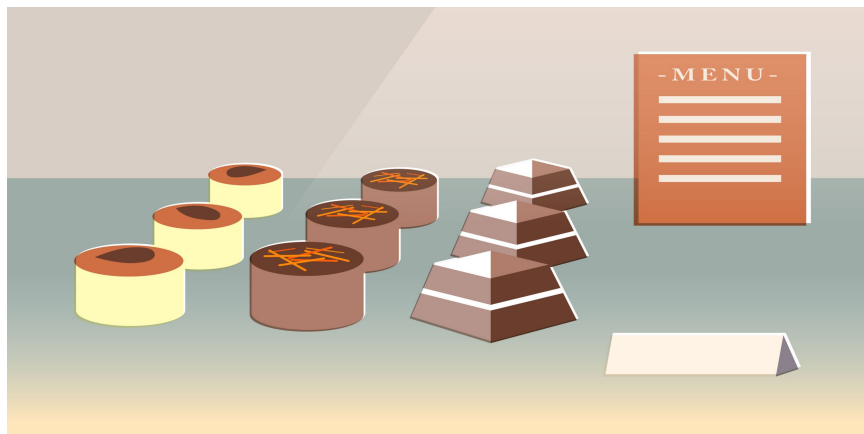


了解數學問題有效教學策略探究

吳育吟* 李心儀**



摘要

本文透過學生解決數學問題的例子探究了解數學問題有效教學策略，期能增進教師進行了解數學問題有效教學的能力，進而提升學生的數學解題能力。

關鍵詞：了解問題、有效教學、數學解題

壹、前言

北宋教育家胡瑗曾言「致天下之治者在人才，成天下之才者在教化，教化之所本者在學校」，的確，學校是人才培育的重要場域，學校教師是人才教育的關鍵人物，如何培養教師的有效教學能力是今日競爭力時代所面臨的重要課題，誠如禮記學記篇所言「建國君民，教學為先」。

十二年國民基本教育是近年來重要的教育政策，不僅強調提升中小學教育品質與成就每一個孩子的願景，同時重視確保學生學力品質的推動目標，文獻指出教師是學生學習的最重要影響因素之一（Darling-Hammond, 2000），增進教師的教學專業能力有助於提升學生的學習成效，因此，教師的有效教學能力更顯重要。數學是許多學生恐懼的學科之一（林佳蓉、涂金堂，2000），尤其數學解題更牽涉複雜的心理歷程（Mayer, 1992, 1998），因此，增進教師進行數學解題有效教學的能力是提升學生數學解題能力與學校數學解題教學品質的核心元素。著名數學家與數學教育家Polya（1973）認為數學解題歷程包含四個階段：了解問題、訂定計畫、實施計畫、與回顧，若教師能了解並善用此四個階段的有效教學策略，將能提升數學解題有效教學能力，本文透過學生解題的實例探究在了解問題階段，教師進行有效教學的可行策略，期能協助教師實施了解數學問題有效教學。

貳、了解問題

Polya（1973）將數學解題歷程分為四個階段：了解問題、訂定計畫、實施計畫、與回顧，在了解問題階段，Polya認為解題者需要清楚地知道什麼是所要尋找的解答，以及了解問題裡存在的各個關係，例如：問題已知和未知為何？題目條件是什麼？在訂定計畫階段，解題者根據所掌握的問題訊息訂定解題計畫求解，實施計畫階段則是開始執行解題計畫，回顧階段為解題者回顧解答過程或答案等，本文主要探討

教師在了解問題階段可使用的有效教學策略。

在了解問題階段，Polya認為在進行數學解題時，解題者應先對數學問題有全面而完整的了解，也就是需要知道問題的目標與重點，大多數情形下會從掌握問題的主要部分－未知、已知和問題條件三方面著手，例如解題者可觀察該數學問題的已知是什麼？未知是什麼？問題條件是什麼？是否有可能滿足該問題的條件？該問題是否具備充分的條件求得未知？條件是否不充分？多餘？或矛盾？此外，Polya認為解題者亦可藉由圖示、引入適當的符號、與分解問題條件等來幫助了解數學問題。

當遇到較困難的數學問題，需要更仔細精巧的方法時，Polya提到可使用以下的方法來幫助解題者更全面了解數學問題：是否已使用所有的問題已知、分解與重組問題已知、回憶是否有其他具有相同或相似未知的數學問題、與從問題已知中尋找解題線索等，Polya認為當未能直接從問題已知求得未知時，解題者可以藉由引進一些可直接從問題已知中求得解答的新未知數來幫助求得原未知數，例如解題時可以思考是否能先解答原題中部分或與原題相關的問題，如此解題技巧在解比較複雜問題時可加以留意應用。

參、了解問題有效教學策略探究

以下敘述一位九年級學生了解二題二元一次聯立方程式的數學問題之情形，藉以探究教師進行了解問題有效教學之可能策略，期能增進教師有效協助學生了解問題之教學能力。



777甜點店近期研發出新口味的巧克力，為了宣傳新商品，將新口味巧克力與原本熱賣的巧克力混合裝成一精緻禮盒出售，每盒共有14顆巧克力，原價打9折後，一盒的售價為540元，請問：一盒中兩種口味的巧克力的數量差_____顆

以上數學問題具解答正確答案時不需要的多餘訊息，多餘訊息為海鹽、抹茶、覆盆莓口味的巧克力之售價，該生一開始因為看見許多題目訊息而無法快速地訂定解題計畫，但再次詳細閱讀問題後即發現原來問題未知僅為熱賣款和新款巧克力，而自動刪去其他多餘訊息，如下對話所示。

生：一開始數字這麼多啊，就看不太懂，後來我看題目他說有熱賣的跟新的，所以我就看這邊有熱賣的和新的

師：很厲害耶！

如上例，學生解此類問題時，可能會遭遇該生一開始面臨的問題：因題目多餘訊息的干擾而無法順利了解問題，教師在協助學生了解此類數學問題時，宜留意學生是否受到多餘訊息的干擾，並可藉由提問已知是什麼？未知是什麼？問題條件是什麼？問題條件是否不充分？多餘？或矛盾？等引導學生有效了解數學問題。以下呈現另一題二元一次聯立方程式的數學問題：

妹妹和哥哥都喜歡假日時到河堤運動，妹妹喜歡騎腳踏車，哥哥喜歡健走，河堤僅有一條筆直的運動路線，起點為甲地、終點為乙地。若哥哥已經先走了4公里，妹妹才穿好裝備，準備從甲地出發，妹妹出發20分鐘後，兩人同時到達乙地；若哥哥先走1小時後，妹妹才出發，

經過30分鐘妹妹追上哥哥，則甲、乙兩地的距離為_____公尺

以上數學問題包含複雜的訊息，該生從一開始閱讀問題到完整列出方程式共歷時11分鐘，該生閱讀問題3分鐘後才列出未知數，經過3分鐘後仍無法列出方程式，接著開始依照題目線索畫出圖示，該生仔細觀看畫出的圖示，再仔細閱讀問題後發現「題目都給他們兩個的」，因而找到未知數和已知數的關係，也就是已知僅有「哥哥和妹妹兩人皆從甲地出發最後到達乙地」與「哥哥和妹妹兩人走路的距離與所花的時間」，因欲求的未知是甲地到乙地的距離，因此透過「哥哥和妹妹兩人走路的距離與所花的時間」線索來解題，經過5分鐘後該生列出方程式。

如上例，學生解此類問題時，可能由於複雜的問題訊息而無法成功了解問題，教師在進行此類問題解題教學時，除了可透過已知是什麼？未知是什麼？問題條件是什麼？等提問外，亦可透過圖示幫助學生了解已知與未知的關係，以有效協助學生了解數學問題。

肆、結語

本文以二個學生解題的實例說明教師進行了解數學問題有效教學時可採用之策略：圖示與提問。著名數學家與數學教育家 Polya (1973) 提出藉由圖示與提問未知與已知的關係可增進學生了解數學問題。著名教育學者 Borich (2007, 2008) 認為善用圖示與提問可促進教師有效教學的進行，他認為圖示可幫助學生進一步徹底清楚了解所學，提問可引導學生思考並對所學發展更完整的理解。因此，教師在進行數學解題教學時，若能適時善用圖示與提問，將能增進了解數學問題有效教學的進行。

參考文獻

- 林佳蓉、涂金堂(2000)。如何協助學生解決數學應用問題。高雄市：高雄復文圖書出版社。
- Borich, G. D. (2007). *Effective teaching methods: research-based practice*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, Inc.
- Borich, G. D. (2008). *Observation skills for effective teaching*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, Inc.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition*. New York, NY: Freeman.
- Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science*, 26, 49-63.
- Polya, G. (1973). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Darling-Hammond, L. (2000). Teacher quality and student achievement: A review of state policy evidence. *Education Policy Analysis Archives*, 8(1), 1-44.

* 吳育吟，臺北市立大學教育學系碩士班

** 李心儀，臺北市立大學教育學系副教授(通訊作者)

電子郵件：sylee@utapei.edu.tw