彰 化 師 大 輔 導 學 報
民 92 年，25 期，63-86 頁

共同因素分析與主成份分析之比較

黃財尉

摘　要

本文主要藉文獻的考徵，探討共同因素分析與主成份分析在學理上與實徵上的差異，並從七個主題進行討論：(1)因素與成份的正名；(2)共同因素分析的原理；(3)主成份分析的原理；(4)共同因素分析與主成份分析的學理比較；(5)共同因素分析與主成份分析的實徵研究比較；(6)因素或成份的萃取程序比較；(7)應用與解釋上的差異比較。文末並提供兩方法相同、相異與相似之條件的歸納表格。

關鍵詞：共同因素分析、共同性、成分、主成份分析、萃取程序、縮減式相關矩陣

＊ 作者係國立嘉義大學輔導學系助理教授

前　言

因素分析 (factor analysis) 是行爲社會科學研究中廣爲應用的一種統計分析程序。其應用之廣泛幾乎到了量化研究者都須經驗此一歷程的地步，但廣泛的應用並無收斂於一致的應用法則，究其原因，主要爲因素分析的每一程序的選擇涉及許多的決定，而每一決定都會影響因素分析的結果。例如樣本大小的議題、萃取方法的選用、萃取因素數目的爭議、以及轉軸方法的應用等都留下許多討論的空間。因爲樣本大小、因素數目、以及轉軸方法的決定皆爲萃取方法選用之前或之後的共同議題，因而本文主要針對探索性分析 (exploratory analysis) 過程中最常被使用的萃取方法：共同因素分析法 (common factor analysis) 與主成份分析法 (principal component analysis) 進行其間異同的文獻綜論比較，並分別從以下七個主題進行探討：

一、因素或成份？

在探討因素分析之前，首先應先釐清「因素」 (factor) 的意義，而這又與因素分析的目的有極大的關聯，甚者 MacCallum (1999) 認爲「因素」這個詞彙就是因素分析目的的**房角石 (cornerstone)**。Kim 與 Mueller (1994) 認爲因素分析的目的在於以較少數的假設變項 (hypothetic variables) 來代表一組原先較多的變項，這「假設變項」是一種比較廣泛的概括界定；其可能代表一種原來觀察變項線性組合所表示的變量 (variate) ，也可能代表解釋原始觀察變項的潛在向度或構念 (construct) (Hair, Anderson, Tathan, & Black, 1998)；前者 (變量) 代表一種成份 (component) ，因其爲可觀察變項的線性組合，其性質並不會因變項的線性轉換而有所改變，故仍具有可觀察的特徵，此與後者 (構念) 的意涵截然不同。構念係指一種理論假設的不可觀察變項，是組成原始觀察變項的元素，其與觀察變項的關係迥異於後者與觀察變項的關係 (翁儷禎，1995) 。這強調構念與成份的不同也促成因素分析狹義但精確的目的定義，MacCallum (1999) 主張因素分析的目的在於 「挖掘並瞭解資料

中產生變異與共變 (相關) 的結構」(p.3)，而這相關結構即代表潛在構念間的關聯方式與程度。職此，以「因素」一詞代表潛在構念應該比代表成份來得明確且符意，這點也可從強力倡導主成份分析之學者 (如 Velicer, Peacock, & Jackson, 1982) ，在其分析方法分類的文章中 (因素分析與成份分析) 得到印證。因此，本文以下所指「因素分析」是專指以少數的潛在構念來解釋一組較多原始觀察變項的統計程序而言，而這潛在構念又係特別針對共同因素而言。

二、共同因素分析的原理

因素分析的發生起源於對心智能力(智力)研究的需求。1904 年 Charles Spearman 提出一般(g)與特殊(s)的二因子智力理論(two factor theory of intelligence)可說是最早的因素分析探討；到了 1940 年代，Thurstone 曾提出多因子分析(multiple factor analysis)，認爲人類智力的組成應包括七種基本心能(MacCallum, 1999)，這多因子分析現在則稱爲共同因素分析(common factor analysis)。

因素分析係基於共同因素 (common factor) 的假定而形成與觀察變項間線性組合的數學模式，其特點是在共同因素之外特別允許獨特因素 (unique factor) 的存在。所謂共同因素係指在所探討的觀察變項中，能影響兩個以上觀察變項的內在屬性 (Tucker & MacCallum, 1997) ，且此內在屬性是抽象不可觀察的，因爲此一共同因素係由觀察變項所構成，所以這些被影響的觀察變項間必須存有某一程度的相關。例如，加法題目與乘法題目 (即觀察變項) 同時受到「數字能力」(即內在屬性)的影響，加法題目與乘法題目存在一定程度的關係；另一方面，獨特因素也是一個潛在變項，係指僅能影響一個觀察變項的內在屬性，而不對觀察變項間的相關有所貢獻，其包含兩個部分：特定因素(specific factor)與測量誤差(error of measurement)，例如，整份測驗中若僅留一道加法試題，則此時「數字能力」就變成一個獨特因素，因爲其僅能影響一個觀察變項 (加法試題) ，當然，這個獨特因素扣除測量誤差後就是特定因素了。

以數學模式表示因素分析時，則某人於某一變項回答的觀察分數 (x_j) 可以以多個共

同因素分數 (common factor score, f_j) 與一個獨特因素分數 (unique factor score, u_j) 之線性組合表達，亦即：

$$\begin{aligned} x_j &= \mu_j + \lambda_{j1} f_1 + \lambda_{j2} f_2 + \cdots + \lambda_{j1} f_m + u_j \\ &= \mu_j + \lambda_{j1} f_1 + \lambda_{j2} f_2 + \cdots + \lambda_{j1} f_m + s_j + e_j \qquad j = 1, \cdots p \end{aligned} \tag{1}$$

其中，λ_{jk} 代表變項 j 於因素 k 上的因素負荷量 (factor loading) ，亦即變項與因素之間的相關程度，s_j 為特定因素 j 的因素分數，e_j 則為測量誤差項。

當上述單一變項擴展至測驗中所有 p 個變項時，則可以相對應的矩陣符號表示，

$$X = \mu + \Lambda F + U \tag{2}$$

其中 X 為 px1 的觀察變項矩陣，μ 為 px1 的變項平均數矩陣，Λ 為 pxm 的負荷量矩陣，F 為 mx1 的共同因素矩陣，而 U 則為 px1 的獨特因素矩陣。值得注意的是，共同因素矩陣 F 內的任一共同因素 f 與獨特因素矩陣 U 內的任一獨特因素 u，彼此互為獨立分配，亦即其間相關為 0；而且獨特因素矩陣 U 內的所有元素間也互不相關，換句話說，獨特因素間的共變矩陣為一個主軸矩陣，除了主軸上的元素外，共變矩陣內所有其餘元素皆為 0。

式 (2) 可進一步以共變矩陣的型式表示。將式 (2) 中的平均數矩陣左移，並在等號兩邊取各自平方的期望值後，則可得因素分析的共變結構如 (3) 式：

$$\sum\nolimits_{XX} = \Lambda \Phi_F \Lambda' + D_\psi \tag{3}$$

其中，Σ_{xx} 代表觀察變項的共變矩陣，Λ 代表共同因素負荷量矩陣，Φ_F 代表共同因素的共變矩陣，D_ψ 則代表獨特因素矩陣。由式 (3) 可看出，觀察變項的變異量與共變量 (Σ_{xx}) ，是共同因素負荷量 (Λ) 、共同因素的變異量與共變量 (Φ_F) 、以及獨特變異量 (D_ψ) 的函數。值得注意的是，在嚴格的因素分析中，Φ_F 共變矩陣中的共變量存在關係，

可能隱含著共同因素間彼此的交互關係，但在實際應用上，這共同因素的共變矩陣 Φ_F 可被假定爲一個正交 (orthogonal) 的單位矩陣 (彼此無關) ，以利應用於共同因素分析的相關矩陣型式中 (MacCallum, 1999) 。此將以共變矩陣型式表達的共同因素分析轉變爲以相關矩陣型式表達的過程是有其必要性的，因爲在共變矩陣中，各個觀察變項的量度 (scales) 單位可能不同，以致可能造成不同單位間無法比較的困擾，爲方便起見，可將尺度標準化，亦即透過觀察變項變異數倒數平方根所形成的主軸矩陣，可將原始觀察變項的共變矩陣轉換成相關矩陣。在轉換之後，共同因素負荷量 (Λ) 與獨特變異量 (D_ψ) 的組合就會近似於樣本的相關矩陣 (R) ，亦即

$$R \approx \Lambda\Lambda' + D_\psi \text{ ，} \tag{4}$$

在移項扣除獨特因素後，式 (5) 就成了著名的縮減式相關矩陣 (reduced correlation matrix) ：

$$(R - D_\psi) \approx \Lambda\Lambda' \text{ ，} \tag{5}$$

亦即從樣本的相關矩陣扣除獨特因素後會在縮減式相關矩陣的主軸上留下共同性 (communities) 。當然，只有在獨特變異量得到估計時 ($\hat{D}_\psi$) ，或在共同性 ($R - \hat{D}_\psi$) 獲得估計時，共同因素的負荷量才得到估計，至於共同性的估計程序，將於第四節說明。因此，根據式 (5) ，我們需要利用統計的估計方法，估量共同因素的負荷量値，譬如利用最小平方法 (least squares) ，我們希望能找到所對應的共同因素負荷量矩陣 ($\hat{\Lambda}$) ，使得以樣本相關矩陣扣去共同因素變異量與獨特因素變異量後所得到的殘差矩陣平方和 (residual sum of squares, RSS = $(R - \hat{D}_\psi - \hat{\Lambda}\hat{\Lambda}')^2$) 達到最小。

值得注意的是，式 (5) 中的縮減式相關矩陣 $(R - D_\psi)$ 爲一個對稱矩陣 (symmetric matrix) ，根據矩陣的運算法則，其可被定義爲特徵値由大至小排列的特徵値主軸矩陣

(diagonal matrix of eigenvalues, G) 與相對應的標準化正交特徵向量矩陣 (standardized orthogonal matrix of eigenvectors, V) 的乘積，亦即

$$(R-D_{\psi})=VG_{l}V' \text{，} \tag{6}$$

比較式 (5) 與式 (6) ，可得

$$\Lambda = VG_{l}^{1/2} \text{，} \tag{7}$$

亦即共同因素負荷量矩陣中每一向量等於特徵向量與相對應特徵值平方根的乘積，循此定義的共同因素負荷量矩陣，能使殘差矩陣平方和達到最小，這就是以特徵值-特徵向量方法用來獲得共同因素負荷量矩陣的重要方程式。

三、主成份分析的原理

另一方面，主成份分析法 (Principal Component Analysis) 是一種廣爲應用但卻易與共同因素分析相混淆的統計程序，其主要目的在於企圖找出一群互不相關的少數變項組合以解釋原始資料所含的最大訊息 (Dunteman, 1994) ，這個源於 1901 年 Karl Pearson 的原始概念，後來經由 Hotelling 獨自發展而成（Dunteman, 1994）。主成份分析與因素分析的數學模式非常相似，觀察分數（x_j）可以以多個成份分數（z_j）構成一條線性組合，亦即:

$$x_j = \mu_j + \lambda_{j1}z_1 + \lambda_{j2}z_2 + \cdots + \lambda_{j1}z_m + e_j \qquad j = 1,\cdots p \tag{8}$$

其中，λ_{jk} 與因素分析中的定義相同，代表變項 j 於成份 k 上的負荷量，e_j 則爲誤差項。以相對應的矩陣符號表示，則上式可表爲：

$$X = \mu + \Lambda Z \tag{9}$$

其中 X、μ 、與 Λ 的定義與因素分析中的定義相同，不同的是 Z 爲 mx1 的成份分數矩陣，其爲一個完整部分，並沒有共同因素部分與獨特因素部分的區別。式 (7) 也可看成係以自變項的成份分數 (Z) 來預測可觀察依變項 (X) 的迴歸方程式。類似於因素分析的推理，可得主成份分析的共變結構如式(8)所示：

$$\sum_{XX} = \Lambda \Phi_C \Lambda' \tag{10}$$

其中，Φ_C 爲主成份的共變矩陣。同樣透過樣本相關矩陣 (R) 的應用，式 (8) 可轉變爲

$$R \approx \Lambda\Lambda' 。\tag{11}$$

由於主成份可看成類似複迴歸分析中用來預測觀察變項的預測項目 (predictors) ，因此解釋觀察變異量的相對比例便成爲主成份分析的主要關注焦點。主成份分析的目的並未如共同因素分析在解殘差矩陣的最小值，而是在求得迴歸預測方程式中線性組合的最大變異 (Dunteman, 1994) 。故當以所求得主成份與觀察變項間相關的平方和，或稱複相關平方 (squared multiple correlations, SMC) ，作爲解釋觀察變項總變異的百分比時，我們希望能進一步求得相對應的主成份負荷量矩陣 ($\hat{\Lambda}$) ，使得所有 p 個觀察變項之複相關平方的平均值 (average of squared multiple correlations, $ASMC = \sum_{j=1}^{p} r^2(x_j \cdot z_1, z_2, \cdots, z_m) \big/ p$) 達到最大。循此觀點，可知主成份分析的目的在於求得可解釋最大觀察值變異量的主成份分數矩陣，值得注意的是這彼此不相關的主成份可以解釋原始資料所含的最大訊息量。

此外，MacCallum (1999) 也指出主成份分析具有幾項特徵： (1) 主成份分析並無假定

誤差項是獨立的，意即不同誤差項間可能有關聯存在； (2) 成份分數 z 非潛在變項，其僅是觀察變項間的線性組合； (3) 主成份分析所定義的成份分數是爲了盡可能地保留觀察變項的訊息，因而誤差項的最小化將有助於解釋最大的變異量，亦即主成份分析非常適合用於資料縮減的用途；(4) 成份彼此間互不相關。而這互不相關的成份特性正如傅萃馨 (2002) 所提，雖然如此可使主成份分析「具幾何上…與統計上的正交特性」(p.109) ，但卻無法有效地解釋觀察變項間的交互關係，這是主成份分析假定上的限制。

四、共同因素分析與主成份分析的學理比較

因素分析的共同因素是由觀察變項間的共變（或相關）結構所界定出的潛在構念，也因此共同因素分析的主要目的在於探索隱涵於觀察變項間的相關結構，這與以資料縮減爲目的的主成份分析法不同，資料縮減係企圖以少數的組合變項盡可能地表達出一大群觀察變項所形成的訊息，使受試者於這些組合變項（或稱成份）上顯出最大的變異來 (林清山，1988) ，因而主成份分析中，成份僅是觀察變項間的分數組合，稱不上是潛在的因素或構念。事實上，有些學者甚至主張主成份分析根本不是一種因素分析模式 (Fabrigar, Wegener, MacCallum, & Stranhan, 1999) ，而僅是一種重複的資料縮減系統 (Steiger, 1990) 。本節將針對共同性 (communality) 、估計特徵值與相對應特徵矩陣所使用的矩陣、以及因素分數的未定性 (indeterminacy) 說明以下：

（一）共同性（communality）

共同性的估計對共同因素分析與主成份分析的區別是一個重要的議題。所謂共同性係指某一觀察變項與其他觀察變項所分享的變異量比值 (Hair, et al., 1998) ，共同性越高代表某一變項與其他變項間分享越多的共同特質，對共同因素的形成便越可能達到。此間僅共同因素分析法的進行需要運用到共同性的估計，而主成份分析，因其不包含共同性，故無共同性估計之程序。在共同因素分析的估計方法中較常見的有三種（林清山，1988；MacCallum, 1999):

1.複相關平方法（squared multiple correlation, SMC）：

Guttman (1940) 在其共同因素分析文章中曾證明母群中第 j 個觀察變項在其他 (p-1) 個觀察變項上的複相關平方和爲第 j 個共同性（h_{jj}）的下限值 (引自 MacCallum, 1999) ，而在母群相關矩陣未知的情形下，實際的作法可以樣本相關矩陣 (R) 表示如下：

$$r^2(x_j.x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots x_p) = 1 - 1/r^{jj} \le h_{jj} \tag{12}$$

其中r^{jj}爲樣本相關逆矩陣（R^{-1}）主軸上的第 j 個元素，此元素倒數的補數值，可作爲所估計的共同性值，亦即$h_{jj} = 1 - 1/r^{jj}$ 。

2.分割法（partitioning method）：

這個方法要求觀察變項的個數 (p) 必須至少大於 2 倍的萃取因數個數 (m) ，其程序是從實際樣本相關矩陣（R_{pxp}）中選取 3 個觀察變項的子集合，第 1 個子集合僅包含被計算共同性的對應觀察變項 j，第 2 個與第 3 個子集合則各包含 m 個不同的觀察變項，例如欲從 5 個觀察變項萃取 2 個因數，則第 1 個子集合包含了所要計算共同性的對應觀察變項，而第 2 個與第 3 個子集合則各包含 2 個不同變項。此時若將子集合當成一個新的變項看待，則原先 p x p 的樣本相關矩陣便可視爲一個 3 x 3 新變項的矩陣，計算與第 1 個子集合互有牽連的相關矩陣（ρ_{21} 、 ρ_{31}）以及無牽連相關逆矩陣（R_{23}^{-1}）的乘積（亦即 $h_{11} = \rho'_{21}R_{23}^{-1}\rho_{31}$），可以作爲第 j 個變項的共同性估計值。

3.共同性的迭代解法（iterative method）：

這個方法係將前述兩種方法 (複相關平方法或分割法) 所求得的第一次共同值，以迭代方式進行求解，直至收斂爲止。亦即以所求得的第一次共同值取代原來樣本相關矩陣 R 主軸上的元素，如此可得縮減的相關矩陣$(R - \hat{D}_{\psi})$，之後估計最適配的共同因素負荷量矩陣$\hat{\Lambda}$，而透過共同因素負荷量矩陣內「列」的平方和（$\hat{h}_{jj} = \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_{ji}^2,\quad j = 1, \cdots, p$），可得第 j 個觀察變項與其他觀察變項所分享的變異量百分比，此即新的共同性估計值；再一

次將此新估計的共同性插入樣本相關矩陣 R 的主軸，計算縮減相關矩陣，估計共同因素負荷量矩陣，得到新的共同性估計值，如此重複估計，直到連續迭代所產生之共同性間的差異可忽略爲止。

（二）應用矩陣

就特徵值以及相對應特徵矩陣的估計程序而言，共同因素分析與主成份分析所使用的矩陣是不相同的。因素分析法因使用扣除獨特因素後所剩的縮減相關矩陣，故該矩陣主軸上的元素就爲變項的共同性所取代，其值通常小於 1；相對來說，主成份分析模式因無獨特因素的假設，其所使用的相關矩陣就是實際樣本的相關矩陣，因而其主軸上的元素皆爲 1。此外，針對相關矩陣的再製 (replication) 問題，因素分析法並不須如主成份分析法須使用全部的成份才能複製出原來的相關矩陣，而是僅須部份的共同因素即可複製成出原來近似的相關矩陣（林清山，1988；傅萃馨，2002；MacCallum, 1999）。

（三）因素分數的未定性（indeterminacy）

最後就理論上而言，共同因素分析並無法決定單一的因素分數 (factor score) ，這是因爲共同因素與獨特因素皆爲潛在因素，因此要以 p 個觀察變項決定 (m+p) 個潛在變項 (m 個共個因素與 p 個獨特因素，m<p) 是有困難的，此即因素分數的未定性 (indeterminacy) 問題；相對地，主成份分析就沒有這個問題，這是因爲其不須估計額外的獨特因素，因而可以 p 個觀察變項來決定唯一的一組 p 個成份分數 (component score) 組合。但如同 Fabrigar 等（1999）所指，因素分數並無關於觀察變項間相關結構共同因素的界定，其只是一個額外的選擇，例如在獲得受試者的因素分數之後，可將因數分數當成自變項或依變項而進行多變量分析或複迴歸分析等分析；所以，因素分數對共同因素分析而言並不構成問題；甚者，隨著結構方程模式（structural equation modeling, SEM）的發展，研究者甚至不須估計因素分數也能獲得這些相同的訊息 (Fabrigar et al., 1999）。

五、共同因素分析與主成份分析的實徵研究比較

從上述的學理比較分析中可知，共同因素分析與主成份分析在學理上是有所差異的，

縱使如此，在大多數實徵上的應用上卻依然經常出現混淆。Velicer 與 Jackson (1990a, 1990b) 曾提出四個贊同主成份分析可以取代共同因素分析甚至比共同因素分析表現更好的實徵理由，此論點增加了共同因素分析與主成份分析在使用選擇上的困難程度。這四個理由包括 (一) 運算省時有效率；(二) 兩者實徵結果相似；(三) 兩者差異僅出現在萃取太多的因素或成份之時；(四) 共同因素分析會出現變項共同性等於或大於 1 的 Heywood 案例，而主成份分析不會。

針對運算省時有效率的理由，有不少研究分別對此提出質疑 (Gorsuch,1990; MacCallum, 1999)，認為運算省時以及佔較少的電腦記憶空間，對現代科技而言不能再稱為重大的優點；而針對共同因素分析與主成份分析實徵結果相似情況的理由而言，Bentler 與 Kano (1990) 以數學推理證明主成份分析僅是共同因素分析的一個特例，只有當觀察變項數目 (p) 很大且所萃取的因素或成份 (m) 相對很小 (m<<p) 時，主成份分析會等於共同因素分析；而較早的研究 (Gorsuch,1983) 也支持這項觀點，認為只有當共同性高且變項數目超過 30 時，主成份分析與共同因素分析結果才會相同。

另外，針對兩種方法在實徵上的差異部分而言，根據 Snock 與 Gorsuch (1989) 的虛擬研究發現，共同因素分析與主成份分析的差異並不在於出現萃取太多的因素或成份，而在於變項數目的大小的不同，共同因素分析與主成份分析的差異會隨著變項數目的增加而減少；此外，Snock 與 Gorsuch (1989) 也發現共同因素分析所形成的負荷量對照於母群的負荷量而言並無偏差 (biased) 的情形發生，亦即其期望值會等於母群的真實負荷量，且這負荷量比主成份分析所估計的負荷量具更小的標準誤，此意味著共同因素分析所估計的負荷量比主成份分析所估計的負荷量更具精確性；然而，另一方面，主成份分析的負荷量則會出現系統性的膨脹 (inflated) 現象，亦即主成份分析所估得的負荷量會顯著高於母群的負荷量，甚至在高達 36 個變項且負荷量達 0.8 的情況依然如此。而 Snock 與 Gorsuch (1989) 的論點也得到 Widaman (1993) 的證實，在 Widaman 重複研究的結果中發現，主成份分析與共同因素分析結果會因低共同性 (約 0.4) 以及觀察變項與因素 (成份) 低比值 (約 3 : 1) 而產生明顯的差異。

由此可知，實徵上所出現主成份分析與共同因素分析相似的情況係僅發生在當變項具高度共同性，或是變項的數目相較於所萃取因素 (或成份) 的數目頗大之時；然而，在本質上，甚至其他條件的操弄下，共同因素分析與主成份分析確實是不同的。

至於 Heywood 案例係表示某些參數的估計不甚合理，例如所估計的共同性大於 1 或變異數的估計值爲負值的情況，McArdle (1990) 認爲 Heywood 案例的產生可能來自三方面：(1) 構成一個因素的指標少於三個；(2) 因素分數的實徵性質爲非線性關係；(3) 上述兩種問題或其他問題的組合。此外，Van Driel (1978) 也指出，Heywood 案例也可能是因爲與資料適配 (fit) 的模式誤定 (misspecified) 所產生，或違反共同因素分析的假定所造成的。雖然 Heywood 案例較難修正，但卻也提供資料診斷上的價值，研究者可透過 Heywood 案例的檢查，進而排除問題的個案資料，對整體資料分析程序而言，應屬正面意涵；相對來說，主成份分析雖然沒有 Heywood 案例問題，卻也忽略了某些有用的訊息 (Fabrigar et al., 1999) ，一失一得之間，共同因素分析特有的 Heywood 案例不見得是不好的現象。

此外，共同因素分析另外一項優於主成份分析的地方是其可考驗 (testable) 的性質 (Bentler & Kano, 1990; McArdle, 1990; MacCallum, 1999) ，這個性質可提供因素分析模式對資料適配度的考驗，不佳的適配度代表因素分析所建立的模式並不適合觀察資料所隱含的相關結構，因而可能拒絕該因素模式的設定；但主成份分析並無提供如此的決策機會，以致模式是否適合觀察資料無從得知。

最後，關於共同因素分析與主成份分析在驗證性因素分析 (confirmatory factor analysis, CFA) 上的應用，也有些差異須特別注意。雖然主成份分析與共同因素分析的目的皆較屬探索式 (exploratory) 的性質，亦即研究者並不事先界定共同因素 (或成份) 的數目，也沒有針對特定路徑設定特別的負荷量數值 (例如 0) ，而是任由探索的結果來決定，但這兩種分析於驗證性因素分析的應用上卻呈現適當與不適當之別。驗證性因素分析係指研究者依先前的特定理論，提出關於因素數目與本質 (特別的負荷量數值) 之假設模式且經過肯定證實的複驗過程而言。共同因素分析於探索性分析中可得到共同因素之間相關結構，此結構模式可作爲共同因素關係間的理論基礎，並可進一步於驗證性分析得到考驗；但主成份

分析於探索過程中所得的結果，稱不上是一種模式，因爲主成份分析所得的成份不是一種潛在的特質或概念，而僅是資料模式縮減的表徵，就此而言，主成份分析實不應進一步應用於驗證性因素分析之上。

六、萃取程序的比較

共同因素分析與主成份分析各有不同萃取因素 (或成份) 的程序，這萃取程序關係著所萃取因素 (或成份) 的適當性，不同的萃取程序所估計的因素 (或成份) 的負荷量與所萃取因素 (或成份) 的數目可能有所差異。茲將共同因素分析與主成份分析各自主要的萃取程序分述如下：

（一）共同因素分析模式

共同因素分析中因素萃取所使用於的實際程序，最主要有四種 (Kim & Mueller, 1994；MacCallum, 1999；Warmbrod, 2000) ：主軸因素法 (principal axis factoring procedure) 、最小平方法 (least squares approach) 、最大概似法 (maximum likelihood procedure) 、以及 Alpha 因素法 (alpha factoring procedure) ，簡略說明如下：

1. 主軸因素法 (principal axis factoring procedure) ：

在共同因素分析過程中，主軸因素法係將共同性置於相關矩陣的主軸上 (即縮減的相關矩陣) 之後，再採取與主成份分析相同的特徵值方程式求解，因與主成份分析採取一樣的變異數分解策略，在最大共同因素萃取之後，找出能解釋所剩餘最大變異量的第二個共同因素，之後，以同樣方法求得第三個共同因素，依此類推，直至所有因素都萃取出來爲止，故而名爲「主軸因素法」。

2. 最小平方法 (least squares approach) ：

最小平方法的目的在於將因素抽取後所剩的殘差矩陣最小化，最常使用的方法包括兩種 (MacCallum, 1999) ：先估共同值的主因素法 (principal factors with prior communality estimates) 以及迭代主因子法 (iterative principal factors) 。先估共同值的主因素法所使用的

程序如下： (1) 將從複相關平方法 (SMC) 或分割法中所得的第一個共同性估計值取代原觀察矩陣的主軸而形成樣本縮減相關矩陣， (2) 估計殘差矩陣最小平方成立時的解。

至於迭代主因子法，或稱普通最小平方法 (ordinary least squares, OLS) 的使用程序，與共同性的迭代解法相同，在完成先估共同值的主因素法中的兩個程序之後 (此時因素負荷量矩陣已解) ，從第一次所得的因素負荷量矩陣 (不是原來的觀察矩陣) 中重新計算共同性 (矩陣中列的平方和) ，並將所得的共同性取代原觀察矩陣的主軸而形成一個新的樣本縮減相關矩陣，再回到第 (2) 程序，直到共同性收斂爲止。此法甚具強韌性 (robustness) ，甚至當樣本相關矩陣爲非正定 (nonpositive definite) ，亦即所估計的相關值超出正負 1 的範圍時，依然可得到收斂值。

3. 最大概似法 (maximum likelihood procedure) ：

最常見的最大概似法程序是出現在 1950 年代 Bargmann 未發表博士論文中的 Howe 想法，後來經 *Jörskog* 1967 年的文章發表後即廣爲流傳 (MacCallum, 1999) ，其需要有變項的常態分配假定 (最小平方法並沒有關於觀察變項分配的要求) ，最大概似法的主要概念是找出可以使樣本共變矩陣與母群共變矩陣所構成的概似函數 (likelihood function) 達最大化的解，這過程並不需要估計共同性，而是找出具最大可能產生樣本共變矩陣的母群參數，這參數包括因素負荷量與獨特因素變異量。

雖然最大概似法需要變項常態的假定，但這也使得最大概似法可以提供適配度的考驗 (test of fit) 以及信賴區間 (confidence interval) 的估計 (MacCallum, 1999) 。適配度的考驗可以使研究者知道因素模式與所收集資料間的符應程度，而對某些適配度測量；例如 RMSEA, (Browne & Cudeck, 1992) 的信賴區間估計，更能對模式與資料之間的符應程度作深入的了解;但其缺點是最大概似法常常因爲樣本相關矩陣的非正定關係而得不到收斂值。

4. Alpha 因素法 (Alpha factoring procedure) ：

Alpha 因素法不同於最大概似法及最小平方法主要之處在於所注重推論主體的差異。最大概似法及最小平方法都是假定「樣本 (個人) 」係隨機取樣自母群，在獲得有關樣本

的統計量數之後，以樣本的特性推論母體的性質；Alpha 因素法比較側重心理計量的觀點，亦即所要推論的主體不再是「樣本 (個人) 」，而是以「變項」爲主。Alpha 因素法的主要目的是要找到能產生與「樣本變項因素分數」達到最大相關之「母群變項因素分數」的解，因以特徵值大於 1 作爲因素數目決定的規準，其相當於以「可推論性係數」 (generalizability coefficient, α) 大於 0 作爲樣本變項可推論至母群變項的規準，故稱爲 Alpha 因素法 (林清山，1988；Kim & Mueller, 1994) 。

除此之外，統計軟體 SPSS 10.0 版尚提供三種共同因素萃取方法：一般化最小平方法 (generalized least squares) 、加權最小平方法 (weighted least squares) 、以及映像因數分析法 (image factoring) 。前兩者屬於最小平方法家族，是普通最小平方法的一般化與加權型；而後者則類似下面要介紹成份分析模式中的映像成份分析法 (image component analysis) ，差異所在即在於分析主體是因素或成份。

（二）成份分析模式

成份分析模式中包含兩種萃取成份的方法 (Widaman, 1993) ：主成份分析法與映像成份分析法 (image component analysis)，約略說明如下：

1. 主成份分析法 (principal component analysis)

主成份分析是成份分析模式中最常被使用的方法，其成份萃取的程序主要是藉原始觀察變項的線性組合 (主要成份) 來將所形成的變異總數進行分割 (Warmbrod, 2000) 。第一步作法是將解釋最大總變異量的成份 (原始觀察變項的線性組合) 找出來，當成第一主成份 (first principal component)；之後，扣除第一主成份所解釋的變異量，找出與第一主成份互不相關且能解釋所剩餘之最大變異量的第二主成份；依此類推，直至所有主成份皆已萃取出來爲止。值得注意的是，主成份之間是互不相關的，且前一主成份所解釋的變異量會顯著高於後續萃取出之主成份所解釋的變異量，因此少數前幾個主成份便已解釋了大部分的總變異數。

2. 映像成份分析法（image component analysis）

映像成份分析法則兼採「樣本」與「變項」的推論，亦即假定樣本 (個人) 的特性可以推論至母體的性質，且樣本變項可推論至母群的變項。理論上，映像分析法將變項分解成共同部分與獨特部分，其中映像分析法假定共同部分是可預測，而獨特部分是不可預測的；共同部分因可以變項的線性組合加以預測，故稱爲變項的「映像」 (image) 部分，若將某變項的「映像」平方，則可得該變項的共同性；獨特部分因不可預測，故稱爲變項的「反映像」 (anti-image) 部分，將其平方則可得變項的獨特變異量。然而，實際的算法是以樣本的「部分映像」 (partial images) 與「部分反映像」 (partial anti-images) 進行成份負荷量矩陣的估計。應特別注意的是，這些部分映像完全係以觀察變項加以界定，而非如共同因素分析中是以潛在因素的線性組合作爲變項的共同部分，其萃取的程序主要可分爲兩個階段 (1) 將從複相關平方法 (SMC) 所得的共同性估計值取代原觀察矩陣的主軸而形成樣本縮減相關矩陣；(2) 透過重新調整非主軸元素以形成 Granmian 矩陣 (特徵值皆大於或等於 0 的對稱矩陣) 來解特徵方程式 (Kim & Mueller, 1994)。由此觀之，映像成份分析法比較像是綜合共同因素分析與主成份分析的萃取過程。

七、應用與解釋上的差異

最後，在實務的應用上，採用主成份分析法的實徵研究似乎高於因素分析法的採用，究其原因，主要是統計軟體經常以主成份分析法作爲因素萃取的預設方法 (傅萃馨，2002；Fabrigar et al., 1999) 。而在使用的時機上，主成份分析法適合用於大量資料的縮減，研究者企圖以少數的成份解釋變項所傳達的大部分訊息，這個作法的目的在於以最少的變項涵括最大的訊息量，以達到簡約的 (parsimonious) 效果，這頗符合研究經濟的效率。至於共同因素分析目的在則找出蘊藏於觀察變項之間的潛在構念，這潛在構念涉及觀察變項間的相關結構系統，若研究者可以找到最能描述這潛在構念的簡約有效模式，則變項所傳達的整體關係意涵，將可透過所建構的因素模式得到檢視。因此，在使用的時機上，當研究者試圖找出觀察變項間的潛在構念，而非僅是要將資料縮減時，共同因素分析是非常適當的

選擇。

另外在分析結果的解釋上，主成份分析係以所萃取的成份來解釋觀察變項的總變異量，而共同因素分析則是以所萃取的潛在因素來解釋觀察變項間的共同變異量；因此，從總變異與共同變異的觀點來看，主成份分析所解釋的變異量事實上還包括獨特變異量在內。有很多實徵的研究常以所解釋觀察變項的變異量佔總變異量的百分比作爲測驗或量表構念效度 (construct validity) 的指標，事實上這與構念效度的基本概念有所出入。構念效度係指測驗能夠測量到理論上構念的程度 (Anastasi, 1988) ，此理論上構念具潛在不可觀察的特性，代表觀察變項所具有的共同特質，測驗能夠測量到這個共同特質的程度越高，才代表構念效度越高。循此觀點，以共同因素分析所萃取共同變異量佔總變異量的比例作爲構念效度的指標才是適當的選擇。

八、結　論

綜合上述的文獻比較分析，筆者分就共同因素分析與主成份分析的相同部份、相異之處、以及後者近似於前者時的條件，整理於表一如下：

表一

共同因素分析與主成份分析的比較

	比較內容	共同因素分析	主成份分析
I、相同部份			
	1. 分析本質	兩者皆爲探索式性質	
	2. 追求效果	兩者皆爲追求簡約效果	
II、相異部份			
目的本質	1. 關鍵名詞	因素	主成份
	2. 代表意涵	不可觀察的潛在構念	可觀察的線性組合變量
	3. 概念源起	Charles Spearman, 1904 年	Karl Pearson, 1901 年
	4. 理論發展	L. L. Thurstone, 1947 年	H. Hotelling, 1933 年
	5. 分析目的	因素萃取	資料縮減
	6. 著重焦點	探索觀察變項間的相關結構	解釋觀察變項的最大變異量

理論比較	1. 數學模式	分割共同因素與獨特因素	無共同成份與獨特成份之分
	2. 誤差項假定	獨立	無獨立假定
	3. 因素(成份)分數性質	爲潛在構念	爲觀察變項的迴歸預測項目
	4. 因素(成份)間關係	彼此相關	彼此獨立
	5. 共同性的估計	SMC 法、分割法、迭代法	無共同性的假定
	6. 相關矩陣的使用	縮減式相關矩陣	完整的相關矩陣
	7. 相關矩陣的複製	使用部分的共同因素	使用全部的成份
	8. 因素(成份)的唯一性	因素的唯一性未定	可決定成份的唯一性
實徵比較	1. 運算效率	較費時	較省時
	2. 與母群負荷量比較	無偏誤情況發生	系統性地高估母群的負荷量
	3. 負荷量精確性	較高	較低
	4. Heywood 案例	可能發生	沒有
應用比較	1. 考驗性	具考驗性	不具考驗性
	2. 應用於多變量分析	較不適合	較適合
	3. 應用於驗證式因素	較適合	較不適合
	4. 效度解釋的適當性	適當	不適當
	5. 萃取程序的比較	主軸因素法、最小平方法、一般化(加權)最小平方法、最大概似法、Alpha 因素法、映像因數分析法	主成份分析法、映像成份分析法

III、<u>主成份分析相似於共同因素分析的條件</u>

1. 觀察變項與因素 (成份) 數目的高度比值
2. 觀察變項間的高度共同性

九、結語

本文主要藉文獻的考徵，說明共同因素分析與主成份分析之間的差異，從因素與成份與數學模式開始，以共同性的估計、所使用的矩陣、以及因素 (成份) 分數說明其學理觀點的不同，再從實徵文獻探討其間差異，最後以實際萃取的程序及應用解釋上的差異討論作結尾。正如 McArdle (1990) 所揭示共同因素分析與主成份分析選擇的決定原則，這些差異不但說明了共同因素分析是主成份分析的初始概念，且前者在數學與統計的立論基礎上優於後者；所以，當不知如何抉擇這兩種方法或這兩種方法所產生的結果有差異時，選擇

共同因素分析將是比較安全的決定。

當然，共同因素分析與主成份分析之間的議題除了這些差異的觀點之外，尚包括這兩種方法所會遇到的共同問題，例如樣本大小與變項個數、萃取因素 (或成份) 數目以及轉軸方法等，而這些議題都是研究過程中作成共同因素分析或主成份分析決定之前或之後所必須考量的共同關鍵點，有待後續研究之探討。

參考文獻

林清山 (1987)。ALPHA 因素分析理論、統計方法和實徵性研究。**測驗年刊，34**, 159-174。

林清山 (1988)。**多變項分析統計法**。臺北：東華。

翁儷禎 (1995)。因素分析應用之一覽。載於章英華、傅仰止和瞿海源編，**社會調查與分析**，245-259。臺北：中央研究院民族學研究所。

傅萃馨 (2002)。主成份分析和共同因素分析相關議題之探究。**教育與社會研究，1** (3)，107-132。

Anastasi, A. (1988). *Psychological testing* (6th ed.). NY: Macmillian.

Bentler, P. M., & Kano, Y. (1990). On the equivalence of factors and components. *Multivariate Behavior Research, 25* **(**1), 67-74.

Browne, M. W., & Cudeck, R. (1992). Alternative ways of assessing model fit. *Sociological Methods and Research, 21,* 230-258.

Dunteman, G. H. (1994). Principal component analysis. In M. S. Lewis-Beck (Eds.), *Factor analysis and related techniques* (pp. 157-245). Sara Miller McCune, CA: Sage Publications, Inc.

Fabrigar, L. R., Wegener, D. T., MacCallum, R. C., & Stranhan, E. J. (1999). Evaluating the use of exploratory factor analysis in psychological research. *Psychology Methods, 4* (3), 272-299.

Gorsuch, R. L. (1983). *Factor analysis* (2nd ed.). Hilsdale, NJ: Erlbaum.

Gorsuch, R. L. (1990). Common factor analysis versus component analysis: Some well and little known facts. *Multivariate Behavior Research, 25* **(**1), 33-39.

Hair, J. F., Anderson, R. E., Tathan, R.L., & Black, W.C. (1998). *Multivariate data analysis.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Kim, J. O., & Mueller, C.W. (1994). Factor analysis: Statistical method and practical issues. In M.

S. Lewis-Beck (Eds.), *Factor analysis and related techniques* (pp. 75-155). Sara Miller McCune, CA: Sage Publications, Inc.

MacCallum, R. C. (1999). *Psychology 820 course packet.* OH: The Ohio State University Press.

McArdle, J. J. (1990). Principles versus principals of structural factor analyses. *Multivariate Behavior Research, 25* **(**1), 81-87.

Snock, S. C., & Gorsuch, R. L. (1989). Component analysis versus common factor analysis: A Monte Carlo study. *Psychological Bulletin, 106* (1), 148-154.

Steiger, J. H. (1990). Some additional thoughts on components, factors, and factor indeterminacy. *Multivariate Behavioral Research, 25* (1), 41-45.

Tucker, L. R., & MacCallum, R. C. (1997). *Exploratory factor analysis*. Retrieved April 15, 2000, from The Ohio State University, Department of Psychology Web Site: http://quantrm2.psy.ohio-state.edu/maccallum/

Van Driel, O. P. (1978). On various causes of improper solutions in maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika, 43,* 225-243.

Velicer, W. F., & Jackson, D. N. (1990a). Component analysis versus common factor analysis: Some issues in selecting an appropriate procedure. *Multivariate Behavior Research, 25* **(**1), 1-28.

Velicer, W. F., & Jackson, D. N. (1990b). Component analysis versus common factor analysis: Some further observations. *Multivariate Behavior Research, 25* **(**1), 97-114.

Velicer, W. F., Peacock, A. C., & Jackson, D. N. (1982). A comparison of component and factor patterns: A Monte Carlo approach. Multivariate Behavior Research, 17, 371-388.

Warmbrod, J. R. (2000) . *Agricultural Education 995 course packet.* OH: The Ohio State University Press.

Widamam, K. F. (1993). Common factor analysis versus principal component analysis: Differential bias in representing model parameters? *Multivariate Behavior Research, 28* **(**3), 263-311.

初稿收件：民 90 年 6 月 26 日
修改完成：民 92 年 10 月 29 日
正式接受：民 92 年 10 月 30 日

Comparisons between Common Factor Analysis and Principal Component Analysis

Tsai-Wei Huang

Abstract

The main purpose of this article was to explore the differences between common factor analysis (CFA) and principal component analysis (PCA) through literature reviews. Seven topics were discussed: (1) Factor or Component? (2) Rationales of CFA; (3) Rationales of PCA; (4) Comparisons of rationales between CFA and PCA; (5) Comparisons of empiric evidence between CFA and PCA; (6) Comparisons of abstracting procedures between CFA and PCA; (7) Comparisons of applications and interpretations between CFA and PCA. At the end of this article, a final comparison table, including the sameness, the differences, and the conditions of similarity between CFA and PCA was exhibited.

Keywords: Factor, Common Factor Analysis, Communality, Component, Principal Component Analysis, Abstracting procedures, Reduced Correlation Matrix.