

國小數學科新舊課程學生 數學能力之比較研究(三)

基本運算及解題應用方面

洪志生

這一部分的評量題目總共有25題，其中有3題是數的大小比較，有7題是關於分數及小數的四則計算，其餘的15題皆為四則應用的文字題，諸如：工程問題、比例問題、由分量求全量、平均數的應用等。將這些問題依其內容及評量重點，整理歸併成十一個評量項目，某一評量項目下各題通過率的平均值就當作該評量項目的平均通過率；少數項目只有一題，則以該題之通過率為該項目之通過率。

這些題目在預試時均採用填充題方式，預試之後再根據學生答題的情形編成正式題本。在正式題本中雖然採取選擇題的方式，但各題正確答案以外的選項都參酌預試時常見的答案，使其儘可能代表某種錯誤的類型，而非毫無意義的數字。以下就評量所得之結果加以分析討論之。

一、就評量項目來看：(表一)

(一)新課程學生表現最優的項目是「數的大小比較」，平均通過率為83.57%，其次是「分數的乘除運算」，平均通過率是82.41%；表現最差的項目是「分數與小數的四則混合運算」，通過率是20.83%，其次是「母數與子數求法的應用」，平均通過率是30.56%。

舊課程學生表現最優的項目是「數的大小比較」，平均通過率為74.79%，其次是「分數的乘除運算」，平均通過率為70.51%；表現最差的項目是「母數與子數求法的應用」，平

均通過率為16.99%，其次是「分數與小數的四則混合運算」，通過率為32.69%。
可見在「基本運算與解題應用」方面，新課程學生最熟練的項目和最感困難的項目大致上是和舊課程學生相同。

表一 十一個評量項目及其在兩組的平均通過率

評量項目	題次	平均通過率(%)	
		新課程	舊課程
1. 數的大小比較	一、二、三	三三·五七·七四·七九	三八·三七·七四·七九
2. 分數的加減運算	九	一六·八·七五·七·〇五	一六·八·七五·七·〇五
3. 分數的乘除運算	四、五、七	三八·二·四二·七〇·五二	三八·二·四二·七〇·五二
4. 小數的乘除運算	六、八	二七·三·九六·五·七七	二七·三·九六·五·七七
5. 分數與小數的四則混合運算	十	一〇·八三·三二·六九	一〇·八三·三二·六九
6. 整數運算的解題應用	一一、一二、一七、二〇、二三	五五·七·三六·四·七七	五五·七·三六·四·七七
7. 分數運算的解題應用	一五、一六、一九	三六·一·三四·四·四四	三六·一·三四·四·四四
8. 小數運算的解題應用	一四、一八	二六·二·八五·〇·九六	二六·二·八五·〇·九六
9. 比例關係的解題應用	二、一二	二四·四·七九·三五·五九	二四·四·七九·三五·五九
10. 母數與子數求法的應用	一四、一五	二三·〇·五六·一六·九九	二三·〇·五六·一六·九九
11. 縮圖的計算	一三	一五·八·三三·四七·四四	一五·八·三三·四七·四四

(二)新課程學生平均通過率在80%以上的只有兩項，依次是：數的大小比較(83.57%)。分數的乘除運算(82.41%)。

舊課程學生則沒有一項達到 80% 的平均通過率。

新課程學生平均通過率在 50% 以下的有三項，舊課程學生平均通過率在 50% 以下的有六項，將其項目依平均通過率由低而高排列如表二所示：

表二 平均通過率在 50% 以下的項目

新課程學生	舊課程學生
1. 分數與小數的四則混合運算 (二〇・八三%)	1. 母數與子數求法的應用 (一六・九九%)
2. 母數與子數求法的應用 (三〇・五六%)	2. 分數與小數的四則混合運算 (三三・六九%)
3. 比例關係的解題應用 (四四・七九%)	3. 比例關係的解題應用 (三五・五八%)
	4. 分數運算的解題應用 (四四・四四%)
	5. 整數運算的解題應用 (四五・七七%)
	6. 縮圖的計算 (四七・四四%)

由表二可知，兩組學生所共同感到困難的項目包括：

「分數與小數的四則混合運算」、「母數與子數求法的應用」以及「比例關係的解題應用」。而舊課程學生感到困難的項目則比新課程學生多。

(三) 新課程學生優於舊課程學生的有十項，舊課程學生優於新課程學生的則只有一項。將其項目按照差距由大而小排列，如表三所示：

表三 新舊課程學生在各評量項目的優劣比較

新課程優於舊課程		舊課程優於新課程	
評量項目	差距(%)	評量項目	差距(%)
1. 小數的乘除運算	一八・一九	1. 分數與小數的四則混合運算	一一・八六
2. 分數運算的解題應用	一六・九〇		
3. 母數與子數求法的應用	一三・五七		
4. 分數的乘除運算	一一・九〇		
5. 小數運算的解題應用	一一・八九		
6. 整數運算的解題應用	一一・八六		
7. 分數的加減運算	一一・七〇		
8. 縮圖的計算	一〇・八九		
9. 比例關係的解題應用	九・二一		
10. 數的大小比較	八・五八		

二、就評量目標來看：(表十四)

(一) 新課程學生在所評量的 25 個目標中，有 28% 的目標達到 80% 以上的成就水準，通過率最高的是 89.58%，評量目標是：「能做兩個真分數相乘的計算」。通過率最低的是 20.83%，評量目標是：「能做帶有括號的分數及小數四則混合計算」。

舊課程學生在所評量的目標中，只有 8% 的目標達到 80% 以上的成就水準，通過率最高的是 81.41%，評量目標是：「能做兩個真分數相乘的計算」。通過率最低的是 14.74%，評量目標是：「已知兩量的總和及其關係，能求出其中一量」。

(二) 就新舊課程兩組學生通過率的分佈情形而言，新課程學生的通過率以 80% 以上的題數最多，共有 7 題，佔 28%；舊課程學生則以通過率在 30% 到 40% 之間的題數最多，共有 6 題，佔 24%，詳細情形如表四所示：

表四 通過率之分佈情形

通過率	新課程		舊課程	
	題數	百分比	題數	百分比
80% 以上	七	二〇%	二	八%
70% ~ 80%	二	八%	四	一六%
60% ~ 70%	六	二四%	三	一二%
50% ~ 60%	三	一二%	三	一二%
40% ~ 50%	一	四%	四	一六%
30% ~ 40%	四	一六%	六	二四%
20% ~ 30%	二	八%	〇	〇%
10% ~ 20%	〇	〇%	三	一二%

(三) 在 25 個評量目標中，新舊課程兩組學生有顯著差異的共有 18 題，佔全部的 72%，其中有 16 題是新課程學生優於舊課程學生，有 2 題是舊課程學生優於新課程學生，詳見表十四。

三、錯誤情況分析：

以下就新舊課程學生在各評量題上的作答情形，分析比較其一般性的錯誤類型或不尋常的錯誤類型，而歸納出幾項要點。

(一)兩組學生的解題能力均比計算能力差得多，不少學生並不將所學得的基本技能應用於解決問題，而只是嘗試著將某些計算方法機械性的應用於文字題中所給的一些數字：

只要將「基本計算」和「解題應用」這兩部分的平均通過率加以比較，就可以看出學生在這兩方面能力的差異。爲了能真正反映出解題的能力，文字題中的數字都相當簡單。由於15個文字題的最後5題可能會有學生來不及做完，因此我們取前10個文字題（題11~20）的平均通過率與10題基本計算題（題1~10）的平均通過率相互比較，可以看出無論是新課程學生或舊課程學生，他們在這兩部分的差距都在10%以上，如表所示：

表五「基本計算」與解題應用」兩方面的平均通過率比較

組別	類別	
	基本計算	解題應用
新課程	七四·五四%	六一·六七%
舊課程	六三·七二%	四九·二三%

若再就一些個別的題目來看學生作答的情形，則更能看出他們在解題應用上的困難。表六的問題是關於整數運算的解題應用，題中所給的數字只有8和2，相信對一般的六年級生都相當簡單，解題的運算步驟是： $(8-2) \div 2 = 3$ 。在一個只須要這麼簡單步驟就能求出答案的題目，通過率却不到80%，而新課程學生的通過率更是低得離譜。在答錯的人中，兩組選答「6公尺」的百分比皆高達20%以上，也許是因爲學生看到問題中出現比較性的敘述如：「黃色部分比綠色部分長2公尺」，就將兩數相減作爲其解。這可能是有些教師在教學時強調和某種運算有關的關鍵字所造成的後果。另外再

表六 整數計算的應用

問題	選答原因	選答百分比	
		新課程	舊課程
8公尺長的竹竿被塗成黃和綠兩種顏色，已知黃色部分比綠色部分長2公尺，問綠色部分有多長？			
3公尺（正確答案）	$(8-2) \div 2$	45.12	62.18
4公尺	$8 \div 2$	18.06	12.18
5公尺	$(8+2) \div 2$	4.86	3.21
6公尺	$8-2$	26.39	21.15

就表七的兩個題目的答題情形加以比較，第一題的正確答案是「56」，選答「6578」的是由於約分不完全，我們可以假設這類學生基本上也會做分數的除法，將選答「56」和「6578」的百分比相加，我們可說新舊課程兩組學生能做分數除法的各佔93.06%及68.59%，然而在只需要類似的運算步驟的文字題，兩組的通過率皆顯著降低，且各有19%以上的學生將題目中的兩個數字做了某種錯誤的運算方式，可見對分數的意義缺乏透澈的理解，對題意也未能把握。

表七 分數的相除

問題	選答原因	選答百分比	
		新課程	舊課程
$\frac{5}{12} \div \frac{1}{6} = ?$ $\frac{5}{6}$ （正確答案）	——	71.58	51.28
$\frac{65}{78}$ （約分不完全）	——	21.53	17.31
一個西瓜的 $\frac{3}{4}$ 重 $10\frac{7}{8}$ 公斤，問這個西瓜原有多少公斤？			
$\frac{5}{32}$	$10\frac{7}{8} \times \frac{3}{4}$	12.50	11.54
$14\frac{1}{2}$ （正確答案）	$10\frac{7}{8} \div \frac{3}{4}$	61.11	47.44
$43\frac{1}{2}$	$10\frac{7}{8} \div (1 - \frac{3}{4})$	6.25	8.97
其他計算上的錯誤		15.97	26.92

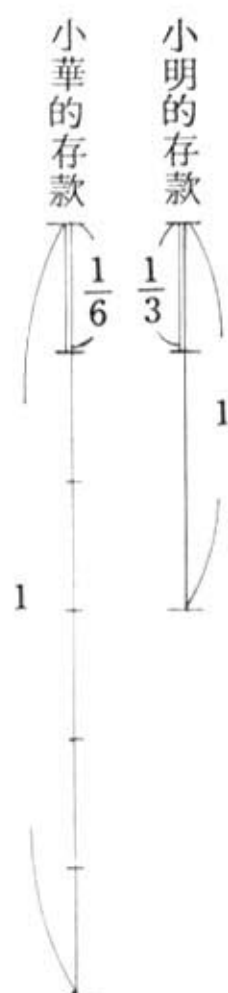
(二)兩組學生都沒有發展出解題的好方法——繪圖：

有一個基本方法對於某些問題的分析會很有幫助，那就是繪圖。表八的兩個題目的通過率顯示出多數學生未能依照題意將圖形繪出並運用已有的知識於解題。這兩個題目看似很難，但只要利用線段圖來思考，就能求得其解。

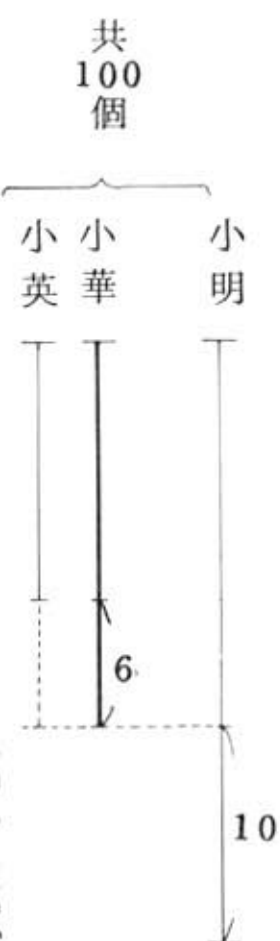
表八 需要利用線段圖來思考的問題

問 題	作答情形百分比	
	新課程	舊課程
小明存款的 $\frac{1}{3}$ 正好是小華存款的 $\frac{1}{6}$ ，問下列敘述何者為真？ 小明的存款是小華的兩倍 小華的存款是小明的兩倍（正確答案）	四〇・九七 三八・一九	四一・〇二 三三・九七
一〇〇個花片分給小明、小華、小英三人，小明比小華多10個，小華比小英多6個，請問小華分得幾個？ 廿八個 卅二個（正確答案） 卅四個 卅八個	一六・六七 三八・一九 一九・四四 一一・一一	一九・二三 一九・二三 三一・四一 三八・八五

第一題的解題方法要點是依照題目的文字敘述繪圖。先畫一條直線段代表小明的存款，它的 $\frac{1}{3}$ 是小華存款的 $\frac{1}{6}$ ，將這一段畫在下面代表小華存款的位置上，然後延長為6倍長，就是代表小華存款的線段。根據所繪的圖就能清楚的看出小華的存款是小明的兩倍。



兩組皆有40%左右的學生搞不清楚到底誰是誰的兩倍，可見在解題方法的發展及應用上有待加強。第二題的解題要點也是畫線段圖，圖形如下：



先畫一條線段代表小明的花片數量，依照題意「小明比小華多10個」而畫出小華的線段，再根據「小華比小英多6個」而畫出小英的線段，由於三個人的花片共100個，以小華的線段為基準，減掉小明多出的10個，加上小英少的6個，再除以3，就是小華的數量。表六的問題亦可用類似方法求解，而且步驟更簡單。

(3)在四則混合計算中，兩組學生都表現出對運算的先後順序的混淆，新課程學生犯此類錯誤的比率高於舊課程學生：

表九的第二題涉及「完全約分」，第四題涉及「用四捨五入法取到百分位」的技巧，若撇開這兩個因素不談，則兩組在小數的相

表九 分數與小數的計算

題 目	成就水準%	
	新課程	舊課程
$3\frac{3}{5} \times 1\frac{1}{9} = ?$	86.11	78.85
$5\frac{5}{12} \div 6\frac{1}{2} = ?$	93.06	68.59
$41.5 \times 5.8 = ?$	83.33	66.02
$3.48 \div 6.7 = ?$	85.41	83.33
$2.5 + 8\frac{3}{4} \div (0.8 - 0.3 \times 1\frac{1}{2}) = ?$	20.83	32.69

乘、相除和分數的相乘、相除等單一步驟的計算上，分別達到83%及66%以上的成就水準，但在四則混合計算題的通過率却顯著降低，新課程且低於舊課程。答錯者大部分是由於在加、減、乘、除運算的先後次序錯誤所致。雖然在課堂上教師常提醒學生「先乘除，後加減」，學生對此也多能朗朗上口，但在實際演算中却有所疏忽。（見表十）

在數字相乘的過程中該進位的地方沒有進位。選答「2383」的學生則同時犯了前述的兩項錯誤。第二題答錯的學生大部分是會計算而卻不會用四捨五入法取到百分位，選答「0.519」的學生很顯然

$$\begin{array}{r} 41.5 \\ \times 5.8 \\ \hline 3280 \\ 2055 \\ \hline 238.30 \end{array}$$

小數點位置的錯誤，選答「238.3」的學生可能是這樣計算的：

四在位值觀念的應用上，新課程學生比舊課程學生進步：

表十一的兩題都和位值有關，第一題選答「2407」者是由於

表十 「分數與小數的四則混合運算」的錯誤類型

題 目	錯 誤 的 原 因 (計 算 的 步 驟)	作 答 情 形 百 分 比	
		新 課 程	舊 課 程
$2.5 + 8\frac{3}{4} \div (0.8 - 0.3 \times 1\frac{1}{2}) = ?$	$2.5 + 8\frac{3}{4} \div ((0.8 - 0.3) \times 1\frac{1}{2})$	24.31	6.41
$14\frac{1}{6}$	$(2.5 + 8\frac{3}{4}) \div ((0.8 - 0.2) \times 1\frac{1}{2})$	20.83	19.23
15	—	20.83	32.69
27.5 (正確答案)	$(2.5 + 8\frac{3}{4}) \div (0.8 - 0.3 \times 1\frac{1}{2})$	20.83	27.56
$32\frac{1}{7}$			

表十一 位值觀念的應用

題 目	作 答 情 形 百 分 比	
	新 課 程	舊 課 程
$41.5 \times 5.8 = ?$		
238.3	3.47	1.28
240.7 (正確答案)	83.33	66.02
238.3	2.78	16.67
2407	9.72	14.10
$3.48 \div 6.7 = ?$ (用四捨五入法取到百分位)		
0.51	13.19	20.51
0.519	7.64	17.31
0.52 (正確答案)	64.58	45.51
其 他	13.89	13.46

表十二 中等程度的學生容易犯的錯誤

題 目	作 答 情 形 百 分 比	
	新 課 程	舊 課 程
$4262910 \square 2462910$		
$<$	6.25	7.05
$=$	3.47	19.23
$>$ (正確答案)	88.89	71.79
周長 200 公尺的長方形一個，長和寬的比是 3 : 1 求此長方形的面積是多少平方公尺？		
1875 平方公尺 (正確答案)	34.72	35.90
3750 平方公尺	12.50	12.82
7500 平方公尺	30.56	22.44
30000 平方公尺	5.56	7.69

沒弄清楚百分位的位置。由表十一及表十四可以看出新課程學生在位值方面的應用比舊課程學生進步。

(五)「未及看清題目內容即行作答」是一般中等程度的學生很容易犯的錯誤：

就表十二的第一題而言，舊課程學生選答等號的高達 19.23%，而其中以中等程度的學生為最多，可見他們並非真的不會比較兩數的大小，而是只看到兩串數字的後半段相同，就以為是同一個數，可以說是見樹不見林。第二題選答「7500 平方公尺」者是直接將 200 公尺依照 3 比 1 的比值求得兩數當作長與寬，卻沒有注意到周長包括了兩倍的長和兩倍的寬。新舊課程學生犯此錯誤者分別為 30.56% 和 22.44%，並且也是以中等以上程度的學生佔多數，想必不是真的不知道周長包括兩倍的長和寬，而是沒看清楚題目。

表十四 「基本運算及解題應用」評量目標及兩組通過率之Z考驗

題次	評量目標	新課程 ($N_1=144$)		舊課程 ($N_2=156$)		Z 值
		通過人數	通過率%	通過人數	通過率%	
1.	在兩個一位整數的數字句之間，能認出應該用<、=或>來表示兩者的大小關係	119	82.64	113	72.44	2.109*
2.	在兩個七位數之間，能認出應該用<、=或>來表示兩者間的大小關係	128	88.89	112	71.79	3.698**
3.	在兩個分數的數字句之間，能認出應該用<、=或>來表示兩者間的大小關係	114	79.17	125	80.13	-0.207
4.	能做兩個真分數相乘的計算	129	89.58	127	81.41	1.999*
5.	能做兩個帶分數相乘的計算	124	86.11	123	78.85	1.648
6.	能做兩個帶小數相乘的計算	120	83.33	103	66.02	3.429**
7.	能做兩個帶分數相除的計算	103	71.53	80	51.28	3.592**
8.	能做兩個帶小數相除的計算，並以四捨五入法取到百分位	93	64.58	71	45.51	3.315**
9.	能做三個異分母分數的加減計算	99	68.75	89	57.05	2.093*
10.	能做帶括號的分數及小數四則混合計算	30	20.83	51	32.69	-2.311*
11.	能解兩位以內整數相加相減的文字題	121	84.03	110	70.51	2.779**
12.	能解有關一位整數減法和除法的文字題	65	45.14	97	62.18	-2.959**
13.	能根據比例尺求出某一實際長度在縮圖上的長度	84	58.33	74	47.44	1.889
14.	能解有關小數除法的單步驟文字題，並對答案做約估	93	64.58	100	64.10	0.087
15.	已知6人合作15天可完成的工程，能求解5天完成所需的人數	122	84.72	81	51.92	6.068**
16.	能利用還原算法，由比值和比較量求解全量	88	61.11	74	47.44	2.374*
17.	已知250除以某數，再減去24所得的差，能以逆算方法求出某數	94	65.28	65	41.67	4.094**
18.	能利用比例關係解有關小數乘法和除法的文字題	88	61.11	59	37.82	4.032**
19.	已知甲量的幾分之幾相當於乙量的幾分之幾，能解出兩量的直接關係	55	38.19	53	33.97	0.761
20.	能應用平均數求解兩位以內整數相乘、相減的文字題	78	54.17	55	35.26	3.294**
21.	當距離一定時，能利用反比關係求解有關速率和時間的文字	79	54.86	55	35.26	3.412**
22.	已知長方形周長及長與寬的比例，能算出長方形的面積	50	34.72	56	35.90	-0.213
23.	100個東西分給3個人，能利用分配的差額求解某人分得的個數	55	38.19	30	19.23	3.642**
24.	已知全量的幾分之幾的幾分之幾，能求出全量	38	26.39	30	19.23	1.479
25.	已知兩量的總和及其關係，能求出其中一量	50	34.72	23	14.74	4.029**

(洪志生小姐本會副研究員，國立清華大學數學系畢業，國立師範大學教育研究所碩士，現在本會資料中心從事資訊教育研究工作)

(六)兩組學生在利用母數與子數關係求解的文字題方面，普遍皆有困難，唯新課程學生優於舊課程學生：
兩組學生在表十三的兩題通過率皆低，第一題錯誤的原因可能是由於「以全量為1，全量的80%再當作1」的觀念不夠徹底，以致相互關係弄不清楚，也可能是由於對「全部的幾分之幾的幾分之幾」的意義和求法不夠瞭解。第二題答錯者最可能的原因是相互關係弄不清楚，不知該以甲或乙當作母數。

表十三 母數與子數關係求法的應用

問 題	通過率(%)		Z 值
	新課程	舊課程	
小英家裏上個月的支出佔總收入的80%，支出項目中50%是伙食費，已知伙食費是六〇〇〇元，那麼上個月的總收入是多少？	二六・三九	一九・二三	一・四七九
甲乙兩船共捕魚八四〇〇公斤，已知乙船所捕的魚量是甲船的二・五倍，問乙船捕魚多少公斤？	二四・七二	一四・七四	四・〇二九