

加法的應用(三)



Z. Usiskin
M. Bell

著
譯

周筱亭

教學法上的註解(上)

使用上的意義與其他類型的意義。使用上的意義係指賦予某一運算的某一種意義。(請見本章「註解與評論」中的第五項)。在算術的應用上較機靈的人知道各種運算的許多意義，所以，只強調使用上的意義的教學必然如同目前忽略了使用上的意義的教學一樣，是不夠的。運算的意義，不論是得自於瞭解基本事實，合作計算，探討結構上的特性，或是操作具體物，在讓我們全盤地瞭解運算上，貢獻極大。

合併

在數學的應用中，加法的使用意義是教得最好也瞭解得最透徹的。即使如此，大數目的使用仍被忽略了。在教學上，教師可以舉各式各樣的例子並儘量利用電算器。年鑑是特別豐富的資料來源。

轉移

許多學生只願將加法於向上的轉移，而減法用於向下的轉移。這種想法不錯；事實上，我們有一種減法稱為「轉移型減法」，但是，這兒最要緊的是要有彈性。鼓勵兒童採雙向方式使用加法的方法之一是提出類似下面的情境，使得變化可以自不同的方向來看：

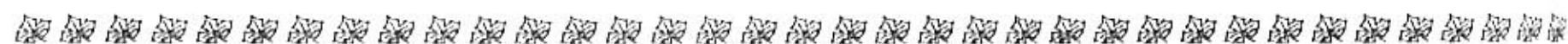
昨日股市價格 + 變化 = 今日股市價格

超過或不足某一定額的量 + 今天的結果 = 當日結束時超過或不足定額之量

某月初某校在籍學生人數 + 學生數量的改變 = 該月末該校在籍學生人數

來自減法的加法

對於記憶基本事實，驗算減法問題的答案，及解代數中的等式而言，加法與減法之間的關係均極為重要。做完了一題減法題目，你也許想問問學生，相對應的加法問題是什麼。然後，當你提出了所有的減法的使用意義後，不



妨要求學生們變換已知條件與答案，出一題相關的加法問題。就加法的應用而言，能找出相關的事實是極重要的，瞭解加法與減法之間的關係與瞭解乘法與除法之間的關係一樣地是值得回票價的。

問 題

1. 利用下列各類型的數量，各出一題合併型的加法題目：(a) 土地面積 (b) 某種能源的使用 (c) 參與音樂會或運動項目
2. 提出一個與本章中的例子不同的情境，在該情境中適合於運用機率的加法。
3. 回答下面的問題並將一些已知與未知的條件調換，使得減法情境轉換成加法情境。問題：媽媽烤了六打小餅乾，吃掉了五塊，還剩下多少小餅乾？
4. 連續一週觀察報上記載的某一種股票價格，每天都記下它的收盤價格與它和前一日的價格差異。將每日價格上的差異相加，說明你如何能立刻檢查所有用上的數字。
5. 「O 轉移」意指什麼？
6. 指出轉移 S 和轉移 - S 各乙次的相同與相異之處各一點。
7. 一家小的鞋店公布文的一週售貨成績如下：

日	男鞋	女鞋	童鞋
星期一	6 雙	15 雙	10 雙
星期二	3 雙	11 雙	7 雙
星期三	8 雙	11 雙	8 雙
星期四	10 雙	17 雙	10 雙
星期五	4 雙	12 雙	10 雙
星期六	16 雙	31 雙	48 雙

這家鞋店的主人可能會對那些「總計」數字有興趣？

8. 有一個人在遺囑上記載了將他財產的 $\frac{1}{3}$ 給他

妻子， $\frac{1}{4}$ 給他的獨子， $\frac{1}{5}$ 給他的獨生女， $\frac{1}{6}$ 給他的生意上的合夥人，(a) 上述的分法有可能嗎？(b) 如果可能，會有剩下嗎？如果不可能，為什麼？

註解與評論

註解 1-8 與本書所有的運算部分有關：

1. 全文
2. 分類的過程
3. 分類的標準
4. 不能作為分類的標準
5. 運算的其他意義
6. Sutherland 的論文
7. Vest 和 Kansky 的論文
8. 其他人的論文

註解 9-16 僅與本章（加法的應用）有關

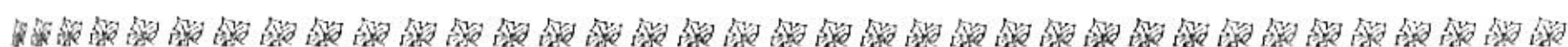
9. 「合併」的其他說法
10. 「轉移」的其他說法
11. Sutherland 的分類
12. Kansky 的模式
13. 比值的加法
14. 其他的加法使用意義
15. 不必要的加法類型
16. 用到加法的公式

註 1. 全文

Polya 在 How to Solve it (1957) 中描述的解題簡化過程提及，許多美國小學數學教科書中對於解題常採用如下的多步驟引導方式 (Bolster et al., 1980)。

- | | |
|------------|-------------|
| 第 1 步：讀 | 「Polya」了解問題 |
| 第 2 步：作決定 | 「擬定計劃」 |
| 第 3 步：解決問題 | 「實施計劃」 |





第4步：回答問題 "檢查")

本書前面提出的構想是爲了要幫助學生閱覽瞭解一些有關數字上的訊息，因此，可說爲了達成解題的第一步而設計。但是，我們常發現，第二步，決定如何去做，引起更多麻煩。即使許多書都特別安排了許多頁說明「如何選擇運算方式」，學生們在選擇時，除了憑直覺外，並未獲得更多的幫助，列出一份完整的使用意義名單，它的好處之一是讓教師和學生在作這樣的決定時，能獲得幫助。

註2.分類的過程

我們用下面的方式分類：首先，選一個運算，譬如說，減法。下一步，我們蒐集各式各樣情境的問題，在這些題目中都有給定的 a 、 b 兩數，而 $a-b$ 是答案。（例如：我有 20 元，你有 25 元。你比我多多少元？）問題的蒐集會產生使用類別，然後，我們將題目予以歸類。有些使用類別比別的類別更基本些，它們似乎能賦予運算意義。這些比較基本的使用類別就成爲本書中所稱之使用意義。（例如，上述的減法問題說明了減法的比較型使用意義。）

註3.分類的標準

我們是根據「數」在情境中扮演的角色而將屬於某一運算的例子加以分類。下面我們用兩種不同用法的減法爲例加以說明，在這兩個例子中，用了同樣的數字，但卻扮演著不同的角色。

有一個人將他財產的 $\frac{3}{4}$ 送給別人？他還剩下多少？

〔歸類爲拿走型〕

有兩塊木板，它們的厚度分別是 $\frac{3}{4}$ 公分及

1 公分，第二塊板比第一塊板厚多少？

〔比較〕

在兩例中，所用的均爲減法： $1-\frac{3}{4}$ 。但是在第一個例子中，1 和 $\frac{3}{4}$ 扮演著不同的角色（1 代表全部， $\frac{3}{4}$ 代表拿走的部分）；而第二個例子中，1 和 $\frac{3}{4}$ 卻扮演著相同的角色（它們都是用來作比較的兩數），所以這兩種用法被歸於不同的類型。

有的時候亦常常有可能用不祇一種方式來看一種用法；結果是：必須對使用類別作一選擇。例如，讓我們看看減法 $1-\frac{3}{4}$ 的第三種用法。

一件襯衫現在售價是原價的 $\frac{3}{4}$ ，減售的部份是多少？此題可歸類爲比較型（全部與剩下部分之比），但亦可歸爲拿走型。

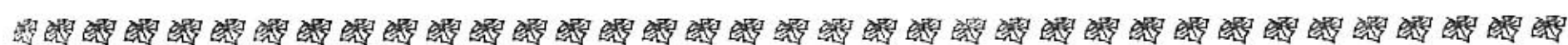
註4.不能作爲分類的標準

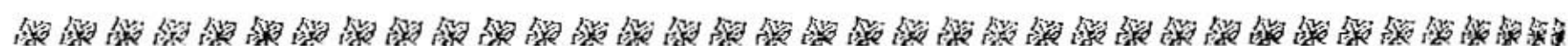
某些分類的原則並不能幫助別人決定使用何種運算方式，但有些人常常將問題根據這些原則加以分類。下面的分類方式並未被我們所採用。

我們不根據一些可能獲得和、積、商等的特別計算過程，予以分類，即使這種分類在小學數學中極爲常見。例如，在一個需要用 30 除以 25 的情境中，我們不在乎學生是「在頭腦中」作這個題目，或用長除法、短除法、連減法、或用電算器來解它。我們只在乎被除數、除數和商在實際情境中所扮演的角色。

我們不根據所用數字的大小，將問題加以分類。已知每小時的平均速度是 90 公里，時間爲 $19\frac{1}{2}$ 小時，要求出距離的題目，它的使用類別與已知每秒速度爲 6 公分，經過時間爲 0.033 秒，要求出距離的題目完全一樣。

我們視相等而不同形態的數爲可以互換的





數；例如，「25%折扣」和「減價 $\frac{1}{4}$ 」在使用上，完全相等，而在解題時，我們可以用0.25來代替25%或 $\frac{1}{4}$ 。雖然在某些特殊情境中，用某些特別形態的數（例如，股票市場中的報價單係用分數表示元，而非小數；而大部份科學的情境中係用小數或科學符號表示）。這些是屬於同一使用類別中的例子，它們本身並不構成使用類別。同樣地，相等的量，如1吋和2.54公分，亦是可以用互換的。

我們不根據文字題中出現的可能暗示某種數學運算的特別字眼來予以分類（如「和」、「差」、「比較、多」等）。

因為這些特別的用語常會誤導，同時，現實生活中的問題，常常不具有可靠的語意上的引導作用。

註5.運算的其他意義

Brownell(Weaver and Kilpatrick, 1972)在本世紀中葉寫了大量有關「教學上的意義」的文章，他常將「意義」的教學與「機械」的教學互相對照，因此，「知道某事（物）的意義」就常常與「瞭解某事（物）」有關聯，「瞭解」是模稜兩可的字眼，它對於澄清何謂「意義」並無幫助，不過，它確實將這個引起爭論的問題放在一個比較容易處理的地位；我們問：瞭解某一個運算是意味著什麼？

第一種瞭解是基於數字的結果而來。有些人稱它是最低層次的瞭解，有些人幾乎完全不認為它是瞭解。在這種觀念下，一個人如果知道了 $7 - 4$ 、 $33.2 - 2.5$ 等減法題目的答案，他就知道了減法是什麼意義。這就是一個普通的正式定義所根據的意義概念，換言之，減法就是將某一特殊結果 $(a - b)$ 與兩個給定的數 $(a$ 和 $b)$ 關聯的運算。

第二種意義或瞭解是根據知道找出答案的計算過程而來。假如他會「作減法」，就表示他知道減法的意義。根據這個意義，全數的減法是指一個人會將數字對齊，算出差及借位等過程。在這裡，分數的減法與全數的減法意義不同，因為它們的計算過程不同。

運算的第三種意義是根據它的數學特性而來，就減法而言，通常有兩種這樣的意義，其一為減法「解」加法。這種「解」的特性產生了相關的事實。譬如說，由於 $47 + 13 = 60$ ，我們可以下這樣的結論： $60 - 13 = 47$ ，或 $60 - 47 = 13$ 。一般而言，我們是這樣定義的： $a - b = c$ ，則 $c + b = a$ 。另外一種基於數學特性的意義是：減法是加法的反運算，或者說，減法和加法是逆運算，當討論的是負數時，常常會用到這個定義。換言之， $3.2 - 2.5 = 3.2 + -2.5$ ，一般而言， $a - b = a + b$ 。假如一個人會應用這種特性，他就知道這樣的減法意義。

運算的第四種意義是根據該運算的代表方式而定。它的代表方式可能是具體物，圖表或符號。例如，我們可以說：「利用數學積木，減法是指拿兩條積木，一端對齊，併排在一起，然後再看看你需要再放一條什麼積木與短的那條積木相接，使得另一端與長的積木的另一端剛好對齊」。或者你可以說：「在數線上，減法的意義是……」。

運算的第五種意義是根據運算的用法而定，亦是本書中所涵蓋的部份，如果一個人能夠「運用減法於現實生活中」就表示他知道了減法的使用意義。

非常瞭解減法的人對於上述各種意義都曉得。

（作者：本會研究員兼研究室主任）

