數學的本質與格式

黃敏晃 / 國立台灣大學數學系退休教授

在我國小學數學課堂的教學中，我們看到數學內容的呈現格式，干擾到學生學習掌握數學本質的事件，例如5元的硬幣有83個，共多少錢？解題時的列式，到底可不可以寫成83 × 5=？還是一定要寫成5×83=？因此，有必要把數學的本質與格式弄清楚。本文嘗試透過幾則民俗數學(Etho-mathematics)案例的討論，澄清下列兩個問題：

1.什麼是數學的本質？

2.數學內容的呈現格式，為什麼會變成現在的樣子？

本文進一步將討論的結果，用來解決目前小學數學教學時所發生的實務問題，希望對實質的教學改進有所助益。

壹、多元解題的爭議

在各縣市的小學數學科輔導團，接到各校要澄清的問題當中，最常被提出來的問題是下面的題目1。本例不但牽涉到數學式子的意義與格式，還關連到學生解題時能用到的技術性問題，故可當作典範案例來討論。

題目1　83個5元硬幣，合起來共是多少元？

許多小學老師認為一定要列式寫成5×83=415(元)，才是正確的。有些三年級學生列式成83×5=415(元)，老師打錯，引起其他老師和家長的抗議，而變成考試給分的爭論。雙方各執的理由如下：

1.有人認為乘式是同數累加式子的摘要，5×8是8個5相加，而非5個8相加，故被乘數一定是名數，而乘數是倍數，式子的意義是不同的。就像中國字「女生」是姓，「女子」是好一樣，左右顛倒寫出來就不是中國字。若此題要求列式的目的之一，是要學生展示這種了解，則只能認定83 × 5是錯的。

2.當然，若學生已知「乘法交換律」(只要到察覺的程度即可，無需到理解的層級)，即使考試時寫成83×5=415元，事後老師檢驗確認，許多老師還是傾向於給全

部分數。因為考試題沒有明白規範學生如何作答時，我們就無法要求學生照我們的意思作答。他也是人，有他自己的想法。當他的想法和我們不一樣時，他或許也是對的，應該受到尊重。

3.有些老師強調解題的技術層面，認為 83 × 5 和 5 × 83 在直式計算時，有其難度上的考量。如下面的直式所示，前者是一層的，而後者是兩層的。若我們編序式地安排直式的乘法算則教材，則後者的教材難度剛好比前者高一級。命題者若是要考學生是否已經掌握高一級的計算技能，則要求後者的直式計算是合理的。雖然筆者覺得，如此的要求下，試題可以明白寫出，如：請用直式計算下列乘法的積；若有必要看學生列式，則分成兩題，一題看計算，一題看列式。

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times\ \ 5 \\ \hline 415 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ \times\ 83 \\ \hline 15 \\ 40\ \ \\ \hline 415 \end{array}$$

由以上的討論看來，老師或家長們對於數學解題的對錯，認定上是有其堅持，是有充份道理的。這裡筆者想提供讀者一點建議，從不同的角度來看這個問題，可能會有些突破性的見解。讓我們先看下面題目 2 和題目 3 的情形。

題目 2　哥哥有 9 個彈珠，我有 6 個彈珠，誰多？多幾個？

老師命這道題目時的用意，是希望學生用減法列式解題，9-6=(3)。但是，當讓一年級小學生自由解題時，我們看到下列兩種不同的解題歷程和記錄，如下：

(1)往上數的策略—這樣解題的小朋友說，只要向媽媽多要幾個彈珠，我的彈珠就和哥哥一樣多了。我有6個，多要1個是7 個，再多要 1 個是 8 個，又多要 1 個是 9 個；總共多要了3個，才變成9個，記錄成6+(3)=9；答哥哥比我多 3 個。

(2)往下數的策略—有位小朋友說，哥哥怎麼可以比我多；只要把哥哥的彈珠丟掉幾個，我們就會一樣多了。9個拿走1個變 8 個，再拿走 1 個變 7 個，又拿走 1 個變6個，共拿走3個，記錄成9-(3)=6；答哥哥比我多 3 個。

許多老師相當不接受這兩種解題方式，和記錄解題的算式，因為這不是「正統」的格式。部分老師認為，雖然這些學生成功地解決了問題，解題的想法別人(指老師和其他同學)也能了解，但解題算式不正統，並不值得鼓勵(更不用說，要其他同學模仿他們解題)；因此不能算對(打錯或扣分)。有些老師則認為每個數學題目，只

有一種最好的解法(而這個解法通常是他知道的唯一解法)，只有這種解法才是對的，其他解法當然都是錯的。

題目3　我本來有6個彈珠，哥哥給我3個，姊姊又給我8個，現在我有幾個彈珠？

這是小學低年級數學教材裡，所謂的兩步驟解題問題。老師命題時要檢查的是，在學生能利用單純的加法或減法成功解題之後，會不會運用兩次單純加、減來解題？當然，解題後的列式，來記錄解題歷程，也是很重要的。有許多低年級的小學生，解題後所列的式子如下：

$6+3=9+8=17$ (個)

這是個錯誤的算式(老師打錯，或扣分是應該的)，但式子也忠實地記錄成功的解題：先進行6+3，再將此加法的結果9，和8相加而得到17；錯誤的是等號的使用。因為在數學裡的習慣，等號兩邊的值應該一樣，第一個等號違反此習慣，因此產生了溝通的錯誤，而非解題上的錯誤。

老師如果清楚這點，就應該要求學生做一個解題的動作，寫一個算式記錄。所以，上述的兩步驟解題本來就應該寫成兩個式子來記錄，如下：

$6+3=9$ ， $9+8=17$ (個)

如果老師認為，這兩個步驟的解題記錄，應提升效率，合寫成一個式子來記錄(因此，我們可以看到，這對學生是一個相當不容易的事情，應該列為一個特定的教材進度)，有必要和學生溝通清楚，一起討論如何將　的記錄，變成如下的　或　樣子的記錄式子：

$6+3+8=17$ (個)

$6+3+8=9+8=17$ (個)

貳、數學解題與溝通

上節談到學生所犯之「錯誤」，事實上並不是他們不了解數學內容而引起的，而是屬於表達格式不合傳統的「錯誤」。換句話說，學生的解題是成功的，但告訴別人他如何解題時的溝通是失敗的。

筆者認為，解題是數學的本質，而表達格式只是為了溝通而產生的，故是要次要的。討論數學教育的目的時，當然要把這些事情弄清楚。讓我們從下面的一般性問題，開始討論。

問題1　數學知識是如何發生的？

當我們要思考的問題太過一般而很難具體回答時，數學裡常做的運作叫做restriction，即對問題加一些條件，將問題所討論的範圍加以限制。如此，問題會更具體，更容易切入。上述的問題1可以侷限

在數學史，或學習心理學的領域內討論。如此，問題 1 變成了如下的問題 2 和問題 3。

問題 2　某個特定的數學知識，在人類的發展史上，是如何發生的？

問題 3　某個特定的數學知識，在小孩的成長過程中，是如何在他的腦海中發展出來的？

在數學教育的領域中，我們的討論焦點放在問題 3；但許多時候，先討論相關的問題 2，弄清楚後才回到問題 3，會有很好的效果。下面，我們將採取這樣的討論方式。

這樣的討論方式，並不意味著問題 2 不屬於數學教育的範圍。事實上，數學教育裡有一支叫做「民俗數學」，所研究的課題就與問題 2 有密切的關係。下面舉個例子說明這點，借此也可以順便指出問題 2 和問題 3 的關係。

例 1　1991 年 9 月美國數教育家 A. Bishop來台訪問時，介紹了新幾內亞島上某一族土著文化的命數系統(nameration system)，這非常有趣，是將一個人身上的六十幾個部位名稱，當作系列數詞來使用。譬如說，假定他們由右腳的大拇指，......，到右腳小指，腳板底，腳踝，小腿，膝蓋，大腿，右屁股，右腰，右腹，右胸，右手上部，右手肘，右手下部，手腕，手掌，右手拇指，......，右手小指，肩膀，脖子右邊，右腮，右耳垂，......，一直到頭頂，再由左邊一直回到左腳等。

當一位男士向準岳家求婚時，說道：「我存到左耳垂這麼多的羊群。」女方當然可以透過數數的複製行為，完全理解這位準新郎多麼富有。

這個例子提到，在一個特定的時空背景下，在某種文化的發展過程中所產生的某一類特定數學知識，其呈現方式，運作方法，雖然與我們熟悉的格式有極大的差異，但是從解題(解決描述數量多寡的問題)以及溝通(產生對事件描述方式的社會共識)的功能上來說，這個數學知識顯然在某種程度內是有效的。

筆者之所以會說在某種程度內有效，是因為我們還應該進一步從下面的幾個角度，來檢驗這個數學知識，而上述的數學知識，並不能通過這個關卡：

一、延伸性—它能處理大數量的狀況嗎？超過六十時，譬如說一百頭羊時如何數？是不是數完最後一個數詞(左腳小指)之後，再從頭數一遍？如何描述我數了十六遍？換句話說，十六這個數詞(相當於他們命數系統中的右手中指)是否能成功地抽象化。

二、發展性—這套命數系統，能否幫助發展有效處理大數的加減(更不用說乘除

了)問題之解題？從這裡讀者可以理解到，形式運算之重要性。因為當數目加大到數百時，利用點算具體物的操作，已不再有效。錯誤時也不容易檢查出來，因此溝通時的說服力及公信力就大打折扣了。沒有明顯的循環使用系列數詞，進位及位值等概念的想法，上述的發展(即形式運作，一直指到算則的出現)幾乎是不可能的。

以上兩種檢驗的角度，比較從學術的角度出發，討論這個數學知識有沒有進一步延伸發展成更高級知識的可能性。當然，這種延伸發展需要有充份的社會條件來支撐；譬如說，若該社會裡的人所碰到的數量問題，都不超過六十幾，則上述的延伸發展並不需要。但是，不管一個社會有無需要，我們都得討論這個知識能否普及的問題。

三、普及性—這個數學知識，一般學生是否容易學到手？具體的說(以上述知識為例)，六十幾個沒系統的數詞，學生容易記住嗎？順序是否常弄錯？忘記後是否能再度自行複製出來？若這些問題的答案是否定的，這個數學知識就不易推廣普及到全社會。如此的社群中，擁有這些重要數學知識的人，就會變成將權人物如巫師、長老等。由此可知，這樣的社會貿易不可能發達起來，職業分工不可能專業化，社會的發展因而會受到限制或阻礙。

現在，讓我們把上述的命數系統，抽離該特定的時空；假定在該時空中的一位小學低年級學生，這套命數系統學得非常好，突然隨著他的父母移民到現在的台灣，他也進了我們的一所小學就讀(為了免除其他的因素的干擾，讓我們假定語言的溝通沒有問題)。如果這位小朋友在學校裡繼續使用他所習慣的命數系統來解題和溝通，那就會產生如下的問題：

問題4 對時空錯置下的數學知識，我們(特別是數學老師)應該抱持怎樣的態度來看待？

很顯然的，我們一定要先肯定這位小孩的知識，然後想辦法告訴他，別人聽不懂他的表達方式，他若想要在這個社會中跟別人能互相溝通，就要講這個社會裡大家都能聽懂的話。他在學習我們表達方式的期間，我們要有耐心，只要他比以前進步，就要加以鼓勵，使他有成就感，想要繼續學習。

如果這是我們對待這位新幾內亞客人的態度，那我們對自己國人的小孩所犯的表達格式上的錯誤，為什麼要採取這麼嚴格，甚至於苛的態度？使這些小孩對數學感到害怕，對數學產生恐懼，不想再學數學？

參、古代的解題案例

下面舉幾個我們熟悉的數學知識，在其他時空中的呈現格式。讓大家知道，格式比較像服飾的流行，並不是唯一的，非這樣就是錯誤的，而是多元的。

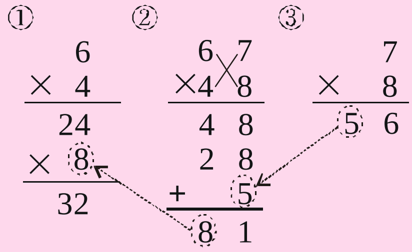
例2　67×48=？的解題格式，下面列出古俄羅斯、古印度和古中國的表達方式。

古俄羅斯　其解題想法是一數加倍，另一數折半如下：

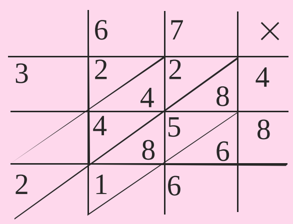
67 × 48=134 × 24=268 × 12=536 × 6
=1072×3=1072+2144=3216

在上面算式中，第一、二、三、四個等號的意義如上述(當然，讀者可以問，在兩數相乘時，為什麼其中一數加倍，另一數折半，相乘的結果不會變？)。因為1072×3中3已經不能再折半，故用1072的1倍和2倍，來代替3倍(第五個等號)。最後的等號是加法的結果，答案是3216。

古印度　古印度梵文文獻中的乘法計算格式，很像現代的乘法直式，但較原始，其背後理論是分配律，分成三步驟如下面的　　　之格式，最後綜合三式，得到的答案是3216(三式中沒被虛線拉走的數目湊起來)。



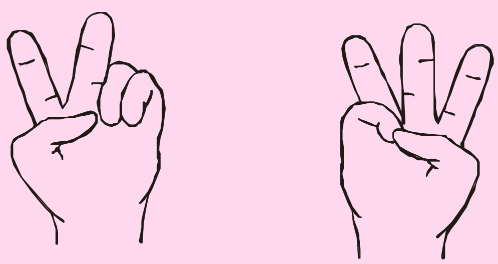
古中國　明朝的程大位寫出「算法統案」這本書之後，珠算才在我國大行其道。之前當然是用籌算，即用竹片做為算子(可資操弄的計算工具)。其間有人發展出舖地錦法如下圖所示，此法後來曾傳入歐洲，在現代乘法直式流行之前，被某些地區使用過。此法在地上畫格子，在格子中置不同顏色之算珠(或石子)，故名。



此式中，用對角線切成兩半的正方格中的數目，是該行該行(上面及右邊)兩個數的相乘結果，由乘法九九基本事實中直接引用。之後，利用斜線框住的同斜行相加並進位，例如，8+5+8=21，記1,2進位到上行，2+2+4+4=12，記2,1進位到上行1+2=3得到的答案是3216，是最左和最下層所記錄的數目。

在例2中，我們看到67×48的計算就有三種不同的樣式，而這些樣式曾在某個特定的時空流行過。如果一位數學老師的班上某同學，利用這樣的格式計算，老師要怎樣對待呢？希望讀者想想看！下面，我們來看一則更古老的數學知識，是古代法國人，在減省6 以上的乘法九九的案例。

例3　大家都知道，九九乘法表共有八十一個基本事實(basic facts)，記住這麼多事實並不容易，故下面的案例將乘數和被乘數都是6以上的事實，利用兩手的手指頭和5 以下的乘法事實，呈現出來如下：以7×8=？為例，用左手表示7，右手表示8；表示的方法是將7減5得2，伸出2根手指頭，摺起3根手指頭(有趣的是3=10-7，讀者可想想為什麼？)；將8減5得3，伸出3根手指頭，摺起2根手指頭(2=10-8)，如下圖所示：



現在，將伸出來的每根手指頭當作10相加，左手有20，右手有30，加起來是50；又將摺起來的每根手指頭當作1相乘，左手有3右手有2，相乘得6；將50和6加起來，得到的56，就是7×8的結果。

我們當然不以單獨的個案為滿足，所以要檢查6×6，……，一直到9×9為止的基本事實，是否都可以由這個方式得到。但在檢查前，讓筆者簡化在本文中的呈現方式，減少像上圖那樣具體的方式，變得形式些；我們注意到相乘的兩數，每個數都由另兩數表示，如7用7-5=2和10-7=3表示，8用8-5=3和10-8=2表示，故上面的圖可抽像成下面的圖示：

2×10 + 3×10 = 20+30 = 50

7 × 8　　相加得 56 = 7 ×8

3 × 2 = 6

有了這種呈現法後，我們就不用每次都用手指頭了。下面，我們將上圖中的一些運算省略，得到更簡要的圖表，又用乘法交換律，省略一些讀者自行補充被省略的事項，看看由6×6到9×9的乘法事實，是否被呈現出來。

1×10 + 1×10　20 + 6 × 6　16 = 4 × 4　36	1×10 + 2×10　30 + 6 × 7　12 = 4 × 3　42	1×10 + 3×10　40 + 6 × 8　8 = 4 × 2　48
1×10 + 4×10　50 + 6 × 9　4 = 4 × 1　54	2×10 + 2×10　40 + 7 × 7　9 = 3 × 3　49	2×10 + 4×10　60 + 7 × 9　3 = 3 × 1　63
3×10 + 3×10　60 + 8 × 8　4 = 2 × 2　64	3×10 + 4×10　70 + 8 × 9　2 = 2 × 1　72	4×10 + 4×10　80 + 9 × 9　1 = 1 × 1　81

當然，有些讀者會好奇，那相乘兩數若其中一數小於5時怎麼辦呢？下面以4×9為例，看看發生什麼現象？

4-5=-1　9-5=4‥‥ -1×10+4×10=30

4 ×9　　　　　　　　相加得36

10-4=6　10-9=1‥‥ 6×1=6

首先，我們看到4-5=-1。負的數在古代是沒意義的，故上述算則出現時，這個乘法事實無法如此呈現。但是，現代人有了負數的概念後，就可以將此算則延伸到如4×9之類的案例。請讀者自行檢驗這方面的各種事實。

另一個讀者會想到的就是，這種算法是否可以延伸到兩位數相乘？下面以13×19為例來作說明。

13-5=8　19-5=14‥‥8×10+14×10=220

13 ×19　　　　　　　　相加得247

10-13=-3　10-19=-9‥‥(-3)×(-9)=27

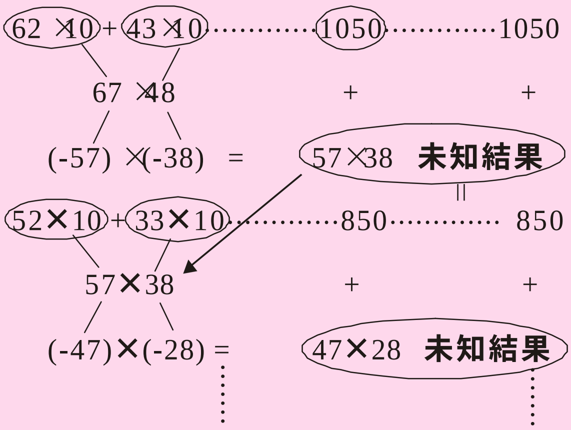
顯然，我們再次碰到負數，這次更要用到負負得正的定理。得到的247是否為正確的乘法結果呢？讓筆者用非正式乘法檢驗如下：

13 × 19=13 ×(20-1)=260-13=247，正確！

肆、數學知識的流傳

筆者有幾次演講時，提到上述的案

例，有許多人聽到非常感興趣，而且不肯見好就收，繼續推筆者往前延伸，要計算超過20以上的二位數。下面，就以67×48來作具體的說明

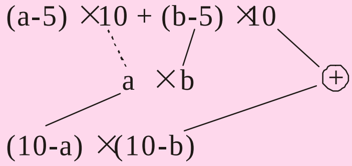


由上圖知道，我們還要推好幾層才有可能得到結果，筆者已沒興趣繼續下去，就此打住。現在，讀者可以開始體會到，為什麼這樣的延伸算則沒有被發展出來，或者，即使被發展出來後，也沒流傳下來。主要的原因是太麻煩，不夠簡便。

讓筆者借用上述材料，談一段數學界會比較關心的事情。上述的計算(方法)是正確的嗎？即不管被乘數和乘數是怎樣的數，這樣子計算出來的結果都會正確嗎？想想看！

要檢驗這種事實，最好是用一般化的手法，即假設被乘數是a，乘數是b，照上述的數字圖示(如右上)，我們的問題變成要檢驗，右上的代數恆等式是否會成立？筆者將此任務留給讀者自行完成，讀者只要將等號右邊乘開，不難驗證

$$a\times b \stackrel{?}{=} (a-5)\times 10+(b-5)\times 10+(10-a)(10-b)$$



上述幾個古代的解題案例，給了筆者一些啟示：歷史上發展出來的許多數學知識，最後並沒有流傳下來，或者，沒有被我們這些後代子孫廣為使用。為什麼我們這麼不知感恩？祖先流給我們的寶貴知識都不知道愛惜、寶貴？

筆者記得美國物理學家，諾貝爾獎得主的費因曼，有關他的書籍在台灣廣為流傳，在訪問希臘後的感想之一是，希臘人的歷史包袱太重，壓得現代的希臘學生透不過氣來。中國的歷史也很長，歷史包袱也很重，我們如何跳脫出這樣的困境呢？把這種想法用到數學的學習上是一樣的，如果祖先留下來的每件數學知識，我們都得學習，我們就會被壓死！

事實上，在人類的發展史上，我們的祖先為了解決問題，一定流下寶貴的經驗，後來經過反省、檢討、歸納，就會變成可以流傳的工具和知識。這些工具和知識，每代都有改進(若問題繼續存在)。當

更方便使用的知識和工具發展出來之後，比較原始的知識和工具，就會被後人捨棄。例如，槍砲代替弓箭，飛彈取代槍砲；哥白尼太陽為中心的說法，取代了以地球為中心的說法；刻卜勒的星球運行軌道為橢圓的說法，取代了軌道為圓的說法；電算器和電腦取代了算盤等。

這些事例說明了，知識的流傳和淘汰，有其一定的機制。我們無法勉強留住一些知識，認為這些對這個社會還是很重要。尤其是因為我們的社會所沿用的紙筆測驗制度，所需要的知識，並不見得是未來社會發展所必需。筆者還當學生時代的古老考題中，如黃河經過那幾省？如算術的時鐘問題(5 點到 6 點之間，分針和時針何時第一次互相垂直？重疊？成一直線？)和代數中的開方法等，這些都已成明日黃花！這些提醒我們，中小學數學課程中的材料，必須要慎重考慮，決定其取捨，以免重蹈以往學子花費寶貴光陰，學習無用過時知識之覆轍！

當然，過去知識中重要的概念，必須保留，而且其發展歷程(原始現象到最後的結果)也有必要讓學生重走一遭，使它能在學生的認知結構發展中，留下比較深刻的印象。

由此，筆者想把討論的焦點，帶往數學教育裡的另一焦點，即兒童的認知發展和學習的關係。許多人認為，兒童的腦袋像一張白紙，我們教什麼，他們就學什麼；我們沒教，他們就不會。這樣的看法，把小孩看成電腦，把學習的狀況過於簡化，不是好事。若是如此，人的腦袋不會發展，學生永遠無法超越老師，人類的未來怎麼會有前途？

人的腦袋是會發展的，教育的目的就在保留這種發展發生，怎樣做到就是老師要講究的教學藝術。其實，即使小孩沒有在學校得到這種啟發，他們也會在其他場合得到這樣的機會。下面，引用有名的巴西研究案例，來說明這點，順便看一下一些學生的數學學習狀況。

伍、有名的巴西研究案例

1988 年在匈牙利首都布達佩斯召開的 PME(International Group for the Psychology of Mathematics Education)年會，Keynote speech 講的是巴西的一位數學教育學者Terezinha Nunes Carraher，題目是市井數學與學校數學(Street Mathematics and School Mathematics)。這篇報告後來會被數學教育界人士一再的轉述，原因是牽涉到種族偏見的匡正。

巴西的政經都是由白人掌控，而人口裡佔絕大多數的帶印地安血統的人民則社經地位都很低。有趣的是前者的小孩在學校成績都很好，而後者的小孩則學校成績普遍低落，尤其是數學成績，更是慘不忍睹，於是學校老師們形成了一種種族偏見—印地安血統使頭腦變差。三人研究小組中有兩位成員本身帶著印地安血統，他們當然有強烈的動機要推翻這種歧視。

他們的第一個想法是，這些小孩在學校數學這麼差，將來長大成人到社會怎麼辦？會不會造成生活上的不方便？但從沒聽過這種現象發生，表示這些小孩長大成人的過程中，另有管道學到生活裡需要的數學，而學校的教育變成一種浪費。於是他們開始觀察這些小孩在學校外的生活，發現他們大部分都去做點小生意賺錢花用，例如：到海灘去賣冷飲、水果等。在這樣的課外活動中，他們學到了數學。

有趣的是他們所做的實驗：這些小孩在模擬做生意的數學情境下，63題牽涉到加、減、乘、除的題目，答對率平均是98%；把同樣的題目改成學校慣用的文字題和計算題時，平均答對率下降到73%和37%。同樣一批小孩，同樣一批題目，為什麼會變成這樣？

	模擬	文字題	計算題
答對率	98%	73%	37%

原因當然是老師要求的解題格式！這些小孩在解決數學問題，計算完全採取口頭方式。下面讓我們看一則面談的原案。

例4　下面的面談原案中，問的是訪談者，答的則是小孩，形式是模擬做生意的情境。

問：一個椰子賣多少錢？

答：35元。

問：我要3個，多少錢？

答：105元。

問：我要10個，多少錢？

答：...3個是105元，再多3個是210元，...再多4個就是...315...應該是350元。

問：這是一張500元的鈔票，你要找我多少錢？

像這樣的計算方式，學校老師是不會給分數的，但這些小孩確實有數學能力，解決生活上的問題，並不如老師們所認為的「這些小孩沒有數學細胞」。下面再來看一段面談原案，看看這些小孩被迫採用老師教他的方式計算時，表現出來的「沒有數學細胞」的樣子。

例5　8歲的小孩在模擬生意情境下，

被要求做直式計算。

問：200-35，怎麼計算？

答：沒有減去 5，是沒有(寫下 0)；沒有減去 3 是沒有(寫下 0)；2 減去 0 是 2。

$$\begin{array}{r}200\\ -\ \ 35\\ \hline 0\end{array}\qquad\begin{array}{r}200\\ -\ \ 35\\ \hline 00\end{array}\qquad\begin{array}{r}200\\ -\ \ 35\\ \hline 200\end{array}$$

問：這個答案對嗎？

答：不對。因為你拿200元的鈔票向我買35元的東西，我不可能把200元的鈔票讓你拿回去。

問：那你再把這道題目再做一遍，好嗎？

答：好(寫下 200-35 的直式)。 5 拿走 0 是5(寫下5)，3拿走0是3(寫下3)，2 拿走 0 是 2(寫下 2)。又錯了。

$$\begin{array}{r}200\\ -\ \ 35\\ \hline 5\end{array}\qquad\begin{array}{r}200\\ -\ \ 35\\ \hline 35\end{array}\qquad\begin{array}{r}200\\ -\ \ 35\\ \hline 235\end{array}$$

問：為什麼是錯的呢？

答：你拿200元的鈔票向我買35元的東西，我不但要把 200 元的鈔票還你，還多給你 35 元，不可能的啦。

問：那你知道答案是多少嗎？

答：如果東西是30元，那我要找你170元。

問：但這樣東西是 35 元，你是不是算我便宜一點？

答：我找你 165 元。

陸、結語

我前面提到一些問題，我並無意去回答，我也談到一些例子，也不想由這些例子歸納什麼結論。我只希望大家想想，檢討一下自己的教學。最後讓我再提一個問題做為本文的結束。

問題 5 數學教育的目的是什麼？是要小孩學到許多格式化的數學知識呢？還是要提升他們的數學能力？