相關活動示例說明，或82年版部編本教學指引）

【成反比教材的理念】在認識了倒數的意義之後，建議教師在給定兩組數量的共變對應紀錄表（例如：當總價相同時，郵票的面值及張數對應表），要求學童先判斷這兩組數量是否成「正比例」，在得到否定的答案之後，再要求學童把兩組數量中的一組數量（在紀錄表中看成數）的倒數全部求出並塡入（或重做）紀錄表，然後仿成正比進行的方式，要求學童算出這一組倒數和另一組數的比的比值，並塡入紀錄表中，在確定所有對應項比的比值都相同的情況下，知道這一組倒數和另一組數量是成「正比例」，最後再介紹原來這一組數量（未被取倒數的）與另一組數量是成「反比例」。同樣地，「成反比」也是數量關係之一種，現階段學童大部份無法在沒有任何提示之下主動找出兩組數量的關係，故而筆者建議在教學活動中直接要求學童求出某一組數的所有倒數，並求出另一組數與求出的倒數其對應項的比的比值

，在所有比的比值都相等的情境下，約定這兩組數量是成「反比例」。

【等差數列與等比數列的教材理念】學童在低年級時就有許多2個一數、5個一數或10個一數的數數經驗，此處建議教師透過記錄數數活動，幫助學童經驗等差或等比數列，或給定一個遞增或遞減的等差或等比數列，幫助學童察覺此數列的規律。換句話說，這樣的教學活動只是將等差或等比數列規律明顯化，明白指出前項與後項的關係，幫助學童發現此關係普遍存在；教師宜注意：**國小階段最好不要求學童找出等差或等比數列一般項的公式，也不要求學童預測等差或等比數列的某項是多少。**

參考文獻

杜威（民81）：我們如何思維。台北：五南。

教育部（民90）：國民中小學九年一貫課程暫行綱要。

教育部（民82）。國民小學課程標準。台北市：台捷。

教育部台灣省國民學校教師研習會（民89）：國小數學教材分析----整數的數概念與加減運算。

國立編譯館（民71）：國民小學數學科教學指引第十一册。

國立編譯館（民83～90）：國民小學數學科教學指引第一～十二册。

陳竹村（民90a）：目標導向的發展式(GODS)數學課程及整數分數教材研究分析。台北：五南。

陳竹村（民90b）：國小數學解題工具發展模型的探討。刊於花蓮師院學報第十三期，頁149～167。

黃炳煌編譯，泰勒原著（民69）：課程與教學的基本原理。台北：桂冠。

黃敏晃（民82年）：《數學的內容與格式》。論文發表於國小數理科教育學術研討會。台東市台東師範學院六月五日。

楊美伶（民83）：我國國民小學低年級數學科課程教材改革之探討----數與計算部份。國民小學數學科新課程概說（低年級）。台灣省國民學校教師研習會編印。

Schwab, J. J.(1969). The Practical: A Language for Curriculum. School Review. No. 78. 1969.

Schwab, J. J.(1983). The Practical 4: Something for Curriculum Professors to Do. Curriculum Inqury, No. 13. 1983.

Carr Wilfred(1995). For Education: Toward Critical Education Inqury. Open University Press.