矩陣在生活上的應用之分享

數學科　劉雅惠老師

幾年前有學生問了我一個網路上的開燈遊戲問題：

「有一天，小建回到家發現燈都被關了。可是他家的燈有一個特性，那就是：

當一盞燈被按下開關以後，他周圍的燈，原本亮的，就會變暗，原本暗的，就會變亮。現在就請聰明的你幫他把所有燈打開吧！(p.s.其燈的佈局形成一個 n×n 棋盤的形式。)」

因為棋盤的格局狀似矩陣，而每盞燈的結果都只有ˇ亮ˇ與ˋ暗ˇ兩種，每按一次就會改變結果，按兩次則還原，所以考慮運用高中數學第四冊所教的矩陣及資訊課所學的二進位法來解題，在與學生討論的過程中我們也決定以「翻動棋跡」這個題目做了數學科展，分享如下：

壹、 摘要：

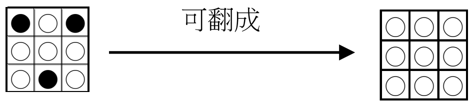
本文所探討的是給定一個 n×n 的棋盤及 n^2 個兩面棋(一面為黑色，一面為白色)，若規定其中一個棋子翻面時，則與此棋相鄰的所有棋子亦必須跟著翻面，而我們想探討在此規定下對於所有的棋局是否皆可被翻成同一面。因此我們將每一個 n×n 的棋局對應到一個矩陣，且翻棋的過程則對應到矩陣二進位的加法。利用此思考模式我們可以將此遊戲轉換成是解聯立方程組與判斷矩陣是否可逆的問題，最後借助 Mathematics 4 求其解。

貳、 研究動機

一年級的時候，曾經看過「A Beautiful Mind」這部影片，對這部片很有興趣，進而尋找它的相關網站，並在網站中發現了一個數學遊戲：給定一個 3×3 的棋盤並在上面任意擺滿了兩面棋(一面為黑色，一面為白色)，規定若其中一個棋子翻面時，與此棋相鄰的所有棋子亦必須跟著翻面，試問對於任意的棋局是否皆可被翻成同一面？因為覺得很有趣，所以就開始嘗試研究。

參、 研究目的

給定一個 n×n 的棋盤及 n^2 個兩面棋(一面為黑色，一面為白色)，規定若其中一個棋子翻面時，與此棋相鄰的所有棋子亦必須跟著翻面。在此規定下，我們想探討對於所有的棋局是否皆可被翻成同一面。若是可以，要如何翻才能是最簡潔的並且有何規則。 ex：n=3



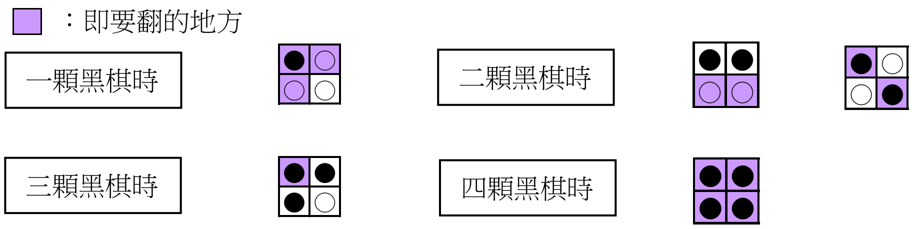
肆、 研究過程

將每一個 n×n 的棋局皆視為以$\{0,1\}$組成的 n×n 矩陣，其中 0 表白棋，1 表黑棋，現在我們只討論將任何 n×n 的棋局全翻為白棋的情形，至於全翻為黑棋的情形，只需將 0 改為表黑棋，而 1 表白棋即可。在正式討論之前，我們先介紹一個定理；

【定理一】：A 是一 n×n 的矩陣$[a_{ij}]$，X 是一 n×1 的矩陣$[x_{ij}]$，其中 a_{ij}、$x_{ij}\in\{0,1\}$。若對所有的 n×1 矩陣 $B=[b_{ij}]$，其中 $b_{ij}\in\{0,1\}$，方程式 $AX=B$ 恆有解$\Leftrightarrow A$ 矩陣為可逆。

一、先觀察 2x2 棋盤的情形：

我們不難發現其任意棋局的翻法如下



二 、3x3 棋盤的情形：

（一）將棋盤遊戲，直接對應到矩陣上，並試著翻翻看：

例如：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\left(\text{即}a_{11}\text{的位置}\right)]{\text{翻第一列第一行}}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}，A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\left(\text{即}a_{12}\text{的位置}\right)]{\text{翻第一列第二行}}\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\left(\text{即}a_{13}\text{的位置}\right)]{\text{翻第一列第三行}}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

因為翻棋之後矩陣中的部分元素須由 0→1 或 1→0，所以我們考慮利用**二進位的加法及乘法運算**來計算矩陣，即

$1+1=0\,,\,1+0=1\,,\;0+1=1\,,\;0+0=0$（二進位加法）

$1\cdot 1=1\,,\,1\cdot 0=0\,,\,0\cdot 1=0$（二進位乘法）

由上面的嘗試，我們不難發現：

翻 a_{11} 的動作，即將矩陣 A 加上 $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\equiv A_{11}$,

翻 a_{12} 的動作，即將矩陣 A 加上 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\equiv A_{12}$,

翻 a_{13} 的動作，即將矩陣 A 加上 $\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\equiv A_{13}$,

相同的試驗我們知道翻 a_{21} 、a_{22} 、a_{23} 、a_{31} 、a_{32} 、a_{33} 的動作等於將矩陣 A 個別加上矩陣

$$A_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad A_{22}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\quad A_{23}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\quad A_{31}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\quad A_{32}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\quad A_{33}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

所以我們發現要將任意棋局 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ 全翻為白棋，等於去尋找九個數

$x_{ij}\in\{0,1\},\ \forall i,j\in\{1,2,3\}$ ，使得

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}+\sum_{i,j=1}^{3}x_{ij}A_{ij}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$（x_{ij} 即翻 a_{ij} 的次數，$x_{ij}\in\{0,1\}$）；

左右同加上 $\sum_{i,j=1}^{3}x_{ij}A_{ij}$ ，則 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\sum_{i,j=1}^{3}x_{ij}A_{ij}$

將矩陣 A_{ij} 代入上式中並合併整理得

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}+x_{12}+x_{21}&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{22}&x_{12}+x_{13}+x_{23}\\x_{11}+x_{21}+x_{22}+x_{31}&x_{12}+x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{32}&x_{13}+x_{22}+x_{23}+x_{33}\\x_{21}+x_{31}+x_{32}&x_{22}+x_{31}+x_{32}+x_{33}&x_{23}+x_{32}+x_{33}\end{bmatrix}$$

寫成矩陣形式，即

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1&1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1&1&0&1&0 \\ 0&0&1&0&1&1&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1 \end{bmatrix}}_{A_{3^2\times3^2}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix}}_{C} \cdots \quad \cdots \text{(I)}$$

由**【定理一】**我們知道（I）式中的 X 對所有的 C 將有唯一解⇔（I）式中的係數矩陣 $A_{3^2\times3^2}$ 為可逆矩陣。所以探討所有 3x3 的棋局是否能全翻為白棋，等於研究 3x3 棋盤所對應到聯立方程組（即（I）式）的係數矩陣 $A_{3^2\times3^2}$ 是否可逆。由電腦運算結果得知 $\det(A_{3^2\times3^2}) \neq 0$ 且

$$(A_{3^2\times3^2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0&1&0&0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1 \\ 1&0&1&1&0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0&0&1 \\ 0&1&0&1&1&1&0&1&0 \\ 1&0&0&1&1&0&1&0&0 \\ 1&1&0&0&0&1&1&0&1 \\ 1&1&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&1&0&1 \end{bmatrix}$$

，故所有 3x3 的棋局 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ **皆能全翻為白棋**。

（二）知道 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 可以成功翻成 $\begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$ 後，我們想進一步探討翻的方法，

在此我們只考慮 3x3 的基本矩陣 E_{ij}（即除了第 i 列第 j 行的元素等於 1 外，其餘皆為 0）的翻法，而其餘 3x3 棋局的翻法，皆可以由此 9 個基本矩陣的翻法線性組合而來。

1、$E_{11} \to O_3$ 的翻法：其中 O_3 表 3x3 的零矩陣

由（I）⇒ $A_{3^2\times3^2} \cdot X = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$，其中 ^{t} 表轉置矩陣

$\therefore\ X = (A_{3^2\times3^2})^{-1} \cdot [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$

$= [1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0]^t$

（為 $(A_{3^2\times3^2})^{-1}$ 的第一行；即要翻 a_{11}、a_{13}、a_{23}、a_{31}、a_{32} 五處）

2、同理可算

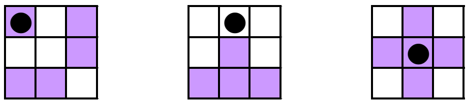
$E_{12} \to O_3$ = 要翻 a_{22}、a_{31}、a_{32}、a_{33} 四處

$E_{13} \to O_3$ = 要翻 a_{11}、a_{13}、a_{21}、a_{32}、a_{33} 五處

$E_{21} \to O_3$ ＝要翻 a_{13}、a_{22}、a_{23}、a_{33} 四處
$E_{22} \to O_3$ ＝要翻 a_{12}、a_{21}、a_{22}、a_{23}、a_{32} 五處
$E_{23} \to O_3$ ＝要翻 a_{11}、a_{21}、a_{22}、a_{31} 四處
$E_{31} \to O_3$ ＝要翻 a_{11}、a_{12}、a_{23}、a_{31}、a_{33} 五處
$E_{32} \to O_3$ ＝要翻 a_{11}、a_{12}、a_{13}、a_{22} 四處
$E_{33} \to O_3$ ＝要翻 a_{12}、a_{13}、a_{21}、a_{31}、a_{33} 五處

以上的解分別為矩陣$(A_{3^2\times 3^2})^{-1}$中第二行到第九行的元素。以圖示表之：因為棋盤具有對稱性，所以我們只列出下面三種情形，其餘的六種棋局只需將此三棋局之一轉動一下即可。

：即要翻的地方



三、一般 nxn 棋盤的情形：

之前討論任意 3x3 的棋局能不能全翻為白棋時，我們是探討矩陣 $A_{3^2\times 3^2}$ 有無反矩陣。有，則能翻，且反矩陣即為 3x3 基本矩陣的翻法；反之則否**【定理一】**。相同的想法我們想將它推廣到一般 nxn 的棋盤上，同時我們也不難發現一 nxn 棋盤，其所對應到的聯立方程組之係數矩陣 $A_{n^2\times n^2}$ 必為下列的形式：

$$A_{n^2\times n^2}=\begin{bmatrix} B_n & I_n & O_n & \cdots & O_n \\ I_n & B_n & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_n & \ddots & \ddots & \ddots & O_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_n & I_n \\ O_n & \cdots & O_n & I_n & B_n \end{bmatrix} \ldots\ldots（★），其中\ B_n=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

I_n 為 nxn 的單位矩陣，O_n 為 nxn 的零矩陣。

數學上，將（★）式右邊這個 n^2xn^2 的矩陣稱為矩陣 $A_{n^2\times n^2}$ 的一個**分塊矩陣**。由**【定理一】**我們知道，解決 nxn 棋盤問題，最主要的關鍵在於探討矩陣 $A_{n^2\times n^2}$ 的可逆性。利用電腦的運算我們得知 $A_{2^2\times 2^2}$、$A_{3^2\times 3^2}$、$A_{6^2\times 6^2}$、$A_{7^2\times 7^2}$、$A_{8^2\times 8^2}$ 皆有反矩陣，但是 $A_{4^2\times 4^2}$、$A_{5^2\times 5^2}$、$A_{9^2\times 9^2}$、$A_{11^2\times 11^2}$、$A_{14^2\times 14^2}$ 卻沒有反矩陣。於是我們便試著尋找其中的共通性，並且歸納出兩大類必不可逆的矩陣類型。

第一類：（5n-1）×（5n-1）的棋盤，n∈N

（一） 當 n＝1，即 4×4 棋盤此時將 $A_{4^2\times4^2}$ 第 2,3,5,8,9,12,14 列（即上面 $A_{4^2\times4^2}$ 矩陣中顏色較淡的列），全部相加至第 15 列，則第 15 列的元素全變為 0。

故 det $A_{4^2\times4^2}$ ＝0，所以 $A_{4^2\times4^2}$ 的反矩陣不存在。

（二） 研究（5n-1）^{2}×（5n-1）^{2}矩陣的可逆性，其中 n∈N。此時

$$B_{5n-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}_{(5n-1)\times(5n-1)}$$

，I_{5n-1} 為（5n-1）×（5n-1）之單位矩陣

定義：（1）列運算 R_1：將（5n-1）^{2}×（5n-1）^{2}矩陣中第 5k-3、5k-2 列，k＝1,2,⋯,n-1 以及第 5n-3 列共 2n-1 列全部加至第 5n-2 列。

（2）列運算 R_2：將（5n-1）^{2}×（5n-1）^{2}矩陣中第 5k-4、5k-1 列，k＝1,2,⋯,n-1 以及第 5n-4 列共 2n-1 列全部加至第 5n-1 列。

$\therefore B_{5n-1} \xrightarrow{R_1}$ 第 5n-2 列變成 $\vec{V}_1$ ＝（$\underline{1,0,0,1}$,0,$\underline{1,0,0,1}$,0,……,0,$\underline{1,0,0,1}$）

$\xrightarrow{R_2}$ 第 5n-1 列變成 $\vec{V}_3$ ＝（$\underline{1,1,1,1}$,0,$\underline{1,1,1,1}$,0,……,0,$\underline{1,1,1,1}$）

$\boldsymbol{I}_{5n-1} \xrightarrow{R_1}$ 第 5n-2 列變成 $\vec{V}_2$ ＝（$\underline{0,1,1,0}$,0,$\underline{0,1,1,0}$,0,……,0,$\underline{0,1,1,0}$）

$\xrightarrow{R_2}$ 第 5n-1 列變成 $\vec{V}_1$

此時，$\vec{V}_1+\vec{V}_2+\vec{V}_3=(\vec{0},\cdots,\cdots,\vec{0})$

現在分別對 $A_{(5n-1)^2\times(5n-1)^2}$ 中 $\begin{cases} 第5k-4大列作列運算R_1 \\ 第5k-3大列作列運算R_2 \\ 第5k-2大列作列運算R_2 \\ 第5k-1大列作列運算R_1 \end{cases}$ ，其中 k∈$\{1,2,......,n\}$；

$$A_{(5n-1)^2\times(5n-1)^2}=\begin{bmatrix} B_{5n-1} & I_{5n-1} & & & & & \\ I_{5n-1} & B_{5n-1} & I_{5n-1} & & & & \\ & I_{5n-1} & B_{5n-1} & I_{5n-1} & & & \\ & & I_{5n-1} & B_{5n-1} & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & I_{5n-1} \\ & & & & I_{5n-1} & B_{5n-1} & I_{5n-1} \\ & & & & & I_{5n-1} & B_{5n-1} & I_{5n-1} \\ & & & & & & I_{5n-1} & B_{5n-1} \end{bmatrix}_{(5n-1)^2\times(5n-1)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{則第 1 大列} \xrightarrow{R_1} (\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{0},\vec{0},\vec{0},\overbrace{\vec{0},\ \vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0}}^{5n-6個})\\
&\text{第 2 大列} \xrightarrow{R_2} (\vec{V}_1,\vec{V}_3,\vec{V}_1,\vec{0},\vec{0},\vec{0},\ \vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0})\\
&\text{第 3 大列} \xrightarrow{R_2} (\vec{0},\vec{V}_1,\vec{V}_3,\vec{V}_1,\vec{0},\vec{0},\ \vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0})\\
&\text{第 4 大列} \xrightarrow{R_1} (\vec{0},\vec{0},\vec{V}_2,\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{0},\ \vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0})\\
&\text{第 5k-4 大列} \xrightarrow{R_1} (\overbrace{\vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0}}^{5(k-1)-1個},\vec{V}_2,\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{0},\vec{0},\vec{0},\overbrace{\vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0}}^{5(n-k)-1個})\\
&\text{第 5k-3 大列} \xrightarrow{R_2} (\vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0},\vec{0},\vec{V}_1,\vec{V}_3,\vec{V}_1,\vec{0},\vec{0},\vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0})\\
&\text{第 5k-2 大列} \xrightarrow{R_2} (\vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0},\vec{0},\vec{0},\vec{V}_1,\vec{V}_3,\vec{V}_1,\vec{0},\vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0})\\
&\text{第 5k-1 大列} \xrightarrow{R_1} (\vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0},\vec{0},\vec{0},\vec{0},\vec{V}_2,\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0})\\
&\text{第 5n-4 大列} \xrightarrow{R_1} (\overbrace{\vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0}}^{5n-6個},\vec{V}_2,\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{0},\vec{0})\\
&\text{第 5n-3 大列} \xrightarrow{R_2} (\vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0},\vec{0},\vec{V}_1,\vec{V}_3,\vec{V}_1,\vec{0})\\
&\text{第 5n-2 大列} \xrightarrow{R_2} (\vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0},\vec{0},\vec{0},\vec{V}_1,\vec{V}_3,\vec{V}_1)\\
&\text{第 5n-1 大列} \xrightarrow{R_1} (\vec{0},\ \cdots\ \cdots,\ \vec{0},\vec{0},\vec{0},\vec{0},\vec{V}_2,\vec{V}_1)
\end{aligned}
$$

將此 4n 列的元素相加，即得到一列全為 0 元素

故 det $A_{(5n-1)^2\times(5n-1)^2}=0$，即 $A_{(5n-1)^2\times(5n-1)^2}$ 的反矩陣不存在。

所以得到以下的結論：

（5n-1）×（5n-1）棋盤的任意棋局未必能全翻成同一色。

第二類：（6n-1）×（6n-1）的棋盤

（一）當 n＝1，即 5×5 棋盤，考慮此增廣矩陣

$$
\left[B_5\middle|I_5\right]=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right]
\xrightarrow[\text{加至第2列}]{\text{將1,4,5列}}
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&1&1\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1
\end{array}\right]
\underline{\underline{令}}\left[B_5'\middle|I_5'\right]
$$

$$
\therefore\ A_{5^2\times5^2}=\begin{bmatrix}
B_5&I_5&&&\\
I_5&B_5&I_5&&\\
&I_5&B_5&I_5&\\
&&I_5&B_5&I_5\\
&&&I_5&B_5
\end{bmatrix}\text{必可經過有限的列運算，轉換成}\Rightarrow\begin{bmatrix}
B_5'&I_5'&&&\\
I_5'&B_5'&I_5'&&\\
&I_5'&B_5'&I_5'&\\
&&I_5'&B_5'&I_5'\\
&&&I_5'&B_5'
\end{bmatrix}\equiv A'_{5^2\times5^2}
$$

將 $A'_{5^2\times5^2}$ 分塊矩陣中第 1、3 大列加至第 5 大列，則第 5 大列中的第 2 列元素全為 0。故 det $A_{5^2\times5^2}=0$，所以 $A_{5^2\times5^2}$ 的反矩陣不存在。在將之推廣到 $A_{(6n-1)^2\times(6n-1)^2}$ 的情形時我們需要用到下面的附註：

【附註一】對於所有的正整數 n，det$B_{2+3n}=0$

證明：

（1）當 n＝1 時，$\det B_5=\begin{vmatrix} 1&1&&& \\ 1&1&1&& \\ &1&1&1& \\ &&1&1&1 \\ &&&1&1 \end{vmatrix}$，將 1、4、5 列全部加至第 2 列$\Rightarrow$第 2 列元素全為 0。

$\therefore \det B_5=0$

（2）設當 n＝k 時，$\det B_{2+3k}=0$，則 B_{2+3k} 必可經有限的列運算得到某一列全為 0

（3）則當 n＝k+1 時，$\det B_{2+3(k+1)}=\begin{vmatrix} 1&1&&&&&&&&& \\ 1&1&1&&&&&&&& \\ &1&1&1&&&&&&& \\ &&1&1&1&&&&&& \\ &&&1&1&1&&&&& \\ &&&&1&1&1&&&& \\ &&&&&\ddots&\ddots&\ddots&&& \\ &&&&&&\ddots&\ddots&\ddots&& \\ &&&&&&&1&1&1& \\ &&&&&&&&1&1&1 \\ &&&&&&&&&1&1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{加至第4列}]{\text{第1,2列}} \begin{vmatrix} 1&1&&&&&&&&& \\ 1&1&1&&&&&&&& \\ &1&1&1&&&&&&& \\ &&0&1&1&&&&&& \\ &&&1&1&1&&&&& \\ &&&&1&1&1&&&& \\ &&&&&\ddots&\ddots&\ddots&&& \\ &&&&&&\ddots&\ddots&\ddots&& \\ &&&&&&&1&1&1& \\ &&&&&&&&1&1&1 \\ &&&&&&&&&1&1 \end{vmatrix}$

$\because B_{2+3(k+1)}$右下角的子矩陣$=B_{2+3k}$ $\therefore \det B_{2+3(k+1)}=0$

由數學歸納法得證，對於所有的正整數 n，$\det B_{2+3n}=0$

（二）仿 5×5 的做法，將之推廣到：$A_{(6n-1)^2\times(6n-1)^2}$ 的情形。由【附註一】我們知道 B_{6n-1} 不可逆，故增廣矩陣$[B_{6n-1}|I_{6n-1}]$經有限列運算（＊＊）後，可將其第一列的元素變成（$\overbrace{0,......,0}^{6n-1\text{個}},a_1,……,a_{6n-1}$），現在將

$A_{(6n-1)^2\times(6n-1)^2}=\begin{bmatrix} B_{6n-1} & I_{6n-1} & & \\ I_{6n-1} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & I_{6n-1} \\ & & I_{6n-1} & B_{6n-1} \end{bmatrix}$中的第 1,3,5,7,……,6n-1 大列，個別做（＊＊）列運算，並將之全部加至第 1 大列，則矩陣 $A_{(6n-1)^2\times(6n-1)^2}$ 的第一列元素會全為 0。故 $\det A_{(6n-1)^2\times(6n-1)^2}=0$，即 $A_{(6n-1)^2\times(6n-1)^2}$ 之反矩陣不存在，所以我們得到以下的結論： **（6n-1）×（6n-1）棋盤的任意棋局未必能全翻成同一色。**

借助電腦的運算我們可以很容易地判別一個矩陣的可逆性，但當矩陣愈大時，其困難度也愈大，尤其是在輸入矩陣的過程。例如：一個 10×10 的棋盤所對應到聯立方程組的係數矩陣 $A_{10^2\times10^2}$ 為一 100×100 的矩陣，若直接輸入電腦判別可逆性是相當費時費力的。因此我們考慮利用**分塊矩陣的乘法**，來簡化 $A_{n^2\times n^2}$ 可逆性的討論；(以下的運算皆採二進位)，以 n=3 為例

設 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$，當 $\det A\neq 0$ (即 $a^3+2a=a^3\neq 0$) 時⇔

A 具有反矩陣 A^{-1} 且 $A^{-1}=(\det A)^{-1}\begin{bmatrix} a^2-1 & -a & 1 \\ -a & a^2 & -a \\ 1 & -a & a^2-1 \end{bmatrix}$

此時若我們令 $a=B_3$，$1=I_3$，則 $A=A_{3^2\times 3^2}$。假使 $\det(B_3^3)\neq 0$，即 B_3^3 的反矩陣 B_3^{-3} 存在。我們考慮矩陣 $C=\begin{bmatrix} (B_3^2+I_3)B_3^{-3} & B_3\cdot B_3^{-3} & I_3\cdot B_3^{-3} \\ B_3\cdot B_3^{-3} & B_3^2\cdot B_3^{-3} & B_3\cdot B_3^{-3} \\ I_3\cdot B_3^{-3} & B_3\cdot B_3^{-3} & (B_3^2+I_3)B_3^{-3} \end{bmatrix}$(即將 A^{-1} 中的 $\frac{1}{\det A}$ 用 B_3^{-3} 代替，1,-1 用 I_3 代替，a,$-a$ 用 B_3 代替)，由分塊矩陣的乘法，我們得知 $A_{3^2\times 3^2}\cdot C=C\cdot A_{3^2\times 3^2}=I_9$，所以 C 為 $A_{3^2\times 3^2}$ 的反矩陣，即 $A_{3^2\times 3^2}$ 為可逆。反之，若 $A_{3^2\times 3^2}$ 為可逆，則 $(A_{3^2\times 3^2})^{-1}=C$，所以 $\det(B_3^3)\neq 0$。因此我們判斷 $A_{3^2\times 3^2}$ 這個 9×9 矩陣是否可逆時，只須判別 3×3 矩陣 B_3^3 是否可逆。同理∵ $\det\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}=1+a^2+a^4$ ∴判別 16×16 矩陣 $A_{4^2\times 4^2}$ 是否為可逆=判別 4×4 矩陣 $I_4+B_4^2+B_4^4$（用 I_4 代替 1，B_4 代替 a）是否可逆。所以藉由分塊矩陣的乘法我們可以將判別一 n^2xn^2 矩陣 $A_{n^2\times n^2}$ 的可逆性約簡到只判別一個 n×n 矩陣的可逆性。利用此想法再藉由矩陣 $C_n=\begin{bmatrix} a & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & a \end{bmatrix}$ 行列式值的遞迴公式；即 $\det C_n=a\cdot\det C_{n-1}-\det C_{n-2}$，我們可以較快速地利用電腦的運算得知 n=3~30 中，除了第一類型的矩陣（即 n=4,9,14,19,24,29）、第二類型的矩陣（即 n=5,11,17,23,29）還有 n=30 的 $A_{n^2\times n^2}$ 不可逆外，其餘的皆為可逆。

伍、 研究結果

一、對於所有正整數 n，（5n-1）×（5n-1）棋盤的任意棋局未必能全翻成同一色。

二、對於所有正整數 n，（6n-1）×（6n-1）棋盤的任意棋局未必能全翻成同一色。

三、對於 $n\in\{2,3,\cdots,30\}$，n×n 棋盤所對應到聯立方程組的係數矩陣 $A_{n^2\times n^2}$，除了第一類型的矩陣（即 n=4,9,14,19,24,29）、第二類型的矩陣（即 n=5,11,17,23,29）還有 n=16、30 的 $A_{n^2\times n^2}$ 不可逆外，其餘的皆為可逆。換言之，在 $n\in\{2,3,\cdots,30\}$ 中除了上述的 n 之外，其餘 16 個棋盤的任意棋局皆能全翻成同一色。

四、2×2×3 及 3×3×3 立體棋盤的任意棋局皆可全翻成同一色。

陸、 討論

一、在研究這個棋盤遊戲過程中，我們其實也解決了網路上的開燈遊戲：

有一天，小建回到家發現燈都被關了。可是他家的燈有一個特性，那就是：當一盞燈被按下開關以後，他周圍的燈，原本亮的，就會變暗，原本暗的，就會變亮。現在就請聰明的你幫他把所有燈打開吧！(p.s.其燈的佈局形成一個 n×n 棋盤的形式。)

說明：開燈遊戲就如同將全黑的棋局翻至為全白的情形。所以仿我們在平面棋盤上的討論得知：

（一）若矩陣 $A_{n^2\times n^2}$ 為可逆，則 n×n 的開燈遊戲解就是將($A_{n^2\times n^2}$)$^{-1}$的每一行相加，此時 1 表開燈、0 表關燈。(此解必唯一。)

（二）若矩陣 $A_{n^2\times n^2}$ 為不可逆，則此時 n×n 的開燈遊戲解就是方程組

$$A_{n^2\times n^2}X=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}_{n^2\times 1}$$ 的解。(此解不一定唯 一)

註：4x4~15x15 開燈遊戲的解請見【附件】

二、在研究此棋盤遊戲的過程中，我們發現並不是每一個 n×n 棋盤的任意棋局皆可被全翻成同面。為了讓任意棋局皆可被全翻成同一面，所以我們想試著去改變遊戲規則，其中我們發現若將棋子四周的四個方位（上、下、左、右）任取一個來重新定義遊戲規則，便可達到我們的目的。這是因為若我們規定除了棋子本身外，其右邊棋子也要跟著翻面，則此時所對應的係數矩陣 $A_{n^2\times n^2}$ 為一個上三角形矩陣且主對角線上的元素皆為 1，因此 $A_{n^2\times n^2}$ 為可逆。同理將右邊改為其餘三個方位的任何一個也會使得這個結果成立。若考慮在四個方位中任取兩個來定義，則情形可分為以下三類：

（一）若是規定右、上（右、下）也要跟著翻面，則此時所對應的係數矩陣

$$A_{n^2\times n^2}=\begin{bmatrix}B_n & & & 0\\ I_n & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & I_n & B_n\end{bmatrix}\left(A_{n^2\times n^2}=\begin{bmatrix}B_n & I_n & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_n\\ 0 & & & B_n\end{bmatrix}\right)$$，其中 $B_n=\begin{bmatrix}1 & 1 & & 0\\ & 1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots\\ & & & 1 & 1\\ 0 & & & & 1\end{bmatrix}$，$I_n$ 為 n×n 的單位矩陣。因為 $A_{n^2\times n^2}$ 為分塊下（上）三角形矩陣且 B_n 為上三角形矩陣，所以

det $A_{n^2\times n^2}$ =（detB_n）^{n} = $1\neq 0$，即 $A_{n^2\times n^2}$ 為可逆。同理若規定左、上（左、下）要跟著翻面只需將上述中的 B_n 改為矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 即可。且此時 $A_{n^2\times n^2}$ 亦為可逆。

（二）若是規定右、左也要跟著翻面，則此時所對應的係數矩陣 $A_{n^2\times n^2} = \begin{bmatrix} B_n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_n \end{bmatrix}$

其中 $B_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$。因為 det $A_{n^2\times n^2}$ =（detB_n）^{n}，所以我們現在只要探討 B_n 的可逆性即可。仿【附註一】（即矩陣 B_{3k+2} 不可逆）的證明，我們不難推論出矩陣 B_{3k}、B_{3k+1} 皆為可逆，$\forall k\in N$。因此在此規定下，除了(3k+2)×(3k+2)的棋盤外，其餘棋盤的任意棋局皆可被全翻成同一面。

（三）若是規定上、下也要跟著翻面，則此時所對應的係數矩陣 $A_{n^2\times n^2} = \begin{bmatrix} I_n & I_n & & & 0 \\ I_n & I_n & I_n & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & I_n & I_n & I_n \\ 0 & & & I_n & I_n \end{bmatrix}$

其中 I_n 為 n×n 的單位矩陣。而這時矩陣 $A_{n^2\times n^2}$ 可逆性的探討與（二）中的矩陣 B_n 是一樣地，所以在此規定下，除了(3k+2)×(3k+2)的棋盤外；$\forall k\in N$，其餘棋盤的任意棋局皆可被全翻成同一面。

三、可將程式改為二進位，在計算的時候可以不必再轉換，減少人為的疏失。