

第三章 課程本位評量在數學領域之運用

壹、數學領域之整體目標與範圍

一、整體目標

數學領域，包括多樣化的整體目標及技能。一般來說，發展數學教學有下列幾項目標：

1. 適當的計算能力：許多冗長、複雜的運算程序，可以電腦或計算機來完成，但學生應能進行一位數心算、簡單的分數及百分比計算，特別是在消費情境中應用。
2. 應用至日常生活情境中：學生應能選擇並使用適當的計算能力，以處理每日生活情境中之事物。
3. 對結果合理性之敏銳度：學生應能對計算後的答案進行驗算，檢核其答案對於問題是否合理。
4. 閱讀、解釋和製作表格，圖表和圖形：整合並思考如何將數據變得更有意義、可管理。學生應能閱讀圖表，並能繪製圖表，將數據資料視覺化。
5. 解決問題：學生應能運用已習得之技能，以分析、邏輯思考，及將問題轉譯為數學形式，來解決未接觸過的問題情境。
6. 幾何：在談論到環境及解決問題時（包含測量），幾何之概念及特性都是相當重要的。
7. 以數學概念進行預測：能以基本機率概念預測事物，學生應該了解如何運用數學能力作多項預測。
8. 估計值及近似值：學生應能使用四捨五入快速地進行估計。同時，應具有數量、重量、距離等簡易的估測能力，以及能了解在特定情況下如何獲取精確的結果。
9. 測量：包含時間、距離、音量，及溫度。學生應能以公尺、英呎等單位進行測量。
10. 電腦能力：了解何為電腦可達及不可達之。

上述課程目標涵蓋了一般學生及學習困難的學生應習得之技能。特殊教育學生之教育歷程：「在達到知能精熟前，這些學生需反覆練習相關技能及概念」。然而，多數教材較難協助其達到適性的功能，對此可採調整課程目標方式，以符合特殊教育學生之個別需求及能力，然整體目標以協助其獨立生活之功能性為主。例如，可採較少的課程目標，即減少目標數量或簡化目標內容、改寫目標等方式。

二、領域範圍與順序及其應用

數學課程中所涵蓋領域範圍及依序呈現之技能和概念。教師數學手冊中皆有教學範圍、順序之描述。教師要先確認實際教學與手冊中之數學相關技能之描述的一致性，並注意是否涵蓋其相關技能與各種問題類型。倘若具系統化、順序與組織性，就可以提供教師該範圍、順序中所應備之技能、出現的頻率，以及技能出現的時機等相關訊息。

可注意下表中未包括「解決問題」，因題目多為許多單元組成，學生回答應用題時，須具備多項能力（閱讀及對不同句型結構之理解、邏輯思考能力）及各種運算技能（Bachor, Steacy 及 freeze, 1986），學生解題時便是其認知的外在表徵，教師可藉此分析並檢核學生問題癥結之處。

課程內容	相關技能及概念
整數	小學數學之核心，運用加、減、乘、除等運算解決整數問題，加法多為運算教學之首要順序。如：學生熟練一位數（0 到 9）的加總後才會介紹到減法的部分。當可記憶 0 到 9 不同數字之減法後，課程會再回到 10 到 18 的加總問題。
分數	由先備技能（如：區分數字位置及用詞，像是分子、分母）開始一旦先備技能精熟，便可開始進行基本運算。 如：五年級可能需運用加法及減法來解決分數問題，但可能直到六年級才被要求以乘法或除法來解決分數問題。
測量及幾何	包含在課程各層次中。
十進位、比率、百分比	分數之後才會介紹到。

學生須備之能力	→	教師分析及檢核
<ul style="list-style-type: none"> *理解：理解題目所問的問題 *分析：區辨相關及不相關之訊息 *組織：判斷及組織多項步驟順序 *運算：選擇正確的運算方式 *計算：計算答案 *檢核：檢查答案 	→	<ul style="list-style-type: none"> *題目閱讀水準過高？ *是否符合學生目前的計算能力？ *需兩個以上的步驟解題時，學生否有問題？ *是否與所提供的資訊質量相關（較多資訊→可協助解題/造成干擾？），下方將舉例說明：

實例：

小明和小英去海邊，看到 3 隻海星、5 隻蟹及 1 隻海豚；小英看到 13 蛤、2 鯨魚，（所提供之的資訊質、量），因此小朋友看到了多少潮間帶生物？

增加相關資訊→小明和小英都是小朋友，海星、蟹、蛤都是潮間帶生物

分析	【明確地告訴學生，小明和小英是小朋友，其他的為潮間帶生物。】雖題目增長，但提供信息後較無提供者，可減少解題時的困難。
----	--

增加無關資訊→而小英有隻名叫米琪的狗，對 3 隻以上的海星狂吠

分析	【劃線處與欲解之問題並不相關，但學生很可能將此誤認為一個線索。】無關資訊可能產生誤導，更使學生更難理解問題。
----	--

Englert, Cullata, and Horn (1987) 發現，對學習困難的學生來說，增加無關之文字、數字資訊，在處理應用題時易產生困難。應用題中與問題無關之數字資訊較文字訊息對學生解題時易產生干擾。據此，教師可系統地變化應用題中無關之訊息，以從中獲取關於學生在解題時的重要信息。此評估方式，使教師得以區辨學生在解題時產生錯誤，是否緣於計算錯誤或理解困難。

貳、數學技能之評量

在測量學生數學技能時，教師有幾種評量模式可以選擇，亦可決定如何執行錯誤分析。

一、成就表現測量

在進行數學成就表現測量時，有各種呈現及反應模式：呈現乃是陳述問題的方式，而「刺激呈現」在於學生知覺或內在的過程。反應則是學生經學習後，被要求表現回應的模式。技能為多項能力的組成，因此常需運用一種以上方式進行測量，如下所示：

<p>例 1：為評量學生對幾何形狀的瞭解，要求學生畫一個長方形或在多種形狀中找到指定的形狀（包括長方形）。</p> <p>例 2：某些學生因受智力所限，在解決計算問題時可能有困難，此時可提供計算機以協助計算。</p> <p>例 3：練習購物 有些學生可能需要模擬練習（如學生比較相似的雜項，並購買最佳的項目，以完成練習）；某些學生，則可能需要執行行動（肢體）任務（如到商店中，並購買最佳的項目）。</p>

然而，無論何種目標行為，在一般數學課程所教導之多數技能，多可運用正確百分比或正確率，作為成就表現測量模式。以下針對使用時機、目的及程序加以描述：

	成就表現測量一：正確百分比	成就表現測量二：正確率
使用時機	<ol style="list-style-type: none"> 1. 正確性及獲得程度為測量重點。 2. 調查各種技能表現，以確認可能的問題範圍，同時留意可能易使學生解題產生困難之問題類型。 3. 當建立等級標準時可能過於繁瑣。如應用題較難建立等級/比率標準，因當學生在解題時，有許多變項可能影響解題速度，如語言和數值之干擾、數字和解題所需的運算方式、字數、閱讀水準等。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 所評估的能力為單一或個別獨立之技能。 2. 技能表現之流暢性（表現正確且快速）為主要關注的重點。
目的	檢視教材對個別學生的難易度，作為挑選教材及分組教學之依據。	瞭解單位時間內正確反應的次數，反應出學生短期內的進步情形。
程序	<ol style="list-style-type: none"> 1. 先確立正確反應的標準。 如，請學生展示他們所有作業，總計回答正確的數字量（非計算正確答案）或圈出他們的答案。 2. 設置可接受之能力表現標準。 常用於學習之獲得階段，90%常作為評定獨立技能之標準。 	<ol style="list-style-type: none"> 1. 建立評定正確反應之標準（以同樣的標準可作為正確反應之正確百分比之用）。 2. 須對可接受之表現，設置標準。 3. 需計時並計算每分鐘的反應速度。

叁、評量層次

多數班級中，評量計算能力多處於抽象層次，此層次中的學生必須使用數學關係的抽象概念或以符號來表徵實物來解決問題（即 6 個人加上 4 個人，須寫成算式『 $6+4=?$ 』）。

為適當評量學生之技能、有計畫地進行教學，其評量與教學應置於其他更具體的層次 (Mercer & Mercer, 1985; Reisman, 1984)。在測量學生特定技能表

現時，教師應先評估其理解力之具體、半具體及抽象層次，研究發現學習困難學生較一般同儕更常使用具體的方法來解題 (Connors, 1983)。以下除三大層次之解題方式等相關概念外，另補充教育部九年一貫課程國民義務教育階段的四個學習階段於右列，兩者看法相似，供作參酌：

層次	解題方式	例：「 $9-6$ 」	補充
具體	操作實物 包含運用物件和程序來解決問題	先點數出 9 塊積木，再移除 6 塊，最後計算剩下的積木，以找到差額。	1. 具體表徵、強調視覺 2. 具體表徵、察覺樣式
半具體	包含評估學生是否需其他輔助工具。	藉圖解、數線、用手指來解決問題，學生未能立即心算，依此解題，則其解題的程度目前處於半具體層級。	3. 類化具體表徵、察覺樣式間的關係
抽象	能夠僅運用「數」解題	老師問：「 $9-6=?$ 」，即能寫出答案或口頭回答「3」。	4. 符號表徵、非形式演譯

肆、錯誤分析

一、檢核錯誤的準則

一般多依學生答案的正確與否，來評定學生數學計算之表現，最後計算正確率或百分比，並將得分寫在考卷上方。若以上述方式進行評量，教師可能會錯失許多重要訊息。如兩名學生錯了同樣題目，但原因可能不同。

而評分和評量之功能在於：(1) 發現學生無法解決的特定問題類型；(2) 了解學生無法解決的原因。(3) 特定的錯誤類型，會直接影響教學目標，因此教師或許可以利用教學策略導正其技能。教師若發現學生經常在某種問題類型中產生錯誤，可依以下準則作進一步檢核：

準則	說明
準備足夠的錯誤類型問題量	為能充分獲取學生作業的樣本及確認學生在處理此問題類型時有所困難。
記錄解題過程	留意學生如何解決題目最後所提出的問題，勿提供任何指導。
瞭解心理運作過程	在答題後，詢問學生如何解題，或當他們在解題時，記錄其反應。對學生的反應不要加諸評論或給予任何時間壓力，並不於當下進行教學。

二、常見的數學錯誤類型

錯誤類型的呈現，有多項的分類組合，以下呈現五種計算錯誤之類型 (Miller & Milam, 1987)：

1. 缺乏先備技能：數學概念不足

為更高階的運算基礎，例如學生需精熟多種基本運算（如加法）才得以進行乘法和除法。多數錯誤的產生乃因缺乏先備技能，如乘法錯誤，多因無法牢記基礎乘法（如九九乘法）和加法（基本心算）概念；除法問題多因進行減法時而發生錯誤，或是忽略了餘數。

2. 不正確的算法

一名學生具有基本概念（如心算），同時可列出正確算式。但解題時，卻以錯誤程序進行計算。

3. 隨意反應：學習態度所致的錯誤

所回答的答案通常與題目所問無明顯相關。或許是因猜測和/或缺乏動力，導致答案常「文不對題」。

4. 運算錯誤

這個錯誤可能是由於多個因素（如了解該符號之含義、粗心等）。

5. 明顯地計算錯誤

計算為「技能偏向的數學能力，具體的行為表徵，如加減乘除的操作」。因此，學生可能列出正確的運算方式，但心算時可能產生錯誤。

伍、示例

王老師任教於台北市某國小資源班，每學期有約有 15 名學生。第一學期開始，數學課安置了 2 名新同學。

一、確認評量之原由

2 名學生分別為明珠（二年級）、小黃（四年級）皆接受個別化教育計劃（IEP）之服務，因此兩人有不同的數學目標。王老師經由其教學目標，持續監控其進步情形。

二、分析課程

（一）個案一：明珠

明珠之數學目標為「增進記數能力」，其目標包含認數、心算、書寫數字及排列數序。而認數為明珠 IEP 目標中的先備能力，依順序應先習得，因此王老師選擇認數作為教學的首要目標。針對教學目標，王老師將教學內容分成更小的單位，如不同時進行 0 到 100 的認數教學，採以規律、邏輯的方式將數字分組：0-9、10-19……等，每組則為一項次要能力或次目標。

因目標設定於知識層次，王老師僅需針對次目標決定相關的教學重點，其中 0-19 的認數最重要，其餘數字可經由這項規則而習得。因此，70% 的教學致力於 0-19 的精熟，再延伸 20 到 100。如 20 到 29 可經下列兩項規則來學習：(1) 20 讀作「貳拾」；(2) 其餘九個數 (21-29) 的念法則為：十位數的位置一樣念「貳拾」，再接著念出已習得的個位數字 (1-9)。

（二）個案二：小黃

小黃 IEP 之數學目標為「增進減法技能」。其目標包含兩位數（被減數個位數不為零）之借位減法、需多次借位之減法（被減數可能高達八位數）。王老師決定先由兩位數（被減數個位數不為零）之借位減法進行教學。

王老師針對小黃的目標作教學，運用標準「借入」的算法及強調兩位數之被減數、減數的借位概念。因其為更高階減法技能之基礎。

三、訂定行為目標

通常行為目標，意指具體目標，並包含於 IEP 中。可促進教師運用課程本位評量（CBA）去瞭解學生行為表現之動態進展。行為目標包含下列三項要素：

1. 行為：具體、可觀察且評量，由分析課程中直接獲得。
2. 條件：學習進行（學習行為）時的情況或條件，亦即依據教學情境中，所運用之教材內容序列及實際呈現的教材。
3. 標準：成功的標準是王老師決定表現標準的比率/等級。

以下為王老師針對 2 名學生所撰寫之目標，並依目標撰寫三大要素分析之：

- 明珠的具體目標：能於 0 到 100 之隨機排列的作業單中，每分鐘正確念出 100 個數字，僅 2 個以下的錯誤。
- 小黃的具體目標：能於兩位數借位減法作業單中，每分鐘正確寫出 60 個數字（非計算正確題數，而是計算答對的數字個數），僅 2 個以下的錯誤。

行為目標三要素	明 珠	小 黃
行 為	能正確念出 100 個數字	能正確寫出 60 個數字
條 件	給予數字 0 到 100 隨機排列之作業單	給予兩位數借位減法之作業單
標 準	一分鐘內能正確說出 100 個數字，並少於 2 個以下的錯誤	一分鐘內能正確寫出 60 個數字，並少於 2 個以下的錯誤

王老師為兩位個案選擇了適宜個別目標的比率：個案明珠：由視覺方式隨機呈現數字，明珠以口頭回答，來探測一分鐘內對 100 個數字的平均精熟程度；小黃之標準比率為每分鐘答對 60 個數字。

行為目標三要素	明 珠	小 黃
呈現——反應	看——說	讀——算
行為目標	平均 100 個數字/分精熟度	平均 60 個數字/分之精熟度

四、發展適當的評量程序

1. 選擇適宜的探測表

王老師決定以正確反應率作為評估的方式。目的在測量學生於目標中的進展情形。

2. 評量取材

每日之教學或練習內容（測驗符合教學內容）。

3. 評量方式

每日利用約 1 分鐘的時間針對教學或練習的內容進行評量，並設定測驗時間及設立目標標準（可經常性且重複施測）。

4. 訂定標準

明珠的探測表中，最少的數字量為 100；小黃為 60。

5. 評量重點

王老師認為確定學生問題比瞭解限時內所完成程度更重要。

以下是王老師為 2 位學生建構的探測表

個案一：明珠

- 評量內容：目標中所有的數字，但不直接與每日教學相關。
- 評量標準：100 個正確的數字量。
- 測驗設計：可分析為相同數字量的數字：0-9、10-19，及 20-100。
- 設計目的：為能徹底獲得朝向目標發展之資訊。若未達足夠的進展，王老師便可依所發展的探測表來監控對每個子目標的精熟度（即 0-9、10-19 及 20-99）。

表 3-1 看和說隨機的數字 (0-100)

14	16	10	12	9	99	18	52	2	50	8	85
13	22	3	14	0	66	28	55	5	77	4	44
36	38	5	35	6	76	48	91	1	88	2	54
71	32	6	16	9	33	42	82	8	10	2	31
50	89	11	53	3	57	81	43	7	52	4	28
26	27	36	25	6	32	29	71	5	76	5	70

個案二：小黃

- 評量內容：除探測表中兩對角線中的題目外，其探測表中的問題反映了目標中的行為表現（於兩位數借位之減法問題作業單中，能於每分鐘內正確寫出 60 個數字）。
- 評量標準：60 個正確的數字量
- 測驗設計：包含部分未設定的能力（表中對角線內之兩位數不借位減法題目，但注意，這些題目未呈現於小黃的探測表中）。
- 設計目的：可用以區分問題的原因是否和借位有關。

能力：兩位數借位之減法
學生姓名：_____ 日期：_____
正 確：_____ 錯 誤：_____

73	45	40	54	94	70	82	71	99	22	62	71
-54	-38	-17	-17	-85	-38	-67	-22	-19	-14	-23	-46
59	32	84	51	97	71	45	96	60	99	60	83
-39	-16	-48	-45	-39	-14	-16	-79	-15	-58	-46	-17
50	87	74	96	34	73	93	46	90	43	55	95
-33	-76	-69	-17	-26	-15	-29	-38	-12	-28	-43	-29
98	70	66	61	82	31	85	87	43	20	53	99
-19	-24	-45	-58	-49	-17	-17	-28	-27	-19	-28	-48
61	86	64	89	95	62	85	80	53	73	71	67
-53	-57	-17	-38	-67	-35	-16	-56	-14	-16	-54	-19

對角線中的題目非該次目標因此未呈現於探測表中

五、蒐集資料

資料內容為課程中，依能力、教學內容、學習方式所表現之成就。至於成就表現則依教學或練習的內容，每日進行 1 分鐘的探測所得的資料。王老師決定幾項執行及評分程序：「與明珠坐一起，以複本進行個測，請明珠說出數字後，持續記錄其反應正確或錯誤。若時間不足，可將其回答錄音，之後再作評分。可用小幫手、同儕協助或教師協助執行或計分。」

六、統整與展示資料

(一) 統整

記下應達到目標之日期及學生進步的速度，並依此來改善學生能力之缺失，兩者（達到目標之日期、進度）是預測及教學決定最佳的依據。

(二) 展示（半對數圖表）

王老師將觀察及評量 2 名學生在行為目標的進展之資料，選擇了比率/等級標準後，使用半對數圖表以視覺化呈現資料（見圖 3-1 及 3-2）。對某些學生而言，圖示課程本位評量資料可作為介入，提升學習動機。程序如下：

1. 在圖表中增加了相關的資訊：學生姓名、行為、目標等。
2. 記錄這幾次探測中正確的數字量，並將正確反應繪製成點。
3. 計算第一週探測之（3-5 天為基準）平均正確率，於日期中數上標記一點。
4. 參考學生過去表現、目前學習情形訂定達成目標標準之合理日期，並於目標標準及估計可達標準之日期的交點畫上星號（★）。
5. 最後劃一線連結第一週之平均正確率點與星號，此線即為目標線。

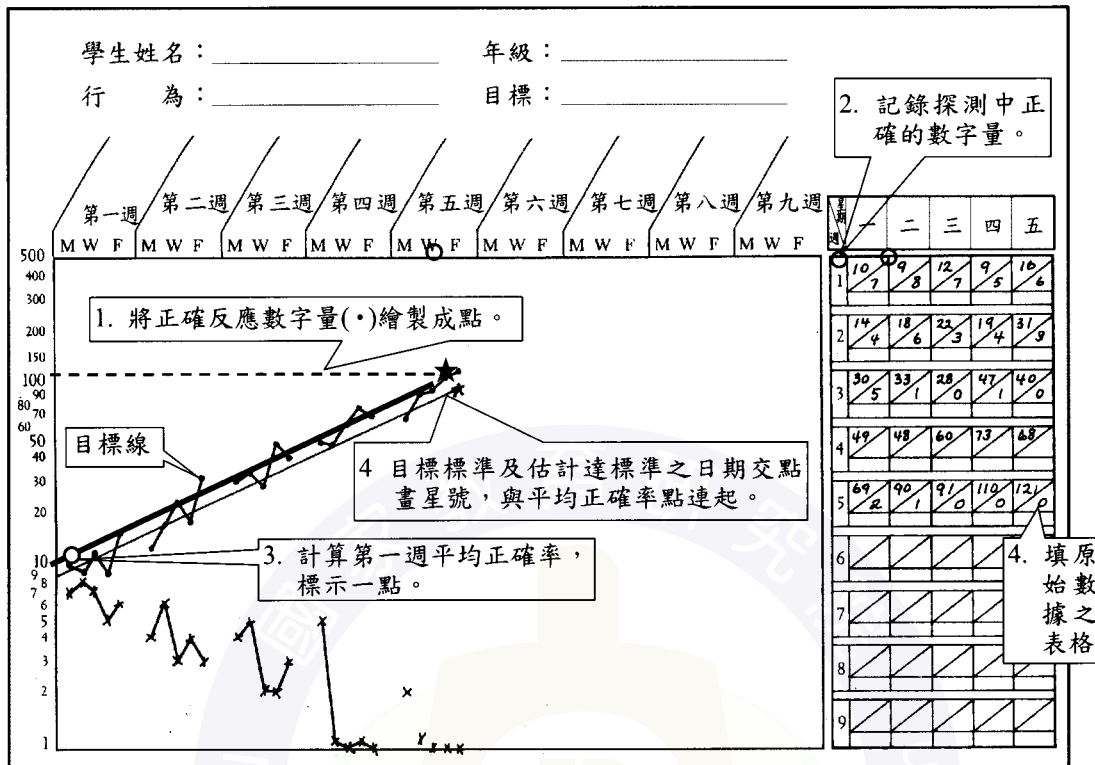
星號（★）：在所設定的行為目標標準中，可達此目標之時間。

目標線：清楚可見可達行為目標標準之速度及可達目標之合理的時間；該目標線決定學生表現結果是否達足夠的進步及作為教學效果之決定。

6. 於圖表右方繪製適當表格以填寫原始數據，並允許學生將表現繪製成圖。

舉例

王老師決定明珠須在五週內【應達目標之日期】達到每分鐘 100 個數字的目標。然後，將數個探測中正確的數字量繪製成點，並計算探測中平均正確率。王老師再由這些平均正確率繪製一條目標線，這條目標線將決定學生是否到達足夠的進展。之後，王老師由每次探測後的得分，皆將正確率繪製出來；此外，他也將原始數據寫於圖表右側的方格中，亦允許學生將自己的表現繪製成圖表。



資料來源：修改自 Salvia & Hughes (1990 : 173)

圖 3-1 明珠行為目標的進展資料

七、解釋資料與作教育決定

經一週左右的資料收集，王老師開始進行分析並判斷明珠和小黃的進步情形。

(一) 個案一：明珠

由圖 3-1 可知，明珠的正確反應率提升，並超越目標線，錯誤反應率呈現下降。根據這些資料，王老師決定維持目前的教學計劃。接著分析明珠之後幾週的表現，其顯示充分的進展，並在五週內達到目標。

王老師決定開始為明珠設定新的數學目標，雖明珠已接著進行新的目標，但仍須針對原先的行為目標定期探測，已確認明珠的表現依舊維持在可接受的標準中。

(二) 個案二：小黃

小黃表現卻不盡理想，經過兩週的教學，小黃之錯誤反應率呈現下降，但正確反應率卻不如預期的有所增進。為將小黃些微的改善進行量化，王老師計

算「變化速值」（顯示行為變化之兩個概念：上升、下降），先找出兩週的平均率，分別為 7.5 及 8.5，再以較大數除以較小數，發現變化速值要 $\times 1.13$ ，而該值低於最低值 $\times 1.25$ 。由此得知，雖小黃解題時可正確反應但速度過於緩慢。王老師推測可能有一項刺激媒介可促進作業的速度。

1. 介入

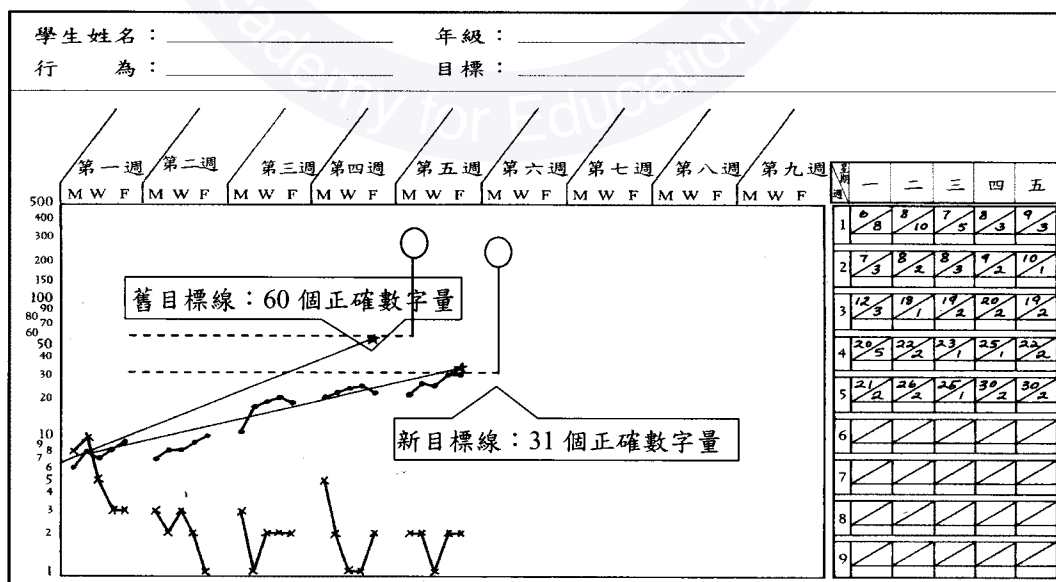
若小黃能較以往水平再增加三個數字，便給予獎勵（即自由時間）。接下來兩週小黃的表現有所改善，且正確反應率開始趨於平穩。據此，王老師決定調查何種介入，造成這種情形出現。

2. 重新探測

若在此情況下，標準可能要向下調整。為了評估書寫數字此項工具技能，在書寫數字的教學中，進行三次探測。在多次探測中，小黃能於 1 分鐘內依序寫出 0-9，該技能屬自動化層次，反映小黃書寫數字的速度。這三次的探測分別為 57/0、62/0 及 61/0（意指正確數字量/錯誤數字量）。

3. 調整

王老師將平均答對率 (61) 乘以 0.5，重新調整以每分鐘 31 個數字為教學標準。並依新的標準重新畫上一條目標線（見圖 3-2）。數天後，小黃達到新目標。由於「動力」為影響小黃於數學中其他目標及領域表現的問題，因此王老師決定同時提升數字及書寫速度，作為下一個數學教學之目標。



資料來源：修改自 Salvia & Hughes (1990 : 174)

圖 3-2 小黃重新調整後的進展資料

陸、結語

課程本位評量係以實際上課內容為依據，並依學生持續表現決定教學需求之程序，且有一套程序來測量學生的進展情形，而其測量過程簡短，對任一學習表現作持續的測量。因測量會重複實施，所以選擇適宜重複測量之學習任務是很重要的，而閱讀流暢性及數學計算之技能便有此特質。

在個別化數學課程中，王老師持續監控明珠和小黃的進展。對每一位學生，他進行了課程內容、精熟水準的分析、以及量化分析，然後評估學生朝向目標進步之情形。當他教學後，其執行探測並評定學生的得分，進而將這些分數以圖表呈現，接著分析學生對課程的能力表現，必要時調整教學方案，再繼續執行教學。這個程序將持續到學生達成其教學目標為止。

