環狀排列和珠狀排列的計算方法

孫航同

摘 要

環狀排列(circular permutation)和珠狀排列(necklace permutation)是高中、高職以上數學課程非常有趣的問題。本文撰寫的目的，是要採用簡明的方法來計算這兩種排列問題。闡釋的過程是從簡單的例子著手，由淺入深，最後找到計算此類問題的通式。利用這些通式，可以解決任何環狀和珠狀排列的問題。為了展示這種計算方法的威力，我們舉用七顆多色珠子所做成的環狀和珠狀排列問題為例。

關鍵字：環狀排列、珠狀排列、置換群、循環群、循環指標式 、波利亞計數法。

壹、前　　言

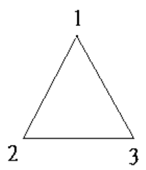
物體的對稱性常隱含抽象群(abstract group)。這種抽象群，可以用置換群(permutation group)來表示。按照物體對稱性的不同，置換群可分成許多種類。例如，循環群(cyclic group)、二面體群(dihedral group)，就是可以分別用來計算環狀排列和珠狀排列的群。下面我們用具體的例子來作解釋，然後介紹普遍的公式，最後給出結論。

貳、簡單的例子

圖(一)是正三角形，三個頂點分別用 1、2、3 表示。這個三角形繞中心依反時針方向轉動的循環群為：

$C_3 = \{g_0, g_1, g_2\}$----------------------------(1)

其中各元素 $g_0=(1)(2)(3)$表示沒有轉動，$g_1=(123)$表示轉動 120°的群元素，$g_2=(132)$表示轉動 240°的群元素。



圖(一)正三角形有一個中心旋轉軸和三個翻轉對稱軸

在圖(一)中，經過點 1 作對邊的中垂線，然後繞此垂線將三角形翻轉，那麼點 1 不動，點 2 和點 3 會互相對調，結果是 $g_3=(1)(23)$。同理，可將點 2 固定，點 1 和點

3 對調，即得 g_4=(2)(13)。而固定點 3，得 g_5=(3)(12)。收集上面各元素，得正三角形的二面體群為

$$D_6=\{g_0,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5\}\text{-------------------}(2)$$

參、循環指標式

在以上 C_3 和 D_6 中，每個元素都可以寫成循環節(disjoint cycle)的乘積。例如，g_0=(1)(2)(3)有三個單循環節，g_1=(123)是一個三循環節，g_2=(132)也是一個三循環節。而 g_3=(1)(23)、g_4=(2)(13)、g_5=(3)(12)各有一個單循環節和一個二循環節。在我們的計劃當中，要用 x_i 來代表一個循環節，i 是循環節的長度，如單循環節 i=1，二循環節 i=2，三循環節 i=3，如果這樣做，那麼 $g_0=x_1^3$，$g_1=x_3$，$g_2=x_3$，$g_3=x_1x_2$，$g_4=x_1x_2$，$g_5=x_1x_2$，對於 C_3 和 D_6，我們分別定義它們的循環指標式(cycle index)為

$$P_{C_3}=\frac{1}{3}\left(x_1^3+2x_3\right)\text{---------------------------}(3)$$

$$P_{D_6}=\frac{1}{6}\left(x_1^3+2x_3+3x_1x_2\right)\text{-------------------}(4)$$

循環指標式很有用，可用來計算環狀排列和珠狀排列的數目。在下面二節中，我們就要展示這個方法。

肆、環狀排列

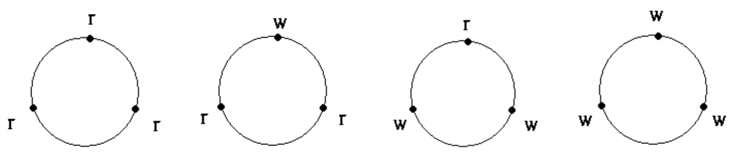
我們現在要討論的問題是用不同的顏色對正三角形的三個頂點著色。首先我們要用兩種顏料去塗正三角形的三個頂點，問有多少種方法？算法是這樣的：設兩種顏色為紅色和白色，分別用符號 r 和 w 表示。接著我們把循環節符號用著色指標式(*coloring index*)

$$x_i=r^i+w^i\text{ ----------------------------}(5)$$

來代表。將這個符號 x_i 代入循環指標式(3)中，就可以得到答案。即

$$\mathrm{P}_{C_5}(r,w)=\frac{1}{3}\left[(r+w)^3+2\left(r^3+w^3\right)\right]=r^3+r^2w+rw^2+w^3 ----(6)$$

上面這個算式的意義是：r^3 代表全著紅色，r^2w 代表兩個頂點著紅色，一個著白色。rw^2 代表一個著紅色，兩個著白色。w^3 代表全著白色。因為各項係數均為 1，因此都只有一種環狀排列，參看圖(二)



圖(二)兩種顏色塗三點共有四種方法

同理，如果有紅、白、綠三種顏料去塗正三角形的三個頂點，這三種顏色分別用 r、w、g 表示，於是將第(5)式改為

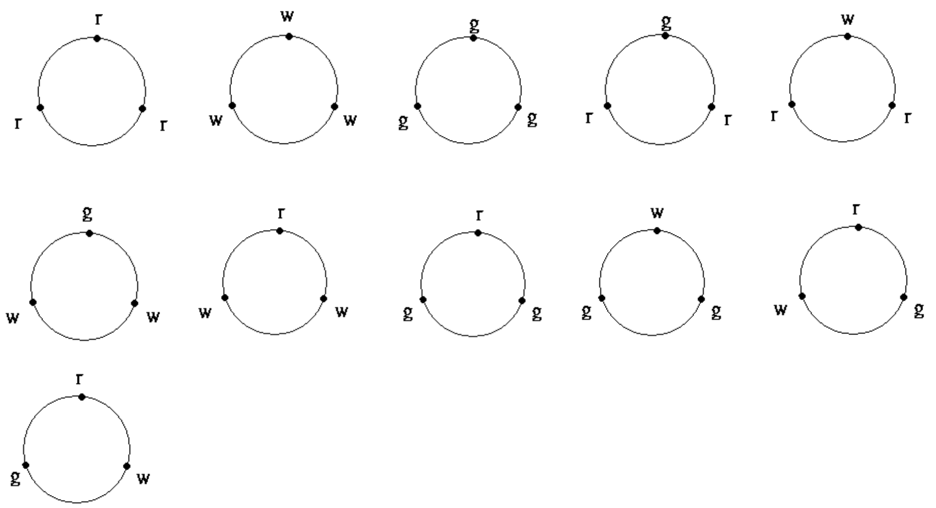
$$x_i=r^i+w^i+g^i ----------------(7)$$

而正三角形的三個頂點著紅、白、綠三色的方法即為

$$\mathrm{P}_{C_3}(r,w,g)=\frac{1}{3}\left[(r+w+g)^3+2\left(r^3+w^3+g^3\right)\right]$$

$$=r^3+w^3+g^3+r^3g+r^3w+w^3g+w^3r+g^3r+g^3w+2rwg ----------------(8)$$

式中各項的意義可仿照第(6)式解釋。但最後一項 $2rwg$ 的意義是：用三種顏色去塗正三角形的三個頂點，有兩種方法。參看圖(三)



圖(三) 三種顏色塗三點共有十一種方法

伍、珠狀排列

和環狀排列的方法幾乎完全相同。我們把(5)式代入(4)式中，就得到用紅、白兩色做成三個珠子的項鍊的數目。即

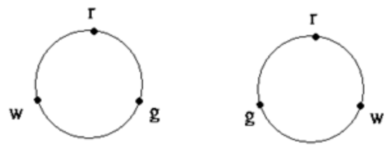
$$\mathrm{P}_{D_6}(r,w)=\frac{1}{6}\left[(r+w)^3+3(r+w)\left(r^2+w^2\right)+2\left(r^3+w^3\right)\right]$$

$$=r^3+r^2w+rw^2+w^3 \text{-----------------}(9)$$

和(6)式的結果相同。參看圖(二)，其次再把(7)式代入(4)式，就得到

$$\mathrm{P}_{D_6}(r,w,g)=\frac{1}{6}\left[(r+w+g)^3+3(r+w+g)(r^2+w^2+g^2)+2(r^3+w^3+g^3)\right]$$

$$=r^3+w^3+g^3+r^2g+r^2w+w^2g+w^2r+g^2r+g^2w+rwg \text{-------}(10)$$



圖(四)兩種環狀排列併為一種珠狀排列

此式和(8)比較，可看到 *rwg* 的係數為 1。這是由於在環狀排列，依照反時針方向旋轉，*rwg* 和 *rgw* 是兩種不同的排列。而在珠狀排列中，項鍊沒有正面或反面的區別。

故兩種環狀排列只算一種珠狀排列，因此 *rwg* 的係數為 1。參看圖(四)

以上我們討論了正三角形的環狀和珠狀排列，塗兩色或三色的情形。其實，顏色的數目若為 *m* 種，那麼

$x_i = c_1^{\,i} + c_2^{\,i} + \ldots + c_m^{\,i}$----------------------(11)

同樣可求環狀和珠狀排列的數目，這是第一點。其次，正方形(square)、正五邊形(pentagon)、…、正 n 邊形，都可以用相同的方法處理，但是邊數為奇數或偶數，會略有不同。下一節當中，我們會加以說明。

陸、正方形和正五邊形

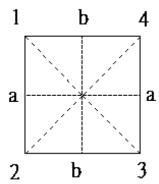
我們先拿正方形和正五邊形為例。圖(五)是正方形，它的循環群顯然為

$\mathrm{C}_4 = \{\mathrm{g}_0, \mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \mathrm{g}_3\}$------------------------(12)

式中的

g_0=(1)(2)(3)(4)，g_1=(1234)，g_2=(13)(24)，g_3=(1432)。

所以循環指標式為



圖(五)正方形有一個中心旋轉軸和四個翻轉對稱軸

$$\mathrm{P}_{C_4}=\frac{1}{4}\left[x_1^{4}+x_2^{2}+2x_4\right]$$ --------------------(13)

但是二面體群的對稱軸有兩類：一類是和各邊垂直的對稱軸，如 *aa*，*bb*，另一類是二條對角線$\overline{13}$，$\overline{24}$。繞過四條軸線將正方形翻轉 180°，會分別得到

g_4=(12)(34)，g_5=(14)(23)，g_6=(1)(3)(24)，g_7=(13)(2)(4)。

因此，正方形的二面體群為

$$\mathrm{D}_8=\{g_0,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6,g_7\}$$ ---------------(14)

而其循環指標式

$$\mathrm{P}_{D_8}=\frac{1}{8}\left[\left(x_1^{4}+3x_2^{2}+2x_1^{2}x_2+2x_4\right)\right]$$ ------------(15)

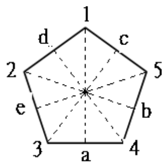
在圖(六)所示之正五邊形中，其循環群

$$\mathrm{C}_5=\{g_0,g_1,g_2,g_3,g_4\}$$ ---------------------(16)

式中，g_0=(1)(2)(3)(4)(5)，g_1=(12345)，g_2=(13524)，g_3=(14253)，

g_4=(15432)，所以

$$\mathrm{P}_{D_5}=\frac{1}{5}\left(x_1^{5}+4x_5\right)$$ --------------(17)



圖(六) 正五邊形有一個中心旋轉軸和五個翻轉對稱軸

圖(六)中只有一類頂點和對邊垂直的對稱軸，所以

g_5=(1)(25)(34)，g_6=(2)(13)(45)，g_7=(3)(15)(24)，g_8=(4)(12)(35)，

g_9=(5)(14)(23)，所以 $D_{10}=\{g_0,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6,g_7,g_8,g_9\}$------(18)

正五邊形的循環指標式是

$$P_{D_{10}}=\frac{1}{10}\left[(x_1^{\,5}+4x_5+5x_1x_2^{\,2})\right]\text{------------------------}(19)$$

柒、普遍公式

將(13)，(15)，(17)，(19)，各式推而廣之，可以求得通式。首先看循環群。循環群的階數，也就是群中之元素的數目，常可依照其所含因數分組。這是一種美妙的表示方法。例如循環群的階數為 6，而 6 的因數有 1,2,3,6。那麼由該群所得之循環指標式有四組：x_1^6,x_2^3,x_3^2,x_6^1。它們的係數是比 d 小但和 d 互質的數字的數目，這個數目叫做 d 的 $\varphi(phi)$函數，即 $\varphi(d)$。例如 $\varphi(6)=2$，$\varphi(3)=2$，$\varphi(2)=1$，$\varphi(1)=1$。所以

$$P_{C_6}=\frac{1}{6}\left[(\varphi(1)x_1^{\,6}+\varphi(2)x_2^{\,3}+\varphi(3)x_3^{\,2}+\varphi(6)x_6^{\,1})\right]=\frac{1}{6}(x_1^{\,6}+x_2^{\,3}+2x_3^{\,2}+2x_6)$$

在一般 n 階循環群，若 n 的因數為 d，則該群的指標式常可寫成

$$P_{C_n}=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)\,x_d^{\frac{n}{d}}\text{---------------}(20)$$

式中 $d\,|\,n$ 表示 d 為 n 的因數。

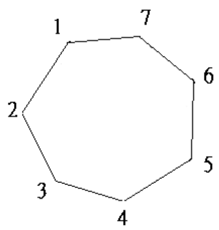
n 為奇數時，由圖(六)推廣可知

$$\mathrm{P}_{D_{2n}}=\frac{1}{2n}\left[\sum_{d|n}\varphi(d)\,x_d^{\frac{n}{d}}+nx_1x_2^{\frac{n-1}{2}}\right]$$ ---------------(21)

當 n 為偶數時，由圖(五)推廣，可得

$$\mathrm{P}_{D_{2n}}=\frac{1}{2n}\left[\sum_{d|n}\varphi(d)\,x_d^{\frac{n}{d}}+\frac{n}{2}x_2^{\frac{n}{2}}+\frac{n}{2}x_1^{2}x_2^{\frac{n-2}{2}}\right]$$ ---------------(22)

有了循環指標式，將(11)式所示之著色指標式代入，便可求得環狀排列和珠狀排列的數目。



圖(七) 正七邊形有一個中心旋轉軸和七個翻轉對稱軸

為展示以上公式的應用，我們再舉一個例子：用 3 顆紅色珠子，配合黃、藍、白、黑各一顆珠子，請問能做成幾種環狀排列? 幾種珠狀排列?假定紅、黃、藍、白、黑分別用 r、y、b、w、d 表示。為解答這個問題，參看圖(七)，可知 $n=7$，$d=1,7$。於是 $C_7=\{g_0,g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6\}$，而 g_0=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)，g_1=(1234567)，g_2=(1357246)，g_3=(1473625)，g_4=(1526374)，g_5=(1643752)，g_6=(1765432)。

由於 $\varphi(1)=1$，$\varphi(7)=6$，所以

$$P_{C_7}=\frac{1}{7}(x_1^{\,7}+6\,x_7)$$

令 $x_i = r^i + y^i + b^i + w^i + d^i$ ，於是

$$P_{C_7}(r,y,b,w,d)=\frac{1}{7}\left[(r+y+b+w+d)^7+6(r^7+y^7+b^7+w^7+d^7)\right]$$

由多項式定理，知 r^3ybwd 的係數為 $\frac{1}{7}\cdot\frac{7!}{3!1!1!1!1!}=120$ ，所以環狀排列共有 120 種。

其次，由（21)式，知

$$P_{D_{14}}=\frac{1}{14}(x_1^{\,7}+6\,x_7+7\,x_1x_2^{\,3})$$

代入著色指標式，得

$$P_{D_{14}}(r,y,b,w,d)=\frac{1}{14}\Big[(r+y+b+w+d)^7+6\left(r^7+y^7+b^7+w^7+d^7\right)+$$

$$7(r+y+b+w+d)\left(r^2+y^2+b^2+w^2+d^2\right)^3\ \Big]$$

觀察此式，只有方括號中的首項含有 r^3ybwd。所以珠狀排列的數目為

$\frac{1}{14}\cdot\frac{7!}{3!1!1!1!}=60$ 種，恰為環狀排列數目的一半。

在高中和高職數學課本中，環狀和珠狀排列問題都放在二年級上或下學期。一般內容常以各個不同顏色的珠子之排列為限[1],[2]，本文則推廣到同色珠子的數目沒有限制。

本文所述的方法叫做波利亞（G.Pólya）計數法[3]。詳細的證明可參考作者在政治大學應數所的碩士論文[4]。

捌、結論

環狀排列和珠狀排列是很有趣的問題，近來曾出現許多相關的著述[5],[6]。一般的文章，多見首先陳述普遍公式，然後再討論公式的應用，由深入淺，通常閱讀比較困難。本文則反其道而行，先以簡單問題做說明，再推廣到普遍公式，這應該是比較容易了解的一種介紹方式。

參考資料

[1] 高中數學第四冊(二下用書) 南一書局

[2] 職校數學 C(III)(二上用書) 泰宇出版公司

[3] F.S.Roberts and B.Tesman(2009)：Applied Combinatorics, 2nd ed. Chapman and Hall/CRC

[4] 孫航同(2012)：一個環狀排列的公式　政治大學應數所碩士論文

[5] 王世勛（2010）：不盡相異物的環狀排列公式　政治大學應數所碩士論文

[6] 洪鵬凱（2007）：不盡相異物排列—著色與環狀排列問題，全國高中數學教學研討會論文集