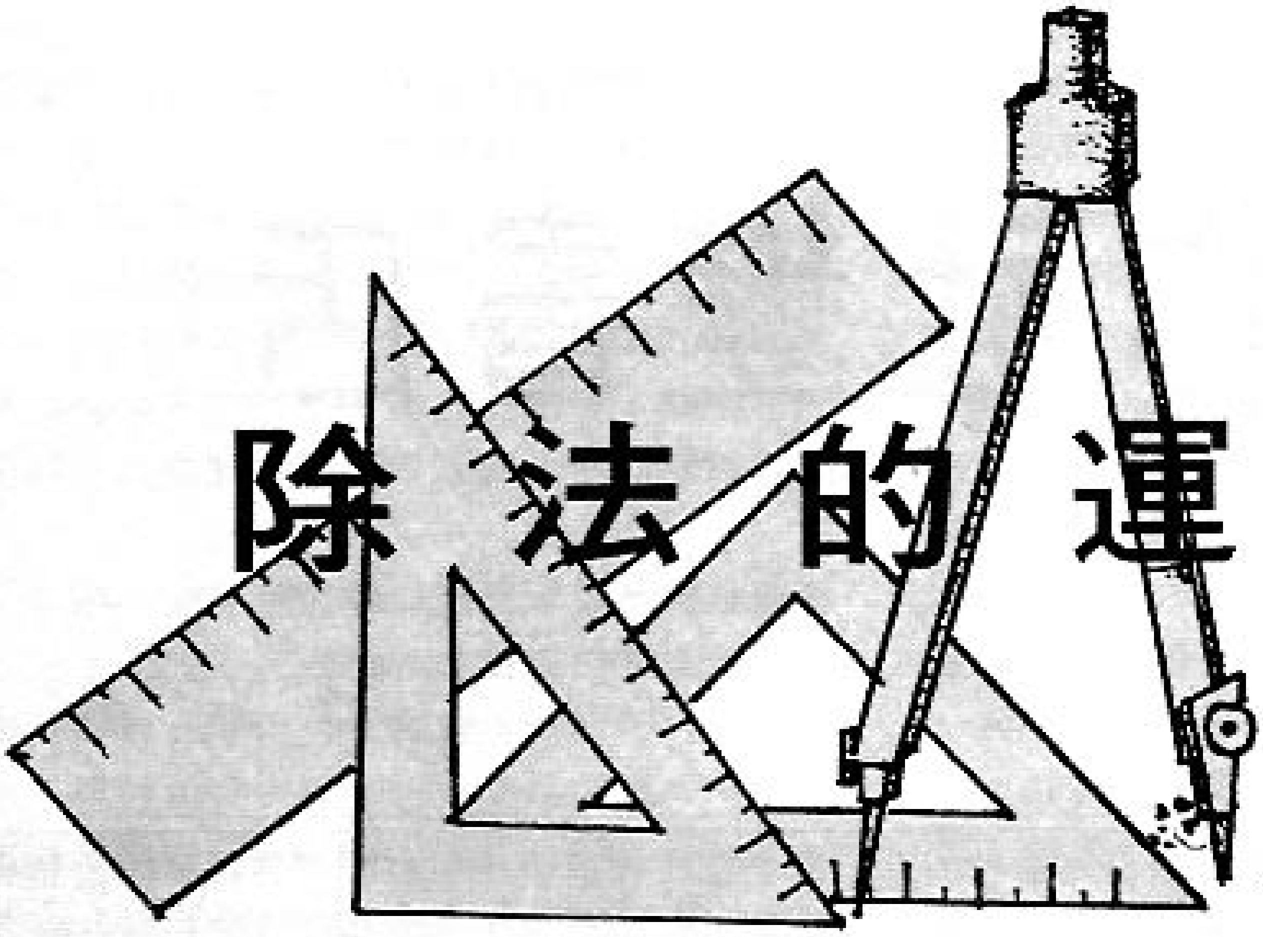

除法的運用（一）

呂玉琴 文
廖永鈺 圖

除法有兩個基本的應用意義：同單位比率及異單位比率。除法的應用類別是從它們的意義及除法與乘法之間的關係所引出來的。我們將除法分成五種應用類別：

1.同單位比率（等分除）
2.異單位比率（包含除）
3.異單位比率除數
4.改變大小的除數
5.反求因子

除法的第一種應用類別：同單位比率

設甲、乙二人從家裏走到工廠的時間分別是45分鐘和10分鐘。我們可以用減法或除法來比較這二個時間。

用減法：45分 － 10分 ＝ 35分

用除法：$\frac{45分}{10分} = 4.5$

所以我們可以說從家中走到工廠，甲比乙多花了35分鐘或甲花的時間是乙的4.5倍。

第二種型態的比較就是所謂的同單位比率的比較或簡稱同單位比率。

除法的同單位比率的比較的應用意義
設a和b是含有相同單位的二個量，則a除以b，寫作$\frac{a}{b}$，是比較a和b的同單位比率

同單位比率的比較必需這二個量含相同的單位，假如甲花了¾小時，我們必需在相除之前把它換成45分鐘。而且，同單位比率可以是二個量之中的任一個量除以另一個量。以上面的例子來說，用另一個順序來除就是，

$$\frac{10分}{45分} \simeq \frac{10}{45} \simeq \frac{1}{4}$$

此時，我們可以說從家中走到工廠，乙花的時間大約是甲的1/4倍。

在前面幾章的討論中（例如：在乘法改變大小裡的大小改變因子）的所有的百分率，所有的機率，某些分數和很多的數都可以解釋爲同單位比率。

在這一節中，我們要討論的是"同單位比率"這個字的第三個概念。第一個概念是當成數來應用（第一章第四節），同單位比率的比

較，在那兒同單位比率代表一個單一的數；第二個概念是當成一個序對，a:b，如第二章第一節之討論；第三個概念是當成一個運算的使用意義，就像本節的例子。這三個“同單位比率”的使用會引起語言及觀念的混淆，而且對學生和教師都是困難的。在註解 9 對這一點有更進一步的討論。

例題：

1. 折扣的百分率：假如有一件原價是 30 元的物品，減價 6 元，問折扣的百分率是多少？

答：$\dfrac{6\text{元}}{30\text{元}} = 0.20 = 20\%$，所以減價 20%。

註：有些書用比例 $\dfrac{6}{30} = \dfrac{X}{100}$ 來解這個題目，我們認爲，只需要一個單一運算的問題不必要列這麼複雜的算式而且還要改寫它的解法。

2. 人口增加率：世界人口估計從 1850 年的 11 億，增加到 1900 年的 16 億，再增加到 1950 年的 25 億，問那一個 50 年間的人口增加率較高？

答：人口增加率可以用人口數相除來比較。從 1850 年到 1900 年，相除如下：

$$\frac{1900\text{年的人口數}}{1850\text{年的人口數}} = \frac{16\text{億}}{11\text{億}} = 1.45$$

這表示 1900 年的人口是 1850 年的人口的 145%，人口增加率是 45%。而從 1900 年到 1950 年，用相同的除法：

$$\frac{1950\text{年的人口數}}{1900\text{年的人口數}} = \frac{25\text{億}}{16\text{億}} = 1.56$$

這表示從 1900 年到 1950 年間的人口增加率爲 56%。所以 1900 年到 1950 年間的人口增加率較高。

註：在本題中 50 年間的人口增加“率”不能和沒有經過調整計算的另一個不同時間長度的人口增加率相比較。尤其是，把人口增加率除以 5 當成是十年間的人口增加率是不對的。

註：假如二個不同時間的人口數相等，則同單位比率是 1 或 1.00，表示一個 0% 的人口增加率，這和常見的名詞“零人口增加率”是一樣的。

註：人口增加的總數是用減法來比較。從 1900 年到 1950 年增加的總人數大約是從 1850 年到 1900 年增加總人數的 2 倍（9 億對 5 億），但是人口增加率僅高出約 11%。

3. 利率：159.35 美元的銀行存款經過三個月以後獲得 1.99 美元的利息，問季利率是多少？

答：$\dfrac{1.99\text{美元}}{159.35\text{美元}} \simeq 0.012488$，或大約爲 0.0125，這表示每季（三個月）的利率是 1.25%。

註：銀行稱這樣的利率爲年利率 5%。雖然，假如把這些利息合併到本金中，以複利計算，則一年後的利息比年利率 5% 稍爲多一些。

4. 機率：丟一粒骰子，問出現 5 點的機率是多少？

答：我們很自然的假定這粒骰子每個面出現的機會都相等。那麼，欲求的機率是：

$$\frac{5\text{點的面數}}{\text{總面數}} = \frac{1}{6}$$

註：雖然並不是每個機率都是用相除來計算，但是每個機率都可以解釋爲一個同單位比率的比較的結果。例如：雖然下雨的機率是 70% 表示你可以期望 10 次中有 7 次會下雨。

5. 比例：美國 1960 年代初期的卡迪拉克車

（Cadillacs）長 20呎。假如有一個這種汽車的模型是 6吋長，問這個汽車模型的比例是多少？

答：$\frac{6吋}{20呎}=\frac{6吋}{240吋}$，所以這個汽車模型是眞實尺寸的$\frac{6}{240}$。大部分用分數來表示比較的結果的人都嘗試把這個分數化成最簡分數，在此，$\frac{6}{240}$ 可以化簡爲$\frac{1}{40}$，所以這個模型是眞實尺寸的$\frac{1}{40}$

註：這個答案也可以寫成 1:40來表示模型的比例。

6.多少倍？美國的人口（1978年是二億二千萬人）大約是摩洛哥人口（1978年是一千八百萬人）的多少倍？

答：$\frac{220}{18} \simeq 12.2$，大約是 12倍。

註：因爲，我們知道"百萬"可以消掉，所以在計算時可以不必用它。

7.百分率：重鋪一段長 12哩的高速公路，假如已經鋪好 9哩，問鋪好的部分占整件工程的多少百分率？

答：$\frac{9哩}{12哩}=0.75=75\%$

註：我們也可以說已經重鋪了$\frac{3}{4}$。依問題的問法，$\frac{9哩}{12哩}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{3}{4}$, 0.75或 75%，都可能是回答問題的最適當的方法。

8.利潤的變化：一家大公司去年賺 3000萬美元，今年賺 7500萬美元，如何描述這個變化？

答：$\frac{7500萬美元}{3000萬美元}=\frac{5}{2}=2.5=250\%$

我們可以說：(1)今年的利潤是去年的$\frac{5}{2}$。(2)今年的利潤是去年的 2.5倍。(3)今年的利潤是去年的 250%（假如今年和去年賺一樣多的錢，則爲 100%）。(4)今年的利潤比去年增加 150%。

註：利潤是"去年的 250%"與"比去年增加 250%"對照，增加 250%的意思是指今年的利潤是去年的 350%，或一億零五百萬美元。

註：當然也可以從 7500萬美元中減去 3000萬美元，然後說今年比去年多賺了 4500萬美元，公司的財務報告也可以用這種方式來比較，而且也算是正確的。

9.失業率：比較美國 5.8%(1979年 4月）和 10.5%（1982年 10月）的失業率。

答：用除法來比較，$\frac{10.5\%}{5.8\%} \simeq 1.81$，所以 1982年的失業率比三年半以前增加了 81%。

註：減法：10.5% − 5.8% = 4.7%。我們可以說 1982年的失業率比三年半以前增加了 4.7%。英國的語言無法區分計算 81%和 4.7%的方法不同，所以，當你聽到一個百分率增加或減少時，它可以用減法或除法來計算。這種含糊話可以用來欺瞞不小心的人。

註：注意這裏是把兩個同單位比率拿來相除，得到的第三個的數仍爲同單位比率。

除法的第二種應用類別：異單位比率

除法允許比較相異單位的計數或測量值，這就形成異單位比率。第一個進入腦中的異單位比率是速率。花 2½小時行駛了 125哩的平均速率是每小時 50哩。

$$\frac{125\text{哩}}{25\text{小時}}=\frac{125\text{哩}}{2.5\text{小時}}=50\frac{\text{哩}}{\text{小時}}$$

或每小時 50 哩

另一個常用的異單位比率是每單位的價格。例如：6瓶飲料值 1.59 美元，則

$$\frac{1.59\text{美元}}{6\text{瓶}}=0.265\text{美元／瓶}\simeq 0.27\text{美元／瓶}$$

在異單位比率中保留單位是必要的。這裏的單位是"美元／瓶"。同樣的，假如六個班級共有 159 個學生，則平均每班有 27.5 個學生，單位爲"個／班"。

列題：

1. 速率：假如 6 分鐘打了 400 個字，問平均的打字速率是多少？

   答：$\frac{400\text{字}}{6\text{分}}=67\text{字／分}$

   註：這個答案讀作"每分鐘 67 個字"，這裏的"每"字通常有異單位相除的意思。雖然它有其他的意思，但是它在數學中和"的"或"倍"相似，常伴隨著一個特殊的運算。

   註：用另一個順序來相除也是有意義的。

   $\frac{6\text{分}}{400\text{字}}\simeq\frac{1\text{分}}{67\text{字}}$

   或大約每個字一秒鐘。這是打字速率的另一種描述。

2. 出生率：1979 年，美國人口有 219,000,000 人，當年有 3,383,000 人出生。求這一年的出生率？

   答：$\frac{3,383,000\text{個活產數}}{219,000,000\text{人}}=0.0154\cdots$個活產數／人

   我們通常會把分子和分母同時乘以 1000，使得每千人有 15.4 個活產數。

   註：0.154 個活產數或 15.4 個活產數都是不可能的，然而 0.154 個活產數／人或每千人有 15.4 個活產數是有明確的意義。這表示 0.154 和 15.4 這二個數字在答案中必須附上比率單位，而不是計數單位。

3. 班級的平均大小：某校七年級共有 6 班，學生共有 131 人，問平均每班有多少個學生？

   答：$\frac{131\text{個}}{6\text{班}}\simeq$ 每班 21.8 個學生

   註：21.8 個學生的觀念是不正確的，但是這個答案的單位不是"個"，而是"個／班"。

4. 人口密度：紐約市（1970 年）有 780 萬人口住在 300 平方哩的面積中，波士頓的 700,000 人口住在 46 平方哩內，問那一個城市的人口密度較高？

   答：紐約市：$\frac{7,800,000\text{人}}{300\text{平方哩}}\simeq$ 每平方哩 26,000 人

   波士頓：$\frac{700,000\text{人}}{46\text{平方哩}}\simeq$ 每平方哩 15,000 人

   紐約市的人口密度較高。

   註：從年鑑的資料，我們發現 1970 年紐約市是美國人口密度最高的大城市。而在紐約市內，人口密度最高的是曼哈坦（Manhattan），大約每平方哩住 68,000 人。美國大部分城市的人口密度是每平方哩 2000 至 4000 人。

5. 身高的變化率：某個小孩在三年內長高 5 吋，問這個小孩在這段時間內的身高變化率是多少？

   答：$\frac{\text{高度的變化}}{\text{時　間}}=\frac{5\text{吋}}{3\text{年}}=1\frac{2}{3}\frac{\text{吋}}{\text{年}}$

   註：計算異單位比率的除法可以用不同的順

序。它的值和原來的值成倒數而單位也正好顛倒。

。另一種方法相除，$\frac{3\text{年}}{5\text{吋}}=\frac{3}{5}$ 年／吋

表示這個小孩子平均長高1吋要花$\frac{3}{5}$年。

6. 增高率：關於樹的1001個問題與回答（1001 Questions Answered About Trees）這本書告訴我們說一個人幾乎可以看出一棵繁茂的竹樹在成長。這棵竹樹可以在一天內長高18吋，問這棵竹樹平均每小時長高多少？

答：$\frac{18\text{吋}}{1\text{天}}=\frac{18\text{吋}}{24\text{小時}}=$ 每小時$\frac{3}{4}$吋

註：這是任何樹中成長速率最快的一種，這也是為什麼我們對這個資料有興趣的原因。

7. 單位價格：假如20塊餅乾值40元，問每塊餅乾值多少元？

答：$\frac{40\text{元}}{20\text{塊}}=2\frac{\text{元}}{\text{塊}}$

註：假如問題改為80塊餅乾值40元，則大部分的人可能用另一種方法來除，

$\frac{80\text{塊}}{40\text{元}}=2\frac{\text{塊}}{\text{元}}$

這表示人們比較喜歡整數，而比較不喜歡分數。

8. 分配：40個抽訪者對某個城市的2500位居民作民意測驗訪問，平均起來，每個抽訪者要訪問多少個人？

答：由“每個抽訪者要訪問多少個人”暗示我們除法的適當順序。

$\frac{2500\text{人}}{40\text{個}}\simeq$ 每個抽訪者要訪問63人。

註：正確的商是62.5，表示有一半的抽訪者每人要訪問62人，而另一半的抽訪者每人要訪問63人，才能得到全部的訪問人數。

9. 速率：一個慢跑者在半小時內繞著$\frac{1}{4}$哩的跑道跑完11圈，問這個慢跑者的平均速率是多少（哩／小時）？

答：哩／小時的單位暗示我們是把哩數除以小時數，也就是距離除以時間。

$$\text{距離是 } 11\text{圈}\times\frac{\frac{1}{4}\text{哩}}{\text{圈}}=\frac{11}{4}\text{哩}$$

$$\text{平均速率是}\frac{\frac{1}{4}\text{哩}}{\frac{1}{2}\text{小時}}=\frac{11}{4}\div\frac{1}{2}\text{哩／小時}$$

$$=5\frac{1}{2}\text{哩／小時}$$

註：當測量值是分數時，異單位比率的問題能用分數的除法得到答案。

註：用另一個順序來除：

$$\frac{\frac{1}{2}\text{小時}}{\frac{11}{4}\text{哩}}=\frac{30\text{分}}{\frac{11}{4}\text{哩}}=30\times\frac{4}{11}\frac{\text{分}}{\text{哩}}=\frac{120\text{分}}{11\text{哩}}$$

$$=10\frac{10}{11}\text{分／哩}$$

10. 兌換率：1980年5月23日，一馬克大約值0.56美元，這個資料可以告訴我們如何兌換美元和馬克？

答：因為1馬克＝0.56美元，$\frac{0.56\text{美元}}{1\text{馬克}}$

$=1$

而且$\frac{1\text{馬克}}{0.56\text{美元}}=1$，所以兌換率是

$0.56\frac{\text{美元}}{\text{馬克}}$或$\frac{1}{0.56}\ \frac{\text{馬克}}{\text{美元}}$

註：把馬克兌換成美元要乘以 0.56，而把美元兌換成馬克要乘以

$$\frac{1}{0.56}=1.7857\cdots\cdots$$

，或除以 0.56。常用的兌換率可以在許多報紙的金融版中找到。

11.燃料消費量：假如一輛加滿油的汽車行走了 300 哩後，又要 14.3 加侖的汽油才會注滿油槽，問這輛汽車的汽油哩數（即 哩／加侖）是多少？

答：$\frac{300\text{哩}}{14.3\text{加侖}}\simeq 21\text{哩／加侖}$

註：在美國，汽油的消費量是以哩／加侖來測量的。世界上的其他地方，汽油的消費量通常用其他的單位測量。例如，公撮／公里或每 1000 公升的公里數。在公撮／公里的單位中，數值愈小表示汽油的使用效率愈高，而在哩／加侖或$\frac{\text{公里}}{1000\text{公升}}$的情形則正好相反。

12.加速度：某輛汽車剛發動時的速率是 10 哩／小時，一秒後速率增加爲 12.4 哩／小時，再過一秒後速率又變成 16 哩／小時，求每一秒的加速度？

答：第一秒的加速度爲每秒 2.4 哩／小時。因爲，"每秒每小時"是混合的單位，我們可以將哩／小時換算成呎／秒，而得到 3.52 呎／秒^2。第二秒的加速是每秒 3.6 哩／小時或 5.28 呎／秒^2。

註：可以用下列方式將哩／小時換算成呎／秒：

$$2.4\text{哩／小時}=2.4\frac{\text{哩}}{\text{小時}}\times\frac{5280\text{呎}}{\text{哩}}\times\frac{1\text{小時}}{3600\text{秒}}=3.52\frac{\text{呎}}{\text{秒}}$$

所以$\frac{2.4\text{哩／小時}}{\text{秒}}=\frac{352\text{呎／秒}}{\text{秒}}$

$=3.52\text{呎／秒}^2$，通常唸作"每秒每秒 3.52 呎"。

13.利率的變化：從 1976 年 8 月 1～15 日到 1970 年 8 月 1～15 日，美國銀行貸款的平均年利率從 5.95% 增加到 8.50%。1974 年 2 月到 5 月，年利率從 9.91% 增加到 11.15%。1976 年年利率又降回 8%，所以你可以看出年利率的改變很快。問上述的那一個期間內借錢的加速度較大？

答：加速度 $=\frac{\text{利率的變化}}{\text{時間}}$

1967 年 8 月到 1970 年 8 月：

$$\text{加速度}=\frac{\frac{8.50\%}{\text{年}}-\frac{5.95\%}{\text{年}}}{3\text{年}}=\frac{2.55\%}{3\text{年}}=$$

每年每年 0.85%

1974 年 2 月到 1974 年 8 月：

$$\text{加速度}=\frac{\frac{11.5\%}{\text{年}}-\frac{9.91\%}{\text{年}}}{3\text{個月}}=\frac{1.24\%}{\frac{1}{4}\text{年}}=$$

每年每年 4.96%

註：爲了避免用"每年每年"，我們可以把第二個加速度描述爲"年利率平均一年增加 4.96%"。

（作者：國立台北師院副教授）