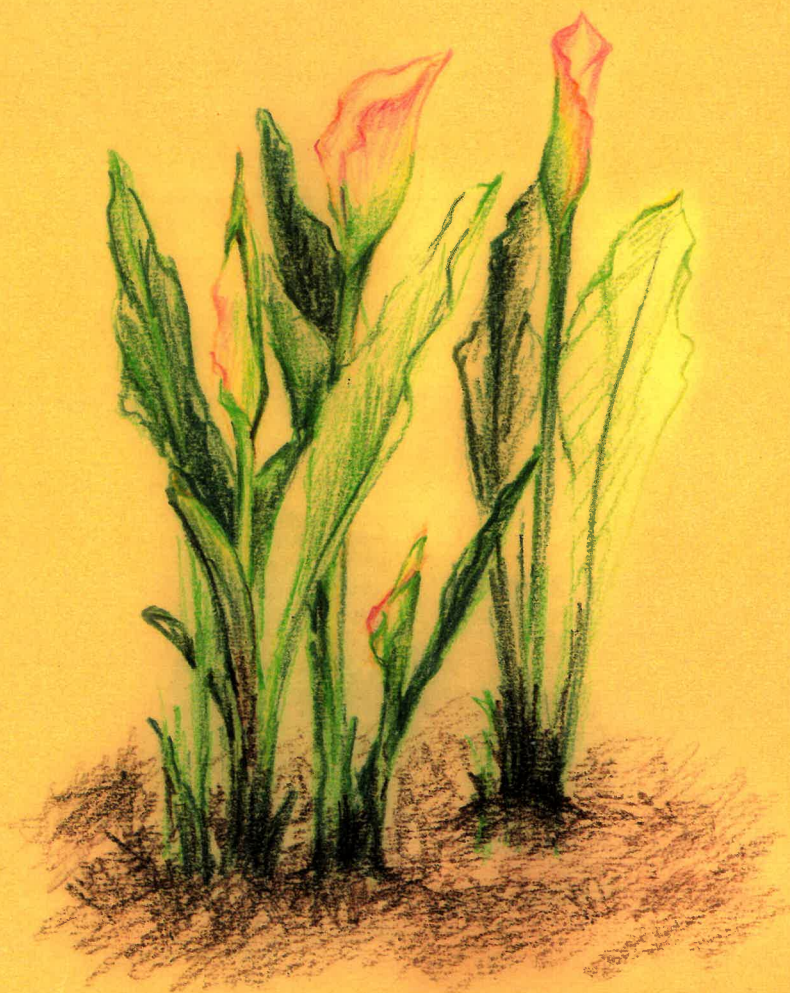


國小數學教材分析

-整數的數量關係



國立教育研究院籌備處出版

國小數學教材分析-----
整數的數量關係

國立教育研究院籌備處 出版

何主任序

九年一貫課程已經自九十年九月開始，在全國各國民小學一年級實施了，雖然仍有一些質疑的聲音，不過，到今（九十一）年九月，一、二年級學童和七年級（國中一年級）學生都要採用新的教科書了。換言之，有更多的國小與國中教師將投入九年一貫課程的教學工作，因而，瞭解各個學習領域的能力指標，以及將能力指標轉換成教學目標與活動目標，就成為教師們首先需具備的能力了。

在數學學習領域方面，九年一貫課程分為「數與量」、「圖形與空間」、「統計與機率」、「代數」、「連結」等五個主題，除了「連結」之外，其他四個主題均分為四個階段，依據學習方式和思考型態兩種學習特徵，用能力指標表示學習的內容和期望學生學得的能力，但是由於能力指標與以往大家熟悉的課程標準敘寫方式不同，前者較具彈性，範圍亦較大，所以，在解讀上，可能會產生一些困難。

九年一貫課程不同於八十二年公布的國民小學課程標準，後者在公布前，即委託本會依據課程標準，研擬實驗教材並進行教學實驗。數學科是在全國各縣市推薦的三十一所學校，自八十一學年度入學的一年級新生中，每校選一至二班學生，採用本會所編之實驗教材（含教師手冊、學生課本和學生習作），進行教學實驗，共計有七十一班，總數約三千餘位學生參與。此外，擔任實驗班教學的教師，於學期開始的第一週，先參與本會辦理之一週研習，課程是完全針對該學期要教的實驗教材內容及教學方法。經過教學實驗和修訂後的實驗教材，移送國立編譯館，再經過修訂與送審之後，成為各國民小學可以選用的版本之一。然而九年一貫課程在實施之前，教育部先從提出計畫的學校中，選擇了若干所學校進行試辦，由於這是第一次採取開放、自主、彈性的方式處理國民小學的課程，有些學校的教師反而有無所適從的感覺。

爲了協助國小教師們儘速地瞭解數學學習領域的能力指標，本會周筱亭研究員自八十九年五月開始，邀請黃敏晃、蔣治邦、朱建正、鍾靜、謝堅、陳竹村等教授及林昭珍、呂玉英、林淑君、胡鈺麟、林素微、魯炳寰、吳淑娟、陳俊瑜等教師，自八十九年五月開始，利用週六或週日，隔週開會，共同討論；九十年開始，又有鄒聖馨、廖淑麗兩位教師加入。希望能針對能力指標作詮譯並提供一些比較務實的參考資料給教師們使用。

這套「國小數學教材分析」一共有十四本，它們各針對不同的數學內容，一方面檢討分析國立編譯館依據八十二年公布之國小數學課程標準出版的「部編本國小數學教科用書」，另一方面則分析九年一貫課程數學學習領域各主題的能力指標，並將「部編本國小數學教科用書」各單元中相關的教學活動與之對應。迄今，已完成八本，它們是：整數的數概念與加減運算、整數的乘除運算、長度、重量和容量、分數的數概念與運算、小數的數概念與運算、面積、時間與速率，此次將再出版四本：整數的數量關係、比（含線段圖）、統計與機率、體積和角度，至於圖形與空間（平面篇）、圖形與空間（空間篇）恐怕要再等一陣子了。

在此四本書付梓之際，以此序向各位參與人士表達誠摯的謝意，希望這些書真正能成爲教師們有用的數學課程規劃與設計參考資料。

何福田

於教育部台灣省國民學校教師研習會

民國九十一年五月

主 編 序

本書是“國小數學教材分析”系列叢書的一本。這套叢書是在民國89年暑假前規劃的，在6月18日第二次會議時決議，將小學數學課程中會出現的教材切割分類，並由參與者選擇有興趣的領域進行分析，然後分冊（份量較少之教材類型則合冊）出版。依照規劃，本叢書共有十四冊，書名及編寫者如下，總編輯和總訂正的工作則由黃敏晃和周筱亭擔任。

- 整數的數概念與加減運算－蔣治邦、陳竹村、謝堅、林淑君、陳俊瑜
- 整數的乘除運算－蔣治邦、謝堅、陳竹村、吳淑娟、林昭珍
- 重量和容量－鍾靜、朱建正、林素微、魯炳寰
- 長度－朱建正、鍾靜、呂玉英、胡鈺麟
- 整數的數量關係（含多步驟問題）－蔣治邦、謝堅、陳竹村、林昭珍、吳淑娟
- 分數的數概念與運算－蔣治邦、陳竹村、陳俊瑜、林淑君
- 面積－朱建正、林昭珍、胡鈺麟
- 時間與速率－鍾靜、魯炳寰、林素微
- 圖形與空間（平面篇）－黃敏晃、廖淑麗、林淑君、陳俊瑜
- 小數的數概念與運算－蔣治邦、謝堅、林淑君、陳俊瑜
- 比（含線段圖）－蔣治邦、謝堅、陳竹村、陳俊瑜、林淑君
- 體積和角度－朱建正、呂玉英、林昭珍、胡鈺麟
- 統計與機率－鍾靜、林素微、魯炳寰、鄒聖馨
- 圖形與空間（空間篇）－黃敏晃、廖淑麗、陳俊瑜、林淑君

按教育部於民國89年9月底的公告，九年一貫課程已於民國90年9月起陸續實施，九年一貫課程的主要精神之一是鬆綁，不但打破學生學習時思考的框架，連同以往國中小學教材設計的中央極權制度也要打破（因此稱課程綱要，而非以前的課程標準），教材設計權下放到各學校（學校本位課程，發展各校的特色）、到基層教師（教育的自主權），這樣的改革理念相當值得肯定，但相對應的是各校的行政能力與基層教師的教學能力也要提升，因此，各地的基層教師都在找尋資料，以便因應這一波重大的改革。

國小數學科教材，在民國82年課程標準之國立編譯館版本的教科用書（尤其是在教學指引）中，已有非常仔細的分析。這些分析，是根據知識發展的可能歷程以及學童認知結構發展的層次來進行，這種做法其實和九年一貫課程強調培養學生數學能力，而非灌輸學生許多數學知識的精神一致。所以，這些教材對基層教師在準備九年一貫課程的執行時，應具有豐富的實用價值。

但是，國立編譯館版本的國小數學教科書，將來不會再出版，即使擁有這套教科書，參考時仍有些不方便，一方面是各種教材切割分佈在各冊之中，翻閱不易；另一方面則是有些教材分析的基本原則，在教材發展當時並沒有納入教學指引。我們藉由這次機會將同類教材放在一起並加以精緻化，希望透過這套叢書能協助基層教師更清楚各類教材發展的脈絡。

由於九年一貫課程實施在即，完成此項任務是相當迫切的。且所有參與人員都有他們自己的本職，因此，編寫的工作都在許多週末（週休二日很好用）的溝通討論形成共識後，回家繼續挑燈夜戰才能完成，我們很高興在89年12月底前，已先完成其中的四本；九十年九月出版隨後的四本。現在我們終於可以再出版四本了。

在這裡要感謝所有參與人員的熱忱，由於大家無私的奉獻，使這套叢書的出現成爲可能。

周筱亭 黃敏晃
於民國91年5月

編 輯 要 旨

- 一、本書為「國小數學教材分析」系列叢書中的一冊，該叢書預計出版十四冊，它們分別是：整數的數概念與加減運算、整數的乘除運算、長度、重量和容量、分數的數概念與運算、小數的數概念與運算、時間與速率、面積、圖形與空間（平面篇）、整數的數量關係、比、統計與機率、體積和角度、圖形與空間（空間篇），八十九年度已出版前四冊，九十年九月出版隨後的四冊，現在（九十一年六月）終於可以再完成其中的四冊。
- 二、編寫本系列叢書的目的在於一方面檢討臺灣省國民學校教師研習會「國民小學數學課程實驗小組」根據教育部八十二年公布的「國民小學數學課程標準」研發出的「國小數學實驗教材」和實驗後，由國立編譯館修訂並送審通過、出版的「部編本國小數學教科用書」內容，重新分析各主題的數學架構與兒童學習的認知結構；另一方面針對九年一貫課程數學學習領域中，各主題的能力指標，將前述「部編本國小數學教科用書」各單元中相關的活動與之對應，提供關心國民教育的人士參考。
- 三、本叢書各冊中所列之活動目標及內容，大都取材自國立編譯館的「部編本國民小學數學教學指引」一至十二冊，並已徵得該館同意引用，在此致謝。
- 四、限於篇幅，無法將各相關活動的詳細內容列於書內，但已標出各活動的出處（冊與單元），有興趣的讀者可參閱各冊教學指引。

目次

前言.....	1
壹、緒論.....	1
一、因數與倍數.....	1
二、加、乘法交換律、結合律，乘法對加法的分配律.....	10
三、列式活動.....	18
四、等號的意義.....	20
五、兩(多)步驟問題.....	25
貳、八十二年課程整數的數量關係(含多步驟問題)編輯理念.....	36
一、因數與倍數.....	36
二、加法交換律、結合律，加法和減法的相互關係.....	46
三、乘法交換律、結合律，乘法對加法的分配律，乘法和除法的相互關係.....	51
四、列式.....	59
五、電算器.....	66
六、兩步驟問題.....	68
七、和式、差式、積式、商式與大小關係.....	77
八、併式表徵.....	90
九、 $>$ 、 $=$ 或 $<$ 的遞移性，「逐次減項」的記法.....	106

前 言

本文區分成緒論以及整數的數量關係（含多步驟問題）課程編輯理念兩大部份。

其中緒論部份包含：一、因數與倍數；二、加、乘法交換律、結合律，乘法對加法的分配律；三、列式活動；四、等號（ $=$ ）的意義；五、多（兩）步驟問題等五個部份。而整數的數量關係（含多步驟問題）課程編輯理念部份包含：一、因數與倍數；二、加法交換律、結合律，加法和減法的相互關係；三、乘法交換律、結合律，乘法對加法的分配律，乘法和除法的相互關係；四、列式；五、電算器；六、兩步驟問題；七、和式、差式、積式、商式與大小關係；八、併式表徵；九、 $>$ 、 $=$ 或 $<$ 的遞移性，逐次減項的記法等九個部份。其中六至九這四個部份都與多（兩）步驟問題有關，爲了方便讀者閱讀，特別分割成四個部份來說明。

壹、緒論

一、因數與倍數

本文將因數與倍數問題區分成：（一）因數與倍數的意義；（二）公因數與公倍數；（三）最大公因數與最小公倍數等三個部份來說明。

（一）因數與倍數的意義

1、因數問題

部編本國小數學教科用書所依據的實驗教材（以下簡稱本教材）使用除法觀點，由總量爲問題的起點，探討可能組成總量的單位量，來處理因數的啓蒙問題。以總量是12爲例，12是以「1」爲單位量來描述，共有12個「1」，因此1是12的因數，若12改用「2」爲單位量來描述，12共有6個「2」，因此2也是12的因數，可是改用「5」爲單位量來描述時，12無法用整數個

5 來組成（數學上只在整數範圍內討論因、倍數），所以「5」不是12的因數，本教材透過12可以由1, 2, 3, 4, 6, 12這些單位量組成的方式，引入因數的概念。

對成人而言，透過除法算式「 $12 \div 3 = 4 \dots 0$ 」，就可以知道3與4都會是12的因數，因為多數成人已發展出測量運思，可以彈性地互換單位量與單位數的角色，透過「 $12 \div 3 = 4 \dots 0$ 」，就可以推得「 $12 \div 4 = 3 \dots 0$ 」，因此3是12的因數，4也會是12的因數。相同地，成人透過乘法算式「 $12 = 3 \times 4$ 」，也可以知道3與4都是12的因數，因為多數成人掌握了整數乘除法互為逆運算的關係，透過「 $12 = 3 \times 4$ 」，就可以推得「 $12 \div 3 = 4 \dots 0$ 」，所以3與4都是12的因數。

數學上都在整數的情境中，透過是否能夠整除的方式討論因數問題，但是直接在整數情境透過除法討論因數的意義，對國小學童而言，可能並不恰當，因為整數本身相當抽象，當學童測量運思尚未發展完全，無法將等分除與包含除視為相同的問題時（無法彈性地互換單位量與單位數的角色），可能混淆除數的雙重意義（以等分除問題「甲有12元，平分給3人，儘量分完，每人可以分得多少元？剩下幾元？」為例，除數3人是單位數；以包含除問題「甲有12元，一人分3元，儘量分完，可以分給多少人？剩下幾元？」為例，除數3元是單位量），不易掌握由單位量（因數）組成總數的意義，故而本教材先由情境問題進入，探討哪些單位量可以組成總量的意義，等待學童累積足夠的經驗後，再正式引入因數的意義。

爲了讓學童在各種情境問題中，都能夠掌握總量可以由哪些單位量組成的意義，本教材透過下列三種問題情境，幫助學童逐步形成因數的概念：①在方陣排列問題中，探討給定總量的方陣的可能排法；②在包含除及等分除的情境問題中，給定總量，要求學童回答可能的等分組方式（總量可以由那些單位量組成）；③在倍的問題情境中，給定總數，要求學童解決可能組成單位量的數值問題。本教材同時透過限制使用除法算式記錄解決上述問題解題過程的方式，希望學童在各種情境問題中，都能掌握總量可以由哪些單位

量組成的意義，並形成以總量為起點，使用除法算式記錄解題過程的共識。本教材不希望學童以部分的觀點，透過合成的方式來解決因數問題，例如 1、2、3、4、6、12，都可以累積成 12，所以它們是 12 的因數；希望學童能由全體的觀點，透過分解的方式來看問題，例如 12 能夠以 1、2、3、4、6、12 為單位量來組成，所以它們是組成 12 的因數。

當學童在各種情境問題中，都能掌握總量可以由哪些單位量組成的意義，並使用除法算式記錄解題過程，逐步形成因數的概念後，本教材透過學童熟悉的方陣排列問題，例如「40 個小朋友排成的長方形隊伍，一排一排的人數都要一樣多，而且要全部排完，一排可以分到幾個小朋友？」，先要求學童討論可以怎麼分，並限制使用有除號的算式把做法記下來，接著脫離方陣的情境，要求學童看著紀錄，說出 40 除以多少，可以剛好分完，沒有剩下，並透過「40 除以 2，剛好分完，沒有剩下，並且 40 和 2 都是整數，所以 2 是 40 的因數」的討論方式，引入因數的意義。

2、因數與倍數的關係

在數學上，是以除法原理（若有 a 、 b 兩個正整數，則一定可以找到 q 、 r 兩個非負整數，滿足 $a = b \times q + r$ 的關係，且 $b > r \geq 0$ ）為基礎，透過判斷 a 是否能夠整除 b （餘數是否為 0）的方式，引入因數與倍數的定義：設 a 、 b 是兩個正整數，若 $a = b \times q + r$ ，其中 q 是正整數，而且 $r = 0$ ，則稱 b 是 a 的因數，或稱 a 是 b 的倍數。（在國小數學中，因數與倍數的討論，以正整數為範圍）。

由問題的題意來區分，因數問題是指定一個正整數，詢問以哪些正整數為單位量，可以乘法性地合成這個指定的正整數，例如：探討 6 的因數時，一個 6 是 6；二個 3 是 6；三個 2 是 6；六個 1 是 6，因此 6、3、2、1 皆是乘法性地合成 6 的單位量，稱之為 6 的因數。相對地，倍數問題是指定一個正整數做為單位量，詢問由此單位量可以乘法性地生成哪些正整數，例如：探討 6 的倍數時，以 6 為單位量可以產生 6、12、18、.....，這些以 6 為單位量所生成的正整數，稱之為 6 的倍數。也就是說，因數問題

是向內探討組成一個正整數的單位量；而倍數問題是向外探討以一個正整數為單位量，可以生成哪些正整數，這是兩個相反方向的問題探討。

在數學上，都是直接透過因數的意義引入倍數（若 b 是 a 的因數，就等同於 a 是 b 的倍數），這是因為成人多已發展出測量運思，可以彈性地互換單位量與單位數的角色，瞭解乘、除法互為逆運算的關係，因此成人可以掌握因數與倍數的相對關係，明白 a 是 b 的因數時， b 就是 a 的倍數的意義。但是對測量運思尚未發展完全的學童而言，不易掌握因數與倍數的相對關係，因此本教材分別從不同的角度引入因數與倍數的意義（在給定總數並尋找可能的單位量數值問題中，討論因數的意義，而在乘數未知算式填充題情境下，討論積數是否為被乘數的倍數，介紹倍數的意義），期望學童能分別掌握因數與倍數的意義，為國中引入數學上因、倍數的定義來鋪路。

為了幫助學童能察覺因、倍數間的相對關係，並經驗數概念的乘法性結構，本教材透過下列活動，逐漸培養學童測量運思的發展：①透過判斷一個整數是否為其因數的整數倍的方式，讓學童察覺此整數為其所有因數的倍數；②透過先求出某數所有的因數，再判斷該數是否為其所有因數的倍數的方式，幫助學童察覺一數是其所有因數的公倍數；③透過解決兩數相乘問題，幫助學童察覺兩數相乘的積數為兩數的公倍數，並希望學童能不經過計算的過程，就直接能判斷兩數相乘的積數為兩數的公倍數。

3、倍數問題

因為因數概念相當抽象，學童也較少接觸到相關的問題，因此本教材先在情境問題中討論可能組成的單位量，待學童累積足夠的解題經驗後，才正式引入因數的意義；但是五年級學童已有許多倍的問題的解題經驗，也經常使用倍的語言，已有足夠的解題經驗，可以直接引入倍數的意義，因此，本教材透過乘數未知的乘法算式填充題「 $2 \times () = 10$ 」，先要求學童解題，再經由語言的轉換：「2 的 5 倍是 10，所以 10 是 2 的 5 倍」，引入倍數的意義：「10 是 2 的 5 倍，而且 2、5、10 都是整數，所以說 10 是 2 的倍數」

。當學童有能力與方法判斷某數是否為另一數的倍數時，以某一正整數為起點，使用乘以整數倍的方式，求出該正整數在某一數量範圍內的所有倍數，並不是件太困難的事。

4、2 是否為 0.2 的倍數？0 是否為 2 的倍數？

0 是否為偶數？0.2 是否為偶數？

「2 是否為 0.2 的倍數？0 是否為 2 的倍數？」，「0 是否為偶數？0.2 是否為偶數？」，這些都是與因、倍數有關，而在教學上常引起混淆的問題，依據筆者在師院多年的教學經驗，絕大多數的師院生認為「2 是 0.2 的倍數，0 也是 2 的倍數」；而多數的師院生認為「0 不是偶數；0.2 也不是偶數」。

在數學上，如果 a 是 b 的倍數（ b 是 a 的因數），則 a ， b 要滿足下列三個條件：① a ， b 都是整數；② $b \neq 0$ ；③ 存在一個整數 q ，滿足 $a = b \times q$ 。由上述的條件限制可以看出，2 不是 0.2 的倍數，因為 0.2 不是整數；而 0 是 2 的倍數，因為 0 與 2 都是整數，而且滿足 $0 = 2 \times 0$ 。

在國小階段討論因、倍數問題時，不宜包含 0，因為 0 相當抽象，而且在日常生活中，不容易找到讓學童接受「任何正整數都可以當做單位量來組成 0」的例子，也就是說，學童不容易接受 0 是任意正整數的倍數。在國小階段討論「甲是乙的倍數」時，指的是甲、乙兩個數都是正整數，滿足甲數除以乙數的商數也是正整數，且餘數為 0 的關係，與日常生活中談論的「甲量是乙量的幾倍」不同，日常生活中所指的幾倍是數量上的多少倍，甲量或乙量並不一定要是整數，兩者間也不一定要滿足整數倍的關係。例如人們在日常生活中常說 1 公斤甲物的重量是 2 公斤乙物重量的 0.5 倍，但是 1 並不是 2 的倍數；人們也常說 2 公尺繩子的長度是 0.5 公尺繩子長度的 4 倍，但是 2 也不是 0.5 的倍數，因為 0.5 不是整數。

在數學上，所有 2 的倍數所成的集合稱為偶數，0 是 2 的倍數，所以 0 也是偶數；0.2 不是 2 的倍數，所以 0.2 不是偶數；在國小階段，討論倍數問題時，並不包含 0，因此，在國小階段，也不討論 0 是否為偶數。

（二）公因數與公倍數

1、公因數問題

仿引入因數概念的方式，本教材透過探討兩個量是否有共同組成的單位量的方式，引入公因數的啓蒙問題；甲、乙兩個量（例如12與18），以1、2、3、4、6、12為單位量，都可以組成12，而以1、2、3、6、9、18為單位量，都可以組成18，其中1、2、3、6既是組成12的單位量，也是組成18的單位量，本教材透過12與18都可以由1、2、3、6這些單位量組成的方式，引入公因數的初步概念。

與因數問題相同，本教材也透過下列三種問題情境，幫助學童逐步形成公因數的概念：①在方陣排列問題中，探討兩個方陣的可能連接方式；②透過包含除及等分除的情境問題，先要求學童分別找出兩相異量各自的可能等分組的方式，再透過比較各自的等分組方式，解決等組的可能數值問題；③在倍的問題情境下，給定兩總量，透過比較各自可能的單位量數值，找出相同單位量的可能數值。希望學童在各種情境問題中，都能解決兩總量可以有哪些相同單位量的問題，為形成公因數的概念鋪路。

當學童在不同問題情境下，累積許多解決兩總量可以有哪些相同單位量的活動經驗，以及在整數的情境下，討論因數問題的活動經驗後，本教材直接在整數的情境下引入公因數的意義，要求學童先分別列出兩數（以40與20為例）的因數，再透過討論其中某因數（以4為例）是否為兩數共同因數的方式，引入公因數的意義（4是40的因數，4也是20的因數，所以4是40和20的公因數）。

本教材限制學童在開始學習公因數意義時，使用先窮盡兩數量各自可能由哪些單位量組成，再尋找都能組成兩數量的共同單位量的方式解題，經驗公因數是兩數量共同因數的意義，當學童能掌握公因數的意義後，才開始接受其他的解題策略，例如使用嘗試錯誤的解題策略，分別判斷兩數量是否都能由某單位量組成。

本教材預測學童面對「兩數有哪些公因數？」問題時，大多會採用下列

兩種解題策略：①先分別求出兩數的所有因數，再由其中找出共同的因數；②先找出某一數的所有因數，再判斷這些因數是否為另一數的因數。若部份學童先將兩數改記成質因數的連乘積後，再透過質因數的連乘積找出公因數；或先找出兩數的最大公因數，再透過找出最大公因數的因數的方式找出公因數，建議教師請學童說明為什麼使用這種方式可以解題成功的理由，並淡化處理。

2、公倍數問題

以探討一個指定正整數有哪些因數為基礎，可以探討兩個正整數有哪些共同因數的問題，這些共同的因數稱為公因數。同樣地，以探討一個指定正整數有哪些倍數為基礎，可以探討兩個正整數有哪些共同的倍數的問題，這些共同的倍數稱為公倍數。

當學童已有求出某整數在某一數量範圍內的所有倍數，以及求出兩整數公因數的經驗後，應該也能夠掌握公倍數的意義。本教材直接在整數的情境下，要求學童分別求出兩數（例如 3 與 4）在某一數量範圍內的倍數，透過兩數各自的倍數的比較活動，引入公倍數的意義：12 是 3 的倍數，12 也是 4 的倍數，所以 12 是 3 和 4 的公倍數。

本教材預測學童面對「兩數在某一數量範圍內有哪些公倍數？」問題時，大多會採用下列兩種解題方式：①先分別求出兩數在某一數量範圍內所有的倍數，再由其中找出共同的倍數；②先找出某一數在某一數量範圍內所有的倍數，再判斷這些倍數是否為另一數的倍數。若部份學童先將兩數記成質因數的連乘積後，再透過質因數的連乘積找出公倍數，本教材建議教師請學童說明為什麼使用這種方式可以解題成功的理由，並淡化處理。

(三) 最大公因數與最小公倍數

82年國民小學數學科課程標準教材綱要數與計算部份，並沒有要求引入最大公因數與最小公倍數的意義，64年課程引入求最大公因數與最小公倍數問題，主要的原因是要運用最小公倍數來進行通分活動，運用最大公因數來進行約分活動。解異分母分數加減問題時，通分是不可缺少的，進行分數乘以分數或分數除以分數問題的解題活動時，以分數形式進行計算較為簡單，如果再進行約分，則計算更為簡便，所以64年課程認為會求最大公因數與最小公倍數，是學童解決分數問題的必備條件。

本教材認為會求最大公因數與最小公倍數，並不是學童解分數問題的必備條件，學童還有其它策略可以解決分數問題，當學童能掌握數概念的乘法性結構，發展出比例運思時，才可能理解如何運用最大公因數或最小公倍數，來簡化分數問題的解題活動。如果要求學童提早學習，或引入某些較有效率，但學童無法理解的解題策略，則只會讓學童在知其然，而不知其所以然的情況下模仿解題過程。

雖然82年課程標準中並不包含最大公因數與最小公倍數的教材，但是對國小學童而言，當學童能掌握公因數與公倍數的意義，就能夠瞭解最大公因數與最小公倍數的意義，而且在師生溝通中，最大公因數與最小公倍數的名詞經常被使用，因此本教材引入求最大公因數與最小公倍數的活動，這些活動都是學童能夠掌握的。教師請注意，本教材只引入最大公因數與最小公倍數的意義，並不期望學童能使用最大公因數或最小公倍數的概念解決問題。

1、最大公因數問題

當學童能夠掌握公因數的意義，並能求出兩整數所有的公因數後，本教材接著在整數情境中，要求學童先求出所有的公因數，再透過比較活動，找出其中最大的公因數，引入最大公因數的意義；本教材亦限制在首次引入最大公因數意義時，應透過先找出所有的公因數，再由這些公因數中找出最大的公因數的方式進行活動，因為最大公因數是經過公因數間大小比較活動後

產生的，不透過公因數間的比較活動，學童較無法掌握最大公因數的意義。

本教材預測大部分學童面對最大公因數問題時，大多會採用先求出兩數所有的公因數，再透過比較活動，在公因數中找出最大公因數的方式解題，這是現階段學童可以掌握的解題策略；部分學童也可能使用64年課程引入的短除法來求最大公因數，短除法是使用「質因數分解法」解題的摘要記錄，現階段學童無法理解其意義，雖然學童可以模仿成人的解題步驟，透過短除法的格式，來求出最大公因數，但是當學童找出 c 是 a 與 b 的公因數，再找出 d 也是 a 與 b 的公因數時，無法理解為什麼 $c \times d$ 也會是 a 與 b 的公因數。基於上述理解上的困難，本教材不引入使用短除法求最大公因數的解題策略。

2、最小公倍數問題

當學童能夠掌握公倍數的意義，並能求出兩整數在某一範圍內所有的公倍數後，本教材接著在整數的情境中，要求學童先求出兩整數在某一範圍內所有的公倍數，再透過比較活動，找出其中最小的公倍數，引入最小公倍數的意義。相同的，本教材亦限制在首次引入最小公倍數意義時，應透過先找出兩整數在某一範圍內所有的公倍數，再由這些公倍數中找出最小的公倍數的方式進行活動。

本教材預測大部分學童面對最小公倍數問題時，大多會採用先求出兩整數在某一範圍內所有的公倍數，再透過比較活動，在公倍數中找出最小公倍數的方式解題，這是現階段學童可以掌握的解題策略。部分學童也可能使用64年課程引入的短除法來求最小公倍數，但是現階段學童無法理解使用質因數分解策略所引入的短除法解題方式，因此，本教材也不引入使用短除法求最小公倍數的解題策略。

二、加、乘法交換律、結合律，乘法對加法的分配律

本文將加、乘法交換律、結合律，乘法對加法的分配律區分成：（一）加法交換律；（二）乘法交換律；（三）乘法對加法的分配律；（四）結合律等四個部份來說明。

（一）加法交換律

交換律是一種求二元運算之結果與次序無關的規則，在加、減、乘、除四則運算中，只有加法和乘法兩種運算滿足交換律。加法交換律是指被加數與加數的角色互換，其運算結果不變的規律，而乘法交換律是指被乘數與乘數的位置交換，而其運算結果不變的規律。

許多研究中都發現，低年級學童在併加型問題情境下，最容易接受加法交換律的現象（在添加型問題情境下，則不易接受加法交換律的現象），以併加型問題「5朵紅花和17朵黃花，一共是幾朵花？」為例，學童較易接受「先算紅花」或「先算黃花」，其結果都會一樣的事實；學童亦最容易在併加型問題情境中，自行發展出符合加法交換律的解題策略，以簡化計算過程。教師請注意，加法交換律只有在特定的數量組合下（例如 $9 + 38 = ()$ ），使用往上數策略（累進性合成運思）解題，才可能簡化計算過程，如果學童透過兩次做數及一次點數活動解題（序列性合成運思），或使用多單位策略的成人算則解題（部份－全體運思），加法交換律對簡化計算過程並沒有幫助。

（二）乘法交換律

1、算式的意義

對剛接觸乘法問題的國小學童而言，乘法算式是與他人溝通解題活動的數學語言，不同的解題活動應該使用不同的算式來記錄。以乘法問題「一輛小汽車有4個輪子，3輛小汽車共有幾個輪子？」為例，當學童以4個輪子為單位量，透過1個4是4、2個4是8、3個4是12的方式算出共有12個輪子，他就應該將3個4是12（或4的3倍是12）的結果摘要地記成「

4 × 3 = 12」；當學童以 3 個輪子為單位量（將小汽車的輪子分解後，將 3 個右前輪的輪子，3 個左前輪的輪子，3 個右後輪的輪子，3 個左後輪的輪子分別堆成四堆），透過 1 個 3 是 3、2 個 3 是 6、3 個 3 是 9、4 個 3 是 12 的方式算出共有 12 個輪子，他就應該將 4 個 3 是 12（或 3 的 4 倍是 12）的結果摘要地記成「3 × 4 = 12」。

如果 3 個 4 是 12（3 的 4 倍是 12）的結果可以記成「4 × 3 = 12」，也可以記成「3 × 4 = 12」，那麼，只看到解題者的摘要記錄（乘法算式），而沒有看到解題者解題過程的他人，將無法知道解題者是怎樣算出答案的。換句話說，就算式是與他人溝通解題活動的觀點，學童怎麼算，他就要怎麼記，算式應該確實地反應解題活動。

2、乘法交換律的意義

乘法交換律是指被乘數與乘數的位置交換，而其結果不變（ $a \times b = b \times a$ ）的規律，成人都相當地熟悉乘法交換律，也經常利用乘法交換律的性質幫助解題，但是當成人被詢問為什麼「3 × 4」的積數會和「4 × 3」的積數相等時，多數的人都會回答「因為它們的答案一樣」，這些人只是功能性地瞭解乘法交換律的意義。

「3 × 4」的積數和「4 × 3」的積數的答案一樣，應該不是乘法滿足交換律的理由，因為透過數量比較活動，當兩個算式數值化後的答案一樣時，本來就應該使用等號來記錄兩邊一樣大的結果，例如當「9 + 3」與「3 × 4」數值化後的答案一樣時，我們也會將一樣大的結果記成「9 + 3 = 3 × 4」。

乘法交換律指的是不必將兩個算式數值化，就可以預期它們的結果必然會相等，也就是說，每一個乘法問題，都會有兩種不同的解法（可以彈性地對調單位量與單位數的角色），如果有一種解法是透過累積 3 個 4 的方式得到答案，就一定會有另一種累積 4 個 3 也可以得到答案的解法，所以「4 × 3」的積數和「3 × 4」的積數，它們的答案一定會相同。

先以「3行4列的矩陣排列」問題為例，學童可能有兩種解題策略，第一種是以橫列的4個元素為單位量的解法（有3個4，或4的3倍），第二種是以直行的3個元素為單位量的解法（有4個3，或3的4倍），第一種解題活動可以將結果摘要地記成「 $4 \times 3 = 12$ 」，第二種解題活動可以將結果摘要地記成「 $3 \times 4 = 12$ 」，因為它們都是解決同一個問題的合理解法，所以不必算出這兩種解法的答案，就可以知道「 4×3 」的積數和「 3×4 」的積數一定會相等。

再以問題「一隻青蛙有4條腿，3隻青蛙共有幾條腿？」為例，學童也可能有兩種解題策略，第一種是多數學童可能出現的解法，以一隻青蛙的腿數（4隻）為單位量，算出3個4是12（4的3倍是12），這種解法可以稱之為全屍的解法；第二種是比較少出現的解法，學童以青蛙某一個部位的腿數（3隻）為單位量（3隻青蛙有3條左前腿，3條左後腿，3條右前腿，3條右後腿），算出4個3是12（3的4倍是12），這種解法可以稱之為分屍的解法。全屍的解法可以將結果摘要地記成「 $4 \times 3 = 12$ 」，分屍的解法可以將結果摘要地記成「 $3 \times 4 = 12$ 」，因為它們都是算3隻青蛙腿數的合理方法，所以不必算出這兩種解法的答案，就可以知道「 4×3 」的積數和「 3×4 」的積數一定會相等。

最後，再以問題「一枝鉛筆賣4元，3枝鉛筆賣多少錢？」為例，學童也可能有兩種解題策略，第一種是學童經常使用的解法，學童以一枝鉛筆的錢數（4元）為單位量，算出3個4元是12元，這種解法可以稱之為「一枝一枝」的買法，買第1枝鉛筆付4元，第二枝鉛筆付4元，第三枝鉛筆也付4元；第二種是學童不可能出現，但也是一種合理的解法，以每一隻鉛筆的第一個1元（共有3個1元）為單位量，算出共有4個3元，合起來是12元，這種解法可以稱之為「分期付款」的買法，共分四期付款，第一期每枝筆付1元，3枝筆共付3元，第二期每枝筆再付1元，3枝筆共付3元，第三期每枝筆再付1元，3枝筆共付3元，第四期每枝筆再付1元，3枝筆共付

3 元。「一枝一枝」的買法的結果可以摘要地記成「 $4 \times 3 = 12$ 」，「分期付款」的買法的結果可以摘要地記成「 $3 \times 4 = 12$ 」，因為它們都是買 3 枝鉛筆的合理買法，所以不必算出這兩種買法的錢數，就可以知道「 4×3 」的積數和「 3×4 」的積數一定會相等。

由上面的描述可以知道，乘法交換律指的是每一個乘法問題都有兩種做法。如果以 4 為單位量，透過累積 3 個 4 的方式得到答案，就一定可以先在 3 個 4 中，一次抽取一個 1，合成一個新的單位量 3，抽取四次 1 後（用盡 4 中所有的 1），就可以形成 4 個 3，因此也可以透過累積 4 個 3 的方式得到答案，所以不必算出答案，就可以知道「 4×3 」的積數和「 3×4 」的積數一定會相等。換句話說，乘法交換律指的是可以彈性地互換單位量（被乘數）與單位數（乘數）的角色，而不影響對全體意義的掌握。教師請注意，乘法交換律並不是描述一種解法可以有兩種不同的記法，例如當學童使用以 4 為單位量（共有 3 個 4）的方式解題時，他可以將解題過程與結果記成「 $4 \times 3 = 12$ 」，也可以記成「 $3 \times 4 = 12$ 」（因為答案一樣），這種想法是混淆乘法記錄格式的意義。

3、乘法交換律的評量問題

以乘法問題「一輛小汽車有 4 個輪子，3 輛小汽車共有幾個輪子？」為例，當學童將上述問題的解題過程與結果記成「 $3 \times 4 = 12$ 」時，教師們常為了如何給分而煩惱，有人認為應該給全部的分數，有人認為不應該給分，也有人認為只能給一半的分數。筆者的建議是「上課從嚴，評量從寬」，只要考卷上出現的是合理的算法或答案（不論學童是否瞭解其意義），都應該給分，但是，當教師發現學童可能混淆解法的意義時，必須在課堂活動中加以澄清。

一般而言，當學童出現「 $3 \times 4 = 12$ 」這種記法時，綜合教師同意給分的理由，常見的有下列五種：

第一種理由：「 3×4 」的積數與「 4×3 」的積數的數值相等（答案

都是12)，所以可以將解題過程摘要地記成「 $3 \times 4 = 12$ 」，也可以記成「 $4 \times 3 = 12$ 」。

同意這個理由的教師們請思考，如果學童將解題過程摘要地記成「 $7 + 5 = 12$ 」，它的答案也是12，你會同意給分嗎？如果你認為「 $7 + 5 = 12$ 」這個算式與解題活動無關，沒有意義，不應該給分，那麼當學童透過累加3個4的方式得到答案，但是卻將解題過程記成「 $3 \times 4 = 12$ 」，這個算式也與解題活動無關，是否也不應該給分？

第二種理由：當學童將解題活動記成「 $3 \times 4 = 12$ 」，教師應該把他找來，問他為什麼可以這樣記，如果學童回答「因為乘法滿足交換律，所以可以將解題的過程記成 $3 \times 4 = 12$ ，也可以記成 $4 \times 3 = 12$ 」，在這種情況下，就應該給分，如果學童講不清楚，就不應該給分。同意這個理由的教師們請思考，中、低年級的學童，可能瞭解乘法交換律的意義嗎？遇到這種情形時，建議教師們應該追問「請你說說看，什麼是乘法交換律？」，如果學童能夠說出乘法交換律的意義，當然應該給分，如果學童只是使用乘法交換律的口訣唬人，但是說不出乘法交換律的意義，就應該要求學童的記法與解題活動一致。當學童習慣於使用只知其然，而不知其所以然的口訣解題時，對他往後學習數學的發展，會有負面的影響。

第三種理由：我國與英、美等國對乘法算式意義的解讀不相同，我國將3個4是12（4的3倍是12）記成「 $4 \times 3 = 12$ 」，而英、美等國將3個4是12記成「 $3 \times 4 = 12$ 」，因為數學算式是國際語言，所以可以依據我國的記法來記，也可以依據英、美等國的記法來記。同意這個理由的教師們請思考，數學符號是國際語言，應該統一，為什麼數學界會讓乘法算式不一致的情形發生？主要的原因是數學家知道乘法滿足交換律，成人們在溝通上不會發生困難，所以不必太在意記法的不一致。但是面對初學乘法算式的學童，我們應該先幫助他瞭解乘法算式的意義，使用國小課本約定的記法來記錄解題活動，等待學童認知發展成熟，能掌握乘法交換律的意義後，才可以使用

自己喜好的記法。

第四種理由：學童使用分屍的方法解題，學童先算左前輪有 3 個，左後輪有 3 個，再算右前輪有 3 個，右後輪也有 3 個，4 個 3 合起來是 12，記成「 $3 \times 4 = 12$ 」。這種記法與解題活動一致，當然應該給分。

第五種理由：3 個 4 合起來是 12 可以有兩種記法，我們可以將結果記成「 $3 \times 4 = 12$ 」，也可以將結果記成「 $4 \times 3 = 12$ 」，這兩種記法的意義是相同的。同意這個理由的教師們請思考，如果一種解法可以有兩種不同的記法，如何與他人溝通解題活動？這種想法是混淆記錄格式的意義，並不是瞭解乘法交換律。

一般而言，當學童出現「 $3 \times 4 = 12$ 」這種記法時，綜合教師不同意給分的理由，常見的有下列三種：

第一種理由：記錄應反應解題活動，如果學童以一輛車的 4 個輪子為單位量，透過 1 個 4 是 4、2 個 4 是 8、3 個 4 是 12 的方式算出答案，就應該將 3 個 4 是 12 的結果摘要地記成「 $4 \times 3 = 12$ 」，如果學童將上述的解題活動記成「 $3 \times 4 = 12$ 」，他的紀錄並沒有反應解題活動，當然不應該給分。這種不給分的理由是合理的，但是教師們也應該檢查學童是否使用分屍的方法算出答案。

第二種理由：先出現的數字要先記，當題目先出現的數字是 4 時（例如：每隻青蛙有 4 條腿，3 隻青蛙有幾條腿？），就要記成「 $4 \times 3 = 12$ 」；當題目先出現的數字是 3 時（例如：有 3 隻青蛙，每隻青蛙有 4 條腿，這些青蛙共有幾條腿？），就要記成「 $3 \times 4 = 12$ 」。同意這個理由不給分的教師們請思考，算式是解題活動的摘要紀錄，與如何算出答案的解題過程有關，但是與題目出現數字的先後順序應該無關吧。

第三種理由：「 $4 \times 3 = 12$ 」的單位量是幾個輪子，而「 $3 \times 4 = 12$ 」的單位量是幾輛汽車而不是幾個輪子，題目問的是共有幾個輪子，而不是問共有幾輛車，所以不給分。同意這個理由不給分的教師們請思考，為什麼部份

教師要求在乘法算式的被乘數與積數上面加上名數？在國小階段，加、減算式上都不會加上名數，因為加、減算式記錄的是相同單位的合成與分解活動，學童不會混淆單位的意義，所以沒有必要在加、減算式上面加名數；部份教師要求在乘法算式中被乘數與積數的部份加名數，主要的理由是乘法問題都有兩種單位（1個輪子與1輛汽車），爲了要讓學童注意算的是幾個輪子，而不是幾輛汽車，所以才要求在被乘數（記錄單位量的位置）及積數部份加上名數。但是有一些乘法問題的被乘數及積數的單位是不一樣的，以問題「3件上衣，4條長褲，共有幾種搭配穿衣服的方法？」爲例，在乘法算式上加名數對澄清單位並沒有幫助，因為被乘數與積數的單位不一致。乘法算式是解決倍的問題的摘要記錄，記錄著相同的解題活動類型，並不需要在算式上面加名數。如果要談單位，不應該只有被乘數與積數有單位，乘數也該有單位，因此，「4個輪子／輛 \times 3輛=12個輪子」才完整地記錄著所有的單位，在這個算式記錄中，被乘數與乘數的位置對調，也不會影響積數的單位。但是這種記法並不是現階段國小學童習慣的記法，國小課程都是透過單位量轉換的觀點處理乘法問題，不會產生「4個輪子／輛 \times 3輛=12個輪子」這種記法，只有將乘法問題視爲比的問題（1：4 = 3：□），才會產生這種記法。

（三）乘法對加法的分配律

乘法對加法的分配律可以分成左分配律及右分配律兩類，其中乘法對加法的右分配律是指：「 $(33 + 3) \times 3 = (33 \times 3) + (3 \times 3)$ 」的分配性質。而乘法對加法的左分配律是指：「 $12 \times (5 + 4) = (12 \times 5) + (12 \times 4)$ 」的分配性質。因為乘法對加法的左、右分配律都成立，所以在數學上，乘法對加法具有分配律。

並非任意一個運算對另一個運算的左、右分配律都成立，例如「 $9 \div (3 + 6) \neq (9 \div 3) + (9 \div 6)$ 」，也就是說，除法對加法的左分配律不成立，但是除法對加法的右分配律是成立的，例如「 $(9 + 6) \div 3 = ($

$9 \div 3$) + ($6 \div 3$) 」。因為除法對加法的左、右分配律並非同時成立，所以在數學上，除法對加法不具有分配律。

以算式填充題「 $7 \times 32 = (\quad)$ 」為例，如果學童的紀錄是「 $7 \times 10 = 70$ ， $7 \times 20 = 140$ ， $7 \times 30 = 210$ ， $7 \times 31 = 217$ ， $7 \times 32 = 224$ 」，或「 $7 \times 30 = 210$ ， $7 \times 31 = 217$ ， $7 \times 32 = 224$ 」時，學童是透過又十倍及又一倍的往上數策略解題，並沒有使用乘法對加法的分配律；如果學童的解題紀錄是「 $7 \times 30 = 210$ ， $7 \times 2 = 14$ ， $7 \times 32 = 224$ 」，或「 $7 \times 30 = 210$ ， $7 \times 2 = 14$ ， $210 + 14 = 224$ 」時，學童已經使用乘法對加法的分配律來簡化解題活動。教師請注意，當學童有足夠的又十倍及又一倍的往上數策略解題的經驗後，才可能察覺乘法對加法的左分配律。

(四) 結合律

結合律是指在求若干數之和數或積數時，將其各項分成數群，任意加之或乘之，其和數或積數不會改變。加法結合律是指計算 a 、 b 、 c 三數的和數時，先算 $a + b$ 的和數，再算 $(a + b)$ 加 c 的和數，與先算 $b + c$ 的和數，再算 a 加 $(b + c)$ 的和數，其結果相同。乘法結合律是指當計算 a 、 b 、 c 三數的積數時，先算 $a \times b$ 的積數，再算 $(a \times b)$ 乘以 c 的積數，與先算 $b \times c$ 的積數，再算 a 乘以 $(b \times c)$ 的積數，其結果相同。

學童在日常生活中經常遇到與加法結合律（加法兩步驟問題）或乘法結合律（乘法兩步驟問題）有關的問題情境，學童也有使用加法結合律或乘法結合律來簡化解題活動的經驗（例如： $39 + 25 + 11 = (\quad)$ ，或 $2 \times 17 \times 5 = (\quad)$ ），因為結合律包含兩個運算，涉及併式紀錄的問題，因此本教材延至第九冊才在解決兩步驟算式填充題情境中（使用「逐次減項」的記法紀錄解題過程），引入加法結合律的討論，延至第十一冊才在兩步驟乘法問題情境中，引入乘法結合律的討論。如果部分學童無法從結構的觀點來討論加法或乘法結合律，而只能從功能性的觀點描述兩者的計算結果恰好一樣，本教材建議教師亦宜予以肯定。

三、列式活動

(一) 加數未知(追加型)問題

以加數未知(追加型)問題「小明有 5 元，爸爸再給他幾元，小明就有 8 元？」為例，成人都習慣使用「 $8 - 5 = 3$ 」來記錄解題過程與結果，但是低年級學童常使用「 $5 + 3 = 8$ 」來記錄解題活動。如果教師要求學童使用減法算式來記錄，而學童反問「我是在 5 上面加了 3 個一後得到 8，又沒有由 8 中拿走 5，你憑什麼要我用減法算式來記錄？」，你會怎麼處理？追加型問題描述的是加法語意的情境，如果學童依循題意利用往上數的方式「5, 6, 7, 8」得到答案，他進行的是合成的活動，而不是分解活動，他當然應該將解題活動記成「 $5 + 3 = 8$ 」。

為什麼多數成人喜歡使用減法策略來解決追加型問題？以加數未知的算式填充題「 $7619 + () = 9012$ 」為例，如果提供一部電算器，在不可以自行改變題目的約定下，要求利用電算器算出答案，你會算出答案嗎？成人必須先將加數未知的算式填充題改寫成減法算式填充題「 $9012 - 7619 = ()$ 」後，才能夠使用電算器算出答案（電算器只能解決計算問題，不能解決數學問題），成人常使用的計算工具（電算器或成人加減算則），只能解決未知數在等號右邊的算式填充題。

成人已發展出加減互為逆運算的概念，可以將「 $7619 + () = 9012$ 」與「 $9012 - 7619 = ()$ 」視為相同的問題，因此，成人在解加數未知問題時，為了計算上的方便（可以直接按電算器或利用加減算則算出答案），會先將加數未知的加法問題，改寫成未知數在等號右邊的減法問題後再行計算。但是對加減互為逆運算概念發展尚未成熟的低年級學童而言，他們無法將上述兩個算式填充題視為相同的問題，因此，教師們不宜限制學童解追加型問題的解題策略或記錄格式。

有經驗的教師都知道，低年級學童解追加型問題時常遭遇困難，教師們應該注意學童的困難是什麼，學童是「無法解決問題，算不出答案」，或是「不會使用加法算式記錄解題活動」，或是「不會使用減法算式記錄解題活

動」。如果學童能夠成功解題，並使用加法算式記錄解題活動，只有在要求減法算式記錄時才發生困難，代表學童加減互為逆運算的概念尚未成熟，無法使用減法策略解決加數未知的問題。

皮亞傑曾經做過下面的研究：他先拿出 9 個紅色的球與 2 個白色的球，並分別詢問學童「紅色的球是不是球？白色的球是不是球？」，低年級學童都能回答「紅色的球是球、白色的球也是球」。等到確定學童能將紅色的球與白色的球都看成球的一種後，皮亞傑先詢問學童「白色的球比較多，還是紅色的球比較多？」，因為兩種球的數量差異很大，學童會直接回答「紅色的球比較多」，接著皮亞傑再詢問「球比較多？還是紅色的球比較多？」，此時，一些 7 到 8 歲的學童會回答紅色的球比較多。

為什麼成人認為球一定比紅球多（部份一定包含於全體），而學童卻認為紅色的球比球多？主要的原因是在紅球、白球與球所成的三個集合中，成人可以同時看到這三個集合，以及集合間的包含關係。成人知道紅球與白球所成的集合合起來是球所成的集合（所以紅球比球少），白球所成的集合中拿走紅球所成的集合後會剩下白球所成的集合，因此，成人能將加法問題（紅球與白球合成球）與減法問題（自球中拿走紅球後剩下白球）視為相同的問題。

雖然低年級學童也能夠分別指出這三個集合，但是無法同時掌握這三個集合的包含關係，也就是說，當學童看到紅球（或白球）所成的集合時，無法同時注意到球所成的集合，當學童將注意力集中在球所成的集合時，紅球（或白球）所成的集合就不見了，因此，學童無法將加法問題解讀為減法問題，故而無法使用減法策略解決加數未知的加法問題。

（二）列式活動

算式紀錄應該反應學童的解題活動，學童怎麼算，就應該怎麼記，教師不應要求學童將使用加法的解題活動，改用減法算式來記錄。追加型問題使用減法運算比較方便，是學童長大後應該使用的方法，因此本教材在第六冊

開始協助學童使用減法策略來解決追加型問題，要求學童先使用括號在等號右邊的算式填充題來記錄問題，然後再解決問題。

三下的學童已逐漸發展部分－全體運思，可以直接掌握數量間的關係，能夠進行「甲部分與乙部分合成全體」與「全體分出甲部分則成乙部分」間的可逆轉換，也能理解加減互為逆運算的概念，以追加型問題「小明有28元，爸爸再給他幾元，小明就有43元？」為例，本教材開始要求學童使用「標準算式填充題」（ $43 - 28 = (\quad)$ ），來記錄上述的問題，所謂標準算式填充題是算式填充題的一種，限制等號右邊只有括號的特殊格式。

列式活動是一種特殊的問題記錄活動，以上述問題為例，「 $28 + (\quad) = 43$ 」與「 $43 - 28 = (\quad)$ 」這兩種紀錄都可稱之為問題紀錄，只有要求記成標準算式填充題時，本教材才稱為列式活動。為了溝通是否有特殊格式的要求，本教材要求教師在布題時就應該說明白，當教師要求將問題記成標準算式填充題時，應要求使用等號右邊只有括號的算式填充題來記問題。也就是說，當教師希望評量學童用標準算式填充題來記錄問題的能力，宜說明限制，而當沒有說明限制時，則不應該要求特殊的格式。

四、等號（=）的意義

（一）加減兩步驟問題的記錄格式

以兩步驟問題「教室裡原有9人，走掉4人，又來3人，現在教室裡有幾人？」為例，學童可能有下列五種記錄格式：第一種記法是「 $9 - 4 = 5$ ， $5 + 3 = 8$ 」，這種記法是大家都可以接受，也是合理的記法，在中、低年級階段，本教材希望學童使用這種記法；第二種記法是「 $9 - 4 + 3 = 8$ 」，這也是大家都可以接受的記法，在中、低年級階段，本教材不希望學童使用這種記法，在第八冊引入併式記錄後，才開始接受這種摘要的記法，因為這種記法看不到解題者算出答案的過程，本教材更期望學童使用「逐次減項」的記法；第三種記法是「 $9 - 4 + 3 = 5 + 3 = 8$ 」，這也是大家都可以接受的記法，本教材稱之為「逐次減項」的記法，這種記法可以同時看到

問題是什麼，答案是什麼，以及解題者如何一步一步算出答案，本教材在第八冊開始引入這種記法；第四種記法是「 $9 - 4 = 5 + 3 = 8$ 」，多數教師都不接受這種記法，因為這種記法不滿足等號的遞移性；第五種記法是直式的記法（見圖一），多數教師都接受這種記法，因為它很像長除法的記法，是經常使用的記法。

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 4 \\ \hline 5 \\ + 3 \\ \hline 8 \end{array} \quad (\text{圖一})$$

以上述兩步驟問題為例，筆者嘗試連續詢問教師們三個子問題，第一個子問題是「第四種記法是否合理，你能夠接受嗎？」；第二個子問題是「第五種記法是否合理，你能夠接受嗎？」；第三個子問題是「第四種記法中的『=』號，以及第五種記法中的『橫線』，是否都表示等號的意思？」。多數教師第一個子問題的答案是「記法四是不合理的」；第二個子問題的答案是「記法五是合理的」；第三個子問題的答案是「記法四中的『=』號，記法五中的『橫線』意思一樣，都代表相等」。

記法四及記法五，一個是橫式的記法，另一個是直式的記法，如果「=」號以及「橫線」都表示相等的意思，記法四及記法五應該都是合理的記法，或者都是不合理的記法，如果記法四是錯誤的，而記法五卻是正確的，這樣的回答，在概念或邏輯推理上，是否都有一些矛盾？

（二）等號的意義（得到答案）

以問題「小明有 5 個蘋果，小花有 3 個蘋果，兩人共有幾個蘋果？」為例，成人及學童都使用算式「 $5 + 3 = 8$ 」摘要地記錄解題過程與結果。請教師們思考：如果透過天平或蹺蹺板當做教具，幫助學童瞭解算式中等號的意義是否恰當？

初學的學童解上述問題時，可能先畫 5 個圈（或拿 5 個花片）代表 5 個蘋果，再畫 3 個圈（或拿 3 個花片）代表 3 個蘋果，接著將它們合起來，重新點數後得到共有 8 個蘋果的答案。而教師使用天平教學時，可能先在天平的一邊放 5 個砝碼，再放 3 個砝碼，代表小明和小花的蘋果數，接著在天平的另一邊逐一的添加砝碼來代表蘋果，並同時詢問學童兩邊的蘋果數（砝碼）是否一樣多？等另一邊放滿 8 個砝碼，並讓天平保持平衡時，強調當兩邊的蘋果一樣多時，天平是平平的，可以將這種平平的現象記成等號。

學童解題的重點是重新點數合起來的蘋果數（原來的 5 個蘋果與 3 個蘋果），並確定合起來的蘋果數是 8 個，也就是說，8 個是 5 個和 3 個經過合成活動後，所給的另一個新名字，因此算式「 $5 + 3 = 8$ 」中的等號，在學童解題活動中是「得到的答案是」的意思，表示 5 個和 3 個合起來，得到的答案（另一個名字）是 8 個。

教師透過天平或蹺蹺板所進行的是比較活動，強調的重點不是確定 5 個蘋果與 3 個蘋果合起來有多少個蘋果，教師另外找了 8 個蘋果，與合起來的那些蘋果進行數量大小（個數多少）的比較活動，因此算式「 $5 + 3 = 8$ 」中的等號，在比較活動中是兩邊一樣大（個數一樣多）的意思，表示「 $5 + 3$ 」和「 8 」經過數量大小的比較活動後，得到兩邊一樣大的結果（數量相等的關係滿足等價關係）。

請比較學童與教師進行的活動，教師進行的是數量大小（個數多少）的比較活動，而學童進行的是確定兩個數量合起來是多少的命名活動，它們是兩種不同類型的解題活動。也就是說，等號可以有兩種意義，一種是「得到的答案是」的意思，另一種是兩邊一樣大（個數一樣多）的等價關係。

再以「甲有 3 個蘋果，乙有 4 個蘋果，丙有 7 個蘋果」的情境為例說明等號的意義，當詢問「甲和乙共有幾個蘋果」時，使用算式「 $3 + 4 = 7$ 」來記錄解題活動，在活動中，只要操弄 7 個蘋果；當詢問「甲和乙的蘋果合起來，和丙的蘋果比比看，誰比誰多？」時，也使用算式「 $3 + 4 = 7$ 」來

記錄解題活動，只是在活動中，一共操弄了14個蘋果。也就是說，前者的等號是「得到的答案是」的意思，而後者的等號是兩邊一樣大（個數一樣多）的等價關係。

（三）等號的意義（等價關係）

本教材分兩階段引入等號的意義，第一階段引入的等號是「得到的答案是」的意思。第二階段透過兩數大小關係的比較活動，引入的等號是「兩邊一樣大」的等價關係，在數學上，「 $=$ 」、「 $>$ 」、「 $<$ 」都是用來記錄兩數大小關係的符號。

本教材先詢問「『 $5 + 3$ 』和『 7 』，誰比誰大？」，得到「 $5 + 3$ 」比「 7 」大的答案後，幫助學童使用算式「 $5 + 3 > 7$ 」來記錄「 $5 + 3$ 」比「 7 」大的關係；相同地，先詢問「『 $5 + 3$ 』和『 8 』，誰比誰大？」，得到「 $5 + 3$ 」和「 8 」一樣大的答案後，幫助學童使用算式「 $5 + 3 = 8$ 」來記錄兩邊一樣大的關係；此時，算式中的等號是「兩邊一樣大」的等價關係。

很多教師都有經驗，相當多的低年級的學童不能接受「 $8 = 5 + 3$ 」或「 $5 + 3 = 6 + 2$ 」的記法，學童不接受的原因是學童心中等號的意義只是「得到的答案是」，右邊的數字不是經由左邊運算而得到的。當學童心中等號的關係是「兩邊一樣大」的等價關係時，透過詢問「『 8 』和『 $5 + 3$ 』，誰比誰大？」，或者「『 $5 + 3$ 』和『 $6 + 2$ 』，誰比誰大？」，學童自然的就會將比較的結果記成「 $8 = 5 + 3$ 」或「 $5 + 3 = 6 + 2$ 」。

再以問題「小明有23顆糖，5顆裝成一盒，儘量裝完，可以裝成幾盒？還剩幾顆糖？」為例，當題目要求「儘量裝完」時，學童會將解題過程與結果記成「 $23 \div 5 = 4 \dots 3$ 」，這個算式中的等號明顯地不會是兩邊一樣大的等價關係。當題目要求「全部裝完」（不會有餘數）時，如果學童首次將解題活動記成「 $23 \div 5 = 4.6$ 」，這個算式中的等號只是「得到的答案是」的意思，而不會是兩邊一樣大的等價關係，因為多數學童無法理解「 $4.6 = 25 \div$

3」的意義。

雖然多數成人心中的等號是兩邊一樣大的等價關係（認為記法四不合理），但是很少有人質疑「 $23 \div 5 = 4 \dots 3$ 」這個算式中等號的意義，也就是說，多數成人可能混淆等號的意義。數學家使用「 $23 = 5 \times 4 + 3$ 」來描述除法原理（不使用 $23 \div 5 = 4 \dots 3$ ），數學家使用沒有除號的算式來描述除法原理，主要的原因是數學家心中的等號是等價關係。

「 $5 + 3 = 8$ 」、「 $2 : 3 = 4 : 6$ 」，這兩個算式中等號的意義是否相同？一般人都認為等號就是相等的意思（世界上沒有兩樣東西是相等的，也不會有兩樣東西是完全一樣的），或者等號是兩邊一樣大的意思（兩邊一樣大是我們第一次學習的等價關係，所以記憶特別深刻），其實等號所代表的意義只是等號兩邊的物件滿足某種關係，而這種關係一定是等價關係。

「 $5 + 3 = 8$ 」中等號指的是「 $5 + 3$ 」和「 8 」滿足兩邊一樣大的關係，而兩邊一樣大的關係也滿足等價關係；但是「 $2 : 3 = 4 : 6$ 」中等號所代表的並不是兩邊一樣大的關係，因為「 $2 : 3$ 」及「 $4 : 6$ 」並不是數量，「 $2 : 3 = 4 : 6$ 」中等號的意義是「 $2 : 3$ 」及「 $4 : 6$ 」滿足某種相同的交換關係，而這種交換關係也滿足等價關係。

（四）等號的應用

當學童心中等號的意義只是「得到的答案是」時，使用「 $9 - 4 = 5 + 3 = 8$ 」這種記法來記錄解題過程與結果並沒有概念上的錯誤，學童可以摘要地將兩個運算合起來記錄，先記「 $9 - 4$ 得到 5」，再記「 $5 + 3$ 得到 8」，至於「 $9 - 4$ 」是否與「 8 」相等，則不是學童必須考慮的。成人認為記法四是不合理的，而記法五是合理的，主要的原因是成人將橫式中的等號視為「兩邊一樣大」的等價關係，而將直式中的橫線視為「得到的答案是」（可能類比長除法），記法四中的等號滿足「得到的答案是」的關係，但是不滿足「兩邊一樣大」的等價關係，而記法五中的橫線滿足「得到的答案是」的關係。為了避免學童使用記法四的記錄格式，本教材要求學童使用兩個

算式「 $9 - 4 = 5$ ， $5 + 3 = 8$ 」，來記錄解題過程與結果，也就是說，在併式記錄尚未引入前，要求學童每一個算式只能有一個運算符號。

在引入併式記錄之前，本教材不接受記法三「 $9 - 4 + 3 = 5 + 3 = 8$ 」，主要的理由是記法三是一個併式，含有兩個運算符號，這兩個運算不可能同時運算，一定有先後的秩序關係，成人習慣使用括號來區分運算秩序，並透過一些約定省略括號，但是中、低年級學童並未形成這些共識，學童使用這個併式記錄時，他心中的想法是先算的先記，因此記法三記錄的是先做減法的運算，得到答案後再做加法的運算。當學童被允許可以使用這種記法，他以後遇到問題「小明有57元，先用17元買一枝鉛筆後，再將剩下的錢平分成5份，請問每一份有多少錢？」時，自然也會仿照記法三，將解題過程與結果記成「 $57 - 17 \div 5 = 8$ 」。

成人接受「 $9 - 4 + 3 = 5 + 3 = 8$ 」的記法，但是不接受「 $57 - 17 \div 5 = 8$ 」的記法，主要原因是成人透過「括號先算」、「由左往右依序運算」及「先乘除後加減」等約定來省略括號，前者滿足這些約定，而後者不滿足這些約定，但是值得注意的是，使用這兩種記法的學童的想法是一致的，都是先算的先記。當成人鼓勵學童使用前面的記法，而當學童類比前面的記法，自行發展出後面的記法後，又被成人責罵，可憐的學童是多麼的無辜！

五、兩（多）步驟問題

本文將兩（多）步驟問題的看法區分成：（一）整數兩步驟問題；（二）整數多步驟問題；（三）分、小數兩（多）步驟問題；（四）形成「括號先算」，「先乘、除，後加、減」與「由最左往右依序運算」的共識。

（一）整數兩步驟問題

1、兩步驟問題的類型

依據先算什麼，後算什麼的運算次序，再加上加、減、乘、除四種運算排列的順序，兩步驟問題會有64種不同的類型。爲了不讓教材過於繁雜，依據學童概念發展的難易程度，本教材將整數兩步驟問題分割成四個部份引入。第一部份是加、減兩步驟問題：包括兩數的和（差）與第三數的和（差）

；第二部份是加（減）、乘兩步驟問題：包括兩數的積與第三數的和（差）、兩數的和（差）與第三數的積以及第三數乘以兩數的和（差）的積；第三部份是加（減）、除兩步驟問題：包括兩數的商與第三數的和（差）、兩數的和（差）與第三數的商以及第三數除以兩數的和（差）的商；第四部份是乘、除兩步驟問題：包括兩數的商乘（除）以第三數的積（商）以及兩數的積（商）除以第三數的商。

2、整數加、減兩步驟問題

以兩個數的和式（例如： $8 + 5$ ）與定數（例如： 13 ）的大小關係描述為例：本教材將「 $8 + 5$ 」稱之為「 8 與 5 的和式」，當 13 和「 $8 + 5$ 」相等（等價）時，將 13 稱之為和數。

累進性合成運思的學童，可以理解「 $8 + 5$ 」為一個運算的描述，但是必須執行運算之後，才能掌握其意義；部分—全體運思的學童，掌握「 $8 + 5$ 」是 8 和 5 兩個集聚單位合成的全體，不必執行運算，亦能掌握其為一個新的集聚單位（未定值的集聚單位），包含 8 與 5 兩個部分，可以以此新集聚單位為起點，繼續進行運算，也就是說，部分—全體運思學童可以掌握一個未定值的集聚單位，在概念上對它進行運算，將它具體地表現出來，而形成併式。

本教材透過下列方式處理整數加減兩步驟問題的教材：先引入併式紀錄（例如： $(8 + 5) - 6 = 7$ ），幫助學童形成在併式中使用小括號區辨運算次序的共識；接著在整數加減兩步驟問題情境下，幫助學童使用併式填充題（例如： $(8 + 5) - 6 = ()$ ）記錄問題，並引入逐次減項（例如： $(8 + 5) - 6 = 13 - 6 = 7$ ）的記法記錄解題過程；最後則要求學童先用併式填充題記錄問題，再使用逐次減項的記法，記錄兩步驟加減問題的解題過程。

3、併式紀錄

學童必須先學會算式紀錄（例如： $3 + 5 = 8$ ），並掌握算式紀錄的意

義後，才可能使用算式填充題（例如： $3 + 5 = ()$ ）的格式記錄問題；相同的，學童必須先學會併式紀錄（例如： $(8 + 5) - 6 = 7$ ），並掌握併式紀錄的意義後，才可能使用併式填充題（例如： $(8 + 5) - 6 = ()$ ）的格式記錄問題。故而本教材先與學童溝通併式紀錄的意義，在要求使用一個算式（併式）將兩個算式同時記下，而且能清楚地表達先算什麼，後算什麼的限制下，形成併式記錄格式的共識。

併式（例如： $(8 + 5) - 6$ ）中必然包含兩個以上的運算，因此運算次序是重要的溝通元素，在首引併式時，本教材只溝通使用括號來區辨運算次序的規約。在成人的共識中，尚有「由左往右依序運算」與「先乘除後加減」等其它的規約，本教材先只採用括號這一種規約，待學童對併式較熟悉後，再討論其他的規約。

4、併式填充題

和引入算式填充題的方式相同，當學童熟悉併式的記錄方式，並經驗使用一個併式紀錄描述兩步驟問題的解題活動與結果後，學童已經具備使用併式填充題記錄兩步驟問題的前置經驗。本教材先與學童溝通併式填充題的意義（以併式填充題「 $19 - (8 + 5) = ()$ 」為例），協助學童以對算式填充題理解為基礎，嘗試瞭解題意，然後進行解題，接著布兩步驟文字問題，討論如何使用併式填充題記錄問題，並使用括號區分解題計畫中運算次序，最後則直接要求學童先使用併式填充題記錄兩步驟加減問題，再進行解題，並用算式紀錄解題過程。

5、等號的遞移性

算式「 $3 + 5 = 8$ 」中的等號（ $=$ ）有兩種不同的意義，針對描述運算結果的角度看算式時，等號的意義是「得到的答案是」，「 $3 + 5 = 8$ 」表示「3和5經過加法運算後，得到的答案是8」；針對描述大小關係比較結果的角度看算式時，等號的意義是「等價關係」，「 $3 + 5 = 8$ 」表示「『 $3 + 5$ 』和『8』經過比較大小，兩者一樣大，滿足等價關係」。

本教材期望學童解多步驟問題時，能使用「逐次減項」的記法來記錄解題活動，透過等號的遞移性（等號是一種等價關係，滿足反身性、對稱性及遞移性），將上述問題的解題過程記成「 $(9 - 4) + 3 = 5 + 3 = 8$ 」。爲了強調等號滿足遞移性，本教材引入併式與定數間大小關係的比較活動，讓學童經驗及察覺 $=$ 、 $>$ 、 $<$ 符號的遞移性（ $>$ 、 $<$ 符號滿足遞移性，但是不滿足反身性及對稱性，不是等價關係），並做爲引入使用逐次減項的記法記錄解題過程的預備經驗。

本教材提供情境（以加減爲例），透過「和、差併式與和（差）」、「和（差）與定數」間的大小關係，要求學童決定「和、差併式與定數」間的大小關係（例如：已知「 $(a - b) + c$ 」與「 $d + e$ 」相等，「 $d + e$ 」與「 f 」相等，要求學童決定「 $(a - b) + c$ 」與「 f 」是否也會相等？），幫助學童經驗及察覺數量大小關係的遞移性。

6、逐次減項的記法

逐次減項是一種有效率的記錄格式，同時記錄了問題是什麼，答案是什麼，以及解題者如何一步一步算出答案的過程。逐次減項也是一種摘要的記法，透過等號的遞移性，將「 $a = b$ ， $b = c$ ， $c = d$ ，所以 $a = d$ 」的記法，簡略地記成「 $a = b = c = d$ 」。以併式填充題「 $12 - \{ (15 - 7) + 2 \} = ()$ 」爲例，較詳細的記法應該是「 $12 - \{ (15 - 7) + 2 \} = 12 - \{ 8 + 2 \}$ ， $12 - \{ 8 + 2 \} = 12 - 10$ ， $12 - 10 = 2$ ，所以 $12 - \{ (15 - 7) + 2 \} = 2$ 」，透過等號的遞移性，本教材幫助學童將上述的記法改記成「 $12 - \{ (15 - 7) + 2 \} = 12 - \{ 8 + 2 \} = 12 - 10 = 2$ 」，並將此種省略的記法稱之爲逐次減項的記法。

7、整數加（減）、乘兩步驟問題

部分—全體運思的學童雖然尚未掌握數概念的乘法性合成結構，例如：能視8爲40的組成元素，40是由5個8合成的結構，但是累積的乘法活動經驗，已能預期5個8必能合成一個新集聚單位。本教材預期五上的學童可以

掌握兩數的積的意義，在概念上繼續對它進行運算，並將此過程用符號表現出來，進而形成和（差）積併式，例如使用併式「 $(8 \times 5) - 6$ 」，描述 8×5 與 6 的差。

加（減）、乘兩步驟問題包含三個部份，其中「兩數的積與第三數的和（差）」部份，引入的方式與加、減兩步驟問題類似，但是「兩數的和（差）與第三數的積」以及「第三數乘以兩數的和（差）的積」部份，本教材先引入併式紀錄，暫不要求學童使用併式填充題記錄問題，也不要求使用逐次減項的記法記錄解題過程，主要的理由是學童尚未學過三步驟問題的記錄方式，當出現乘法對加（減）法分配律的文字題時，學童可能將它視為三步驟的問題。

以問題「鉛筆一枝賣 4 元，原子筆一枝賣 8 元，各買 5 枝需要多少錢？」為例，學童可能有下列二種解題策略：第一種策略是先算鉛筆一枝和原子筆一枝的錢數，再求錢數和的 5 倍，這種解題策略只有兩個步驟，學童可以用併式填充題「 $(4 + 8) \times 5 = ()$ 」記錄問題；第二種策略是先算鉛筆 5 枝的錢數，再算原子筆 5 枝的錢數，最後再求出錢數的和，這個解題策略包含了三個步驟，當學童沒有學過三步驟併式填充題前，學童無法記錄解題計畫。因為無法預期學童的解題策略，本教材將此類文字題留待學童學過多步驟併式紀錄後才引入。

8、整數加（減）、除與乘、除兩步驟問題

依據除法原理，中年級正整數除法問題中，皆描述兩個待解的未知量，同時詢問商數與餘數（餘 0 也是餘數的一種）；當除法的結果可以用分數來表示時，或在全部分完的要求下，才不會存在餘數（餘數一定是 0），此時，「 $a \div b$ 」可以代表一個未定數值的集聚單位，才可以進行兩數的商式的討論。

以單位量轉換的觀點，在包含除問題中，商數是單位數，描述以除數為被計數單位的個數；相對地，在等分除問題中，已知單位數，而商數是以「

1」為被計數單位，描述單位的內容（或單位量），由以上的說明可知，商數具有雙重的活動意義。因此本教材在累積二年多包含除與等分除活動經驗，而且可以用除法算式記錄兩種解題活動後，才在第九冊引入兩數的商式的語言，成為以後的溝通工具，賦予類似「 $15 \div 3$ 」這個書寫格式的活動意義，並使用「15除以3的商」來口述「 $15 \div 3$ 」。基於上述原因，所有與兩數的商式有關的兩步驟問題，都延至第十冊才出現。

(二) 整數多步驟問題

1、整數多步驟加、減問題

(1) 併式記錄與併式填充題

三步驟問題是指必須使用三次運算才能解決的一個問題，因為有三個運算，所以必須有兩種不同的符號，來表示哪個運算是第一步被執行，哪個運算是第二步被執行，因為學童已形成使用小括號表示先運算部分的共識，本教材在三步驟加減問題的問題紀錄討論中，引入中括號，期望形成「使用小括號表示第一步被執行的部分，中括號表示第二步被執行部分」的共識，強調在現階段，使用小、中括號來清楚地描述解題計畫的運算次序，至於括號可以怎麼省略，留待以後再討論。

依據解題計畫的不同，學童的多步驟問題紀錄會呈現多樣化，以問題「小娟原有12元，媽媽又給她6元，去合作社買了一枝鉛筆7元，一塊橡皮擦9元後，小娟還剩多少錢？」為例：學童可能將問題記為「 $(12 + 6) - [7 + 9] = (\quad)$ 」，也可能將問題記成「 $[12 + 6] - (7 + 9) = (\quad)$ 」或「 $[(12 + 6) - 7] - 9 = (\quad)$ 」；只要是合理的問題紀錄，教師都應該接受。而上述的問題紀錄，皆是三步驟和（差）併式填充題。

(2) 等號的遞移性

本教材期望學童解多步驟問題時，都能夠透過等號的遞移性，使用「逐次減項」的記法來記錄解題活動。本教材希望學童在已知「多步驟和（差）併式與和（差）併式」大小關係、「和（差）併式與和（差）式」大小關係

以及「和（差）式與定數」大小關係的情況下，討論 $=$ 、 $>$ 與 $<$ 符號的遞移性，進而可以將四者的大小關係合併記錄。也就是說，希望學童不必透過實際地比較，看到「 $[(a + b) - c] - d = (e - f) + g$ 」、 $[(e - f) + g = h - i]$ 與 $h - i = j$ 成立，就可以直接預期「 $[(a + b) - c] - d = j$ 」一定會成立，進而能夠將這四者的關係記成「 $[(a + b) - c] - d = (e - f) + g = h - i = j$ 」的形式。

（3）逐次減項的記法

本教材期望學童在步驟加減問題的情境中，形成使用「逐次減項」的記法記錄解題過程的共識，以問題「桶子裡有17個糖果，姊姊吃掉5個，妹妹吃掉7個，媽媽再放進去8個，桶子裡還有幾個糖果？」為例，本教材要求學童先用併式填充題把問題記錄下來（以 $[(17 - 5) - 7] + 8 = ()$ 為例），在解題時，要求記錄五件事：①用算式把第一步的做法和答案記下來（例如： $17 - 5 = 12$ ）；②用算式填充題把還要做什麼記下來（例如： $[12 - 7] + 8 = ()$ ）；③用算式把第二步的做法和答案記下來（例如： $12 - 7 = 5$ ）；④用算式填充題把還要做什麼記下來（例如： $5 + 8 = ()$ ）；⑤用算式把第三步的做法和答案記下來（例如： $5 + 8 = 13$ ）。在完成上述過程後，討論如何把上述的紀錄整理一下，用等號把一樣大的地方連起來，使別人一看就能知道，你是怎麼樣一步一步地算出最後的結果，而形成「 $[(17 - 5) - 7] + 8 = [12 - 7] + 8 = 5 + 8 = 13$ 」的逐次減項的記法。

2、多步驟四則問題

本教材在第八冊首次引入兩數的和（差）與第三數的和（差）的併式問題，要求學童先用併式填充題記錄兩步驟加減問題，再使用逐次減項的記法，記錄解決兩步驟加減問題的解題過程；在第九冊則將兩步驟問題的範圍擴充至兩數的積與第三數的和（差），而在第十冊更將兩步驟問題的範圍擴充至所有包含和、差、積與商的部分。至於三步驟問題部份，本教材在第九冊

引入三步驟加減問題，在第十冊將多步驟問題的範圍擴充至所有包含和、差、積與商的部分，但是上述問題所討論的範圍都是整數。

聯合各類四則（加、減、乘、除）兩步驟情境問題的併式問題（包括用併式填充題記錄問題，與用逐次減項方式記錄解題過程）與三步驟加減問題的併式問題（形成使用中、小括號來區分運算次序的共識）的經驗；本教材相信，多數學童可以透過類比的方式，進行各種多步驟問題的併式活動。雖然在課堂活動中，教師不可能進行所有類型的多步驟問題，本教材仍要求教師進行數個問題的討論，確認學童對於問題記錄格式或逐次減項的記法，都沒有困難。

以多步驟問題「小明有十元硬幣 5 個，買了一枝鉛筆用去 6 元，又買了一罐汽水用去 18 元，請問小明還剩多少元？」為例，在使用併式填充題記錄多步驟問題的問題記錄活動中，如果部份學童使用「由最左往右依序運算」的記法或「乘、除先算，再由最左往右依序運算」的記法，來省略併式填充題中的括號，例如學童使用「由最左往右依序運算」的記法將上述問題記成「 $10 \times 5 - 6 - 18 = ()$ 」，本教材建議教師應該接受並淡化處理，請學童說明其運算次序與記法，但不強求其它學童理解或模仿，本教材在整數四則問題都處理完後，最後才討論如何形成使用「由最左往右依序運算」及「乘、除先算，再由最左往右依序運算」等記法省略括號的共識。

（三）分、小數兩（多）步驟問題

本文將對分、小數兩（多）步驟問題的看法區分成：1、分數兩（多）步驟問題；2、小數兩（多）步驟問題兩部份來說明。分、小數兩（多）步驟問題引入的方式，與整數兩步驟問題類似。

本教材在第十一冊開始引入分數兩步驟問題，但只要求解題，不要求使用逐次減項的記法記錄解題過程，在第十二冊繼續引入分、小數兩（多）步驟問題時，才要求學童先用併式填充題記錄兩步驟問題，再用逐次減項的記法，記錄解決兩步驟問題的解題過程。

1、分數兩（多）步驟問題

本教材分兩個階段引入分數兩（多）步驟問題，第一個階段只要求解題，不要求使用逐次減項的記法記錄解題過程；第二個階段則要求學童先用併式填充題記錄分數的兩步驟問題，再用逐次減項的記法，記錄解決分數兩步驟問題的解題過程。

（1）只要求解題，不要求使用逐次減項的記法記錄解題過程

本教材在第十一冊延伸學童解決整數兩步驟問題的經驗，引入分數的兩步驟「乘加（減）或加（減）乘」、「除加（減）或加（減）除」問題，與進行整數的兩步驟問題不同的是，本階段活動的重點放在解題，不要求學童先用併式填充題記錄分數的兩步驟問題，也不要求學童使用逐次減項的記法記錄解決兩步驟問題的解題過程，只要求學童使用有分數的算式記錄解題過程。

不要求學童使用逐次減項的記法，記錄解決分數兩步驟問題解題過程的理由是：現階段的學童尚未熟悉分數四則運算，在處理分數四則計算時，要求使用多步驟算式紀錄的格式記錄解題過程，可以協助學童掌握解題的進度及反省各步驟的意義；而且多數學童可能尚未能在分數範圍內掌握乘、除互逆的規律，因此不宜要求學童使用逐次減項的記法記錄解題過程。本教材亦提醒教師，如果學童模仿整數兩步驟問題的格式，使用併式填充題記錄分數的兩步驟問題，或透過算則，使用逐次減項的記法記錄解題過程，教師宜淡化處理。

（2）要求學童先用併式填充題記錄分數的兩步驟問題，再用逐次減項的記法，記錄解決分數兩步驟問題的解題過程。

當學童已較熟悉分數四則運算，在分數範圍內也能掌握乘、除互逆的規律，並且在記錄解決分數四則問題的解題過程時，也能將多步驟的解題過程用連等號連接起來，就可以要求學童先用併式填充題記錄分數的兩步驟問題，再用逐次減項的記法，記錄解決分數的兩步驟問題的解題過程。本教材在

第十二册引入分數兩（多）步驟問題，先進行含分數的加減乘混合問題，再將範圍擴充至四則混合問題，在活動中，都要求學童先用併式填充題記錄問題，再用逐次減項的記法記錄解題過程。

學童此時已發展測量運思，在整數與分數範圍內都能掌握乘除互逆的概念，因此教師在布兩步驟問題時，不再限制只能採用單純的「積數或商數未知」的問題來進行組合，教師可以布任何涉及「未知數夾在運算符號之間」的併式填充題的問題，學童已有能力將這些問題記成標準併式填充題（等號右邊只有（ ）的算式填充題）。

因為分數四則解題的多樣性，分數兩（多）步驟問題的紀錄中，有時不但不會減項，反而還會增項，爲了不再創造新的記法的名詞，本教材建議教師，如果有學童提出紀錄中有時並不會一次減少一項，教師可擴充「逐次減項」的意義，說明像這樣一步一步算出答案，並用等號連起來的記法，也叫做「逐次減項」的記法。

2、本課程對小數兩（多）步驟問題教材的處理方式

與處理分數兩（多）步驟問題相同，本教材先引入含小數的加減乘混合問題，再將範圍擴充至四則混合問題，在活動中，都要求學童先用併式填充題記錄問題，再用逐次減項的記法記錄解題過程。

本教材建議教師在布含除法運算的小數四則混合問題時，應慎選被除數與除數的數字，進行除法運算時，應在小數點以下三位前除盡。當一個含除法的問題能記成多種不同形式的併式填充題時，教師應檢查各種記法中的每一個除法運算是否都能在小數點以下三位前除盡，以避免取概數造成差異；例如當教師選擇問題中的數字時，不宜只將問題記成併式填充題甲：「 $(23.41 + 11.57) \div 3 = (\quad)$ 」，而忽略學童也可能將相同的問題記成併式填充題乙：「 $(23.41 \div 3 + 11.57 \div 3 = (\quad)$ 」，雖然甲中的除法運算能夠除盡，但是乙中的兩個除法運算都不能除盡；相同的，教師也不宜只將問題記成併式填充題丙：「 $(31.56 \div 3) \times 7 = (\quad)$ 」，而忽略學童也可能將相同的問題

記成併式填充題丁：「 $31.56 \times (7 \div 3) = (\quad)$ 」，其中丙中的除法運算可以除盡，但是丁中的除法運算則無法除盡。

（四）「括號先算」，「先乘、除，後加、減」與「由最左往右依序運算」的共識

本教材認為人們開始使用併式填充題記錄問題時，基於先運算部分先記的習慣，可能先形成「由最左往右依序運算」的共識；當解題步驟愈來愈多或運算次序發生混淆時，爲了要區別「先算什麼、後算什麼」，發明使用括號來標示先算的部分，形成「括號部分先算」的共識；當解題計畫更複雜時，人們需要使用更多不同的括號來區別運算次序，等到括號數愈來愈多，人們又發現如何減少使用括號變成很重要，進而形成共識，先進行乘或除的運算，再進行加或減的運算。換句話說，當使用併式填充題來記錄解題計畫時，人們先形成「括號先算」的共識後，再透過「先乘、除，後加、減」與「由最左往右依序運算」等共識來省略括號，並溝通各個運算的次序。

依據這些共識，解讀併式填充題（他人形成的）中的運算次序時，先考慮括號顯示的運算次序，括號內的運算要先完成，若沒有用括號來區分運算次序時，先進行乘或除的運算，再進行加或減的運算，若都是乘、除運算，或都是加、減運算時，再使用由最左往右的運算次序。

本教材的立場是當學童開始學習使用併式填充題記錄問題時，要先形成使用括號區別運算次序的共識，等到學童能掌握運算次序後，才能開始學習如何省略括號，因爲解題者雖然省略了併式填充題中的括號，但是心中還是有括號，心中的括號幫助他區別運算次序。本課程並不要求學童一定要使用省略括號的方式來記錄問題，希望學童使用自己最有信心的方式記錄問題，但是因爲省略括號的記法是文化傳承的共識，學童必須能看得懂別人在「括號先算」、「由最左往右依序運算」與「先乘、除後加、減」等共識下省略括號的記法，如果學童自行省略了括號，也必須符合這些共識，才能與他人溝通數學的想法。「由最左往右依序運算」以及「先乘、除，後加、減」教材的處理方式，請參閱第二部份的說明。

貳、八十二年課程整數的數量關係 (含多步驟問題) 編輯理念

一、因數與倍數

表 1 因數與倍數

冊一單元一活動	國立編譯館版活動目標
9-14-4	「給定呈方陣排列的物件總數」，解決「可能的方陣排列方式」問題，並記錄解題活動。
9-14-5	給定總數，解決「可能的等分組方式」問題，並記錄解題活動。
9-16-5	「給定兩個呈方陣排列的物件總數」，透過比較各自的可能方陣排列方式，解決「可能的相同的列的數值」問題，並記錄解題活動。
9-16-6	給定兩總數，透過比較各自可能的等分組方式，解決「等組的可能數值」問題，並記錄解題活動。
10-4-1	在倍的情境下，給定總數，解決「可能的單位量數值」問題，並記錄解題活動。
10-4-2	①給定總數（在100以內），解決「列出所有可能的因數」問題，並記錄解題活動。 ②認識因數的意義。
10-4-4	透過解決缺乘數的乘法算式填充題及判斷積數是否為被乘數的整數倍，認識「倍數」的意義。
10-4-5	透過判斷一數是否為其因數的整數倍的方式，察覺此數為其所有因數的倍數。
10-4-6	解決「給定一數，列出其在100以內的所有倍數」的問題，並記錄解題過程。
10-6-1	在倍的情境下，給定兩總數，透過比較各自可能的單位量數值，解決「相同的單位量數值」問題，並記錄解題活動。
10-6-2	①給定兩數，透過各自的因數的比較活動，解決「所有可能的公因數」問題。 ②認識公因數的意義。
10-6-3	給定兩數，透過列出所有的公因數，找出其最大公因數。
10-6-4	給定兩數，透過各自的倍數的比較活動，解決「可能的公倍數」問題，並認識公倍數（在500以內）的意義。
10-6-5	①察覺一數是其所有因數的公倍數。 ②察覺兩數相乘的積數為兩數的公倍數。
10-6-6	給定兩數，透過各自的倍數的比較活動，解決「列出所有可能的公倍數（在500以內）」問題，並找出最小公倍數。
10-10-1	在量的情境中，利用找出（最小）公倍數的方法，解決問題。

註：表 1 中的活動與九年一貫課程數學學習領域中相關之能力指標如下：

N-3-18：能察覺非負整數的因數、倍數、公因數、公倍數。

N-3-20：能察覺非負整數的最大公因數、最小公倍數、質數和合數，並能將一個數做質因數分解。

A-1-1：能透過具體操作，解決來自生活情境問題中已列出的算式填充題。

表 1 中共有 17 個活動，分散在第九冊第十四、第十六單元，第十冊第四、第六以及第十單元，重點是建立因數、倍數，公因數、公倍數、最大公因數及最小公倍數的意義。表 1 可以較詳細地非割成七個部份。第一部份包含第九冊第十四單元活動 4、5，重點是透過解決可能的方陣排列方式，以及可能的等分組方式等問題，經驗因數的意義。第二部份包含第九冊第十六單元活動 5、6，重點是透過解決方陣排列中可能的相同的列的數值，以及兩個總數可能的等分組數值問題，經驗公因數的意義。第三部份包含第十冊第四單元活動 1、2，重點是引入數學上因數的意義。第四部份包含第十冊第四單元活動 4、5、6，重點是引入數學上倍數的意義，求出某一數量範圍內所有的倍數，並幫助學童察覺此倍數為其所有因數的倍數。第五部份包含第十冊第六單元活動 1、2、3，重點是引入數學上公因數的意義，並透過列出所有的公因數的方式，找出最大的公因數。第六部份包含第十冊第六單元活動 4、5、6，重點是引入數學上公倍數的意義，並透過列出某範圍內所有公倍數的方式，找出最小的公倍數，並幫助學童察覺一數是其所有因數的公倍數，以及兩數相乘的積數為兩數的公倍數。第七部份只包含第十冊第十單元活動 1，重點是在情境問題中，透過互換單位量與單位數角色的方式，找出單位數的（最小）公倍數。

（一）情境中的因數問題

9-14-4：「給定呈方陣排列的物件總數」，解決「可能的方陣排列方式」問題，並記錄解題活動。

9-14-5：給定總數，解決「可能的等分組方式」問題，並記錄解題活動。

本教材使用除法觀點，以總量為問題起點，探討可能組成的單位量，來處理因數的啓蒙問題。但是對學童而言，直接由整數的情境進入討論因數的意義，可能並不恰當，因為整數本身相當抽象，當學童測量運思尚未發展完全，無法將等分除與包含除視為相同的除法問題時，可能混淆除數的雙重意義，不易掌握由單位量（因數）組成總數的意義，故而第九冊第十四單元首

引因數問題時，先由情境問題進入，探討總量可能由那些單位量組成的問題，為引入因數的意義鋪路。

第九冊第十四單元活動 4，透過學童習慣的方陣排列問題，探討給定總量的方陣的可能排法，例如提供 12 個全等的小正方塊積木，要求學童將小正方塊積木排成長方形（不可排成中空的長方形），希望在全班的合作下，窮盡所有的排法，讓學童經驗「給定總量的方陣可以有不同的排法」，教師宜注意，討論的重點應放在每一排可以分得幾個小正方塊，而不是可以排成多少排，讓學童經驗方陣是由「一排一排」的（不是一個一個的）小正方塊積木（單位量）組成的。

在活動 5 中，繼續透過包含除及等分除的問題情境，給定總量，要求學童回答可能的等分組方式，經由討論，希望學童掌握總量可以由哪些單位量組成的意義。教師宜注意，在討論中，應該避免學童以部分的觀點，透過合成的方式解決問題（例如 1、2、3、4、6、12 都可以累積成 12），應該要求能由全體的觀點，透過分解的方式來解決問題（例如 12 可以透過 1、2、3、4、6、12 為單位量來組成）；透過這些活動，可以幫助學童經驗數概念的乘法性結構，察覺單位量及單位數是成對出現的，逐漸培養學童測量運思的發展。因為活動 4、5 都是在情境問題中討論總量可以由哪些單位量組成，不涉及數的部分，故而暫時不出現「因數」的名稱。

（二）情境中的公因數的問題

9-16-5：「給定兩個呈方陣排列的物件總數」，透過比較各自的可能方陣排列方式，解決「可能的相同的列的數值」問題，並記錄解題活動。

9-16-6：給定兩總數，透過比較各自可能的等分組方式，解決「等組的可能數值」問題，並記錄解題活動。

延伸第九冊第十四單元因數情境問題活動的經驗，第九冊第十六單元透過探討兩個量是否有共同組成的單位量方式，引入公因數的啓蒙問題。本單元活動 5 採分段布題的方式，先要求學童找出 12 個女生所有可能的方陣排列

方式，接著再要求學童找出18個男生所有可能的方陣排列方式，最後，在要求將兩個呈方陣排列的隊伍接起來，能夠排成一個大方陣的限制下，討論男生與女生每排的人數要一樣（相同的單位量），才能將隊伍接起來，來探討公因數問題。

活動6也採分段布題的方式，透過包含除及等分除的問題情境，先要求學童分別找出兩相異量各自的可能等分組方式，再透過比較各自的等分組方式，解決等組的可能數值問題，並記錄解題活動。教師宜注意，活動是在量情境中，先窮盡兩量各自可能由哪些單位量組成，再尋找都能組成兩量的共同單位量，而不是使用嘗試錯誤的方式，分別判斷兩量是否都能由某單位量組成。

（三）因數問題

10-4-1：在倍的情境下，給定總數，解決「可能的單位量數值」問題，並記錄解題活動。

10-4-2：①給定總數（在100以內），解決「列出所有可能的因數」問題，並記錄解題活動。

②認識因數的意義。

第九冊十四單元，本教材先透過學童習慣的方陣排列問題，探討給定總量方陣的可能排法，接著再透過包含除及等分除的問題情境，給定總量，要求學童回答可能的等分組方式，希望學童經由討論，能掌握總量可以由哪些單位量組成的意義。因為因數是指定一個正整數，詢問以哪些正整數為單位量，可以乘法性地合成這個指定的正整數，因此，本教材要求學童使用有除號的算式記錄解題活動，期望學童不要以部分的觀點，透過合成的方式來解決問題，而能由全體的觀點，透過分解的方式來解決問題。在活動中，也透過要求窮盡所有可能的等分組方式，幫助學童發現單位量及單位數是成對出現的，提供學童經驗數概念乘法性結構機會，並逐漸培養測量運思的發展。

為了讓學童在各種問題情境中，都能掌握總量可以由哪些單位量組成的意義，並使用除法算式記錄解題活動，逐步地形成因數的概念，第十冊第四

單元活動 1 延續第九冊第十四單元的活動經驗，在倍的情境中，給定總數，要求學童解決可能的單位量數值問題，透過限制使用除法算式來記錄解決被乘數未知問題解題過程的方式，希望學童在各種問題情境中，都能掌握總量可以由哪些單位量組成的意義。

本教材預期學童在量的情境下，已經累積足夠的經驗，能夠掌握總量可以由哪些單位量組成的意義，活動 2 開始嘗試在數的情境中，引入因數的意義。活動 2 透過學童熟悉的方陣排列問題「40 個小朋友排成的長方形隊伍，一排一排的人數都要一樣多，而且要全部排完，一排可以分到幾個小朋友？」，先要求學童討論可以怎麼分，並限制使用有除號的算式把分法記下來，接著脫離量的情境，要求學童看著紀錄，說出「40 除以多少，可以剛好分完，沒有剩下？」，並透過「40 除以 2，剛好分完，沒有剩下，並且 40 和 2 都是整數，所以 2 是 40 的因數」的討論方式，引入因數的意義。教師宜注意，在國小階段，因數的討論都限制在正整數範圍內，所以上述的「剛好分完，沒有剩下」是指整除的意思，若學童出現商數為分數的狀況時，教師宜加以澄清。

求因數問題有兩種主要的解題策略，第一種是利用「嘗試錯誤」的方式，透過因數的定義解決問題；第二種是利用數的乘法性結構，透過質因數分解的方式解決問題。預期大部分國小學童會使用「嘗試錯誤」的方式求出某數的所有因數，以「24 有哪些因數？」為例，學童會透過判斷哪些正整數能被 24 整除的方式，來決定 24 有哪些因數；如果有學童使用質因數分解的方式解題，例如先將 24 表示成質因數的連乘積，接著透過算式「 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ 」找出所有的因數時，建議教師請學童說明為什麼使用這種方式可以解題成功的理由，並淡化處理。

（四）倍數問題

10-4-4：透過解決缺乘數的乘法算式填充題及判斷積數是否為被乘數的整數倍，認識「倍數」的意義。

10-4-5：透過判斷一數是否為其因數的整數倍的方式，察覺此數為其所

有因數的倍數。

10-4-6：解決「給定一數，列出其在 100 以內的所有倍數」的問題，並記錄解題過程。

成人能夠掌握乘除法互為逆運算的概念，瞭解甲數是乙數的因數時，乙數就是甲數的倍數的相互關係，因此在數學上都直接透過因數的概念引入倍數：若 a 是 b 的因數，就等同於 b 是 a 的倍數。本教材認為若採用此方式引入倍數，對測量運思尚未發展完全的學童而言，不易掌握倍數的意義，因此本教材分別引入因數及倍數的意義，為國中或高中引入數學上因、倍數的定義來鋪路。

因為倍數問題是指定一個正整數做為單位量，詢問由此單位量可以乘法性地生成哪些正整數，因此，第十冊第四單元活動 4 首引倍數問題時，布置乘數未知的乘法算式填充題（例如： $2 \times (\quad) = 10$ ），幫助學童探討 2 是否能乘法性地生成 10，引入倍數的意義。活動 4 先要求學童解題，再引入倍數的意義：10 是 2 的 5 倍，而且 2、5、10 都是整數，所以說 10 是 2 的倍數。

為了幫助學童能察覺因、倍數間的關係，並經驗整數概念的乘法性結構，逐漸培養測量運思的發展，第十冊第四單元活動 5 要求學童先求出一個正整數所有的因數，再要求判斷該正整數是否為其因數的整數倍，透過此種活動方式，幫助學童察覺一個正整數為其所有因數的倍數。

當學童有能力與方法判斷某數是否為另一數的倍數時，以某一正整數為起點，使用乘以整數倍的方式，求出該正整數在某一數量範圍內的所有倍數，並不是件太困難的事，第十冊第四單元活動 6 要求學童解決「給定一數，列出其在 100 以內的所有倍數」的問題，並記錄解題活動。

（五）公因數問題

10-6-1：在倍的情境下，給定兩總數，透過比較各自可能的單位量數值，解決「相同的單位量數值」問題，並記錄解題活動。

10-6-2：①給定兩數，透過各自的因數的比較活動，解決「所有可能的公因數」問題。

②認識公因數的意義。

10-6-3：給定兩數，透過列出所有的公因數，找出其最大公因數。

第九册第十六單元，本教材已經在量的問題情境中，初步地引入公因數的概念，例如透過學童習慣的方陣排列問題，要求學童分別找出12個女生及18個男生所有可能的方陣排列方式，在要求將兩個呈方陣排列的隊伍接起來，能夠排成一個大方陣的限制下，討論男生與女生每排的人數要一樣（相同的單位量），才能將隊伍接起來；或透過包含除及等分除問題情境，先要求學童分別找出兩相異量各自的可能等分組方式，再透過比較各自的等分組方式，解決等組的可能數值問題。爲了讓學童在各種問題情境中，都能解決相同單位量的可能數值問題，第十册第六單元活動1延續上述的活動經驗，繼續在倍的問題情境下，給定兩總量，透過比較各自可能的單位量數值，找出相同單位量的可能數值，希望學童在各種情境問題中，都能解決兩總量可以有哪些相同單位量的問題，爲形成公因數的概念鋪路。

因爲學童已有許多在不同情境下解決兩總量可以有哪些相同單位量問題的經驗，也有在數的情境下討論因數問題的經驗，第十册第六單元活動2嘗試在數的問題情境下，引入公因數的意義，活動要求學童分別列出兩數（以40與20爲例）的因數，透過討論其中某數（以4爲例）是否爲兩數共同因數的方式，引入公因數的意義（4是40的因數，4也是20的因數，所以4是40和20的公因數）。

本教材預期學童面對「兩數的公因數有哪些？」的問題時，大多會採用下列兩種策略解題：①先分別求出兩數的所有因數，再由其中找出共同的因數；②先找出某一數的所有因數，再判斷這些因數是否爲另一數的因數。將兩數先寫成質因數連乘積後再找出公因數，是成人解此類問題一種有效率的方式，如果部份學童使用這種方式解題，教師宜淡化處理，請其說明可以成功解題的理由，但不必要求其他的學童能理解。

第十册第六單元活動3在整數的問題情境中，要求學童先求出所有的公因數，再透過比較活動，找出其中最大的公因數，引入最大公因數的意義。

本教材建議教師，在首次引入最大公因數意義時，宜透過先找出公因數，再由公因數中找出最大的公因數的方式進行，因為最大公因數是經過公因數間大小比較活動後產生的，不透過公因數間的比較活動，學童較無法掌握最大公因數的意義。預期大部分學童都能先求出公因數，並在公因數中找出最大公因數，這是學童可以掌握的解題策略。

部分學童也可能使用「短除法」的方式來求最大公因數，以求18與24的最大公因數問題為例，短除法是利用算術基本定理，將18與24先分解為質因數的連乘積（ $18 = 2 \times 3 \times 3$ ， $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ），再透過找出共同質因數乘積的方式，找出最大公因數是 2×3 ，現階段學童無法了解算術基本定理，也無法理解使用質因數分解概念引入的短除法解題方式，雖然部份學童可以模仿成人的解題步驟，透過短除法的格式求出最大公因數，但是當學童找出2是18與24的公因數，再找出3是9與12的公因數（剩下的3和4沒有公因數）時，無法理解為什麼 2×3 會是18與24的最大公因數。基於上述理解上的困難，本教材暫時不引入使用短除法求最大公因數的解題策略。

（六）公倍數問題

10-6-4：給定兩數，透過各自的倍數的比較活動，解決「可能的公倍數」問題，並認識公倍數（在500以內）的意義。

10-6-5：①察覺一數是其所有因數的公倍數。

②察覺兩數相乘的積數為兩數的公倍數。

10-6-6：給定兩數，透過各自的倍數的比較活動，解決「列出所有可能的公倍數（在500以內）」問題，並找出最小公倍數。

在第十冊第四單元的活動經驗下，學童已能求出某數在某一數量範圍內的所有倍數，配合求取兩數公因數的經驗，第十冊第六單元活動4在整數的情境下，要求學童分別求出兩數（以3、4為例）在某一數量範圍內（比50小）的倍數，透過兩數各自的倍數的比較活動，引入公倍數的意義（12是3的倍數，12也是4的倍數，所以12是3和4的公倍數）。

為了幫助學童察覺因、倍數間的關係及單位量及單位數是成對出現的，

並經驗數概念的乘法性結構，逐漸培養學童測量運思的發展，第十冊第四單元活動 5 透過判斷一個整數是否為其因數的整數倍的方式，幫助學童察覺此整數為其所有因數的倍數。延伸上述活動經驗，第十冊第六單元活動 5 幫助學童察覺一數是其所有因數的公倍數，活動中要求學童先求出某數（例如：20）所有的因數，再透過判斷該數（20）是否為其所有因數（例如：1，2，4，5，10，20）的倍數的方式，幫助學童察覺一數是其所有因數的公倍數；活動 5 也透過要求學童先解決兩數相乘問題（以 7 和 4 的積是多少為例），幫助學童察覺兩數相乘的積數（28）為兩數（7 與 4）的公倍數，希望學童能不經過計算的過程，就直接能判斷兩數相乘的積數為兩數的公倍數。

第十冊第六單元活動 6 在整數的情境中，要求學童先求出某數量範圍內所有可能的公倍數，再透過比較活動，找出其中最小的公倍數，引入最小公倍數的意義。本教材預期學童可能使用下列兩種策略解決求最小公倍數的問題：①先分別求出兩數在某數量範圍內所有的倍數，決定哪些是公倍數後，再由其中找出最小公倍數；②依序找出一數在某數量範圍內所有的倍數（2 倍、3 倍、4 倍……），再依序判斷這些數是否為另一數的倍數，找出最小公倍數。如果學童使用「短除法」的方式來求最小公倍數，教師宜淡化處理，因為學童如果不了解算術基本定理的意義，就無法溝通如何使用短除法求最小公倍數的意義。

（七）公倍數問題（單位量與單位數的互換）

10-10-1：在量的情境中，利用找出（最小）公倍數的方法，解決問題。

學童在第十冊第六單元的活動中，已有尋找兩整數的公倍數（最小公倍數）的經驗，但是當時的問題情境都是給定單位量，要求學童求出這些單位量的公倍數（最小公倍數），第十冊第十單元活動 1 在量的情境下，改變問題情境，提供單位數，要求學童利用找出兩正整數的公倍數（最小公倍數）的方法，解決如韓信點兵的問題（例如：甲班的學生不超過 40 人，平分成 3 組可以剛好分完，沒有剩下；平分成 4 組也可以剛好分完，沒有剩下。甲班可能有多少學生？）。由於學童已有尋找兩整數的公倍數（最小公倍數）

的解題經驗，雖然上述問題中的組數是單位數的概念，但是測量運思的學童可以掌握乘法交換律，彈性地互換單位量與單位數的角色，而直接尋找 3 與 4 的公倍數來解決問題，即使尚未發展測量運思的學童，亦可在理解題意後，用嘗試錯誤的方式進行解題。

本教材安排此一活動，主要的原因是：學童以本活動的經驗為基礎，有助於以後繪製成比例線段圖的能力。以第十冊第十二單元活動 4 中的問題「作線段圖表現 7 條等長的棕色緞帶接起來和 2 條等長的紅色緞帶接起來一樣長」為例，活動會要求學童作圖時，必須滿足代表 1 條棕色緞帶和代表 1 條紅色緞帶的線段長都是 1 公分的整數倍，以方便在線段圖上做進一步的操作，而學童為了符合此要求，就必須使用 7 和 2 的公倍數（7 和 2 都是單位數的角色），來決定 7 條等長的棕色緞帶接起來的公分數（或 2 條等長的紅色緞帶接起來的公分數），例如選取 14 公分（或 28、42 公分等），再由總長決定 1 條棕色緞帶是 2 公分，1 條紅色緞帶是 7 公分，最後才能作出成比例的線段圖。再進一步，當學童在面對第十二單元活動示例 5 中的問題（例如：透過等比例圖示分數量的關係，解決尋找兩異分母分數的共測單位分數）時，也需要使用同樣的方式作出成比例的線段圖。

二、加法交換律、結合律，加法和減法的相互關係

表 2 加法交換律、結合律，加法和減法的相互關係

冊—單元—活動	國立編譯館版活動目標
3-3-4	在併加情境中，經驗加法交換律的事實。
3-3-5	在算式填充題的情境中，經驗加法交換律的事實。
3-3-6	在添加情境中，經驗加法交換律的事實。
4-8-10	經驗加、減法互逆的關係。
6-12-12	利用減法驗算和數，並加以記錄。
6-12-13	利用加法驗算差數，並加以記錄。
9-1-12	在解決兩步驟算式填充題中（使用「逐次減項」的記法記錄解題過程），討論加法結合律。

註：表 2 中的活動與九年一貫課程數學學習領域中相關之能力指標如下：

N-1-14：能在情境中理解加法和減法的相互關係及加法交換律。

N-2-14：能在情境中，理解乘法交換律、等號的對稱性、“>”“=”“<”的遞移性、加法和乘法的結合律與分配律，以及乘法和除法的相互關係。

A-2-1：能將生活情境中簡單問題表徵為含有 Δ 、 \square 、甲、乙、 $?$ 、 \dots 等的式子，並能解釋式子與原問題情境的關係。

表 2 中共有七個活動，分散在第三冊第三單元，第四冊第八單元，第六冊第十二單元以及第九冊第一單元，重點是幫助學童建立加法交換律、加法結合律，加法和減法的相互關係的意義，並利用此種意義進行驗算活動。表 2 可以較詳細地非割成四個部份。第一部份包含第三冊第三單元活動 4、5、6，重點是在併加情境、算式填充題的情境，以及添加情境中，經驗加法交換律的事實。第二部份只包含第四冊第八單元活動 10，重點是幫助學童經驗加法與減法互為逆運算的關係。第三部份包含第六冊第十二單元活動 12、13，重點是要求學童使用限制的方法（加法問題使用減法來驗算，減法問題使用加法來驗算），驗算自己的解題結果。第四部份只包含第九冊第一單元活動 12，重點是在解決兩步驟算式填充題中（使用「逐次減項」的記法記錄解題過程），透過比較活動討論加法結合律。

(一) 加法交換律的經驗

3 - 3 - 4 : 在併加情境中，經驗加法交換律的事實。

3 - 3 - 5 : 在算式填充題的情境中，經驗加法交換律的事實。

3 - 3 - 6 : 在添加情境中，經驗加法交換律的事實。

二上學童已有許多解決合成或分解問題的經驗，在討論各種解題方式時，部份學童可能已經察覺加法運算滿足交換律，第三冊第三單元活動 4 ~ 6，透過加法運算結果的比較，協助學童注意到加法交換律的現象，而且更進一步地，設計題目，引導學童運用加法交換律的經驗，發展出簡化計算過程的解題策略。

本教材常透過比較活動，協助學童觀察數量的關係，第三冊第三單元亦透過加法算式紀錄的比較，引導學童注意到加法交換律的現象，觀察「 $a + b = c$ 」與「 $b + a = c$ 」都得到相同結果。許多研究中都發現，學童在併加型問題情境下，最容易接受加法交換律的現象，以併加型問題「5 朵紅花和 17 朵黃花，一共是幾朵花？」為例，學童較易接受「先算紅花」或「先算黃花」，其結果都會一樣的事實；學童亦最容易在併加型問題情境中，自行發展出符合加法交換律的解題策略，以簡化計算過程。教師宜注意，加法交換律只有在特定的數量組合下，使用往上數策略（累進性合成運思）解題，才可能簡化計算過程，如果學童透過兩次做數及一次點數活動解決問題（序列性合成運思），或使用多單位策略的成人算則解題（部份－全體運思），加法交換律對簡化計算過程並沒有幫助。

本教材預期現階段學童最主要的解題策略，仍為累進性合成運思，教師布題時應注意被加數及加數兩數量的組合，例如在「 $18 + 17 = ()$ 」的問題中，如果進行累進性合成運思，以 18 為起點，或以 17 為起點，進行向上數的活動，其解題過程差不多一樣，並不會簡化計算；但是在「 $5 + 17 = ()$ 」的問題中，由 5 開始向上數 17，與由 17 開始向上數 5，即造成相當的難度差異，由 17 開始向上數 5 是較簡化的計算過程，因此教師在選擇數量時，儘量選擇差異量較大的數量組合。部分學童此時已經熟悉基本加減事實，數量

太小的合成活動，並不能看出加法交換律的好處，所以在開始布題時，即需要選擇合成結果在20以上的問題。

在教學過程中，建議先採用合成結果較小的問題，來觀察加法交換律的現象，再使用合成結果較大的問題，提高需要，引導學童使用符合加法交換律概念的簡化計算策略。教師宜注意，學童此時最主要的解題策略，仍為累進性合成運思，所以最好多採用被加數為20以內、加數在50以上的問題，讓學童經驗到符合加法交換律的解題策略，確實簡化了計算過程。

第三冊第三單元活動4透過併加型問題情境，幫助學童經驗加法交換律的事實，活動5透過算式填充題的情境，幫助學童經驗加法交換律的事實，活動6則在添加型問題情境下，幫助學童經驗加法交換律的事實，預期在添加型問題情境中，學童最難接受加法交換律的現象，教師可以藉由算式填充題的解題經驗，引導學童觀察在添加型問題之下，加法交換律的現象依然存在，不論由那一個數量開始計算，都會得到相同的結果。

（二）加、減法互逆關係

4 - 8 - 10：經驗加、減法互逆的關係。

第四冊第八單元活動10，僅提供學童觀察（經驗）加、減法互為逆運算的關係，並不強求學童都能察覺此種關係，也不要求學童利用加、減法互為逆運算的關係，解決被加（減）數或加（減）數未知的問題。所以活動只在加、減法兩個運算的紀錄對比下，幫助學童觀察一個數（甲數），如果加上另一個數（乙數），獲得一個結果（丙數），再將這個結果（丙數），減去剛才加上的乙數，此減法運算的答案，又是剛才起始的數（甲數）。

活動10先布一題加法算式填充題，要求學童解題，並將答案填入括號內，例如「 $23 + 18 = (\quad)$ 」；接著利用求出的和數41和加數18，再布一題減法算式填充題，要求學童解題，並將答案填入括號內，例如「 $41 - 18 = (\quad)$ 」；最後再比較這兩個紀錄，要求學童注意到減法算式填充題的答案，居

然和加法算式填充題中的被加數相同，並討論這個事實怎麼會發生。教師可以仿上述活動進行的方式重新布題，先進行減法運算，再進行加法運算，最後再做紀錄的比對。

本教材預期部份學童可能已經覺察加、減互為逆運算的關係，故而在解減法算式填充題時，不需要進行運算就能夠獲得答案，或能以加減同一個數，如同沒有加減一般來說明此關係；但是也有部份的學童，仍只能在算出減法算式填充題的答案後，才發覺這個現象，或只能描述紀錄的相同處，例如加的數和減的數都相同。教師宜注意，本單元的目標只是在觀察（經驗）此現象，教師不宜強求學童皆能察覺此關係，待三年級後，將再進行相關的活動，幫助學童掌握加、減互為逆運算的關係。

（三）驗算活動

6 - 12 - 12：利用減法驗算和數，並加以記錄。

6 - 12 - 13：利用加法驗算差數，並加以記錄。

廣義而言，驗算活動是透過反省解題過程，或採用另一種解題策略重新計算，來檢查計算結果的合理性，故而學童採用任何一種方式，重新進行解題，以達到檢查功能的，都是驗算活動。

由於多數學童目前已發展「部分－全體運思」或「加減互為逆運算」的概念，第六冊第十二單元所進行的驗算活動，強調加減互為逆運算概念的運用，故而限制學童使用減法來檢查合成問題答案的合理性，而使用加法來檢查分解問題答案的合理性，在活動12、13中，皆要求學童嘗試在檢查方式限制下，檢查教師給定答案的合理性，以突顯驗算是一個獨立的活動，在討論中，偏重如何形成以適當的減法（加法）問題來檢驗合成（分解）問題的答案，討論為何可以用減法（加法）來檢驗合成（分解）問題的答案，最後，再合併解題與驗算兩個活動，要求學童使用限制的方法，來驗算自己的解題結果。

(四) 加法的結合律

9 - 1 - 12：在解決兩步驟算式填充題中（使用「逐次減項」的記法記錄解題過程），討論加法結合律。

部分—全體運思的學童，能夠掌握數概念的加法性合成結構，一個全體是由數個部分透過加法運作合成而得的，各個部分皆為同等的角色，是包含於全體的一部分，因此部分位置的交換，並不會影響全體的數值，故而可以掌握加法交換律；同樣地，先合成那兩個部分，再與剩餘的部分合成，亦不會影響全體的數值，故而可以掌握加法的結合律。

事實上，在兩步驟加法問題情境中，學童應該已有許多法結合律現象的觀察經驗。本單元活動12，透過兩個加法併式運算的比較，明顯地討論加法結合律，例如提供兩個併式填充題「 $(7 + 8) + 5 = ()$ 」與「 $7 + (8 + 5) = ()$ 」，在這兩個併式填充題併置的情境下，幫助學童注意到兩者皆由7、8與5三數合成，透過討論，形成加法運算滿足結合律的共識。部分學童可能無法從結構的觀點來討論加法結合律，而從功能性的觀點描述兩者的計算結果恰好一樣，教師亦宜予以肯定。

三、乘法交換律、結合律，乘法對加法的分配律，乘法和除法的相互關係

表 3 乘法交換律、結合律，乘法對加法的分配律，乘法和除法的相互關係

冊—單元—活動	國立編譯館版活動目標
5-11-2	使用倍的問題的解題活動，解決「求呈方陣排列的物件總數」問題。
5-11-3	用算式填充題記錄「求呈方陣排列的物件總數」問題，並加以解決，進而經驗乘法的交換律。
5-11-4	由「十十」乘法表中，經驗乘法交換律的事實。
9-4-4	在解決算式填充題中，察覺乘法對加法的左分配與右分配。
9-10-6	在量的情境中，經驗乘、除法互逆的關係。
11-1-8	在解決兩步驟問題中，討論乘法交換律和結合律。

註：表 3 中的活動與九年一貫課程數學學習領域中相關之能力指標如下：

N-2-14：能在情境中，理解乘法交換律、等號的對稱性、“ $>$ ”“ $=$ ”“ $<$ ”的遞移性、加法和乘法的結合律與分配律，以及乘法和除法的相互關係。

A-2-1：能將生活情境中簡單問題表徵為含有 Δ 、 \square 、甲、乙、 $?$ 、 \dots 等的式子，並能解釋式子與原問題情境的關係。

表 3 中共有六個活動，分散在第五冊第十一單元，第九冊第四、第十單元，第十一冊第一單元，重點是幫助學童建立乘法交換律、乘法結合律，乘法對加法的分配律，乘法和除法的相互關係的意義。表 3 可以較詳細地分割成四個部份。第一部份包含第五冊第十一單元活動 2、3、4，重點是在求呈方陣排列的物件總數問題，以及查十十乘法表等活動中，經驗乘法交換律。第二部份只包含第九冊第四單元活動 4，重點是在解決乘法算式填充題的情境中，幫助學童察覺乘法對加法的左分配律與右分配律。第三部份只包含第九冊第十單元活動 6，重點是幫助學童經驗乘法與除法互為逆運算的關係。第四部份只包含第十一冊第一單元活動 8，重點是透過比較活動，討論乘法交換律和結合律。

(一) 經驗乘法交換律

5-11-2：使用倍的問題的解題活動，解決「求呈方陣排列的物件總數」問題。

5-11-3：用算式填充題記錄「求呈方陣排列的物件總數」問題，並加以解決，進而經驗乘法的交換律。

5-11-4：由「十十」乘法表中，經驗乘法交換律的事實。

交換律是一種求二元運算之結果與次序無關的規則，在四則運算中，加法和乘法兩種運算滿足交換律。加法交換律是指被加數與加數的角色互換，其運算結果不變的規律，而乘法交換律是指被乘數與乘數的位置交換，而其運算結果不變的規律，第五冊第十一單元首次引入具體的活動經驗，幫助學童觀察（經驗）乘法交換律的現象。

在量的問題情境中，乘法交換律是指可以彈性地將單位量與單位數的角色交換，而其總量不變。以問題「一隻青蛙有4條腿，7隻青蛙有幾條腿？」為例，乘法交換律是指在完成計算之前，即可預期它們的結果必然相同，因為可以以一隻青蛙的4條腿為單位量，計算出7隻青蛙共有多少條腿，也可以先計數每一隻青蛙的左前腿，再以7條腿為單位量，去計算出4個部位（左前、後腿，右前、後腿）共有多少條腿。所以當學童能掌握乘法交換律時，他知道所有的乘法問題都可以彈性地對調單位量與單位數的角色（可以先在7個4中，分別抽取一個1，合成集聚單位7，用盡4中所有的1，而形成4個7，因此將7個4與4個7間的等價關係，視為當然），所以「 4×7 」與「 7×4 」的積數一定相同。請注意：乘法交換律不是描述當學童使用以4為單位量的方式解題時，可以將解題過程記成「 $4 \times 7 = 28$ 」，也可以將解題過程記成「 $7 \times 4 = 28$ 」。「4的7倍是28」的記法是「 $4 \times 7 = 28$ 」而不是「 $7 \times 4 = 28$ 」。本單元首次引入乘法交換律的活動，希望透過解決呈方陣排列物件的總量問題，或在查十十乘法表的活動中，幫助學童經驗乘法交換律的事實。

計數呈方陣排列物件的總量，是觀察乘法交換律最佳的情境，在活動 2 中，先引入物件呈方陣排列的問題，限制學童使用倍的問題的解題方式，來計算物件的總量，並要求使用乘法算式來記錄解題過程與結果；在活動 3 中，則進一步地要求學童使用乘法算式填充題，來記錄求呈方陣排列物件總量的問題，在列式的過程中，學童當然可以用每排的個數為單位量，而以有多少排為單位數，亦可以用每列的個數為單位量，而以有多少列為單位數，在討論中，檢討這兩個算式填充題是否會獲得同樣的結果，幫助學童注意到被乘數與乘數交換，會得到相同的結果。

活動 4 先要求學童在十乘表上，找出結果都為某一特定數（例如 15）的算式，再觀察這兩個算式的相同及相異之處，教師宜注意，第五冊第十三單元才會引入「被乘數」與「乘數」的名詞，如果學童在活動中使用這些名詞，教師宜先建立這些名詞的共識，否則可以用與「 \times 號的相關位置」，例如「 \times 號前面的數」或「 \times 號後面的數」，或者用在算式中的位置，例如「算式裡的第一個數」或「算式裡的第二個數」，來做指示的工作，以便進行相同與相異之處的討論，不論採用何種指示方式，教師宜注意學童的共識，不要產生溝通的困擾。

第五冊第十一單元的目標中，最低標準是能觀察到乘法交換律的事實，亦即在解決「 $3 \times 5 = ()$ 」及「 $5 \times 3 = ()$ 」兩個問題後，能注意到其結果都一樣，而不要求學童使用「 $3 \times 5 = 15$ 」的結果，來預測「 $5 \times 3 = ()$ 」的結果，學童尚須累積多一點的經驗，才能相信，乘法交換律會發生在任何一个乘法算式上，或進一步地運用乘法交換律來簡化解題過程。

（二）分配律的經驗

9 - 4 - 4：在解決算式填充題中，察覺乘法對加法的左分配與右分配。

透過「幾個十幾個一的幾倍」解題方法的限制，學童在第七冊已習慣於將乘法問題「 $24 \times 7 = ()$ 」中的被乘數 24 拆成 2 個十 4 個一，分別計算 2 個十的 7 倍和 4 個一的 7 倍後，再求和數，即可得到算式填充題的答案，

這樣的解題策略已協助學童隱含地具有乘法對加法的右分配律的經驗。至於乘法對加法的左分配律，部分學童亦可能已有這方面隱含的經驗，例如面對乘法問題「 $7 \times 25 = ()$ 」時，學童也可能使用「累又十倍及又一倍」的解題策略，例如「 $7 \times 10 = 70$ ， $7 \times 20 = 140$ ， $7 \times 21 = 147$ ， \dots ， $7 \times 25 = 175$ 」。如果學童採用「先算7的20倍，再算7的5倍，再把兩者合起來得到25倍」，學童已隱含地採用左分配律的性質來解題，即「 $7 \times 25 = 7 \times (20 + 5) = (7 \times 20) + (7 \times 5)$ 」。

第九冊第四單元活動4將學童隱含的經驗，明顯地提出來進行討論，活動分三段進行：①乘法對加法右分配律的討論，如「 $16 \times 5 = ()$ 」：討論的重點是幫助學童察覺在不使用右分配律和使用右分配律這兩種不同的方法所計算出來的結果是否會相同。其中不使用右分配律是指學童使用乘法原始的意義，連續地作累五次又一倍的方法計算，如16的2倍是 $16 + 16 = 32$ ，記為『 $16 \times 2 = 32$ 』，再多2倍是 $32 + 32 = 64$ ，記為『 $16 \times 4 = 64$ 』，16的5倍是16的4倍再加1倍，是 $64 + 16 = 80$ ，記為『 $16 \times 5 = 80$ 』；而使用右分配律是指學童使用「幾個十幾一的幾倍」的方法來解題，如1個十的5倍是5個十，而6個一的5倍是30個一，也就是3個十，合起來是8個十，也就是80。②乘法對加法左分配律的討論，如「 $7 \times 25 = ()$ 」：討論的重點也是幫助學童察覺在不使用左分配律和使用左分配律這兩種不同的方法所計算出來的結果是否會相同。其中不使用左分配律仍舊是指學童使用乘法原始的意義，連續地使用「累又十倍及又一倍」的方法計算，如7的10倍是70，記為『 $7 \times 10 = 70$ 』，再多10倍是 $70 + 70 = 140$ ，記為『 $7 \times 20 = 140$ 』，7的21倍是 $140 + 7 = 147$ ， \dots 。而使用左分配律是指學童能把7的25倍看成7的20倍和7的5倍的和數，分別計算後再合成。③乘法對加法左、右分配律同時使用的討論，如「 $18 \times 24 = ()$ 」：討論的重點也是幫助學童察覺在使用不同的解題策略（計算方法）時，如「不使用左、右分配律」，「僅使用左分配律」，「僅使用右分配律」，或「同時使用左、右分配律」等，都會有相同的結果。

教師宜注意：部分一全體運思學童尚無法掌握乘法對加法的分配性質，也就是說，學童可能無法由數概念的結構觀點，來理解乘法對加法分配性質的必然性，活動 4 的目的是從功能性的觀點，透過使用不同的策略解乘法問題皆可獲得同樣的結果，引發學童對（乘法對加法）分配性質的注意。

（三）乘、除互逆關係的經驗

9 - 10 - 6：在量的情境中，經驗乘、除法互逆的關係。

本教材在第四冊第八單元中，曾提供情境幫助學童觀察（經驗）加、減法互為逆運算的關係，例如在加、減法兩運算紀錄的對比下，觀察一個數（例如：4）如果加上某數（例如：3）獲得一個結果（例如：7）後，再將這個結果減去剛才加上的某數，此減法運算的結果又是剛才起始的數。例如：「 $4 + 3 = 7$ ， $7 - 3 = 4$ 」。

本教材採用單位量轉換活動的觀點，認為乘除法是用來解決單位量變換的問題，以「有 7 盒肥皂，其中每盒有 6 塊肥皂，合起來有 42 塊肥皂」的情境為例：在正整數的乘法問題中，一個量本來是用高階單位（盒）來描述的，例如「有 7 盒肥皂，其中每盒有 6 塊肥皂」，現在要求重新用低階單位（塊）來描述，例如「合起來共有幾塊肥皂？」。換言之，乘法運算是將原來有分界的狀態（6 塊裝一盒，共有 7 盒），把其中的分界取消（共 42 塊，不再有分界）。而在除法運算中，一個量本來是用低階單位（塊）來描述，例如「原有 42 塊肥皂」，現在要求用高階單位（盒）來重新描述，例如「每 6 塊裝一盒，可以裝幾盒？」或「不知道幾塊裝一盒，但可以裝 7 盒」。換言之，除法運算是將原來沒有分界的狀態（有 42 塊），增加了分界（每 6 塊裝一盒，共有 7 盒）。

如果以上述的觀點來看乘除法運算的互逆關係，其意義應該是：有分界的狀態甲，經由乘法運算取消了分界，變成沒有分界的狀態乙，而沒有分界的狀態乙，再經由除法運算增加了分界，又變成了有分界的狀態甲，先除再乘的情況亦同，故而乘、除法互為逆運算，一個運算可以取消另一個運算的影響。

對國小學童而言，同時要觀察到數量關係並描述數量的狀態並非易事，因此本單元活動 6 仿加、減法互為逆運算活動進行的方式，在乘除法兩個運算紀錄的對比下，進行比較活動，幫助學童觀察（經驗）乘、除法互為逆運算的關係。在乘、除法兩個運算紀錄的對比下，討論的重點是：觀察一個數（例如：6）如果乘以某數（例如：7），獲得一個結果（例如：42），再將這個結果42，除以剛才乘以的某數7，此除法運算的結果6，又會是剛才起始的數6。例如：「6」 \times 7=42， $42\div 7$ ＝「6」。活動進行的基本步驟是：①先布一個乘法文字題，要求學童用有乘號的算式填充題把問題記下來，並進行解題，獲得解題紀錄（例如「 $6\times 7=(42)$ 」）；②再布一個以①的結果42為被除數、乘數7為除數的除法文字題，要求學童用有除號的算式填充題把問題記下來，並進行解題，獲得解題紀錄（例如：「 $42\div 7=(6)$ 」）；③比較兩個紀錄，要求學童注意到第二題的結果，居然和第一題中的被乘數相同。由於學童不易說出完整的乘除互逆意義，活動中只要求學童說說看，怎麼會這樣。使用相同的教學步驟，可以進行先除後乘的互逆活動。

視學童發展狀況，部分學童可能已察覺乘、除互為逆運算的關係，故而在解第二題時，不需進行計算，即可獲得答案，或能以乘、除同一個數，如同沒有乘、除一般來說明此關係，但部分學童仍只能在運算完畢之後，才發覺這個現象，例如除的結果與被乘數相同、或乘的結果和被除數相同。現階段本課程只是幫助學童觀察經驗）此現象，並不強求學童皆能察覺此關係。

（四）乘法交換律和結合律的討論

11-1-8：在解決兩步驟問題中，討論乘法交換律和結合律。

在第五冊第十一單元，本教材透過解決呈方陣排列物件的總量問題，或在查十乘法的活動中，已幫助學童經驗乘法交換律的事實，累積多年乘法問題的解題經驗，現階段學童大多已經能功能性的察覺乘法交換律。第十一冊第一單元活動 8 透過比較活動，討論乘法交換律與結合律，希望提供學

童瞭解乘法交換律及結合律意義的機會，但是並不要求學童都能夠達到瞭解層次，活動 8 的最低要求標準是學童能功能性的察覺乘法交換律與結合律。

活動 8 中先進行乘法交換律的討論活動，以問題「教室有藍色花片和紅色花片，藍色花片共 57 盒，每盒 39 個，紅色花片共 39 盒，每盒 57 個，請問哪一種顏色的花片比較多？」為例，活動先要求學童回答問題，再要求學童說明為什麼花片會一樣多的理由。若學童透過算出「 39×57 」與「 57×39 」的答案來說明兩種顏色的花片一樣多，教師應進一步的追問：如果不算出答案，你是否也知道哪一種顏色的花片比較多？若學童只回答「 $39 \times 57 = 57 \times 39$ 」，所以兩種顏色的花片一定一樣多，但是並沒有說出為什麼會一樣多的理由時，教師應追問其理由。

若全班沒有學童能夠說出兩種花片數量相等的理由，教師可以說明其理由，例如：紅色花片一盒有 57 個，39 盒共有 57×39 個，藍色花片一盒有 39 個，57 盒共有 39×57 個；如果我們在藍色花片的每一盒中先拿出一個，那麼一次可以拿出 57 個，接著在藍色花片的每一盒中再拿出一個，又可以拿出 57 個，像這樣一直拿下去，每盒共可以拿出 39 次，每次可以拿出 57 個藍色花片，也就是會有 57×39 個藍色花片，所以藍色花片和紅色花片一樣多。

請注意，在討論問題「有兩個長方形廣場，都鋪滿相同的長方形地磚，甲廣場一邊鋪了 2548 塊，另一邊鋪了 1257 塊，乙廣場一邊鋪了 1257 塊，另一邊鋪了 2548 塊，如果不用計算，你怎麼知道哪一個廣場的地磚比較多？」時，廣場中鋪設的地磚是長方形地磚，而不是正方形地磚，若學童的說法是甲廣場的長邊是乙廣場的寬邊，甲廣場的寬邊是乙廣場的長邊，所以兩個廣場的地磚一樣多時，教師應在黑板上畫圖與學童溝通地磚的排法，地磚的排法並不會讓甲廣場旋轉 90 度後變成乙廣場，兩個廣場的形狀並不相同（以鋪 6 塊 3×5 公分的地磚為例：一種鋪法是一邊 3 塊，長 15 公分，另一邊 2 塊，長 6 公分，另一種鋪法是一邊 2 塊，長 10 公分，另一邊 3 塊，長 9 公分）。

在乘法結合律討論活動部分，活動先提出問題：「一個貨櫃裝 78 個箱子，一個箱子裡有 27 輛玩具汽車，臺灣的銘耀公司出口 34 個貨櫃的玩具汽車到

美國的曼禮公司，問這些玩具汽車的總數？」，接著提出兩種解題策略：「銘耀公司使用先算一個貨櫃（78個箱子）有幾輛玩具汽車，再算34個貨櫃有幾輛玩具汽車的方法算出一共出口幾輛玩具汽車」、「曼禮公司使用先算34個貨櫃有幾個箱子，再算這些箱子有幾輛玩具汽車的方法算出一共進口幾輛玩具汽車」，要求學童判斷銘耀、曼禮兩個公司算出玩具汽車的總數相差多少？活動進行的流程與討論乘法交換律的方式相同，本教材希望學童至少在功能性上知道兩種算法都是在算同一批玩具汽車，所以答案一定相同。

四、列式

表 4 列式

冊－單元－活動	國立編譯館版活動目標
6－6－9	繪圖表現「全部不超過50，部分不少於15的加數未知的合成問題」的算式填充題紀錄。
6－6－10	將「全部不超過50，部分不少於15的加數未知的合成問題」的算式填充題紀錄，改列成答數相同而等號右邊只有括號的算式填充題。
6－6－11	將「全部不超過50，部分不少於15」的加數未知的合成問題予以列式（記錄成等號右邊只有括號的算式填充題）並求解。
6－8－11	將「全部不超過50，部分不少於15」的被加數未知的合成問題予以列式（記錄成等號右邊只有括號的算式填充題）並求解。
6－8－12	將「全部不超過50，部分不少於15」的被減數未知的分解問題予以列式（記錄成等號右邊只有括號的算式填充題）並求解。
6－8－13	將「全部不超過50，部分不少於15」的減數未知的分解問題予以列式（記錄成等號右邊只有括號的算式填充題）並求解。
6－8－14	將「全部不超過200，部分不少於35」的加數未知、被加數未知、被減數未知、減數未知的合成分解問題予以列式（記錄成等號右邊只有括號的算式填充題）並求解。
9－16－1	將「總量小於200，單位數不大於10」的被除數未知的（整除）問題予以列式並求解。
9－16－2	將「總量小於200，單位數不大於10」的除數未知的（整除）問題予以列式並求解。
10－8－9	用標準算式填充題記錄被乘數未知的問題，並記錄解題過程。（合成量小於200，單位數不大於10）
10－8－10	用標準算式填充題記錄乘數未知的問題，並記錄解題過程。（合成量小於200，單位數不大於10）

註：表4 中的活動與九年一貫課程數學學習領域中相關之能力指標如下：

- N－1－3：能理解加法、減法的意義，解決生活中有關三位數以內的加、減法問題，並運用電算器加以檢驗。
- N－1－4：能透過累加活動連接倍的語言，理解乘法的意義並解決生活中簡單的整數倍問題。
- N－1－5：能用具體分的活動，理解除法意義並解決生活中有關除法的問題。
- N－1－14：能在情境中理解加法和減法的相互關係及加法交換律。
- N－2－2：延伸加、減、乘、除法與情境的意義，使能適用來解決更多的生活情境問題，並能用計算器處理大數的計算。
- N－2－14：能在情境中，理解乘法交換律、等號的對稱性、“>”“=”“<”的遞移性、加法和乘法的結合律與分配律，以及乘法和除法的相互關係。
- A－2－1：能將生活情境中簡單問題表徵為含有 Δ 、 \square 、甲、乙、 $?$ 、 \dots 等的式子，並能解釋式子與原問題情境的關係。

表 4 中共有 11 個活動，分散在第六冊第六、第八單元，第九冊第十六單元以及第十冊第八單元，重點是幫助學童使用標準算式填充題（括號在等號右邊的算式填充題）來記錄被加（減、乘、除）數未知或加（減、乘、除）數未知的問題（稱之為列式活動）。表 4 可以較詳細地分割成四個部份。第一部份包含第六冊第六單元活動 9、10、11，重點是使用標準算式填充題（括號在等號右邊的算式填充題）來記錄加數未知（追加型）的問題。第二部份包含第六冊第八單元活動 11~14，重點是加數、被加數、減數、或被減數未知合成或分解問題的列式活動。第三部份包含第九冊第十六單元活動 1、2，重點是被除數或除數未知問題的列式活動。第四部份包含第十冊第八單元活動 9、10，重點是被乘數或乘數未知問題的列式活動。

（一）加數未知問題的列式活動

6-6-9：繪圖表現「全部不超過 50，部分不少於 15 的加數未知的合成問題」的算式填充題記錄。

6-6-10：將「全部不超過 50，部分不少於 15 的加數未知的合成問題」的算式填充題紀錄，改列成答數相同而等號右邊只有括號的算式填充題。

6-6-11：將「全部不超過 50，部分不少於 15」的加數未知的合成問題予以列式（記錄成等號右邊只有括號的算式填充題）並求解。

第二冊第九單元，本教材首次引入算式填充題，幫助學童使用算式填充題記錄合成或分解問題，自第三冊第一單元起，在協助學童瞭解算式填充題所描述的題意後，本教材都會要求學童先用算式填充題來記錄文字題，再使用算式來記錄解題活動，但是一直到第六冊第六單元之前，本教材都沒有要求特定的算式填充題格式，主要的原因是累進性合成運思的學童，必須依賴問題中所描述合成或分解活動的方式來記錄問題，才能夠掌握題意中數量間的關係，學童並沒有加減互逆的概念，以加數未知型問題（追加型問題）「姊姊有 29 顆葡萄，媽媽又給了她幾顆，現在姊姊有 46 顆，媽媽給姊姊多少顆葡萄？」為例，本教材同時接受「 $29 + () = 46$ 」或「 $46 - 29 = ()$ 」

的記法。

三下的學童已逐漸發展部分－全體運思，可以直接掌握數量間的關係，能夠進行「甲部分與乙部分合成全體」與「全體分出甲部分則成乙部分」間的可逆轉換，也能理解加減互為逆運算的概念，因此，可以進一步地要求學童使用「標準算式填充題」（例如「 $46 - 29 = (\quad)$ 」），來記錄上述的問題，所謂標準算式填充題是算式填充題的一種，但限制等號右邊只有括號的特殊格式（比較容易算出答案）。

爲了溝通是否有特殊格式要求，當要求將問題記成標準算式填充題時，本教材稱之爲列式活動（與教師溝通），只是在與學童溝通時，使用學童易讀易懂的描述，限制使用「等號右邊只有括號」的算式填充題來記問題；如果不要求將問題記成標準算式填充題格式時，本教材稱之爲用算式填充題記錄問題的活動，不限制算式填充題的記錄格式。教師請注意，當教師希望評量學童用標準算式填充題來記錄問題的能力時，宜在題幹中說明限制，而當沒有說明限制時，則不應該要求特殊記錄格式。

第六冊第六單元活動9，先進行繪圖表示算式填充題紀錄的活動，以建立列式活動中說理的媒介，爲活動10進行列式活動鋪路。活動9使用繪圖描述算式填充題意義時，本教材無意要求特殊的繪圖格式，只要符合下列格式限制者皆可被接受：①用數字表示數量，用「？」或其他符號表示未知的數量；②不得使用運算符號或等號；③能溝通已知數量與未知數量間的關係；④易畫易懂。教師宜在繪圖討論的過程中，逐漸協商上述的限制，先肯定學童所繪出的圖，再進一步地按上述的限制要求加以修正，協助學童都能形成某一種繪畫方式，來溝通算式填充題的意義。

由於所繪的圖畫上沒有運算的符號，學童可以直接看到各種數量間的關係，故而在活動10中，先溝通何謂等號右邊只有括號的算式填充題後，就要求學童嘗試將表示數量間關係的圖畫，重新用標準算式填充題的格式表現出來，在解題討論中，應強調如何在圖上看到現在所描述的關係。在活動11中，本教材要求學童直接使用標準算式填充題來記錄加數未知的合成問題，在

解題討論中，學童可以用上述部分與全體間關係轉換，或加減互逆的觀點來加以說明如何列式，若無法清楚地溝通時，教師可協助學童透過繪圖的方式，來進一步說明。

在活動10、11中，解題討論是活動的重心，希望透過討論，加強學童部分－全體關係的掌握，以及加減互為逆運算概念的運用，故而在布題的數字選擇方面，本教材限制和數或被減數在50的範圍以內，預期學童對此範圍數量有較多的活動經驗，較能順利的嘗試解題或討論。

（二）被加（減）數、加（減）數未知問題的列式活動

6－8－11：將「全部不超過50，部分不少於15」的被加數未知的合成問題予以列式（記錄成等號右邊只有括號的算式填充題）並求解。

6－8－12：將「全部不超過50，部分不少於15」的被減數未知的分解問題予以列式（記錄成等號右邊只有括號的算式填充題）並求解。

6－8－13：將「全部不超過50，部分不少於15」的減數未知的分解問題予以列式（記錄成等號右邊只有括號的算式填充題）並求解。

6－8－14：將「全部不超過200，部分不少於35」的加數未知、被加數未知、被減數未知、減數未知的合成分解問題予以列式（記錄成等號右邊只有括號的算式填充題）並求解。

延續第六冊第六單元加數未知問題列式活動的經驗，第六冊第八單元活動11～14，繼續進行加數、被加數、減數、或被減數未知合成或分解問題的列式活動，在活動11～13中，在和數或被減數的數量不可以超過50的限制下，分別引入各種題型的列式活動，而在活動14，則混合各種題型，且將和數或被減數數量範圍擴充至200，以方便學童的學習。

被加數未知問題（例如：「爸爸原有一些錄音帶，再買16卷後，現在有50卷，爸爸原有多少卷？」），與被減數未知問題（例如：「教室裡原有一些人，走掉18人後教室裡剩下22人，教室裡原有多少人？」）都是新引入的題型，當學童只能進行累進性合成運思時，可以依題意將前者記成「 $() + 16 = 50$ 」，或將後者記成「 $() - 18 = 22$ 」，但是由於問題中的起始量未

知，不能透過累進性合成運思進行解題活動，只能採用嘗試錯誤的方式解題，故而本教材始終沒有引入此類問題。本教材預期目前學童已逐漸發展部分－全體運思，能掌握數量間的部分－全體關係，或掌握加減互逆的關係，可以進行部分－全體關係間的轉換，因此本教材開始引入此類問題，幫助學童將它們記成標準算式填充題後解題（不必經由嘗試錯誤來解題），以提升解題的效率。

與第六單元的列式活動相同，在進行活動11～14時，教師應該清楚地溝通特殊記錄格式的限制，要求學童嘗試用標準算式填充題的格式（等號右邊只有括號的算式填充題），來記錄文字題，活動的重心仍在紀錄的討論，澄清如何看問題，才能將它記成標準算式填充題，與第六單元的列式活動相同，當學童無法仔細說明時，可協助學童利用繪圖的方式，來加以說明。

（三）被除數、除數未知問題的列式活動

9-16-1：將「總量小於200，單位數不大於10」的被除數未知的（整除）問題予以列式並求解。

9-16-2：將「總量小於200，單位數不大於10」的除數未知的（整除）問題予以列式並求解。

本教材開始要求學童使用算式填充題記錄合成或分解問題時，並不會限制算式填充題的格式，等待學童認知發展成熟後，才會要求學童使用標準算式填充題來記錄合成或分解問題。相同地，學童開始使用算式填充題記錄乘、除問題時，本教材也不會限制算式填充題的格式。以被除數未知問題「超市原有一些杯子，6個裝一盒，全部分裝完，一共分裝成9盒。問超市原有多少個杯子？」為例，學童可以使用「 $() \div 6 = 9$ 」或「 $6 \times 9 = ()$ 」兩種方式來記錄問題。依據題意來看，上述問題是包含除語意的問題，學童使用算式填充題「 $() \div 6 = 9$ 」來記問題，已完成問題紀錄的要求，但是學童只能採用嘗試錯誤的方式解題，如果數量變大時，不容易算出答案。如果學童使用算式填充題「 $6 \times 9 = ()$ 」來記錄問題，就算數量變大，也比上面的記法容易算出答案，像這樣記成等號右邊只有括號的特殊格

式之算式填充題（即所謂的「標準算式填充題」），本教材稱之為列式活動。

本教材預期五上的學童，已有足夠整數乘、除法互為逆運算關係的解題經驗，可以嘗試使用標準算式填充題來記錄上述問題。教師請注意，這兩種紀錄都可稱之為問題紀錄，只有要求記成標準算式填充題時，才稱為列式活動。為了溝通是否有特殊格式要求，當中要求標準算式填充題時，教師在布題時應說明要用等號右邊只有括號的算式填充題來記問題。也就是說，當教師希望評量學童用標準算式填充題來記錄問題的能力，宜說明限制，而當沒有說明限制時，則不要求特殊格式。第九冊第十六單元活動1、2中，在布第一個問題時，都允許學童使用沒有限制的算式填充題來記問題，而以後所布的問題都限制學童使用等號右邊只有括號的算式填充題來記問題。也就是說這兩個活動事實上都是屬於列式活動；即要求學童把被除數或除數未知問題列成標準算式填充題。

活動1進行被除數未知問題的列式活動，因為被除數未知問題，已清楚地呈現包含除或等分除後的結果：單位量與單位數，或總量的乘法性結構，因此當要求列式時，可以用乘法算式填充題來記錄問題；活動2進行除數未知問題的列式活動，因為除數未知的包含除問題中，已清楚地呈現總量與單位數，而且是在分裝的情境下，學童可以將其看成商數未知的等分除問題，完成列式的要求，同樣地，除數未知的等分除問題，已清楚地描述總量與單位量，學童可以將其看成商數未知的包含除問題，以除數未知的等分除問題「超市有153顆糖果，平分成幾包，全部分完，一包分得17顆，問一共平分成幾包？」為例，學童會看成「153顆糖果，17顆裝一包，可裝多少包？」，完成列式活動（例如「 $153 \div 17 = (\quad)$ 」）。

相對地，本課程延後出現乘數或被乘數未知的列式問題，因為在這些問題中，學童須預期積數具有乘法性結構，而已知的被乘數或乘數為積數的元素，才能用除法問題的觀點，來理解乘數或被乘數未知問題，進行列式活動。

在活動 1 及 2 中，討論的重點在於列式活動，也就是說教師應確認學童所列的標準算式填充題是否記錄了問題。教師在自行布題於教學活動中或隨堂練習時，應注意活動的目的是列式而不是計算，本教材建議布題的數量範圍是總量小於 200，單位數不大於 10（其中總量是指被除數，單位量是指除數或商數）。

（四）被乘數或乘數未知問題的列式活動

10-8-9：用標準算式填充題記錄被乘數未知的問題，並記錄解題過程。

（合成量小於 200，單位數不大於 10）

10-8-10：用標準算式填充題記錄乘數未知的問題，並記錄解題過程。

（合成量小於 200，單位數不大於 10）

在第五冊第九單元、第七冊第八單元及第八冊第四單元的活動中，學童已有解決乘數或被乘數未知問題的解題經驗，但那時學童尚未發展乘、除互逆的概念，無法用除法的觀點，來詮釋用倍的語意描述的問題，但是學童可以依據題意的描述進行適當的活動，來解決問題。在第九冊第十單元，學童進行了經驗乘除法互為逆運算關係的活動，在乘除法兩個運算紀錄的比對下，進行比較活動，觀察乘、除法互為逆運算的關係。本教材預期在五年級下學期，大部分的學童已能察覺乘除互逆的關係，可以用除法的觀點，來詮釋用倍的語意描述的問題，亦即可以將被乘數或乘數未知的乘法問題，用除法算式填充題來記錄，因此可以進行列式的活動。

活動 9 建議使用做成比例線段圖的方式，具體地呈現乘、除互逆的關係，以被乘數未知問題「7 包毛巾合起來有 42 條，一包毛巾有多少條？」為例，運用作整數倍線段圖的活動經驗（參見第九冊第十四單元），可以用 7 條代表 1 包的線段，連接成代表 7 包的全體，全體是 42 條毛巾，在線段圖上即可觀察到是將 42 條等分到 7 包中。因此活動 9 採分段布題的方式，先要求用成比例的線段圖，來表現被乘數未知的問題，再利用線段圖呈現的乘除互逆關係，把被乘數未知的乘法問題轉換成商數未知的除法問題，最後再限制使用標準算式填充題（例如： $42 \div 7 = (\quad)$ ）來記錄問題。

活動10進行的是乘數未知乘法問題的列式活動，爲了培養學童測量運思的發展，布題時並不要求學童先使用成比例的線段圖來呈現問題，只在學童無法說明爲何可以記成標準算式填充題時，才提示學童可以使用線段圖來輔助說明。

五、電算器

表5 電算器

冊-單元-活動	國立編譯館版活動目標
8-9-5	瞭解電算器上各基本按鍵的用途與數字鍵入的方法。
8-9-6	利用電算器做加、減、乘或（整）除的計算。

註：表5中的活動與九年一貫課程數學學習領域中相關之能力指標如下：

N-1-3：能理解加法、減法的意義，解決生活中有關三位數以內的加、減法問題，並運用電算器加以檢驗。

N-2-2：延伸加、減、乘、除法與情境的意義，使能適用來解決更多的生活情境問題，並能用計算器處理大數的計算。

表5中只有第八冊第九單元活動5、6這二個活動，重點是幫助學童瞭解電算器上各基本按鍵的用途與數字鍵入的方法，並利用電算器做加、減、乘或（整）除的計算。

（一）電算器的認識

8-9-5：瞭解電算器上各基本按鍵的用途與數字鍵入的方法。

8-9-6：利用電算器做加、減、乘或（整）除的計算。

本教材只介紹電算器中幾種簡單按鍵的使用法，在課堂上，並不限制學童使用電算器的品牌及類型；如果方便，建議教師要求學童使用簡單型的電算器，而避免使用科學及商業用或能設計程式的電算器。

本單元只介紹輸入數字的方法及下列四類基本按鍵的用途：

①運算鍵：「+」、「-」、「×」、「÷」、「=」鍵；

②數字鍵：「0」、「1」……「9」鍵；

③ 電源開關鍵：「ON」、「OFF」鍵；

④ 清除鍵：「C」、「CE」、「C/CE」、「AC」鍵。

學會輸入數字以及這些基本按鍵的使用方法後，學童大多能利用電算器做兩數的加、減、乘或（整）除的運算。至於其它常見的按鍵，例如「%」、「 $\sqrt{\quad}$ 」、「.」、「+/-」等鍵，以及記憶鍵「M+」、「M-」、「MR」、「MC」或「GT」等鍵，都不是本單元討論的範圍。

學童在按鍵過程中，清除鍵的使用可能會產生混淆；電算器清除鍵中較常見的有「C」及「CE」兩組，代表不同的意義，其中「C」是「clear」的簡稱、「CE」是「clear error」的簡稱，它們的差異在於：前者會將整個運算式清除，而後者只清除字幕上出現的數字；以「 $\{ (2 + 3) + 4 \} + 5 = (\quad)$ 」為例：當學童的按鍵過程是「2」「+」「3」「+」「7」「CE」「4」「+」「5」「=」時，字幕上會出現答案「14」；如果學童的按鍵過程是「2」「+」「3」「+」「7」「C」「4」「+」「5」「=」時，字幕上會出現數字「9」，其原因在於清除鍵「CE」只將字幕上的數字「7」清除，字幕呈現的是「 $\{ (2 + 3) + 4 \} + 5 = (\quad)$ 」的答案；而清除鍵「C」則將整個運算式「 $\{ (2 + 3) + 7 \}$ 」全部清除，電算器字幕呈現的是「 $4 + 5 = (\quad)$ 」的答案。不同廠商製造的電算器，其規格與按鍵符號所代表的意義不盡相同，如果教師對各鍵所代表功能的意義及使用方式有疑問，請自行參閱其說明書。

在大數目的計算中，社會大眾多使用電算器，故而使用算則進行紙筆計算的熟練程度，不再如此重要，但本教材仍透過算則的介紹，來討論重要的數學概念（例如乘法算則中乘對加的分配律等），爲了不妨礙數學基本概念的學習及培養能夠使用算則計算的能力，建議在本冊中，電算器常使用在加、減法上，或乘數爲一位數的範圍內；因爲電算器如何獲得答案是看不到的，也不能做合理性討論，故而在課堂活動中，教師可以常要求學童使用紙筆計算，來檢查電算器的正確性，以建立對工具的信心。

第八冊第九單元活動 5 協助學童瞭解電算器上各基本按鍵的用途與輸入

數字的方法，並經驗使用電算器進行兩數的加、減、乘或（整）除的運算，形成可以使用電算器幫助計算的共識；活動 6 則要求學童使用電算器進行加、減、乘或（整）除的計算，活動建議布一些被加（減）數或加（減）數未知的算式填充題，讓學童察覺電算器並不是萬能的，很多問題需要經由人腦思考，透過格式轉換後，才能使用電算器幫助計算答案；換句話說，讓學童瞭解電算器不是用來解決數學問題的，電算器只能幫助計算。

六、兩步驟問題

表 6 兩步驟問題

冊-單元-活動	國立編譯館版活動目標
2-9-3	解決兩步驟的合成問題或兩步驟的分解問題。
2-9-4	解決兩步驟的合成或分解問題。
3-2-3	依步驟描述兩步驟合成、分解混合問題的解題活動，並用算式記錄解題的過程和結果。（改變量在20以內）
3-2-4	依步驟描述兩步驟合成或兩步驟分解問題的解題活動，並用算式記錄解題的過程和結果。（改變量在20以內）
4-4-8	用算式記錄簡易的兩步驟「加乘」、「減乘」問題的解題活動。
5-9-6	用有乘號的算式記錄多步驟「加，乘」、「減，乘」混合運算問題的解題活動。
6-10-4	解決「先合成或分解後，再等分除或包含除」的問題，並記錄其解題過程。
6-10-5	解決「先乘後除」的問題，並記錄其解題過程。
11-14-2	解決分數的兩步驟「乘加或乘減」、「加乘或減乘」、「除加或除減」、「加除或減除」問題，並用有分數的算式記錄解題過程。

註：表 6 中的活動與九年一貫課程數學學習領域中相關之能力指標如下：

N-2-2：延伸加、減、乘、除法與情境的意義，使能適用來解決更多的生活情境問題，並能用計算器處理大數的計算。

表 6 中共有 9 個活動，分散在第二冊第九單元，第三冊第二單元，第四冊第四單元，第五冊第九單元，第六冊第十單元以及第十一冊第十四單元，重點是解決整數及分數兩步驟問題，並使用算式記錄解題過程。表 6 可以較詳細地非割成六個部份。第一部份包含第二冊第九單元活動 3、4，重點是解決兩步驟的合成或分解問題，但是並不要求算式記錄。第二部份包含第三冊第二單元活動 3、4，重點是解決兩步驟合成或分解問題，並用兩個算式

記錄解題活動。第三部份只包含第四冊第四單元活動 8，重點是使用算式記錄簡易的兩步驟「加乘」、「減乘」問題的解題活動。第四部份只包含第五冊第九單元活動 6，重點是用有乘號的算式記錄多步驟「加，乘」、「減，乘」混合運算問題的解題活動。第五部份包含第六冊第十單元活動 4、5，重點是解決「先合成或分解後，再等分除或包含除」或「先乘後除」的問題，並記錄其解題過程。第六部份只包含第十一冊第十四單元活動 2，重點是解決分數的兩步驟問題，並用有分數的算式記錄解題過程。

（一）兩步驟加減問題

2 - 9 - 3：解決兩步驟的合成問題或兩步驟的分解問題。

2 - 9 - 4：解決兩步驟的合成或分解問題。

本教材在第二冊第九單元首次引入兩步驟合成問題、兩步驟分解問題，以及兩步驟合成分解混合問題等兩步驟的問題。以兩步驟合成分解混合問題「公車上有 9 個人，下去 4 個人，再上來 3 個人，現在車上有多少人？」為例，成人在面對此問題時，可以看出是由「9 個人，下去 4 個人，剩下幾個人？」，以及「剩下的那些個人，再加上上來的 3 個人，現在車上有多少人？」，這兩個單一步驟的問題合併而成的問題，因此將此問題視為兩步驟的問題，但是現階段的學童，可能尚無能力將此問題分解成兩個問題，因為題目中，只有一個問話（現上車上有多少人？），學童可能無法自行插入一個關鍵的問話，而將此問題分解為兩個問題。

現階段的學童已有足夠的能力，透過具體活動，來嘗試解決這類的問題，只是在學童解題成功後，要求學童使用算式記錄解題活動時，可能會發生困難，因為當學童使用連續且混而為一的解題活動時（例如：拿出 9 個花片代表公車上有 9 個人、再由 9 個花片中拿走 4 個，代表下去了 4 個人，接著再加上 3 個花片，代表再上來的 3 個人，最後才點數手中的花片，確定現在車上有 8 人），無法要求使用兩個獨立的算式來記錄，因為對學童而言，他們並沒有進行兩個獨立的分解及合成活動。

根據以往的經驗，學童在學習併式時常有概念上的困難，因此，本教材

無法在此時引入併式（例如： $(9 - 4) + 3 = 8$ ），如果不能引導適當的算式記錄方式，則學童亦可能發生「 $9 - 4 = 5 + 3 = 8$ 」此種算式紀錄，這種算式可能合理地反映了他的活動，但是它違反了等號的意義。

基於上述理由，在本單元中雖然進行兩步驟的問題，以擴展學童的解題能力，但不宜要求任何算式紀錄，在二年級時，本教材將先進行「分解解題過程」的活動，強調描述「先算什麼，再算什麼」時，再正式介紹使用兩個獨立算式，來記錄兩步驟問題的解題過程。在目前的活動中，只要求學童發表解題過程，進行說明的討論。

兩步驟的文字題，是新的問題類型，所以一方面要求限制在併加型，添加型及拿走型三種基本的問題類型範圍內，加以變化，以形成兩步驟問題；另一方面要求限制數量，宜在30以內的數量範圍，進行活動。教師可以先進行「兩步驟合成問題」、先採用單一類型的運作方法，再進行「兩步驟分解問題」，學童此時可能開始混用合成與分解兩種運作方式，最後再進行「兩步驟合成分解混合問題」。在解題的過程中，仍然強調各種解題方法的討論，請學童發表他們的解題過程。而此時討論的重心，應該由計算過程，轉移至如何選擇不同的運算。

（二）兩步驟加減問題的紀錄

3 - 2 - 3：依步驟描述兩步驟合成、分解混合問題的解題活動，並用算式記錄解題的過程和結果。（改變量在20以內）

3 - 2 - 4：依步驟描述兩步驟合成或兩步驟分解問題的解題活動，並用算式記錄解題的過程和結果。（改變量在20以內）

1、兩步驟問題的算式記錄活動

第二冊第九單元，本教材首次引入兩步驟文字題的解題活動，但當時考慮部份的學童仍採用「序列性合成運思」活動來解題，無法將整個解題過程區分為兩個獨立的運算活動，因此沒有進行「算式記錄」的活動。

以兩步驟問題「美芬有14顆糖，送給妹妹8顆，哥哥又給美芬5顆，現在美芬有幾顆糖？」為例，序列性合成運思的學童，可以先拿14個花片，拿

走 8 個，再加入 5 個，然後決定最後是 11 個，在這樣的解題過程中，學童不需要決定在拿走 8 顆糖後，剩下多少顆糖，因此也無法將整個解題過程，區隔成兩個獨立且完成的活動；當學童已能進行累進性合成運思後，會先算出拿走 8 顆糖後，是 6 顆糖，再以 6 顆為起點，加入 5 顆是 11 顆，因此可以將整個解題活動，區隔成兩個獨立且完成的活動。由於序列性合成運思的活動方式，無法進行活動的區隔，因此建議教師在進行解題時，限制具體物的使用，促使學童進行累進性合成運思的活動。

由於前述的分析，在進行兩步驟文字題算式記錄活動前，宜建立「先做什麼？再做什麼？」的溝通方式，教師先依據學童所描述的整個解題過程，改用「先做...，得到...，再做...，得到...」的方式進行重述，使學童注意到完成了一個活動，再進行下一個活動；當學童能區隔活動後，即要求學童在嗣後的練習中，使用「先做什麼，再做什麼」的方式來溝通解題過程。

當學童已能夠用「先做什麼，再做什麼」的方式來分解整個解題活動時，即可引入算式記錄活動，要求學童將「先做什麼」的活動，用算式記錄下來，然後將「再做什麼」的活動，亦用算式記錄下來，而完成整個兩步驟的解題紀錄。將解題過程，按步驟分別用算式記錄下來，本教材簡稱此種強調解題細步過程的記錄格式為「多步驟算式紀錄格式」。

爲了能順利地進行活動，本教材建議教師在介紹兩步驟解題記錄活動時，宜用分段布題的方式進行，在學童完成整個解題活動後，先詢問：「你會不會用算式記錄你先做了什麼？」，在學童完成此一部分記錄活動後，再詢問：「你會不會用算式記錄你後做了什麼？」，在這樣的程序之下，學童較易產生使用兩個獨立的算式，來記錄整個解題過程與結果的共識。

爲了方便兩步驟記錄活動的溝通，活動 3 先採兩步驟合成、分解混合問題，由於兩個步驟中，採用兩種不同的運算過程，可能有助於學童做兩個活動的區隔；而活動 4 再進行兩步驟合成或兩步驟分解問題。反省解題過程，是進行算式記錄活動的目標之一，在兩步驟問題算式紀錄中，強調了整個解題過程的分解，讓學童注意到解題活動中的步驟。在嗣後兩位數加減法的教

學中，本教材將把兩位數加減兩位數的問題，視為多步驟的問題，學童具備記錄多步驟解題過程的方法後，將便利嗣後討論兩位數加減兩位數的解題策略。

解決兩步驟問題時，已不必然有標準的解題路徑，以問題「美芬有15元，爸爸給他10元，媽媽又給他8元，現在她有幾元？」為例，學童可以先做「美芬有15元，爸爸給她10元，她現在有幾元？」的活動後（ $15+10=25$ ），再做「美芬現在有25元，媽媽又給她8元，現在她有幾元？」的活動（ $25+8=33$ ）；另一個學童可能採用不同的解法，他先做「爸爸給她10元，媽媽給她8元，爸媽一共給她多少元？」的活動（ $10+8=18$ ），再做「美芬有15元，爸媽給她18元，她現在有多少元？」的活動（ $15+18=33$ ）；或者他先做「美芬有15元，媽媽給她8元後，她有幾元？」的活動（ $15+8=23$ ），再做「美芬有23元，爸爸給她10元，她有幾元？」的活動（ $23+10=33$ ），教師宜鼓勵不同解法的討論，而討論這些不同解法，將提供學習交換律或結合律的基礎經驗。

2、兩步驟問題算式紀錄的格式

本教材選擇使用兩個獨立的算式，做為兩步驟問題解題記錄的格式，第一個理由是這種記錄的方式，反映了學童的解題過程；另一個理由是學童對於併式或逐次減項的記法，可能有學習上的困難；在學童自行記錄的情況中，學童可能產生「 $14-8+5=11$ 」或「 $14-8=6+5=11$ 」兩種記錄類型。對於第一種記錄方式，雖然它符合算式的組織原則，但是看不到解題者是怎樣一步一步算出答案的，減少學童反省解題歷程的機會；而第二種記錄方式，雖反映了解題的過程，但不符合算式的組織原則。

現階段不採用併式或逐次減項的記錄方式，主要的理由是在「 $14-8+5=6+5=11$ 」逐次減項的記錄中，「 $=$ 」的意義是等價關係，而目前學童的「 $=$ 」概念，可能只是一個訊號，要求決定運算的結果，或是左邊的運算會變成右邊的結果；也就是說，對學童而言，「 $14-8=6$ 」的意義是「14減8後變成6」，而不是「 $14-8$ 」與「6」一樣大，滿足等價關係。因

此學童很難理解「 $14 - 8 + 5$ 」與「 $6 + 5$ 」滿足等價關係，所以可以寫成「 $14 - 8 + 5 = 6 + 5$ 」，學童也很難理解「 $14 - 8$ 」與「 $6 + 5$ 」不滿足等價關係，而不能寫成「 $14 - 8 = 6 + 5$ 」，本教材將在第四冊中透過比較活動，來討論等號所代表的等價關係的意義。

進行教學活動時，如果學童出現「 $14 - 8 + 5 = 11$ 」這種記法時，教師宜訴諸於溝通解題過程的共識，要求學童使用兩個算式把進行的活動按先後分別記錄下來，讓別人知道他是怎麼算出答案的；如果學童出現「 $14 - 8 = 6 + 5 = 11$ 」這種記法時，教師亦訴諸於溝通解題過程的共識，強調當一個活動完成，產生結果後，該算式即需結束，而改用兩個算式來分別記錄前後的活動。

（三）加乘、減乘兩步驟問題

4 - 4 - 8：用算式記錄簡易的兩步驟「加乘」、「減乘」問題的解題活動。

第四冊第四單元，本教材首次引入合成（分解）與倍的混合問題，活動中選用較容易溝通解題歷程的先乘後加或先乘後減的題型，例如：「一套漫畫書有 4 本，家裏有 3 套，弟弟看完 3 本，還有多少本沒有看？」這類問題；而避免選用可能產生不同解題方式的先加後乘或先減後乘的題型，例如：「一盒鉛筆中，有 3 枝白色的和 5 枝紅色的，4 盒鉛筆共有多少枝？」這類問題。

本教材描述加乘、減乘兩步驟問題時，是使用成人的觀點與教師溝通，而學童在進行解題時，可能採用更多的步驟，以上述問題為例，成人常使用「 $3 + 5 = 8$ ， $8 \times 4 = 32$ 」這種較有效率的策略解決問題，因此將先加後乘的問題視為兩步驟問題，而部份學童可能使用「 $3 \times 4 = 12$ ， $5 \times 4 = 20$ ， $12 + 20 = 32$ 」策略解決問題，學童進行了三個步驟的解題活動。因此在評量學童的解題紀錄時，不宜期望學童僅寫出兩個算式來記錄整個解題過程，教師應要求學童將各個步驟都用算式記錄下來。

在課堂活動中，教師應與學童形成共識，在處理倍的活動步驟時，都用

乘法算式來記錄，而對於加減運算部份，可以採用數個算式或直式來記錄；本教材希望在這樣的記錄方式中，學童能逐漸區辨加減法與乘法的運算。當問題較複雜時，學童亦可能產生各種合理的解題過程，教師在評量紀錄時，仍宜注重檢查學童解題的合理性，是否採用適當的算式來溝通解題活動，不應強求學童使用最經濟的解題路徑。

（四）兩步驟「加，乘」、「減，乘」混合問題

5 - 9 - 6：用有乘號的算式記錄多步驟「加，乘」、「減，乘」混合運算問題的解題活動。

延伸學童合成、分解與倍的活動經驗，本教材在第五冊第九單元引入加乘與減乘的兩步驟問題，教師宜注意加乘兩步驟問題的描述，是成人的觀點，學童對題意的理解方式，可能與成人不同，故不宜限制學童只用兩個步驟，以問題「一枝原子筆17元，哥哥買4枝，姐姐買5枝，請問總共需要多少元？」為例，成人會先算出共買9枝原子筆，然後計算「9枝原子筆是多少元？」，故而是兩步驟問題，但多數學童遇到此問題時，會依據問題的描述，先算「哥哥的筆需要多少錢」，再算「姐姐的筆要多少錢」，然後再算「合起來要多少錢」，這樣的解法就變成三步驟。

本教材建議教師宜尊重學童自發的解題，只要是合理的解題活動就應該接受，如果不合理，建議透過「解題過程合理性」的討論模式，予以修正，而不要求學童使用特定的解題策略。在使用算式記錄解題過程時，本教材仍要求「在算幾倍的地方，要用有 \times 號的算式來記」，以「先算哥哥需要的錢，再算姐姐需要的錢，再算合起來要多少錢」這種解題策略為例，本教材可以接受「 $17 \times 4 = 68$ ； $17 \times 5 = 85$ ； $68 + 85 = 153$ 」這種記法，此時學童並不必然知道153元是算9枝的錢數；如果學童嘗試計算「9枝原子筆共多少錢」，而使用多步驟紀錄格式，例如，「 $4 + 5 = 9$ ； $10 \times 9 = 90$ ； $7 \times 9 = 63$ ； $90 + 63 = 153$ 」時，教師可以運用第五冊第五單元建議的方式，先討論「 $90 + 63 = 153$ 」的活動意義，再要求學童使用乘法算式「 $17 \times 9 = 153$ 」來記錄。

如果學童對倍的問題或合成活動尚不熟悉時，教師宜接受較複雜的多步驟紀錄格式，例如使用「 $17 \times 2 = 34$ ； $17 \times 4 = 68$ 」來代表計算哥哥需要錢數的活動過程，對於摘要式的紀錄，例如，「 $17 \times 4 = 68$ 」，教師宜多予以澄清，以確定學童對活動過程的反省與掌握。

（五）乘除兩步驟問題

6-10-4：解決「先合成或分解後，再等分除或包含除」的問題，並記錄其解題過程。

6-10-5：解決「先乘後除」的問題，並記錄其解題過程。

第六冊第十單元開始，本教材將等分除或包含除問題，與其他的合成、分解問題或倍的問題混合成兩步驟問題，協助學童解題，以熟悉混合運用不同的運算，來解決問題，第六冊第十單元活動4，選擇須要先進行合成或分解活動，再進行包含除或等分除活動的問題，在活動5，選擇先乘後除的問題，協助學童嘗試解題。教師宜注意，上面的描述是成人的觀點，學童亦可採用兩個以上的運算來解決問題，教師不宜強求特殊的解題方式。

由於學童在解包含除或等分除時，尚未發展除法算則，須使用累減的方式進行解題活動，教師應選擇適當的數量，使學童在進行包含除或等分除的活動時，新單位量的份數都不超過10份，使解題的過程不至於太繁雜。教師宜注意，兩步驟是成人的觀點，而學童可能透過多個運算步驟來解題，故而留下三個以上的算式來記錄解題過程，教師不宜在此時限制算式紀錄的個數。

（六）分數的兩步驟問題

11-14-2：解決分數的兩步驟「乘加或乘減」、「加乘或減乘」、「除加或除減」、「加除或減除」問題，並用有分數的算式記錄解題過程。

本教材在第八冊首次引入兩數的和（差）與第三數的和（差）的併式問題，要求學童先用併式填充題記錄兩步驟加減問題，再使用逐次減項的記法，記錄解決兩步驟加減問題的解題過程；在第九冊的教材中，則將兩步驟問

題的範圍擴充至兩數的積與第三數的和（差），而在第十冊的教材中，更將兩步驟問題的範圍擴充至所有包含和、差、積與商的部分。但是上述兩步驟問題所討論的範圍都是整數。

第十一冊第十四單元首次引入分數兩步驟乘加（減）或加（減）乘、除加（減）或加（減）除問題，與進行整數的兩步驟問題不同的是，本單元活動的重點放在解題，不要求學童先用併式填充題記錄分數的兩步驟問題，也不要求學童使用逐次減項的記法，記錄解決兩步驟問題的解題過程，本單元只要求學童使用有分數的算式記錄解題活動。

不要求學童使用逐次減項的記法，記錄解決分數兩步驟問題的解題過程的理由是：學童尚未熟悉分數四則運算，在處理分數四則計算時，要求使用多步驟算式紀錄的格式記錄解題活動，可以協助學童掌握解題的進度及反省各步驟的意義，而且現階段多數學童可能尚未能在分數範圍內掌握乘、除互逆的規律，因此不易要求學童使用逐次減項的記法記錄解題過程。若學童仿整數兩步驟問題的格式，使用併式填充題記錄分數的兩步驟問題，或透過分數加減或乘法算則，使用逐次減項的記法記錄解題過程，教師宜淡化處理。請注意，成人用連等式來記錄分數的運算過程時，有時並不會一次減少一項。

七、和式、差式、積式、商式與大小關係

表 7 和式、差式、積式、商式與大小關係

冊-單元-活動	國立編譯館版活動目標
4-4-7	用「 $>$ 」、「 $<$ 」的符號紀錄兩數的大小關係。
4-5-1	記錄兩數的「和式」。
4-5-2	記錄兩數的「差式」。
4-5-5	用「 $>$ 」或「 $<$ 」的符號紀錄「兩數的和式與定數」的大小關係。
4-5-6	用「 $>$ 」或「 $<$ 」的符號紀錄「兩數的差式與定數」的大小關係。
4-5-7	使用自訂的符號來表示數的等價關係。
4-5-8	知道等號的等價意義。
4-5-9	經驗等號的對稱性。
5-13-1	記錄兩數的「積式」。
5-13-2	用「 $>$ 」或「 $<$ 」的符號紀錄「兩數的積式與定數間」的大小關係。
5-13-3	用「 $=$ 」的符號紀錄「兩數的積與定數間」的關係。
5-13-4	在乘法的情境中，經驗等號的對稱性。
6-10-6	比較「和式」、「差式」運算後的大小，並用「 $=$ 」、「 $<$ 」、「 $>$ 」的符號紀錄「和式」、「差式」的關係。
6-10-7	透過「和式」、「差式」運算後的大小比較紀錄，察覺等號的對稱性。
9-9-5	利用乘數未知的「積式」和定數間的關係，求出滿足關係的可能乘數，並能區分其中最大的一個。
9-9-8	利用被乘數未知的「積式」和定數間的關係，求出滿足關係的可能被乘數，並能區分其中最大的一個。
9-10-10	記錄兩數的「商式」。
9-10-11	用「 $>$ 」或「 $<$ 」的符號紀錄「兩數的商式與定數間」的大小關係。
9-10-12	用「 $=$ 」的符號紀錄「兩數的商式與定數間」的關係。
9-10-13	在除法的情境中，經驗等號的對稱性。
9-10-14	比較「積式」、「商式」運算後的大小，並用「 $=$ 」、「 $<$ 」、「 $>$ 」符號紀錄「積式」、「商式」的關係。
9-10-15	透過「積式」、「商式」運算後的大小比較紀錄，察覺等號的對稱性。

註：表 7 中的活動與九年一貫課程數學學習領域中相關之能力指標如下：

- N-2-14：能在情境中，理解乘法交換律、等號的對稱性、「 $>$ 」「 $=$ 」「 $<$ 」的遞移性、加法和乘法的結合律與分配律，以及乘法和除法的相互關係。
- N-1-3：能理解加法、減法的意義，解決生活中有關三位數以內的加、減法問題，並運用電算器加以檢驗。
- N-1-4：能透過累加活動連接倍的語言，理解乘法的意義並解決生活中簡單的整數倍問題。
- N-1-5：能用具體分的活動，理解除法意義並解決生活中有關除法的問題。

表 7 中共有 22 個活動，分散在第四冊第四、第五單元，第五冊第十三單元，第六冊第十單元，第九冊第九、第十單元，重點是引入和式、差式、積式、商式的記法與溝通的語言，並使用「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」符號記錄大小關係。表 7 可以較詳細地非割成六個部份。第一部份只包含第四冊第四單元活動 7，重點是使用「 $>$ 」、「 $<$ 」的符號記錄兩數的大小關係。第二部份包含第四冊第五單元活動 1，2 及活動 5 ~ 9，重點是引入兩數的和式及差式的記法，使用「 $>$ 」或「 $<$ 」的符號記錄「兩數的和式或差式與定數」的大小關係，使用自訂的符號來表示數的等價關係，知道等號的等價意義，並經驗等號的對稱性。第三部份包含第五冊第十三單元活動 1 ~ 4，重點和第二部份相同，只是將和式及差式改成積式。第四部份包含第六冊第十單元活動 6、7，重點是比較和式、差式運算後的大小，並用「 $=$ 」、「 $<$ 」、「 $>$ 」符號記錄比較結果，並透過和式、差式運算後的大小比較記錄，再次察覺等號的對稱性。第五部份包含第九冊第九單元活動 5、8，重點是利用被乘數或乘數未知的積式和定數間的關係，求出滿足關係的可能被乘數或乘數，並能區分其中最大的一個。第六部份包含第九冊第十單元活動 10 ~ 15，重點和第二及第三部份相同，是將和式、差式及積式改成商式。

（一）兩數大小關係的紀錄

4 - 4 - 7：用「 $>$ 」、「 $<$ 」的符號記錄兩數的大小關係。

第二冊第五單元，本教材首次引入兩數（50 以內）大小的比較活動，延續上述活動的解題經驗，第四冊第四單元，將兩數大小比較的範圍擴展至 100 以內的數，雖然此時學童可能發展出較多的比較策略，教師仍宜以累進性合成運思的策略為主，強調小的數需加上一些才能和大的數一樣，或大的數需減去一些才能和小的數一樣，來闡述數的大小感覺，部份學童可能發展出高階單位比較的策略（例如：8 比 6 大，所以 83 比 67 大），教師宜先予以肯定與討論，並淡化處理，待學童能掌握多單位系統的觀點後，才能進一步地使用高階單位的意義來進行比較活動。

第四冊第四單元活動 7 的主要目標是記錄活動，引入記錄兩數大小關係

的符號，在學童已能掌握兩數大小關係之下，採用符號引入的模式（請參閱第四冊第二單元教學研究篇的說明），提供學童自行創建符號的機會，再經由討論形成共識，使用「 $>$ 」與「 $<$ 」的符號來記錄兩數的大小關係，以便與社會大眾溝通。

在符號的讀法上，本教材引導學童能將「 $37 > 29$ 」讀成「37比29大」；將「 $29 < 37$ 」讀成「29比37小」，現階段不正式地使用「大於」或「小於」的讀法，主要的原因是「大於」、「小於」此兩種讀法在語意上較為困難。

（二）兩數的和式、兩數的差式

1、和式與差式的記錄

4 - 5 - 1：記錄兩數的「和式」。

4 - 5 - 2：記錄兩數的「差式」。

序列性合成運思的學童，需要進行具體操作來解決合成問題，所以很清楚地将合成活動視為合併與數值化兩部分，先進行合併活動，將「5」和「3」用具體物製作出來後，將兩堆具體物放在一起，再進行數值化的活動，由1開始，重新計數整個集合。而在累進性合成運思的學童，不必進行具體操作來解決合成問題，所以將合併與數值化兩部分混合在一起進行活動，逐個地將「3」的元素合併入「5」的集聚單位中，合併一個，即將新的集聚單位予以數值化「6」，再併一個，予以數值化「7」，最後再併一個，予以數值化「8」。

現階段的學童已能掌握合成活動的意義，但是沒有可以描述尚未數值化的合成結果的口語用語及符號，為了使課堂活動中有可以溝通的口語用語及符號，本教材引入兩數的和式與兩數的差式。以引入等號的等價意義為例，如果能讓學童使用「5和3的和式」（口語）和「 $5 + 3$ 」（符號）來溝通此未數值化的集聚單位，屆時才能使用「 $5 + 3$ 」這個集聚單位來和另一個集聚單位「8」，進行比較活動，發覺它們是一樣大，而產生「 $5 + 3$ 」與「8」等價的意義，進而使用「 $=$ 」來記錄等價關係。

「和」這個字在成人的用法上，常表示已數值化的合成結果，例如5與

3 的和是 8，表示「 $5 + 3$ 」數值化後的答案是「8」，爲了區分「 $5 + 3$ 」與「8」，本教材將已數值化的結果「8」稱爲和（數），而將尚未數值化的合成結果「 $5 + 3$ 」稱爲和式。

當能使用併式（例如： $(5 + 3) - 2$ ）來記錄多步驟問題時，表示即使尙未對「 $5 + 3$ 」予以數值化，但是已經可以對此集聚單位，在概念上做進一步的運算，本教材將上述併式稱之爲「5 加 3 的和式減去 2」。當然在解題時必須將「 $5 + 3$ 」數值化後，才能進一步地執行減的運算，但是成人都理解「 $5 + 3$ 」已代表了「5 和 3 的和式」，有時還故意不將其數值化，以求列式上的方便，再依據交換律或結合律等數學知識，來簡化運算過程（例如： $(29 + 17) - 17 = ()$ ）。

第四冊第五單元的活動目的，主要是形成「 $5 + 3$ 」記法的意義，爲了避免意義上的混淆，在中、低年級階段，本教材將「5 和 3 的和式」此種用語，保留給未數值化的合成結果，而稱數值化的合成結果 8 爲和數（現階段，本教材尙不引入和數的名詞）。

第四冊第 5 單元活動 1，主要是協助學童建立「 $5 + 3$ 」這類形式符號的意義，在活動中，先引入記錄「5 和 3 合起來是多少？」的要求，依照學童以前記錄問題的慣例，學童會記成「 $5 + 3 = ()$ 」，接著教師應立刻詢問「5 和 3 合起來」要怎麼記，在討論中，強調這兩個問題的差異，在於後者並未詢問「是多少？」，所以可以將「 $5 + 3 = ()$ 」中的「 $= ()$ 」部份去除，而形成用「 $5 + 3$ 」來記錄「5 和 3 合起來」的共識，並將它叫做「5 和 3 的和式」，前面的「5」稱爲「被加數」，後面的「3」稱爲「加數」。

教師應多布一些相同類型的問題，幫助學童練習「兩數的和式」的用語，與「 $5 + 3$ 」這種形式的記錄方式，使其成爲穩定的溝通工具，在以後的活動中，才能以此爲溝通工具，進行「兩數的和式」和「定數」的比較活動，進而討論「等號」的等價意義。

在活動 2 中，幫助學童建立「 $5 - 3$ 」這類形式符號的意義，活動進行

的方式與進行「兩數的和式」活動方式相似，是用「 $5 - 3$ 」來記錄「5 減去 3」的活動，而叫做「5 和 3 的差式」或「5 減 3 的差式」，相同的，在理念上，本教材稱數值化的結果 2 為「差數」。

本教材希望學童在活動中，能建立「5 減 3 的差式」的用語與「 $5 - 3$ 」的紀錄方式都表示「5 減去 3」活動的意義，如果進一步地要求學童數值化，學童也可決定「5 減 3 的差式」數值化的結果是 2，只是暫時不進行數值化，或暫時不記錄數值化的結果而已。

2、兩數的和式（差式）與定數大小關係的紀錄

4 - 5 - 5：用「 $>$ 」或「 $<$ 」的符號記錄「兩數的和式與定數」的大小關係。

4 - 5 - 6：用「 $>$ 」或「 $<$ 」的符號記錄「兩數的差式與定數」的大小關係。

第四冊第四單元，學童已有使用「 $>$ 」、「 $<$ 」的符號來記錄兩數大小關係的活動經驗；在第四冊第五單元活動 1、2 中，學童已學習「兩數的和式」與「兩數的差式」的意義與記錄方式；在第四冊第五單元活動 5、6 中，可以進行「兩數的和式」與「定數」，「兩數的差式」與「定數」的比較活動，並用符號記錄其大小關係。

以兩數的和式與定數大小比較問題「『 $6 + 15$ 』和『18』，誰比誰大？」為例，經過數值化，「 $6 + 15$ 」是 21，比 18 大，期望學童能形成「6 和 15 的和式比 18 大」的結果，並仿兩數大小的記錄方式，將其記成「 $6 + 15 > 18$ 」。再以問題「『18』和『 $5 + 12$ 』，誰比誰大？」為例，學童可以得到「18 比 5 和 12 的和式大」的結果，並使用算式「 $18 > 5 + 12$ 」記錄比較結果。教師在布題時亦可改用「誰比誰小？」的問話，幫助學童使用「 $18 < 6 + 15$ 」及「 $5 + 12 < 18$ 」記錄比較的結果。

教師請注意，在沒有形成共識之前，當比較「 $6 + 15$ 」和「18」誰比誰大時，學童可能回答「21 比 18 大」，並將比較結果記成「 $21 > 18$ 」，這並不是本教材期望的答案，此時教師宜請學童進一步地說明「21」的來源，並要

求學童使用原來題目中描述的關係來記錄，原題目中只有「 $6 + 15$ 」，並沒有「 21 」，幫助學童形成「 $6 + 15 > 18$ 」記法的共識。

3、等號的等價意義（加減情境）

4 - 5 - 7：使用自訂的符號來表示數的等價關係。

4 - 5 - 8：知道等號的等價意義。

在「兩數的和（差）式」與「定數」的比較活動中，也可能出現一樣大的情況，例如「 $32 + 16$ 」和「 48 」一樣大，第四冊第五單元活動 7 在此種一樣大的情況下，要求學童自行創建符號來表示一樣大的關係。如果學童自創的符號中，出現約定成俗「 $=$ 」的符號，可以訴諸於社會共識，形成使用「 $=$ 」來記錄「一樣大關係」的共識；如果學童自創的符號中，未出現「 $=$ 」號，教師宜先形成班級共識，全班選擇一種特定符號來表示「一樣大的關係」，而不必立即提供「 $=$ 」。以自創「 $\#$ 」符號為例，教師應先接受對學童有意義的自創符號，再要求約定成俗的符號，約定成俗的符號「 $=$ 」可以在活動 8 中再討論。

在引入等號的等價意義時，教師應先考慮學童過去使用等號的意義是什麼，學童使用「 $32 + 16 = 48$ 」來記錄「 32 與 16 」的合成活動，而獲得 48 的結果，面對記錄，學童不必然覺察到「等號」兩邊的「 $32 + 16$ 」和「 48 」一樣大，滿足等價關係。本教材透過將合成與比較問題並列的方式，來介紹「等號」的等價意義。活動 8 先使用加法算式填充題（以「 $26 + 12 = ()$ 」為例）來引發合成活動，學童將解題結果填入，形成「 $26 + 12 = (38)$ 」的紀錄後，教師將此紀錄留在黑板上，立即再佈置比較問題「『 $26 + 12$ 』與『 38 』，誰比誰大？」，並要求學童使用算式記錄比較的結果，如果此時學童尚使用班級內共識的符號，就會形成「 $26 + 12 \# 38$ 」的記法。

當黑板上同時呈現「 $26 + 12 = (38)$ 」與「 $26 + 12 \# 38$ 」兩種記法時，教師繼續再布符號未知的算式填充題「 $26 + 12 () 38$ 」，學童解題時將面臨兩難情況，不知道要填入「 $=$ 」號來表示得到答案的意思，或使用「 $\#$ 」號來表示兩邊一樣大，此時教師可以引入社會共識的符號，說明社會上都

使用「 $=$ 」來表示「一樣大」的關係，幫助學童能經驗「等號」具有雙重意義，又可以表示「得到的答案是」，又可表示「一樣大」的關係，在形成使用「 $=$ 」來描述「等價關係」的共識後，教師宜再提供數個比較問題，讓學童有機會使用「 $=$ 」號來表示等價關係。

4、等號對稱性（加減情境）

4-5-9：經驗等號的對稱性。

等號對稱性的意義，是指將等號前後兩組物件的位置互相交換，仍保留其同樣的關係。第四冊第五單元活動9，本教材在加減問題情境中首次引入「等號對稱性」，在對比的例子下，讓學童經驗到，「 $24+19=43$ 」和「 $43=24+19$ 」，都同樣地表示「 $24+19$ 」與「 43 」一樣大的等價關係。

在活動進行時，應先做一個方向的比較，例如比較「 $24+19$ 」與「 43 」，誰比誰大，並做成紀錄後，再改換次序，比較「 43 」和「 $24+19$ 」，誰比誰大，而且要求學童按題目出現的次序予以記錄，在這兩個例子的比較下，幫助學童經驗等號的對稱性。

在相同的程序下，可以進行「兩數的差式」和「定數」的比較活動，選擇適當的數字，使「兩數的差式」和「定數」滿足一樣大的等價關係，同時再做相反方向的比較，在兩個不同的紀錄比對下，幫助學童經驗等號對稱性的意義。教師應注意，本教材只要求在課堂討論中經驗等號的對稱性質，在習作中不會出現相關的問題，教師不宜將等號的對稱性當做評量的重點。

（三）兩數的積式

1、積式的記錄

5-13-1：記錄兩數的「積式」。

與第四冊第五單元引入「兩數的和式」、「兩數的差式」的語言與符號意義相同，本教材引入「兩數的積式」語言，是爲了建立積與定數比較問題的口語溝通工具，並賦予類似「 7×6 」這個書寫格式的意義，在「 $7 \times 6 = 42$ 」的算式中，本教材稱「 7×6 」爲「7乘以6的積式」，而稱「42」爲「積數」。在談論「積式」的描述時，並未強調用「1」爲單位量來重新

描述總量，而在談論「積數」時，則強調已用「1」為單位量重新描述總量。對於學童，本教材尚不引入「積數」的名詞，而使用「7乘以6的積式」來描述「 7×6 」這個敘述。

第五册第十三單元活動1是記錄活動，協助學童建立「 7×6 」符號的意義，在介紹「 7×6 」這個符號時，本教材強調三種敘述的紀錄差異，在對比的情況下，來溝通「 7×6 」的意義。活動先要求學童記錄「7的6倍是42」，按以前的經驗，學童會記成「 $7 \times 6 = 42$ 」，再要求記錄「7的6倍是多少？」，按以前的經驗，學童會記成「 $7 \times 6 = ()$ 」，最後要求學童記錄「7的6倍」，在與前面兩個敘述的比較下，以及記錄「和式」或「差式」的經驗下，期望在討論中形成「 7×6 」的書寫格式，以獲得此書寫記號的意義，並介紹「 7×6 」的讀法是「7乘以6的積式」，而稱「7」為被乘數，「6」為乘數。在與學童溝通時，教師可隨時混用「幾的幾倍」與「幾乘以幾的積式」這兩個敘述。此部份的活動，強調記錄（書寫）方式，所以是偏向於語言的教學，教師應該在重覆使用及逐步修正下，協助學童瞭解數學語言的語意。

2、積式與定數的比較活動

5-13-2：用「 $>$ 」或「 $<$ 」的符號記錄「兩數的積式與定數間」的大小關係。

5-13-3：用「 $=$ 」的符號記錄「兩數的積與定數間」的關係。

與和式或差式與定數的比較活動相同，第五册第十三單元活動2、3，除了要求學童進行積與定數的比較活動外，還協助學童使用數學符號來記錄積與定數的比較結果。在活動中，先引入比較大小的活動，再引入大小（或等於）關係的紀錄。以問題「8乘以6的積式和45，誰比誰大？」為例，學童形成8乘以6的積式比45大的結論後，再要求將「8乘以6的積式比45大」的描述，用數學符號記錄下來，依據第四册第五單元建立應使用原來題目中描述的關係來記錄的共識，學童應該將比較的結果記成「 $8 \times 6 > 45$ 」，而不是記成「 $48 > 45$ 」。

本教材建議教師在布題時，使用「誰比誰小（大）？」的問話，不要使用「誰大？誰小？」的問話，前者較易得到「甲比乙小」的描述，並使用「 $甲 < 乙$ 」記錄比較的結果；而後者可能無法引發學童使用大小關係來敘述比較的結果，而祇回答「45比較小」，此種回答並不適合引入數學上的記錄格式。

在要求紀錄兩數的積式與定數一樣大的敘述時，需要再透過討論，形成使用等號來記錄一樣大的關係。此外，在紀錄時，必須加上紀錄的限制，要求先說的先記，唯有在這種限制之下，才能形成「 $7 \times 5 = 35$ 」以及「 $35 = 7 \times 5$ 」這兩種紀錄，方便進行等號對稱性的討論。

3、等號的對稱性（乘法情境）

5-13-4：在乘法的情境中，經驗等號的對稱性。

第四冊第五單元，學童已在加、減法情境中，經驗等號的對稱性，第五冊第十三單元活動4，首次在乘法情境下，探討等號的對稱性。在活動目標中，本教材強調只提供學童觀察的經驗，因此仿加減法活動進行的方式，在對比的例子下，幫助學童觀察到「 $7 \times 5 = 35$ 」和「 $35 = 7 \times 5$ 」這兩個式子，都同樣地表示「 7×5 」和「35」一樣大的關係。在活動中，建議教師先用「兩數的積」→「定數」這個順序來布比較問題，獲得一樣大的答案後，要求按照先說的先記的限制，將此一樣大的關係記錄下來，並將此紀錄留在黑板上；接著按「定數」→「兩數的積」這個順序來布同樣的問題，並將紀錄留在黑板上；最後然後討論這兩種記法的相同與相異之處，幫助學童觀察到等號的對稱性。

（四）和式與差式的比較

6-10-6：比較「和式」、「差式」運算後的大小，並用「 $=$ 」、「 $<$ 」、「 $>$ 」的符號紀錄「和式」、「差式」的關係。

6-10-7：透過「和式」、「差式」運算後的大小比較紀錄，察覺等號的對稱性。

第四冊第五單元，本教材引入「兩數的和式」、「兩數的差式」的語

言，並進行「和式」或「差式」與整數（定數）的大小比較活動。第六冊第十單元活動 6，先澄清「 $17+22$ 」記錄了「17和22的和式」，而「 $51-12$ 」記錄了「51和12的差式」，接著進行「和式」和「差式」之間的大小比較活動，並要求學童使用「 $=$ 」、「 $<$ 」或「 $>$ 」符號記錄「和式」和「差式」的大小關係。此類活動亦可延伸至和式與和式的比較，或差式與差式的比較，協助學童能使用特定的語言或符號來進行溝通，理解兩個未完成計算的運算描述，亦可形成比較的問題。

活動 7 透過「和式」和「差式」大小關係比較的紀錄活動，協助學童察覺等號的對稱性。本教材不引入「對稱性」這個專有名詞，只幫助學童察覺等號左右的描述，互換位置後，並沒有改變其關係，算式「 $17+22=51-12$ 」或「 $51-12=17+22$ 」都記錄了「和式」與「差式」間的等價關係，可以同時接受此兩種紀錄方式。

（五）估商活動

9-9-5：利用乘數未知的「積式」和定數間的關係，求出滿足關係的可能乘數，並能區分其中最大的一個。

9-9-8：利用被乘數未知的「積式」和定數間的關係，求出滿足關係的可能被乘數，並能區分其中最大的一個。

第九冊第九單元活動 5 在乘數未知的積式（例如： $8 \times ()$ ）與定數（例如：59）的大小比較關係描述（例如： $8 \times () < 59$ ）情境下，先探討未知的乘數可以是多少（在討論時，限制乘數不得為分數或小數，並要求在全班學童合作下能窮盡所有可能的答案），再透過比較活動，指出最大的乘數是什麼；相對地，活動 8 是在被乘數未知的積式（例如： $() \times 7$ ）與定數（例如：59）的大小比較關係描述（例如： $() \times 7 < 59$ ）情境下進行相同的活動，先探討未知的被乘數可以是多少，再透過比較活動，指出最大的被乘數是什麼。這兩個活動皆是在進行估商的活動，為引入除法成人算則鋪路。

以乘數未知問題「 $8 \times () < 59$ 」為例，學童可能有兩種解題策略，

第一種是先窮盡地列出所有可能的乘數，再決定哪一個最大；第二種是透過嘗試錯誤，估計乘數為 8 時，會違反題目的限制，而乘數為 7 時，可以滿足題目的要求，因而決定 7 為此問題中最大的乘數。

（六）兩數的商式

1、商式的紀錄

9-10-10：紀錄兩數的「商式」。

依據除法原理，本教材在中年級正整數除法問題中，皆描述兩個待解的未知，同時詢問商數與餘數；當除法的結果可以用分數來表示時，或在全部分完的要求下，已無餘數部分，則「 $a \div b$ 」可以代表是一個未定數值的集聚單位，才可以進行兩數的商式的討論。

以單位量轉換的觀點，在包含除問題中，商數是單位數，描述以除數為被計數單位的個數；相對地，在等分除問題中，商數是以壹為被計數單位，描述被計數單位的內容，或新單位量，由以上的說明可知，商式具有雙重的活動意義，所以本教材在累積二年多包含除與等分除活動經驗，而且可以用除法算式記錄兩種解題活動後，才進行兩數的商式的探討。

與引入兩數的和（差）式與兩數的積式語言進行的方式相同，第九冊第十單元活動10在等分除或包含除並要求全部分完的問題情境下，引入兩數的商式的語言，以成為以後的溝通工具，並使用「15除以3的商式」來口述「 $15 \div 3$ 」這個敘述；活動中也同時引入被除數與除數的名稱，將「 $15 \div 3$ 」前面的數字15稱之為被除數，後面的數字3稱之為除數。

2、商式與定數大小關係的紀錄

9-10-11：用「 $>$ 」或「 $<$ 」的符號紀錄「兩數的商式與定數間」的大小關係。

9-10-12：用「 $=$ 」的符號紀錄「兩數的商式與定數間」的關係。

現階段學童已累積多步驟和差併式、和差併式、和（差、積）式與定數四者間比較活動的經驗，也相當熟悉使用 $>$ 、 $<$ 與 $=$ 符號來紀錄比較結果，第九冊第十單元活動11、12進行兩數的商式與定數間的比較活動，並要求學

童使用 $>$ 、 $<$ 與 $=$ 符號紀錄其大小關係；活動14進行積式與商式比較活動，並使用 $>$ 、 $<$ 與 $=$ 符號紀錄其大小關係。再次提醒教師，本教材在布此類比較問題時，偏好使用「誰比誰大？」的問法，而不是「誰比較大？」的問法，前者較易引發「6比24除以6的商式大」的完整關係描述，而後者較易引發「6比較大」的答案，後者並不是兩者大小關係的完整描述，當學童使用大小關係的完整敘述時，較易進行下一步的記錄活動。

$>$ 與 $<$ 符號只有一種意義，是描述兩數大小關係的符號。但是等號（ $=$ ）在現階段則有兩種不同的意義，當將重點放在運算部分時，等號的意義是「得到的答案是」，「 $15 \div 3 = 5$ 」代表「15和3經過除法運算後，得到的答案是5」；當重點放在大小關係部分時，等號的意義是兩邊一樣大的「等價關係」，「 $15 \div 3 = 5$ 」代表「 $15 \div 3$ 」與「5」經過比較大小後，兩者一樣大，滿足等價關係，活動12透過使用等號來記錄比較活動的結果，期望加深學童掌握等號是代表等價關係的意義。

3、商式與積式大小關係的紀錄

9-10-14：比較「積式」、「商式」運算後的大小，並用「 $=$ 」、「 $<$ 」、「 $>$ 」符號紀錄「積式」、「商式」的關係。

與和式與差式比較活動進行的方式相同，第九冊第十單元活動14進行積式與商式的比較活動，並要求使用「 $=$ 」、「 $<$ 」、「 $>$ 」符號記錄比較的結果。此類活動亦可延伸至積式與積式的比較，或商式與商式的比較，協助學童能使用特定的語言或符號來進行溝通，理解兩個未完成計算的運算描述，亦可形成比較的問題。

4、等號的對稱性（除法情境）

9-10-13：在除法的情境中，經驗等號的對稱性。

9-10-15：透過「積式」、「商式」運算後的大小比較紀錄，察覺等號的對稱性。

在第四冊第五單元及第五冊第十三單元，學童已在加（減）法及乘法情境問題中，經驗等號的對稱性，第九冊第十單元延伸那時的經驗，在除法問

題情境下，幫助學童再次經驗等號的對稱性。

在活動13的目標中，強調只是經驗層次，只提供學童觀察的經驗，因此在對比的例子下，讓學童觀察到，「5」和「 $30 \div 6$ 」一樣大，記錄成「 $5 = 30 \div 6$ 」，「 $30 \div 6$ 」和「5」也一樣大，記錄成「 $30 \div 6 = 5$ 」，透過討論這兩種記法的相同與相異之處，讓學童觀察，將等號前後的兩組符號、位置互相交換，仍保留其相同的關係。

八、併式表徵

表 8 併式表徵

冊-單元-活動	國立編譯館版活動目標
8-10-6	經驗「兩數的和(差)式」與「第三數」的和(差)式的紀錄。
8-10-7	在使用併式紀錄摘要記錄兩步驟加減問題的解題活動與結果的情境中，形成使用括號區分運算次序的共識。
8-12-2	經驗用併式填充題記錄兩步驟加減問題，形成使用括號區分解題計畫中運算次序的共識。
8-12-3	使用併式填充題(使用括號區分運算次序)記錄兩步驟加減問題，並記錄解題過程。
9-4-1	(1) 使用併式記錄「兩數的積式」與「第三數」的和(差)式 (2) 使用併式記錄「兩數的和(差)式」與「第三數」的積式。
9-6-9	使用併式填充題記錄兩步驟乘加或乘減問題，並形成使用括號區分運算次序的共識。(併式填充題中恰有一個乘號及一個加號或減號，例如： $(a \times b) \pm c$ 。)
9-10-1	使用併式填充題記錄多步驟加減問題，並形成使用(小、中)括號區分運算次序的共識。
9-10-2	使用併式記錄「 $(a \pm b) \pm c$ 與 d 的和(差)併式」或「 $(a \pm b)$ 與 $(c \pm d)$ 的和(差)併式」問題。
10-1-9	使用併式填充題(使用括號區分運算次序)記錄兩步驟「加乘或減乘」、「加除或減除」、「除加或除減」問題，並形成記錄解題過程次序的共識。
10-1-10	(1) 使用併式記錄「兩數的商式」與「第三數」的和(差)式。(併式中恰有一個除號及一個加號或減號，例如： $(a \div b) \pm c$ 、 $c \pm (a \div b)$) (2) 使用併式記錄「兩數的和(差)式」與「第三數」的商式。(併式中恰有一個除號及一個加號或減號，例如： $(a \pm b) \div c$ 、 $c \div (a \pm b)$)
10-2-10	使用併式填充題(使用括號區分運算次序)記錄兩步驟乘、除問題，並形成記錄解題過程次序的共識。
10-2-11	使用併式記錄「兩數的積(商)式」與「第三數」的積(商)式。(併式中都是乘號或除號，例如： $(a \times b) \times c$ 、 $(a \times b) \div c$ 、 $(a \div b) \times c$ 、 $(a \div b) \div c$ 、 $c \times (a \times b)$ 、 $c \times (a \div b)$ 、 $c \div (a \times b)$ 、 $c \div (a \div b)$)
10-15-2	在多步驟加減問題情境中，形成“利用「由最左往右算」的運算規則，以省略在併式填充題中標示由最左往右計算步驟的括號”的共識。
10-15-3	在多步驟乘除問題情境中，形成“利用「由最左往右算」的運算規則，以省略在併式填充題中標示由最左往右計算步驟的括號”的共識。
10-15-4	在多步驟四則問題情境中，形成“利用「乘、除先算，再由最左往右算」的運算規則，以省略在併式填充題中標示乘、除先算，再由最左往右計算步驟的括號”的共識。

註：表 8 中的活動與九年一貫課程數學學習領域中相關之能力指標如下：

N-2-14：能在情境中，理解乘法交換律、等號的對稱性、“>”“=”“<”的遞移性、加法和乘法的結合律與分配律，以及乘法和除法的相互關係。

N-2-16：能知道先乘除後加減的約定，並能用來列式及簡化計算式子。

A-2-1：能將生活情境中簡單問題表徵為含有 Δ 、 \square 、甲、乙、?、…等的式子，並能解釋式子與原問題情境的關係。

表 8 中共有 15 個活動，分散在第八冊第十、第十二單元，第九冊第四、第六以及第十單元，第十冊第一、第二以及第十五單元，重點是引入併式紀錄的格式，使用併式填充題記錄問題，並利用「由最左往右算」、「乘、除先算，再由最左往右算」等共識省略括號。表 8 可以較詳細地分割成六個部份。第一部份包含第八冊第十單元活動 6、7，及第十二單元活動 2、3，重點是在兩步驟加減問題情境中，使用併式摘要記錄兩步驟加減問題的解題活動與結果，形成使用括號區分運算次序的共識後，再使用併式填充題（使用括號區分運算次序）記錄兩步驟加減問題，並記錄解題過程。第二部份包含第九冊第四單元活動 1，以及第六單元活動 9，重點是使用併式填充題記錄兩步驟乘加或乘減問題，並形成使用括號區分運算次序的共識。第三部份包含第九冊第十單元活動 1、2，重點是使用併式填充題記錄多步驟加減問題，並形成使用（小、中）括號區分運算次序的共識。第四部份包含第十冊第一單元活動 9、10，重點是使用併式填充題（使用括號區分運算的次序）記錄兩步驟「加乘或減乘」、「加除或減除」、「除加或除減」問題，並形成記錄解題過程次序的共識。第五部份包含第十冊第二單元活動 10、11，重點是使用併式填充題（使用括號區分運算次序）記錄兩步驟乘、除問題，並形成記錄解題過程次序的共識。第六部份包含第十冊第十五單元活動 2、3、4，重點是利用「由最左往右算」、「乘、除先算，再由最左往右算」等共識省略括號。

（一）兩步驟加減問題

1、和差併式

- 8-10-6：經驗「兩數的和（差）式」與「第三數」的和（差）式的紀錄。
- 8-10-7：在使用併式紀錄摘要記錄兩步驟加減問題的解題活動與結果的情境中，形成使用括號區分運算次序的共識。

以兩數的和式（例如： $8 + 5$ ）與定數（例如：13）大小關係描述為例：「 $8 + 5$ 」稱為 8 與 5 的和式，當 13 和「 $8 + 5$ 」一樣大（等價）時，13

稱為和數。累進性合成運思的學童，可以理解「 $8 + 5$ 」為一個運算的描述，但必須執行運算後，才能掌握其意義；部分—全體運思的學童，可以掌握「 $8 + 5$ 」是8和5兩個集聚單位合成的全體，不必執行運算，亦能掌握其為一個新的集聚單位（未定值的集聚單位），包含8與5兩個部分，並能以此新集聚單位為起點，繼續進行運算；也就是說，在概念上，部分—全體運思學童可以掌握一個未定值的集聚單位，對它進行運算，將它具體地表徵出來，而形成併式。

以併式「 $(8 + 5) - 6$ 」為例，它描述對「 $8 + 5$ 」這個集聚單位，進行減6的運算。為了與教師溝通方便，本教材區分下列三個名詞：①併式：含有兩個以上運算描述的紀錄，例如「 $(8 + 5) - 6$ 」；②併式填充題：要求替併式確定數值，例如「 $(8 + 5) - 6 = ()$ 」；③併式紀錄：併式與其結果的紀錄，例如「 $(8 + 5) - 6 = 7$ 」。

學童必須先學會算式紀錄（例如： $3 + 5 = 8$ ），並掌握算式紀錄的意義後，才可能使用算式填充題（例如： $3 + 5 = ()$ ）來記錄問題，相同的，學童必須先學會併式紀錄（例如： $(8 + 5) - 6 = 7$ ），並掌握併式紀錄的意義後，才可能使用併式填充題（例如： $(8 + 5) - 6 = ()$ ）來記錄問題。第八冊第十單元活動6，本教材先與學童溝通併式的意義，接著在活動7透過要求使用一個算式（併式）將兩個算式同時記下，而且能清楚地表達先算什麼，後算什麼的限制下，幫助學童形成併式紀錄格式的共識。

第八冊第十單元活動6在加、減運算範圍內，首次引入併式的格式，活動在複習使用「 $8 + 6$ 」記錄8和6的和式的描述後，接著討論如何記錄「『8和6的和式』和5」的和式。因為是首次引入併式紀錄，因此只強調能將兩個運算合併記錄，本教材同時接受「 $8 + 6 + 5$ 」或「 $(8 + 6) + 5$ 」兩種基本紀錄形式，而不強調一定要使用括號。

部分—全體運思的學童已能掌握加法交換律，故而可能產生其他相當的紀錄，教師宜在討論中，澄清其意義。為了溝通上的方便，只有加或減兩種

運算符號的併式，本教材常簡稱為和差併式。由於加減併式的紀錄格式是首次引入，建議在進行活動 6 時，教師應注意下列事項：①使用小數目；②將未定值集聚單位當作被加數或被減數；③利用手勢或動作來加強題意的溝通。例如黑板上已有「 $8 + 6$ 」與「 5 」兩組符號，要進行「『 8 和 6 的和式』和 5 」的和式要怎麼記的問題時，當教師口述「 8 和 6 的和式」時，宜手指「 $8 + 6$ 」部分，口述「 5 」時，則手指 5 ，口述「的和式」時，做出合成手勢。

2、併式中用括號區辨運算次序

併式中必然包含兩個以上的運算，因此運算次序是重要的溝通元素，在首次引入時，本教材先溝通使用括號來區辨運算次序先後的規約，幫助學童形成「括號部分先算」的共識。在成人的共識中，尚其他的規約，例如「先乘除後加減」或「由最左往右依序運算」等；本教材建議現階段只採用「括號部分先算」這一種規約，待學童較熟悉併式的意義後，在第十冊再討論其他的規約。

第八冊第十單元活動 7 是在併式紀錄的討論中，形成使用括號來表示先算了什麼的共識。以問題「 6 和『 5 和 2 的和式』」的和式是多少？算算看。」為例，活動先要求學童將先算什麼，後算什麼，用兩個算式分別記錄下來；再要求學童用一個算式將兩個步驟同時記下，並討論如何記，才能夠溝通原來的問題，而且清楚地表達先算什麼，後算什麼，進而形成「 $6 + (5 + 2) = 13$ 」併式紀錄格式的共識。

本教材建議教師在口述布題時，除手勢動作外，宜利用語氣的陰陽頓挫，來加強題意的溝通，例如「 6 和（停頓） 5 和 2 的和式（停頓）的和式（停頓）是多少？」。在活動 7 中，本教材刻意地將未定數值的集聚單位當做加數或減數，以突顯需要記號來區分運算次序的重要性，在形成使用括號來區分運算次序的共識後，此規約亦可應用至未定數值集聚單位為被加數或被減數的情境中。

數學符號「 $5 + 2$ 」是口語敘述「 5 和 2 的和式」的一種書寫的紀錄，

成人常將數學符號「 $5 + 2$ 」唸做「5 加 2」，來代替「5 和 2 的和式」的意義；本教材建議在學童熟悉「5 和 2 的和式」此類敘述方式後，可混合使用兩種說法，例如口述「6 和『5 加 2 的和式』」。

3、併式填充題記錄兩步驟加減問題

8-12-2：經驗用併式填充題記錄兩步驟加減問題，形成使用括號區分解題計畫中運算次序的共識。

8-12-3：使用併式填充題（使用括號區分運算次序）記錄兩步驟加減問題，並記錄解題過程。

當學童熟悉「兩數的和（差）式與第三數」的和（差）式的紀錄方式，並經驗使用一個加減併式紀錄描述兩步驟問題的解題活動與結果後，學童才具備使用併式填充題記錄兩步驟加減問題的前置經驗。因此本教材在第八冊第十單元，先與學童溝通併式的意義，並幫助學童形成併式紀錄格式的共識後，在第八冊第十二單元，才引入併式填充題。

第八冊第十二單元活動 2 先與學童溝通併式填充題的意義，以併式填充題「 $19 - (8 + 5) = ()$ 」為例，活動透過學童對算式填充題的理解，協助學童嘗試理解題意，並進行解題。待學童瞭解併式填充題的意義後，活動接著布兩步驟加減文字問題，以對併式填充題意義的瞭解為基礎，討論如何使用併式填充題來記錄問題，並使用括號區分解題計畫中的運算次序；活動 3 則直接要求學童先使用併式填充題的格式記錄兩步驟加減問題，並用算式記錄解題過程。

（二）兩步驟乘加（減）問題

1、和（差）式與積式的併式

9-4-1：(1) 使用併式記錄「兩數的積式」與「第三數」的和(差)式

(2) 使用併式記錄「兩數的和(差)式」與「第三數」的積式。

本教材在第五冊第十三單元引入兩數的積式的語言及記錄方式；在第八冊第八單元引入和差併式，並形成使用小括號區辨併式中運算次序的共識。第九冊第四單元活動 1 首次引入和（差）式與積式的併式問題，爲了溝通方

便，本教材使用和（差）積併式來統稱含有兩個運算的併式，而且其中一個為乘法運算，另一個為加法或減法運算。

部分一全體運思學童雖然尚未掌握數概念的乘法性合成結構，例如視 8 為 40 的組成元素，40 是由 5 個 8 合成的結構；但是累積乘法活動經驗後，已能預期 5 個 8 必能合成一個新集聚單位。配合自第四冊第四單元起的加乘、減乘兩步驟問題的解題經驗，以及目前和差併式的經驗，本教材預期現階段學童可以掌握兩數的積式的意義，在概念上繼續對它進行運算，將此過程用符號表現出來，而形成和（差）積併式，例如使用併式「 $(8 \times 5) - 6$ 」描述「 8×5 」與 6 之間的差式。

由於學童已有許多使用小括號區辨兩個運算次序的經驗，因此第九冊第四單元活動 1 先布一題記錄「第三數」與「兩數的和式」的差式的問題，喚起學童的舊經驗後，就直接與學童溝通如何使用併式的格式，來記錄「兩數的積式」與「第三數」的和（差）式或「兩數的和（差）式」與「第三數」的積式。併式中含有兩數的積式的問題是首次引入，爲了不讓學童將注意力放在解題上而忽略了紀錄格式意義的溝通，活動只要求學童使用併式記錄問題，而不要求解題。

因爲透過口語並不容易與學童溝通併式的記法，本教材建議教師混用下列兩種布題的方式（以「18 與『5 的 3 倍』的差式怎麼記？」爲例），第一種是教師一邊演示，一邊板書布題，並利用手勢或動作來加強題意的溝通，教師口述「18」時，應板書「18」，口述「5 的 3 倍」時，應板書「 5×3 」，教師口述「的差式」時，應以手勢表示「18」與「 5×3 」兩個物件。第二種是教師先將「18」與「 5×3 」併排書寫在黑板上，再口述「18 減『5 乘以 3』」要怎麼記？

2、併式填充題記錄兩步驟乘加（減）問題

9 - 6 - 9：使用併式填充題記錄兩步驟乘加或乘減問題，並形成使用括號區分運算次序的共識。（併式填充題中恰有一個乘號及一個加號或減號，例如： $(a \times b) \pm c$ 。）

第八册第十單元，本教材引入使用併式填充題記錄兩步驟加減問題，並形成使用小括號區分運算次序的共識；第九册第四單元幫助學童形成和（差）積併式格式的共識，延續上述活動經驗，第九册第六單元活動 9 引入使用併式填充題記錄兩步驟乘加或乘減問題（以「 $(a \times b) \pm c$ 」為問題類型範圍），並幫助學童形成使用小括號區分運算次序的共識。

現階段學童尚未學過三步驟問題的記錄方式，因此，目前不宜出現乘對加（減）分配律的文字題，以問題「鉛筆一枝賣 4 元，原子筆一枝賣 8 元，各買 5 枝需要多少錢？」為例，學童可能有下列二種解題策略：第一種是先算鉛筆一枝和原子筆一枝合起來的錢數，再求錢數和的 5 倍，這個解題策略只有兩個步驟，學童可以用併式填充題「 $(4 + 8) \times 5 = ()$ 」記錄問題；第二種是先算鉛筆 4 枝的錢數，再算原子筆 4 枝的錢數，最後求出錢數的和，第二種解題策略包含了三個步驟，學童還沒有學過三步驟併式紀錄，因此無法使用三步驟併式填充題記錄問題，這類文字題將留待學童學過多步驟併式紀錄後才適合引入。

（三）多步驟問題

（1）併式填充題記錄多步驟加減問題

9-10-1：使用併式填充題記錄多步驟加減問題，並形成使用（小、中）括號區分運算次序的共識。

9-10-2：使用併式記錄「 $(a \pm b) \pm c$ 與 d 的和（差）併式」或「 $(a \pm b)$ 與 $(c \pm d)$ 的和（差）併式」問題。

三步驟問題是指必須使用三次運算才能解決的問題，因為有三個運算，所以必須有兩種不同的符號，來表示哪個運算是第一步被執行，哪個運算是第二步被執行，因為學童已形成使用小括號表示先運算部分的共識，故而本教材在第九册第十單元活動 1，透過討論如何使用併式填充題記錄三步驟加減問題（解題計劃），引入中括號，期望形成使用小括號表示第一步被執行的部分，中括號表示第二步被執行部分的共識。教師應注意，現階段只強調如何使用小、中括號清楚地描述解題計畫的運算次序，至於括號可以怎麼省

略，將留待第十冊再討論。

依據解題策略的不同，學童的問題紀錄會呈現多樣化，以三步驟加減問題「小姐原有12元，媽媽又給她6元，她去合作社買了一枝鉛筆7元，一塊橡皮擦9元後，小姐還剩下多少錢？」為例，學童的問題紀錄可能是「 $[(12 + 6) - 7] - 9 = (\quad)$ 」，也可能是「 $(12 + 6) - [7 + 9] = (\quad)$ 」，或「 $[12 + 6] - (7 + 9) = (\quad)$ 」；只要是合理的解題策略，教師都應該接受。為了方便與教師溝通，本教材在教學指引中將上述的問題紀錄，皆簡稱為三步驟和（差）併式填充題。

活動2引入使用併式記錄「 $(a \pm b) \pm c$ 」與d的和（差）式，或 $(a \pm b)$ 與 $(c \pm d)$ 的和（差）式的活動，協助學童熟悉三步驟併式的格式。為了不讓學童將注意力放在解題上，而忽略了記錄格式意義的溝通，活動只要求學童經驗多步驟併式紀錄的格式，而不要求算出答案。

因為透過口語並不容易與學童溝通併式的記法，本教材建議教師混用下列兩種布題的方式（以『「9加7的和式減4」的差式與「6」的和式怎麼記？』為例），第一種是教師一邊演示，一邊板書布題，並利用手勢或動作來加強題意的溝通；教師可以採分段布題的方式，先與學童溝通『「9加7的和式」減「4」的差式』怎麼記，教師口述「9加7的和式」時，應板書「 $9 + 7$ 」，教師口述「的和式」時，應以手勢沿著「 $9 + 7$ 」的一端比畫到另一端，教師口述「4」時，應板書「4」，教師口述「的差式」時，應以手勢表示「 $9 + 7$ 」與「4」兩個物件；在黑板上已有「 $(9 + 7) - 4$ 」的紀錄後，教師再與學童溝通『「9加7的和式減4」的差式與「6」的和式』怎麼記，教師宜先板書「6」，在口述布題時，用手勢來表示「 $(9 + 7) - 4$ 」與「6」這兩個物件。第二種也是透過分段布題的方式來進行活動，教師先將「 $9 + 7$ 」與「4」併排書寫在黑板上，再口述『「9加7的和式」減「4」的差式』怎麼記；在黑板上已有「 $(9 + 7) - 4$ 」的紀錄後，教師再將「 $(9 + 7) - 4$ 」與「6」併排書寫在黑板上，再口述『「9加7的和式減4」的差式與「6」的和式』怎麼記？

（四）兩步驟加（減）乘（除）問題

10-1-9：使用併式填充題（使用括號區分運算次序）記錄兩步驟「加乘或減乘」、「加除或減除」、「除加或除減」問題，並形成記錄解題過程次序的共識。

10-1-10：（1）使用併式記錄「兩數的商式」與「第三數」的和（差）式。
（併式中恰有一個除號及一個加號或減號，例如： $(a \div b) \pm c$ 、 $c \pm (a \div b)$ ）

（2）使用併式記錄「兩數的和（差）式」與「第三數」的商式。
（併式中恰有一個除號及一個加號或減號，例如： $(a \pm b) \div c$ 、 $c \div (a \pm b)$ ）

本教材考量學童數概念的認知發展，認為部分—全體運思學童才可以掌握一個未定值的集聚單位，對它進行運算，將它具體地表徵出來，而形成併式，因此本教材至第八冊才開始引入併式問題。在第八冊第十單元，本教材首次引入兩數的和（差）與第三數的和（差）的併式問題，在第八冊第十二單元，幫助學童形成使用併式填充題（使用小括號區分運算次序）記錄兩步驟加減問題的共識。在第九冊第三及第五單元，將併式問題的範圍擴充至乘加或乘減問題，在第九冊第七單元，開始引入三（多）步驟的加減問題，仿第八冊活動進行的方式，幫助學童使用併式填充題記錄三步驟加減問題（使用小、中括號區分運算次序）。

第十冊第一單元將併式問題的範圍擴充至兩數的和（差）式與第三數的積（商）式、兩數的商式與第三數的和（差）式，以及第三數乘（除）以兩數的和（差）式的積（商）式的併式問題；第十冊第二單元，再將併式問題的範圍擴充至兩數的商式乘（除）以第三數的積（商）式，以及兩數的積（商）式除以第三數的商式的併式問題。這些都是基本的兩步驟併式問題，引入的方式大致與第八冊活動進行的方式相同。

第九冊第十六單元，本教材首次引入被除數及除數未知問題的列式問題，要求學童將被除數未知的（整除）問題予以列式，但是，本教材延後至本

冊第八單元才出現乘數或被乘數未知的列式問題，因為在這些問題中，學童須預期積數具有乘法性結構，而已知的被乘數或乘數為積數的因數，才能用除法問題的觀點，來進行乘數或被乘數未知問題的列式活動。基於上述原因，教師在布兩步驟問題時宜注意，暫時不要出現被乘（除）數未知或是乘（除）數未知的文字題，以問題「12枝鉛筆裝一盒，小明買了5盒鉛筆，共用去300元，請問鉛筆一枝多少元？」為例，學童可能將題目解讀為被乘數未知的兩步驟問題，而使用未知數在等號左邊的併式填充題來記錄問題，例如：將問題記成「 $(() \times 12) \times 5 = 300$ 」（此處代表未知的 $()$ ，與小括號所代表的意義不同），現階段所布的兩步驟問題，宜採用單純的積數或商數未知的問題來進行組合，在要求使用併式填充題記錄問題時，才會形成未知數在等號右邊的併式填充題，而不涉及如何解決未知數夾在運算符號之間的併式填充題的問題。

第十冊第一單元活動9採用三類兩步驟問題情境，第一類是兩數的商式與第三數的和（差）式（例如：「 $(a \div b) \pm c$ 」或「 $c \pm (a \div b)$ 」）；第二類是兩數的和（差）式與第三數的商式（例如：「 $c \div (a \pm b)$ 」或「 $(a \pm b) \div c$ 」）；第三類是兩數的和（差）式與第三數的積式（例如：「 $(a \pm b) \times c$ 」或「 $c \times (a \pm b)$ 」），進行使用併式填充題記錄問題的活動。

「兩數的和（差）式與第三數的積式」問題，本教材延至第十冊第一單元才出現，主要的原因是學童可能有不同的解題計畫，部份學童可能將它視為兩步驟問題，部份學童也可能將它視為三步驟問題；以問題「鉛筆一枝4元，原子筆一枝8元，各買5枝需要多少錢？」為例，學童可以使用併式填充題「 $(4 + 8) \times 5 = ()$ 」記錄問題，也可以使用併式填充題「 $(4 \times 5) + [8 \times 5] = ()$ 」記錄問題，所以本教材等待學童學會使用併式填充題記錄多步驟加減問題，並形成使用括號（小、中括號）區分運算次序共識後，才出現上述這類兩步驟問題，不過「兩數的和（差）式與第三數的積式」的語言，因為不涉及乘法對加（減）法分配律的問題，在第九冊第

三單元時已經出現。

學童在第八、九冊中已累積相當多使用併式填充題（使用括號區分運算次序）記錄兩步驟加減，乘加或乘減，以及多步驟加減問題的經驗，透過類比的方式，相信學童也能嘗試使用併式填充題（使用括號區分運算次序），來記錄活動9中所選擇的兩步驟問題，因此，活動直接布兩步驟文字題，要求學童使用併式填充題（使用括號區分運算次序）記錄問題。

如果學童使用「由最左往右」的記法或「乘、除先算，再由最左往右」等記法省略併式填充題中的括號，教師宜淡化處理；以問題「弟弟有15元，妹妹有9元，哥哥的錢是兩人的錢合起來的8倍，問哥哥有多少錢？」為例，學童因為解題策略的不同，可能使用併式填充題「 $(15 + 9) \times 8 = ()$ 」或「 $(15 \times 8) + [9 \times 8] = ()$ 」記錄問題，這兩種記錄都是正確的記法，若學童使用「由最左往右」的記法，將後者記成「 $(15 \times 8) + (9 \times 8) = ()$ 」，或使用「乘、除先算，再由最左往右」的記法，將後者記成「 $15 \times 8 + 9 \times 8 = ()$ 」，教師都應該接受，並淡化處理，請學童說明其運算次序，但不強求其它學童理解或模仿。第十冊第十三單元將討論如何形成使用「由最左往右」及「乘、除先算，再由最左往右」等記法省略括號的共識。

活動10要求學童使用併式記錄「兩數的商式與第三數的和（差）式」及「兩數的和（差）式與第三數的商式」，併式中含有兩數的商式的問題是首次引入，爲了不讓學童將注意力放在解題上而忽略了紀錄格式意義的溝通，活動只要求學童使用併式記錄問題而不要求解題。

本教材建議教師宜一邊演示，一邊板書布題，並利用手勢或動作來加強題意的溝通，以問題『「36」減「27除以3的商式」的差式，怎麼記？』為例：教師口述「36」時，應板書「36」，口述「27除以3的商式」時，應板書「 $27 \div 3$ 」，教師口述「的差式」時，應以手勢表示「36」與「 $27 \div 3$ 」兩個物件。

(五) 兩步驟乘除問題

10-2-10：使用併式填充題（使用括號區分運算次序）記錄兩步驟乘、除問題，並形成記錄解題過程次序的共識。

10-2-11：使用併式記錄「兩數的積（商）式」與「第三數」的積（商）式。（併式中都是乘號或除號，例如： $(a \times b) \times c$ 、 $(a \times b) \div c$ 、 $(a \div b) \times c$ 、 $(a \div b) \div c$ 、 $c \times (a \times b)$ 、 $c \times (a \div b)$ 、 $c \div (a \times b)$ 、 $c \div (a \div b)$ ）

第十冊第二單元仿第十冊第一單元活動7~11的方式，引入兩數的商（積）式與第三數的積式、兩數的積（商）式除以第三數的商式與第三數除以兩數的積（商）式的商式等兩步驟問題的併式問題，第十冊第二單元活動10先要求使用併式填充題（使用括號區分運算次序），記錄兩步驟乘乘、乘除、除乘或除除問題；活動11再要求使用併式記錄兩數的積（商）式與第三數的積（商）式；活動12進行併式、積（商）式與定數三者間的比較活動；活動13則在已知併式與積（商）式大小關係，以及積（商）式與定數大小關係的情況下，討論 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 符號的遞移性；活動14則在兩步驟乘乘、乘除、除乘或除除問題的情境中，形成使用逐次減項的方式，記錄解題過程的共識。

(六) 由最左往右、先乘除後加減的共識

10-15-2：在多步驟加減問題情境中，形成“利用「由最左往右算」的運算規則，以省略在併式填充題中標示由最左往右計算步驟的括號”的共識。

10-15-3：在多步驟乘除問題情境中，形成“利用「由最左往右算」的運算規則，以省略在併式填充題中標示由最左往右計算步驟的括號”的共識。

10-15-4：在多步驟四則問題情境中，形成“利用「乘、除先算，再由最左往右算」的運算規則，以省略在併式填充題中標示乘、除先算，再由最左往右計算步驟的括號”的共識。

本教材認為人們開始使用併式填充題記錄問題時，基於先運算部分先記的習慣，可能先形成由最左往右依序運算的共識；當解題步驟愈來愈多或運算次序發生混淆時，爲了要區別先算什麼、後算什麼，開始使用括號來指示先算的部分，形成括號部分先算的共識；當解題計畫更複雜時，人們需要使用更多不同的括號來區別運算次序，等到括號數愈來愈多，人們又發現如何減少括號的使用變成很重要，進而透過先進行乘或除的運算，再進行加或減的運算的共識來省略括號數。換言之，當使用併式填充題來記錄解題計畫時，人們利用「括號先算」，「先乘、除，後加、減」與「由最左往右依序運算」等共識來溝通各個運算的次序。依據這些共識，解讀併式填充題（他人形成的）中的運算次序時，先考慮括號顯示的運算次序，括號內的運算要先完成，若沒有用括號來區分運算次序時，先進行乘或除的運算，再進行加或減的運算，若都是乘、除運算，或都是加、減運算時，再使用由最左往右的運算次序。

本教材的立場是當學童開始學習使用併式填充題記錄問題時，要先形成使用括號區別運算次序的共識，等到學童能掌握運算次序後，才能開始學習如何省略括號，因爲解題者雖然省略了併式填充題中的括號，但是心中還是有括號，心中的括號幫助他區別運算次序。本教材並不要求學童一定要使用省略括號的方式來記錄問題，希望學童使用自己最有信心的方式記錄問題，但是因爲省略括號的記法是文化傳承的共識，學童必須能看得懂別人在「括號先算」、「由最左往右依序運算」與「先乘、除後加、減」等共識下省略括號的記法，如果學童自行省略了括號，也必須符合這些共識，才能與他人溝通數學的想法。

第十册第十五單元透過比較活動，幫助學童看得懂別人使用「由最左往右」的記法或「乘、除先算，再由最左往右」的記法，所記錄省略括號併式填充題的運算次序。本教材暫時不討論在哪些情形下可以使用交換律或結合律等數學知識來省略括號，在哪些情形下不能使用這些數學知識來省略括號，例如「 $a + (b - c)$ 」中的括號可以省略，因爲加法滿足結合律，「

$a + (b - c)$ 」的答案與「 $(a + b) - c$ 」相同，而「 $(a + b) - c$ 」可以省略括號記成「 $a + b - c$ 」，所以「 $a + (b - c)$ 」也可以記成「 $a + b - c$ 」，但是「 $a - (b - c)$ 」的括號則不可以省略，因為減法不滿足結合律；這些知識可能超過學童的認知範圍。

第十冊第十五單元活動 1 在多步驟加減問題情境中，透過比較的活動，形成「由最左往右」記法的共識，省略在併式填充題中標示由最左往右計算步驟的括號，以問題「小明有 21 枝鉛筆，給了妹妹 3 枝，弟弟 2 枝，去合作社又買了 7 枝，問小明現在有多少枝鉛筆？」為例，教師先要求學童使用併式填充題把問題記下來，並用逐次減項的記法把做法記下來，在學童發表各種不同的紀錄後，教師在黑板上同時呈現甲、乙兩生的併式填充題及使用逐次減項記法的解題紀錄（乙生的紀錄如果沒有出現，則由教師主動引入）：

甲生	乙生
$[(21 - 3) - 2] + 7 = (\quad)$	$21 - 3 - 2 + 7 = (\quad)$
$[(21 - 3) - 2] + 7$	$21 - 3 - 2 + 7$
$= [18 - 2] + 7$	$= 18 - 2 + 7$
$= 16 + 7$	$= 16 + 7$
$= 23$	$= 23$

並提出問題：「乙生的併式填充題中沒有括號告訴我們他要先算什麼、後算什麼？可是答案和甲生一樣，說說看，乙生是怎麼算的？」，透過逐步比較甲、乙兩生逐次減項紀錄的方式，幫助學童發現乙生的運算次序與甲生一模一樣，並形成共識，當併式填充題中沒有括號告訴我們先算什麼、再算什麼的時候，都表示要由最左邊往右邊一步一步的算過去，並將這種省略併式填充題括號的記法稱為「由最左往右」的記法。

因為不是所有的併式填充題都可以使用「由最左往右」的記法省略括號，活動 1 再次透過比較活動，在黑板上同時呈現：有括號區別運算次序的併式填充題及其使用逐次減項記法的解題紀錄（以「 $[79 - (64 + 3)] - 9 = (\quad)$ 」，與「 $[79 - (64 + 3)] - 9 = [79 - 67] - 9 = 12 - 9 = 3$ 」為例

），與沒有括號區別運算次序的併式填充題及其使用由最左往右及逐次減項記法的解題紀錄（以「 $79 - 64 + 3 - 9 = ()$ 」，與「 $79 - 64 + 3 - 9 = 15 + 3 - 9 = 18 - 9 = 9$ 」為例），透過逐步比較兩者逐次減項記法的解題紀錄，學童會發現這兩個解題紀錄所記的做法和結果都不一樣，所以這兩個併式填充題不是記錄著相同的問題。

當學童形成「併式填充題中沒有括號告訴我們先算什麼、再算什麼的時後，都表示要由最左邊往右邊一步一步的算過去」的共識時，可能與先前「括號先算」的共識混淆，爲了澄清兩者的運算次序，活動 1 再次透過逐步比較逐次減項紀錄的方式，幫助學童發現「 $[79 - (64 + 3)] - 9 = ()$ 」與「 $79 - (64 + 3) - 9 = ()$ 」這兩個併式填充題的運算次序一模一樣；並形成「當併式填充題中有小括號時，小括號的部分要先運算，但是當沒有中括號告訴我們第二步要算什麼的時後，也是表示要由最左邊往右邊一步一步的算過去」的共識，並將這種省略併式填充題括號的記法稱爲「先算括號內，再由最左往右」的記法。

本教材認爲判斷是否看得懂別人記法的最佳方式，就是自己會使用這種記法，因此活動 1 要求學童使用省略括號的方式記錄問題，並使用逐次減項的記法記錄解題過程（因爲在逐次減項的過程中也要使用省略括號的記法），教師宜注意，當題目沒有要求使用特殊的記法省略併式填充題的括號時，不必要求學童一定要使用省略括號的記法記錄問題，會使用省略括號的記法記錄問題也不應該列爲紙筆測驗的重點。活動 2 是在多步驟乘除問題情境中，透過比較的活動，形成「由最左往右」記法以省略在併式填充題中標示由最左往右計算步驟的括號的共識；其引入方式與活動 1 相同。

活動 3 是在多步驟四則混合問題情境中，透過比較的活動，形成「乘、除先算，再由最左往右」記法的共識，省略在併式填充題中標示乘、除先算，再由最左往右計算步驟的括號；以問題「小玲帶了一張 50 元的鈔票和 6 個 5 元硬幣到超級市場買了 1 瓶 18 元的汽水，請問小玲還剩下多少錢？」爲例，活動 3 採用與活動 1 相同的方式，教師在黑板上同時呈現甲、乙兩生的併

式填充題及使用逐次減項記法的解題紀錄：

甲生	乙生
$[50 + (5 \times 6)] - 18 = (\quad)$	$50 + 5 \times 6 - 18 = (\quad)$
$[50 + (5 \times 6)] - 18$	$50 + 5 \times 6 - 18$
$= [50 + 30] - 18$	$= 50 + 30 - 18$
$= 80 - 18$	$= 80 - 18$
$= 62$	$= 62$

透過逐步比較甲、乙兩生逐次減項紀錄的方式，幫助學童發現乙生的運算次序與甲生一模一樣，並形成「乘的先算，再用由最左往右」的記法記錄解題過程的共識，接著再布一題有除號的多步驟問題，透過相同的方式形成「除的先算，再用由最左往右」的記法記錄解題過程的共識，並將這種省略括號的記法稱為「乘、除先算，再由最左往右」的記法。

爲了不讓學童誤解「乘、除先算，再由最左往右」記法中，乘法的運算次序優先於除法的運算次序，活動 3 提出問題「 $40 \div 4 + 13 \times 5 = (\quad)$ 」，希望透過討論，幫助學童察覺乘法與除法運算次序的地位是相同的，當乘號與除號同時出現時，要使用「由最左往右」的記法記錄解題活動。

爲了鞏固「括號先算」的運算次序是第一優先，活動 3 透過逐步比較逐次減項的紀錄，幫助學童發現「 $80 - [4 \times (5 + 6)] = (\quad)$ 」與「 $80 - 4 \times (5 + 6) = (\quad)$ 」這兩個併式填充題的運算次序一模一樣；並形成「當併式填充題中有小括號時，小括號的部分要先運算，但是當沒有中括號告訴我們第二步要算什麼的時候，也是使用『乘、除先算，再由最左往右』做法」的共識，並將這種做法稱為「先算括號內，再算乘、除，最後再由最左往右」的記法。

九、 $>$ 、 $=$ 或 $<$ 的遞移性，「逐次減項」的記法表 9 $>$ 、 $=$ 或 $<$ 的遞移性，「逐次減項」的記法

冊-單元-活動	國立編譯館版活動目標
8-10-8	進行和、差併式與定數間的比較活動。
8-10-9	利用和（差）併式與和（差）式以及和（差）式與定數間的大小關係，決定其中和（差）併式與定數間的大小關係，經驗 $=$ 、 $<$ 與 $>$ 符號的遞移性。
8-12-1	利用和（差）併式與和（差）式以及和（差）式與定數間的大小關係，紀錄和（差）併式、和（差）式與定數間的關係，從而察覺 $=$ 、 $<$ 與 $>$ 符號的遞移性。
8-14-3	先用併式填充題（使用括號區分運算次序）紀錄兩步驟加減問題，完成部分解題過程後，再將剩餘問題紀錄成算式填充題，並求解。
8-14-4	在兩步驟加減問題的情境中，形成使用「逐次減項」的方式，紀錄解題過程的共識。
8-14-5	先用併式填充題紀錄兩步驟加減問題，再用「逐次減項」的方式，紀錄解決兩步驟加減問題的解題過程。
9-1-11	先用併式填充題紀錄兩步驟加減問題，再用「逐次減項」的方式，紀錄解決兩步驟加減問題的解題過程。
9-4-2	進行併式、和（差、積）式與定數三者間兩者的比較活動。（併式中恰有一個乘號及一個加號或減號，例如： $(a \times b) \pm c$ 、 $(a \pm b) \times c$ 。）
9-4-3	在已知「併式與和（差、積）式」大小關係以及「和（差、積）式與定數」大小關係的情況下，討論 $=$ 、 $>$ 與 $<$ 符號的遞移性。（併式中恰有一個乘號及一個加號或減號，例如： $(a \times b) \pm c$ 、 $(a \pm b) \times c$ 。）
9-6-10	在兩步驟乘加或乘減問題的情境中，形成使用「逐次減項」的方式，紀錄解題過程的共識。（併式填充題中恰有一個乘號及一個加號或減號，例如： $(a \times b) \pm c$ 。）
9-10-3	進行多步驟和（差）併式、和（差）併式、和（差）式與定數四者間任意兩者的比較活動。
9-10-4	在已知「多步驟和（差）併式與和（差）併式」大小關係、「和（差）併式與和式（差式）」大小關係以及「和式（差式）與定數」大小關係的情況下，討論 $=$ 、 $>$ 與 $<$ 符號的遞移性。
9-10-5	在多步驟加減問題的情境中，形成使用「逐次減項」的方式，紀錄解題過程的共識。
10-1-11	進行併式、和（差、商）式與定數三者間的比較活動。（併式中恰有一個除號及一個加號或減號，例如： $(a \div b) \pm c$ 、 $(a \pm b) \div c$ 、 $c \div (a \pm b)$ 、 $c \pm (a \div b)$ ）
10-1-12	在已知「併式與和（差、商）式」大小關係以及「和（差、商）式與定數」大小關係的情況下，討論 $=$ 、 $>$ 與 $<$ 符號的遞移性。（併式中恰有一個除號及一個加號或減號，例如： $(a \div b) \pm c$ 、 $(a \pm b) \div c$ 、 $c \div (a \pm b)$ 、 $c \pm (a \div b)$ ）
10-1-13	在兩步驟「加乘或減乘」、「加除或減除」、「除加或除減」問題的情境中，形成使用「逐次減項」的方式，紀錄解題過程的共識。
10-2-12	進行乘除併式、商（積）式與定數三者間的比較活動。（併式中都是乘號或除號，例如： $(a \times b) \times c$ 、 $(a \times b) \div c$ 、 $(a \div b) \times c$ 、 $(a \div b) \div c$ 、 $c \times (a \times b)$ 、 $c \times (a \div b)$ 、 $c \div (a \times b)$ 、 $c \div (a \div b)$ ）
10-2-13	在已知「乘、除併式與積（商）式」大小關係以及「積（商）式與定數」大小關係的情況下，討論 $=$ 、 $>$ 與 $<$ 符號的遞移性。（併式中都是乘號或除號，例如： $(a \times b) \times c$ 、 $(a \times b) \div c$ 、 $(a \div b) \times c$ 、 $(a \div b) \div c$ 、 $c \times (a \times b)$ 、 $c \times (a \div b)$ 、 $c \div (a \times b)$ 、 $c \div (a \div b)$ ）
10-2-14	在兩步驟乘、除問題的情境中，形成使用「逐次減項」的記法，紀錄解題過程的共識。
10-15-1	在多步驟問題的情境中，形成使用「逐次減項」的方式，紀錄解題過程的共識。

註：表 9 中的活動與九年一貫課程數學學習領域中相關之能力指標如下：

N - 2 - 14：能在情境中，理解乘法交換律、等號的對稱性、“>” “=” “<” 的遞移性、加法和乘法的結合律與分配律，以及乘法和除法的相互關係。

A - 2 - 1：能將生活情境中簡單問題表徵為含有 Δ 、 \square 、甲、乙、 $?$ 、 \dots 等的式子，並能解釋式子與原問題情境的關係。

表 9 中共有 20 個活動，分散在第八冊第十、第十二及第十四單元，第九冊第一、第四、第六以及第十單元，第十冊第一、第二以及第十五單元，重點是透過等號的遞移性，引入逐次減項記法的共識。表 9 可以較詳細地分割成六個部份。第一部份包含第八冊第十單元活動 8、9，第十二單元活動 1，第十四單元活動 3 ~ 5，以及第九冊第一單元活動 11，重點是進行和、差併式，和式與差式以及定數間的比較活動，察決 =、< 與 > 符號的遞移性，以及先用併式填充題紀錄兩步驟加減問題，再用「逐次減項」的記法，紀錄解決兩步驟加減問題的解題過程。第二部份包含第九冊第四單元活動 2、3，以及第六單元活動 10，重點和第一部份相同，只是在兩步驟乘加或乘減問題的情境中討論。第三部份包含第九冊第十單元活動 3 ~ 5，重點和第一部份一樣，只是在多步驟加減問題的情境中進行討論。第四部份包含第十冊第一單元活動 11 ~ 13，重點也和第一部份一樣，只是在兩步驟「加乘或減乘」、「加除或減除」、「除加或除減」問題的情境中討論。第五部份包含第十冊第二單元活動 12 ~ 14，重點也和第一部份一樣，只是在兩步驟乘、除問題的情境中討論。第六部只包含第十冊第十五單元活動 1，重點是在多步驟問題的情境中，形成使用「逐次減項」的方式，紀錄解題過程的共識。

（一）和差併式

1、「和差併式」、「和（差）」與「定數」間的大小比較

8 - 10 - 8：進行和、差併式與定數間的比較活動。

算式「 $3 + 5 = 8$ 」中的等號（=）有兩種不同的意義，針對運算的角度看算式時，等號的意義是「得到的答案是」，「 $3 + 5 = 8$ 」表示「3 和 5 經過加法運算後，得到的答案是 8」；針對關係的角度看算式時，等號的

意義是「等價關係」，「 $3 + 5 = 8$ 」表示「『 $3 + 5$ 』和『 8 』經過比較大小後，兩者一樣大，滿足等價關係」。

本教材在第四冊第五單元首次引入兩數的和（差）式與定數的比較活動，並用符號記錄其大小關係。以問題「『 $16 + 5$ 』和 18 ，誰比誰大？」為例，透過數值化，「 $16 + 5$ 」是 21 ，比 18 大，得到「 16 和 5 的和式」比 18 大的結果，並進一步的將其記成「 $16 + 5 > 18$ 」；再以問題「 21 和『 $26 - 5$ 』，誰比誰大？」為例，「 $26 - 5$ 」和 21 一樣大，故而可以記成「 $21 = 26 - 5$ 」。

延伸和（差）式與定數比較活動的經驗，第八冊第十單元活動8首次引入「和差併式」、「和（差）式」或「定數」間兩兩的比較活動。活動中先出現和（差）式間的比較活動，以問題「『 5 和 7 的和式』和『 18 和 6 的差式』，誰比誰大？」為例，透過數值化，「 $5 + 7$ 」和「 $18 - 6$ 」都是 12 ，所以形成「 5 和 7 的和式」和「 18 和 6 的差式」一樣大的結果，並進一步要求用符號記錄其大小關係，形成「 $5 + 7 = 18 - 6$ 」記法的共識。

活動接著出現「和差併式」與「定數」的比較活動，以問題：「『 3 和 8 的和式』和 4 的差式」和「 11 」，誰比誰大？為例，活動採分段布題的方式，先要求學童記錄「 3 和 8 的和式」和 4 的差式，再比較「『 3 和 8 的和式』和 4 的差式」和「 11 」，誰比誰大？透過數值化，「 3 和 8 的和式」和 4 的差數是 7 ，比 11 小，所以形成「『 3 和 8 的和式』和 4 」的差式比 11 小的結果，並進一步的將其記成「 $(3 + 8) - 4 < 11$ 」。

活動最後出現和差併式與和（差）式的比較活動，以問題：「 7 和『 8 和 5 的差式』」的和式和「 7 和 3 的和式」，誰比誰大？為例，透過數值化，「 7 和『 8 和 5 的差式』的和式」和「 7 和 3 的和式」都是 10 ，所以形成「 7 和『 8 和 5 的差式』的和式」和「 7 和 3 的和式」一樣大的結果，並進一步的將其記成「 $7 + (8 - 5) = 7 + 3$ 」。

2、=、>與< 符號的遞移性

8 - 10 - 9：利用和（差）併式與和（差）式以及和（差）式與定數間的大

小關係，決定其中和（差）併式與定數間的大小關係，經驗＝、＜與＞符號的遞移性。

8-12-1：利用和（差）併式與和（差）式以及和（差）式與定數間的大小關係，記錄和（差）併式、和（差）式與定數間的關係，從而察覺＝、＜與＞符號的遞移性。

本教材分兩階段引入＝、＞與＜符號的遞移性，第一階段在第八冊第十單元活動9，利用「和、差併式與和（差）式」以及「和（差）式與定數」間的大小關係，要求學童決定其中「和、差併式與定數」間的大小關係，幫助學童經驗大小關係的遞移性；活動的重點是透過比較活動比較後確知「 $(a - b) + c = d + e$ 」與「 $d + e = f$ 」的關係後，在未進行比較的情況下，希望學童能預期「 $(a - b) + c = f$ 」的關係；相同的，在確知「 $(a - b) + c > (<) d + e$ 」與「 $d + e > (<) f$ 」的關係後，能預期「 $(a - b) + c > (<) f$ 」的結果，經驗等於、大於或小於關係的遞移性，並能描述遞移關係。如果學童無法預期關係的遞移性，教師應幫助學童透過數值化進行比較活動，經驗關係的遞移性。學童在日常生活中，已有很多大小關係是可遞移的經驗（例如甲＞乙、乙＞丙，則甲＞丙），活動9希望透過「和差併式與和（差）式」以及「和（差）式與定數」間的大小關係，檢查學童對大小關係遞移性的掌握，也做為使用逐次減項的記法，記錄解決兩步驟加減問題的解題過程的前置經驗。

第二階段在第八冊第十二單元活動1，希望學童利用「和差併式與和（差）式」以及「和（差）式與定數」間的大小關係，直接預期「和差併式與定數」間的關係，並用一個式子同時記錄三者間的大小關係。也就是說，在第十單元，本教材希望學童透過比較活動，能夠經驗「 $(a - b) + c = d + e$ 」與「 $d + e = f$ 」都成立，那麼「 $(a - b) + c = f$ 」也會成立。而在本單元，則希望學童不必透過數值化，看到「 $(a - b) + c = d + e$ 」與「 $d + e = f$ 」成立，就可以直接預期「 $(a - b) + c = f$ 」一定會成立，並將三者的關係記成「 $(a - b) + c = d + e = f$ 」的形式，為本

冊十四單元引入逐次減項的記法鋪路。

3、逐次減項方式紀錄解題過程

- 8-14-3：先用併式填充題（使用括號區分運算次序）紀錄兩步驟加減問題，完成部分解題過程後，再將剩餘問題記錄成算式填充題，並求解。
- 8-14-4：在兩步驟加減問題的情境中，形成使用「逐次減項」的方式，記錄解題過程的共識。
- 8-14-5：先用併式填充題記錄兩步驟加減問題，再用「逐次減項」的方式，紀錄解決兩步驟加減問題的解題過程。
- 9-1-11：先用併式填充題記錄兩步驟加減問題，再用「逐次減項」的方式，記錄解決兩步驟加減問題的解題過程。

以問題「姐姐有12個草莓，妹妹原有15個草莓，妹妹吃掉7個後，姐姐比妹妹現在有的草莓多幾個？」為例，應用第八冊第十二單元的學習經驗，學童可以使用併式填充題（以「 $12 - (15 - 7) = ()$ 」為例）紀錄問題。分析這個兩步驟問題的解題計劃，學童第一步是要求出「 $15 - 7$ 」的數值，第二步是要求出「 $12 - 8$ 」的數值，「 $15 - 7$ 」的答案不是原問題的答案，「 $15 - 7$ 」數值的確定是學童的部分解題活動的結果，學童並利用此一結果做為他第二步解題活動的條件。學童確定「 $15 - 7$ 」數值是8後，原來的兩步驟問題「 $12 - (15 - 7) = ()$ 」簡化為「 $12 - 8 = ()$ 」。換句話說，「 $12 - (15 - 7) = ()$ 」是原問題的紀錄，「 $12 - 8 = ()$ 」是已經解決部分問題後剩餘問題的紀錄，它們是同一問題在解題過程中不同階段所呈現的問題紀錄，由於它們源自於同一個問題，因此「 $12 - 8 = ()$ 」的答案4，也會是原問題「 $12 - (15 - 7) = ()$ 」的答案。

第八冊第十四單元活動3強調在各個階段的問題紀錄，以上述問題為例，活動要求學童先將問題用併式填充題紀錄下來（例如記成「 $12 - (15 - 7) = ()$ 」），在完成第一步驟的運算後，接著要求學童將第二步要算什麼也用算式填充題紀錄下來（例如記成「 $12 - 8 = ()$ 」），完成第二步

驟的運算後，再討論這兩個填充題的括號中應該填什麼（例如：皆填 4）。

活動 4 則討論逐次減項記錄方式的記法與意義，活動先要求學童用併式填充題把問題記錄下來（例如：記成「 $(17 - 5) - 4 = ()$ 」）；在解題時，要求記錄三件事：①用算式記錄第一步的做法與結果（例如： $17 - 5 = 12$ ）；②用算式填充題記錄第二步要做什麼（例如：「 $12 - 4 = ()$ 」）；③用算式記錄第二步的做法與結果（例如： $12 - 4 = 8$ ），在完成上述過程後，接著討論如何把上述的紀錄整理一下，用等號把一樣大的地方連起來，使別人一看就能夠知道，是怎麼樣一步一步地算出最後的結果，而形成「 $(17 - 5) - 4 = 12 - 4 = 8$ 」的記錄格式，並稱之為逐次減項的記法。在形成逐次減項記法的共識後，活動 5 則要求學童先用併式填充題記錄兩步驟加減問題，再直接使用逐次減項的記法，來記錄解題過程與結果。

本教材在第八冊首次引入逐次減項的記法，第九冊第一單元活動 11 是復習活動，希望喚起學童的舊經驗，為第九冊將引入的有乘法或除法運算的兩步驟問題，以及多步驟問題鋪路。

（二）積及和、差併式

1、併式、和（差、積）式與定數的比較及關係的遞移性

9 - 4 - 2：進行併式、和（差、積）式與定數三者間兩者的比較活動。（併式中恰有一個乘號及一個加號或減號，例如： $(a \times b) \pm c$ 、 $(a \pm b) \times c$ 。）

9 - 4 - 3：在已知「併式與和（差、積）式」大小關係以及「和（差、積）式與定數」大小關係的情況下，討論 =、> 與 < 符號的遞移性。（併式中恰有一個乘號及一個加號或減號，例如： $(a \times b) \pm c$ 、 $(a \pm b) \times c$ 。）

本教材在第五冊第十三單元引入積式（例如： 8×5 ）與定數（例如：40）的大小比較問題，在第八冊第八單元引入和差併式（例如「 $12 - (15 - 7)$ 」）、和（差）式（例如： $12 - 8$ ）與定數（例如：4）間的比較問題。延伸上述解題的經驗，第九冊第四單元活動 2 引入「和（差）積併式（例

如：「 $18 - (5 \times 3)$ 」）、和（差、積）式（例如： $18 - 15$ ）與定數（例如： 3 ）間的比較問題，或積式（例如： 5×7 ）與和（差）式（例如： $48 - 13$ ）的比較問題。在使用併式、和、差或積式的語言來布題時，教師仍宜使用手勢或動作，來加強比較對象的溝通。

第八冊第八及第十單元，本教材曾在和差併式、和（差）式與定數的比較活動中，討論 $=$ 、 $>$ 與 $<$ 符號的遞移性，延伸上述經驗，第九冊第四單元活動3希望學童在已知「和（差）積併式與和（差、積）式」大小關係以及「和（差、積）式與定數」大小關係的情況下，預期「併式與定數」大小關係，進而將三者的大小關係合併記錄；換句話說，希望學童不必透過實際地重新計算，看到「 $(a \times b) - c = d + e$ 」與「 $d + e = f$ 」成立，就可以直接預期「 $(a \times b) - c = f$ 」一定會成立，並將三者的關係記成「 $(a \times b) - c = d + e = f$ 」的形式。如果部分學童無法預期上述關係會成立，教師宜要求學童透過數值化後，再將三者的關係記成「 $(a \times b) - c = d + e = f$ 」的形式。

2、逐次減項紀錄

9 - 6 - 10：在兩步驟乘加或乘減問題的情境中，形成使用「逐次減項」的方式，記錄解題過程的共識。（併式填充題中恰有一個乘號及一個加號或減號，例如： $(a \times b) \pm c$ 。）

本教材在第八冊第十單元引入使用併式填充題紀錄兩步驟加減問題，並形成使用小括號區分運算次序的共識；在本冊第四單元幫助學童形成和（差）積併式格式的共識，延續上述活動經驗，第九冊第六單元活動9引入使用併式填充題紀錄兩步驟乘加或乘減問題（以「 $(a \times b) \pm c$ 」為問題類型範圍），並形成使用小括號區分運算次序的共識。活動10則期望學童在兩步驟乘加或乘減問題情境中，形成使用「逐次減項」的方式記錄解題過程與結果的共識。

以問題「姐姐有64元，妹妹有5元硬幣9個，姐姐比妹妹多幾元？」為例，活動要求學童先用併式填充題「 $64 - (5 \times 9) = ()$ 」把問題（解

題計劃)記下來，在解題時，要求依序記錄三件事：①用算式把第一步的做法和答案記下來(例如： $5 \times 9 = 45$)；②用算式填充題把第二步準備做什麼記下來(例如：「 $64 - 45 = ()$ 」)；③用算式把第二步的做法和答案記下來(例如： $64 - 45 = 19$)。在完成上述過程後，再討論如何把上述的紀錄整理一下，用等號把一樣大的地方連起來，使別人一看就能夠知道，你是如何一步一步地算出答案，而形成「 $64 - (5 \times 9) = 64 - 45 = 19$ 」逐次減項記法的記錄格式。

本教材認為逐次減項的記法有下列原則：①記錄問題的原始條件；②記錄解題過程中重要步驟，例如不可摘要地記成「 $64 - (5 \times 9) = 19$ 」；③在記錄解題過程中，要滿足等號的等價關係，例如不可以記成「 $64 - (5 \times 9) = (5 \times 9) = 64 - 45 = 49$ 」；④在記錄解題過程中，使用等號的遞移性來簡化紀錄，例如不可記成下列形式：「 $64 - (5 \times 9) = (19) = 64 - 45 = () = 19$ 」；⑤記錄問題的解題結果。如有學童不符合逐次減項記法的原則，請進行相關子活動，以形成記錄格式的共識。

(三) 多步驟和差併式

1、多步驟和差併式、和差併式、和(差)與定數四者間比較活動及關係的遞移性

9-10-3：進行多步驟和(差)併式、和(差)併式、和(差)式與定數四者間任意兩者的比較活動。

9-10-4：在已知「多步驟和(差)併式與和(差)併式」大小關係、「和(差)併式與和式(差式)」大小關係以及「和式(差式)與定數」大小關係的情況下，討論 $=$ 、 $>$ 與 $<$ 符號的遞移性。

本教材在第八冊第十單元引入和差併式、和(差)式與定數三者間任兩者的比較活動，第九冊第四單元引入和(差)積併式、和(差、積)式與定數三者間任兩者的比較活動，延伸上述解題經驗，第九冊第十單元活動3引入多步驟和(差)併式(例如： $19 - [(14 - 5) + 7]$)、和差併式(例如：「 $19 - (9 + 7)$ 」)、和(差)式(例如： $19 - 16$)與定數(例如：

3) 四者間任意兩者的比較活動。

第九册第十單元活動4先要求學童在已知「多步驟和(差)併式與和(差)併式」大小關係、「和(差)併式與和(差)式」大小關係以及「和(差)式與定數」大小關係的情況下，討論 $=$ 、 $>$ 與 $<$ 符號的遞移性，進而幫助學童將四者的大小關係合併記錄。換句話說，希望學童不必實際地算出答案，只要看到下列大小關係「 $[(a+b)-c]-d=(e-f)+g$ 」、 $[(e-f)+g=h-i]$ 與 $h-i=j$ 成立，就可以直接預期「 $[(a+b)-c]-d=j$ 」一定會成立，並將四者的關係記成「 $[(a+b)-c]-d=(e-f)+g=h-i=j$ 」的形式。如果部分學童無法預期上述關係會成立，教師宜要求學童透過數值化進行比較活動，再將四者的關係記成「 $[(a+b)-c]-d=(e-f)+g=h-i=j$ 」的形式。

2、逐次減項紀錄

9-10-5：在多步驟加減問題的情境中，形成使用「逐次減項」的方式，記錄解題過程的共識。

第八册第十四單元及本册第六單元，分別在兩步驟加減問題及兩步驟乘加或乘減問題情境中，形成使用逐次減項的方式記錄解題過程的共識，第九册第十單元活動5，期望學童在三步驟加減問題情境中，也能形成使用逐次減項的記法記錄解題過程的共識。

活動進行的方式與兩步驟加減問題及兩步驟乘加或乘減問題類似，以問題「桶子裡有17個糖果，姊姊吃掉5個，妹妹吃掉7個，媽媽再放進去8個，桶子裡還有幾個糖果？」為例，活動要求學童先用併式填充題把問題記錄下來（以 $[(17-5)-7]+8=()$ 為例），在解題時，要求依序記錄五件事：①用算式把第一步的做法和答案都記下來（例如： $17-5=12$ ）；②用算式填充題把還要做什麼記下來（例如「 $[12-7]+8=()$ 」）；③用算式把第二步的做法和答案都記下來（例如： $12-7=5$ ）；④用算式填充題把還要做什麼記下來（例如「 $5+8=()$ 」）；⑤用算式把

第三步的做法和答案記下來（例如： $5 + 8 = 13$ ）。在完成上述過程後，再討論如何把上述的紀錄整理一下，用等號把一樣大的地方連起來，使別人一看就能知道，你是怎麼樣一步一步地算出最後的結果，而形成「 $\{ (17 - 5) - 7 \} + 8 = \{ 12 - 7 \} + 8 = 5 + 8 = 13$ 」逐次減項記法的記錄格式，也就是說，將「 $\{ (17 - 5) - 7 \} + 8 = \{ 12 - 7 \} + 8$ ， $\{ 12 - 7 \} + 8 = 5 + 8$ ， $5 + 8 = 13$ ，所以 $\{ (17 - 5) - 7 \} + 8 = 13$ 」的記法，透過等號滿足遞移性的性質，摘要地記成「 $\{ (17 - 5) - 7 \} + 8 = \{ 12 - 7 \} + 8 = 5 + 8 = 13$ 」。

本教材認為逐次減項的記法要滿足下列這些原則：①記錄問題的原始條件；②紀錄解題過程中重要步驟，逐次減少一個項目，例如不可摘要地記成「 $\{ (17 - 5) - 7 \} + 8 = 13$ 」；③在記錄解題過程中，要滿足等號的等價關係，例如不可記成「 $\{ (17 - 5) - 7 \} + 8 = (17 - 5) = \{ 12 - 7 \} = 5 + 8 = 13$ 」；④在記錄解題過程中，使用等號的遞移性來簡化紀錄，例如不可記成下列形式：

$$\begin{aligned} & \{ (17 - 5) - 7 \} + 8 = (\quad) \\ & = 5 + 8 = (\quad) \\ & = 13 \end{aligned}$$

⑤記錄問題的解題結果。

如有學童不符合逐次減項記法的原則，請進行相關的子活動。

（四）商及和、差併式及逐次減項紀錄

10-1-11：進行併式、和（差、商）式與定數三者間的比較活動。（併式中恰有一個除號及一個加號或減號，例如： $(a \div b) \pm c$ 、 $(a \pm b) \div c$ 、 $c \div (a \pm b)$ 、 $c \pm (a \div b)$ ）

10-1-12：在已知「併式與和（差、商）式」大小關係以及「和（差、商）式與定數」大小關係的情況下，討論 $=$ 、 $>$ 與 $<$ 符號的遞移性。（併式中恰有一個除號及一個加號或減號，例如： $(a \div b) \pm c$ 、 $(a \pm b) \div c$ 、 $c \div (a \pm b)$ 、 $c \pm (a \div b)$ ）

10-1-13：在兩步驟「加乘或減乘」、「加除或減除」、「除加或除減」問題的情境中，形成使用「逐次減項」的方式，記錄解題過程的共識。

本教材透過等號的遞移關係，在兩步驟情境問題中，幫助學童形成使用逐次減項的記法來記錄解題過程與結果的共識。第十冊第一單元活動11進行併式、和（差、商）式與定數三者間的比較活動，而活動12則在已知併式與和（差、商）式大小關係，以及和（差、商）式與定數大小關係的情況下，討論 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 符號的遞移性，希望學童在已知併式與和（差、商）式大小關係以及和（差、商）式與定數大小關係的情況下，預期併式與定數大小關係，進而將三者的大小關係合併記錄；換句話說，希望學童不必透過實際地重新計算，看到「 $a - (b \div c) = d \div e$ 」與「 $d \div e = f$ 」成立，就可以直接預期「 $a - (b \div c) = f$ 」一定會成立，並且將三者的關係記成「 $a - (b \div c) = d \div e = f$ 」的形式。如果部分學童無法預期上述關係會成立，教師宜要求學童透過數值化（計算出各個數值）後，再將三者的關係記成「 $a - (b \div c) = d \div e = f$ 」的形式。

第十冊第一單元活動13，在兩步驟加乘或減乘、加除或減除、除加或除減問題的情境中，形成使用逐次減項的記法，紀錄解題過程的共識。以問題「小明是本次月考的第三名，老師買了75枝鉛筆當做獎品平分給前15名的學生，如果小明的鉛筆盒內已有6枝鉛筆，請問他共有幾枝鉛筆？」為例，活動先要求學童使用併式填充題「 $(75 \div 15) + 6 = (\quad)$ 」，把問題記錄下來，在解題時，要求記錄三件事：①用算式把第一步的做法和答案記下來（例如： $75 \div 15 = 5$ ）；②用算式填充題把第二步準備做什麼記下來（例如：「 $5 + 6 = (\quad)$ 」）；③用算式把第二步的做法和答案記下來（例如： $5 + 6 = 11$ ）。在完成上述過程後，討論如何把上述的紀錄整理一下，用等號把一樣大的地方連起來，使別人一看就能知道，你是怎麼樣一步一步地算出最後的結果，而形成「 $(75 \div 15) + 6 = 5 + 6 = 11$ 」的逐次減項記法的共識。因為不確定所有的學童都能類比以前的經驗，使用逐次減項的記法，因

此本教材建議針對不同類型的兩步驟問題，都應該再次的檢查學童對逐次減項記法意義的掌握。

本教材認為逐次減項的記法有如下的一些原則：①記錄問題的原始條件；②記錄解題過程中重要步驟，例如，不可摘要地記成「 $(75 \div 15) + 6 = 11$ 」；③在記錄解題過程中，要滿足等號的遞移關係，例如，不可記成「 $(75 \div 15) + 6 = 75 \div 15 = 5 + 6 = 11$ 」；④在記錄解題過程中，使用等號的遞移性來簡化紀錄，例如，不可記成下列形式：

$$\begin{aligned} & (75 \div 15) + 6 = (11) \\ & = 5 + 6 = (\quad) \\ & = 5 + 6 = 11 ; \end{aligned}$$

⑤記錄問題的解題結果。如有學童不符合逐次減項記法的紀錄原則，請進行相關子活動，以形成紀錄格式的共識。

（五）積商併式與逐次減項

10-2-12：進行乘除併式、商（積）式與定數三者間的比較活動。（併式中都是乘號或除號，例如： $(a \times b) \times c$ 、 $(a \times b) \div c$ 、 $(a \div b) \times c$ 、 $(a \div b) \div c$ 、 $c \times (a \times b)$ 、 $c \times (a \div b)$ 、 $c \div (a \times b)$ 、 $c \div (a \div b)$ ）

10-2-13：在已知「乘、除併式與積（商）式」大小關係以及「積（商）式與定數」大小關係的情況下，討論 $=$ 、 $>$ 與 $<$ 符號的遞移性。（併式中都是乘號或除號，例如： $(a \times b) \times c$ 、 $(a \times b) \div c$ 、 $(a \div b) \times c$ 、 $(a \div b) \div c$ 、 $c \times (a \times b)$ 、 $c \times (a \div b)$ 、 $c \div (a \times b)$ 、 $c \div (a \div b)$ ）

10-2-14：在兩步驟乘、除問題的情境中，形成使用「逐次減項」的記法，記錄解題過程的共識。

第十冊第二單元仿第十冊第一單元活動7~11的方式，引入兩數的商（積）與第三數的積式、兩數的積（商）除以第三數的商式與第三數除以兩數的積（商）的商式等兩步驟問題的併式問題，第十冊第二單元活動10要求

使用併式填充題（使用括號區分運算次序），記錄兩步驟乘乘、乘除、除乘或除除問題；活動11要求使用併式記錄兩數的積（商）與第三數的積（商）式。活動12進行併式、積（商）式與定數三者間的比較活動；活動13則在已知併式與積（商）式大小關係，以及積（商）式與定數大小關係的情況下，討論 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 符號的遞移性；活動14則在兩步驟乘乘、乘除、除乘或除除問題的情境中，形成使用逐次減項的方式，記錄解題過程的共識。

（六）多步驟問題的問題紀錄與逐次減項

10-15-1：在多步驟問題的情境中，形成使用「逐次減項」的方法，記錄解題過程的共識。

聯合第八冊第十、十二、十四單元，第九冊第四、六單元與第十冊第一、二單元，本教材已引入各類四則（加、減、乘、除）兩步驟問題的併式問題（包括使用併式填充題記錄問題，與使用逐次減項的記法記錄解題過程）；在第九冊第七單元亦曾引入三步驟加減問題的併式問題，形成使用中、小括號來區分運算次序的共識。延伸上述活動的經驗，第十冊第十五單元活動1透過類比的方式，進行各種四則混合多步驟問題的併式活動。雖然在課堂活動中，教師不可能進行所有類型的多步驟問題，但仍應進行數個問題的討論，確認學童對於問題紀錄格式或逐次減項的記法，都沒有困難。

本教材預期部分學童可能對多步驟乘除問題（併式中都是乘號或除號）較不熟悉，因此在學期開始，已在習作中安排了相當數量的兩（三）步驟乘除問題，要求學童解題並使用多個算式記錄解題過程，相信透過這些練習，學童已有能力掌握多步驟乘除問題，能將問題記錄成併式填充題，並使用逐次減項的記法記錄解題過程。

如果學童使用「由最左往右」或「乘、除先算，再由最左往右」的記法，省略併式填充題中的括號（例如使用「乘、除先算，再由最左往右」的記法，將問題「小明有十元硬幣5個，買了一枝鉛筆用去6元，又買了一罐汽水用去18元，請問小明還剩多少元？」記成「 $10 \times 5 - 6 - 18 = ()$ 」），教師應該接受並淡化處理，請學童說明其運算次序，但不必強求其他學童

理解或模仿，本單元活動 2 ~ 4 將討論如何形成使用「由最左往右」及「乘、除先算，再由最左往右」等記法省略括號的共識。

當學童使用併式填充題「 $[(10 \times 5) - 6] - 18 = (\quad)$ 」記錄問題，並使用逐次減項的記法「 $[(10 \times 5) - 6] - 18 = [50 - 6] - 18 = 44 - 18 = 26$ 」紀錄解題過程時，本教材建議教師宜隨時提問「 $[(10 \times 5) - 6] - 18$ 」與「 $44 - 18$ 」，它們一樣大嗎？或「 $[(10 \times 5) - 6] - 18$ 」與「 26 」，它們一樣大嗎？以檢查學童對等號遞移性的掌握。

前面已詳細描述逐次減項記法的基本原則，如有學童不符合逐次減項記法的原則，請進行相關子活動。若學童在一個步驟紀錄中同時少掉兩項，例如「 $(10 \times 5) - (6 + 18) = 50 - 24 = 26$ 」，這是將原始的逐次減項紀錄做了某些簡化與摘要，教師宜考慮學童是否清楚地掌握解題過程，依據判斷，彈性地予以接受或要求每次只能減少一個運算，詳細的紀錄雖然比較花力氣，但通常能協助學童掌握解題的進度，以及反省解題過程。

國小數學教材分析---整數的數量關係

主 編：周筱亭 黃敏晃

編 著 者：謝 堅 蔣治邦 吳淑娟

封面設計：林貞宇

發 行 人：何福田

發 行 所：國立教育研究院籌備處

地 址：臺北縣三峽鎮三樹路二號

電 話：(02)8671-1100

展 示 處：政府出版品展售門市 地址及電話：

1. 國家書坊台視總店：台北市八德路三段10號

TEL：(02)25781515轉643

2. 五南文化廣場：台中市中山路2號

TEL：(04)22260330

印 刷：承印實業股份有限公司

地 址：台北縣板橋市中山路二段465巷81號

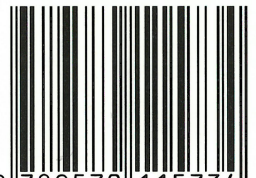
電 話：(02)2955-5282

中華民國九十五年五月三刷

統一編號

1009102193

ISBN 957-01-1573-4



9 789570 115734

95.05.1000本