

# 臺灣、新加坡與美國五、六年級分數教材佈題 呈現與知識屬性差異之研究

吳麗玲 楊德清  
嘉義大學

本研究之目的在探討臺灣九年一貫康軒數學版、美國《情境數學》(Mathematics in Context, MIC)與新加坡《大家一起學數學》(My Pals are Here! Maths, MPH)小學五、六年級分數教材內容之異同的分析與比較。採用內容分析法探討真實情境理念在三國分數教材的應用，及分數教材之程序性問題與概念性問題的分佈情形。

研究結果顯示三版本五、六年級之分數教材中，《情境數學》在情境問題的安排遠高於康軒數學和《大家一起學數學》；《康軒數學》和《大家一起學數學》活動內容較著重於程序性問題之呈現，而《情境數學》之活動內容則較強調概念性理解的問題；在教材內容深度上，《大家一起學數學》活動內容之數學概念似乎較《康軒數學》和《情境數學》數學略為提早一個年級呈現。

關鍵詞：內容分析法、分數概念、情境、程序性知識、概念性知識

## 壹、前言

TIMSS 1999 和 2003 之研究皆指出課程與學習成就之間具正向關係(Schmidt, McKnight, Houang, Wang, Wiley, Cogan, 2001; Mullis, Martin, Gonzalez, & Chrostowski, 2004)。的確教材深深影響學生的學習成效，對教材進行深入之分析與比較亦將有助於學生的學習。Haggarty 和 Pepin (2002) 針對英國、德國與法國的數學教材進行比較，研究顯示學習機會取決於課室中教師所採用的教材。而Tornroos (2004) 亦認為進行教材分析對於提升學生學習數學將會有很大助益。Hiebert 等人 (2003) 以及 Stigler和 Hiebert (2004) 等學者皆認為藉由跨國際性研究比較，可以更清楚瞭解本國之課程與教材之優劣。因此若能針對國際間的教材進行分析，將對國內課程改革有所助益。

分數概念之學習極為重要，它不僅是國小數學的基石，更是未來發展高深數學的基礎。許多學者認為假如學童的分數概念無法正確建立，將無

法進行其他相關概念的學習(劉秋木，2002；Post, Cramer, Behr, & Lesh, Harel, 1992; Cramer, Post, & delMas, 2002；Reys & Yang, 1998)。

此外，近年來許多學者指出將數學知識呈現在「真實情境」中進行學習，與學生的學習有正相關(Lesh & Lamon, 1992; Mullis, Martin, Gonzalez, & Chrostowski, 2000; OECD, 2004)。而概念理解一向是學習數學的基石，但許多研究(Steen, 1990; NCTM, 2000; OECD, 2004; Patrick, et al., 2004)顯示出概念理解與程序性知識其實是同等重要的，因為概念性理解是計算流暢性的先決要素(NCTM, 2000)。因此，概念理解與程序性知識是緊密相連的。

綜合上述，本研究之目的分述如下：

- 一、比較美國《情境數學》、新加坡《大家一起學數學》和臺灣《九年一貫康軒數學》(以下簡稱《康軒數學》)之五、六年級〈分數單元〉內容佈題呈現方式(情境與非情境)之差異。
- 二、比較「分數單元」內容數學知識(概念性與程序性問題)陳述方式之差異。

吳麗玲，嘉義大學數學教育研究所碩士班研究生；楊德清，嘉義大學數學教育研究所教授。

通訊作者：楊德清，621嘉義縣民雄鄉文隆村85號。  
E-mail: dcyang@mail.ncyu.edu.tw

## 貳、《情境數學》、《大家一起學數學》和《康軒數學》之教材發展

有鑑於透過情境學習數學對於學童有所助益，且我國課程改革備受美國影響（吳德邦，1985），故選用美國《情境數學》為研究對象。與臺灣教育文化及特性相似的新加坡學生在TIMSS 1995、1999和2003的測驗中皆拔得頭籌，顯見新加坡在數學教育上的成就相當卓越，而《大家一起學數學》又是目前新加坡所採用的主要教材；《康軒數學》在國內的使用從82年至今，目前也占有一定的市場。基於上述理由，本研究採用《情境數學》、《大家一起學數學》和《康軒數學》作為本研究之研究對象。

以下簡述美國《情境數學》、新加坡《大家一起學數學》和臺灣《康軒數學》之教材設計理念與分數概念脈絡。

### 一、《情境數學》（MIC）

《情境數學》是由美國威斯康辛大學——麥迪遜校區之教育研究中心和荷蘭的福祿丹索共同研發的一套課程，此套教材依據NCTM（1989）數學課程評量與標準（Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics）所設計而成（Romberg & Shafer, 2003）。課程中對於數學的學習，強調數學課題應是學生在日常生活中可能遭遇的問題。因此，將數學知識隱含在一個真實情境中出現，數學的學習更具意義，且能有較好的學習成效（Reys, Reys, Papick, Tarr & Arbaugh, 2006）。基於這樣的理念，由福祿丹索研究機構研發初步教材，而威斯康辛大學之教育研究中心進行修訂，進一步研發各個單元以供美國地區使用。教材初步在威斯康辛州進行小型試驗，針對教學後學生與教師們所提供的建議修訂教材，再將修訂教材於1991年到1996年，進行為期六年的教學實驗，然後再針對使用情況修訂，於1998年推出第一版《情境數學》教材（Holt, Reinhart & Winston, 2003）。

《情境數學》是美國國家科學發展協會贊助的

多套教材之一，秉持真實數學理念所研發的教材，希冀學生在習得此教材的過程中，能（1）探索數學間的關係（2）發展並解釋解題過程中的推理與解題策略（3）適切的使用解題工具（4）聆聽、瞭解與珍視他人的解題策略。

教材設計年級從五年級到八年級，內容涵蓋「數」、「代數」、「幾何」及「統計與機率」，每個年級十個單元，共四十個單元。因《情境數學》並未出版一到四年級的數學教材，故無法針對其對於分數教材的處理進行分析。不過，《情境數學》乃參考NCTM（1989）進行編制，故可從美國NCTM對於分數教材的處理看出端倪。NCTM（1989）對於分數的學習，是從第一個階段開始（幼稚園——4年級），此階段則需發展「分數、帶分數的概念」、「具備分數的數常識」、「使用模型（models）找出等值分數」、「使用模型進行分數與小數的轉換」、「應用分數於問題情境中」；第二階段（5——8年級）強調真實世界與數學問題情境中「分數概念的瞭解、表徵與等價關係」、「發展分數的數常識」、「認識分數、小數和百分率的關係」、「分數的排序」、「分數的估算與運算」、「解題工具的使用」。而《情境數學》在五、六年級之分數單元如表1。

表1 《情境數學》五、六年級分數教材單元名稱

| 年級            | 五年級                                                                                                                                                                               | 六年級                                                                                                                                            |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 內容            | 單元名稱                                                                                                                                                                              | 單元名稱                                                                                                                                           |
| 數<br>(Number) | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 部分與整體 (Some of the Parts)</li> <li>● 測量 (Measure for Measure)</li> <li>● 百分率 (Per Sense)</li> <li>● 生活中的比例問題 (Grasping Sizes)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 分數乘法 (Fraction Times)</li> <li>● 多多少、少多少 (More or Less)</li> <li>● 比和比值 (Ratios and Rates)</li> </ul> |

註：採自Holt, Rinehart, & Winston (2003).

## 二、《大家一起學數學》（MPHM）

新加坡於 2001 進行教育改革後，《大家一起學數學》是新加坡時代媒體因應教育改革所編制的一套教材，目前新加坡共有六種小學數學教材版本，而《大家一起學數學》目前在新加坡小學教材使用率最高（60%）。《基礎數學》是《大家一起學數學》的前身，其教材編輯群，是新加坡在 2001 前所使用之數學教材《基礎數學》之編輯群；因此，《大家一起學數學》可說是《基礎數學》為因應數學教育趨勢而修訂的教材。在 TIMSS1995、1999 和 2003 的國際數學評量中，促使新加坡學生表現出眾的教材，即是使用《基礎數學》此套教材（Singapore Math. Com., 2005）。

《大家一起學數學》是依據認知心理學（尤其是後設認知概念與知識建構論的觀點）編制而成的一套教材，透過小組活動讓學生在活動中反思、重建他們所學習的數學概念。教材提供非例行性問題，鼓勵學生在解題過程中進行思考。此外，對於高能力者，提供挑戰教材以供學生發展其所有潛能；對於低能力者，則有補救教材以幫助學生加強數學基本概念、技巧及解題策略（Ministry of Education in Singapore, 2001）。

《大家一起學數學》的分數學習，是從二年級開始，內容為等分、同分母分數的比較與排序；三年級為等值分數，也就是基本的擴分與約分、異分母分數的比較與排序；四年級為同分母分數的加減，分數乘以整數；五年級為複雜的分數加減乘除運算，並引入分數除以整數、比、比率及百分率等概念（Singapore Math. Com., 2005）。

因新加坡目前正處於教育改革過渡時期，《大家一起學數學》在研究者研究期間（2005——2006）只實施至五年級，故本研究將分析《大家一起學數學》五年級分數教材，六年級部分則採用尚在實施的《基礎數學》，研究結果則統一以《大家一起學數學》代表。五、六年級共 29 個單元（五年級有 19 個單元，六年級有 10 個單元），其中分數單元如表 2。

表 2 《大家一起學數學》五、六年級分數教材單元名稱

| 年級            | 五年級                                                                                                                                                                                                            | 六年級                                                                                                                                         |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 內容            | 單元名稱                                                                                                                                                                                                           | 單元名稱                                                                                                                                        |
| 數<br>(Number) | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 分數一 (Fraction1(1))</li> <li>● 分數二 (Fraction1(2))</li> <li>● 比 (Ratio)</li> <li>● 比值 (Rate)</li> <li>● 百分率一 (Percentage(1))</li> <li>● 百分率二 (Percentage(2))</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>● 比 (Ratio)</li> <li>● 百分率 (Percentage)</li> <li>● 文字挑戰題 (More Challenging Word Problems)</li> </ul> |

註一：採自Fong, H. K., Ramakrishnan, C., & Gan, K. S. (2005).

註二：採自Curriculum Plannig & Development division, Ministry of Education. (2004).

## 三、《康軒數學》

康軒文教集團成立於 1988 年，1991 年開始出版國小藝能教科書，1994 年成立教科書籌備小組，為學科跨出第一步，正式於 1996 年出版國小教科書。後來，為因應九年一貫課程產生，於 2000 年出版九年一貫課程。康軒教材目前在國小教科書的市場占有率 39.21%，為目前市場占有率最高的教科書版本（康軒文教集團，2005）。

《康軒數學》對於分數教材的處理方式，二年級為單位分數的意義；三年級為認識分數的意義、分母為 20 以內的真分數、真分數的合成與分解、同分母真分數的加減問題；四年級為真分數、假分數與帶分數的認識，假分數、帶分數和整數的互換，同分母分數的合成與分解；五年級為分數乘以整數、分數的擴分與約分；六年級為理解通分與約分的意義、比較分數大小、最簡分數的認識、整數乘以分數、分數乘以分數、小數與分數互化、分數除以整數、異分母分數相除、比和比值的意義、最簡單整數比、理解比率、平均速率的意義、正比例的應用。

《康軒數學》五、六年級各有 18 單元，分數單

元如下表 3：

表 3 《康軒數學》五、六年級分數教材單元名稱

| 年級            | 五年級  |       | 六年級                       |                                 |
|---------------|------|-------|---------------------------|---------------------------------|
| 內容            | 單元名稱 |       | 單元名稱                      |                                 |
| 數<br>(Number) | ●分數  | ●等值分數 | ●分數的加減<br>●分數的乘法<br>●比和比值 | ●分數除法<br>●比率、百分率及成正比<br>●分數四則應用 |

註一：採自康軒數學第九冊(2003)。  
 註二：採自康軒數學第十冊(2003)。  
 註三：採自康軒數學第十一冊(2004)。  
 註四：採自康軒數學第十二冊(2004)。  
 註五：康軒教材每年稍做更動，五年級使用2003年出版之教材進行教學後，六年級將改用2004年出版之教材。為使研究更加完善，確保教材的銜接性，因此本研究五年級採用2003年出版，六年級採用2004年出版之數學教材。

從上述文獻分析，可以發現三種教材之設計理念皆強調數學與生活經驗的連結。由此可見，各國對於真實數學理念的重視，不僅在理念上已經普及，且執行層面上，各國亦已經開始著手進行。但是，理念是否真能落實到執行層面，則有賴於對教材進行深入分析。

各版本對於分數的處理方式並不相同，以引入點來說，NCTM(1989)、《大家一起學數學》和《康軒數學》皆於二年級引入等分的意義；NCTM則於第一階段（幼稚園——4年級）引入等值分數，《大家一起學數學》於三年級引入，《康軒數學》則於五年級引入；NCTM將真分數的合成與分解列入5——8年級此階段之學習目標，《大家一起學數學》於四年級引入，《康軒數學》於三年級引入。NCTM將分數乘以整數列入於5——8年級此階段，《大家一起學數學》則於四年級引入，《康軒數

學》則於五年級引入。NCTM將分數的四則運算於5——8年級引入，《大家一起學數學》於五年級引入，《康軒數學》於六年級引入。

又以概念的呈現順序來看，以分數乘法為例，情境數學先後出現「分數乘以整數」、「整數乘以分數」、「分數乘以分數」及「分數乘以小數」之概念；大家一起學數學則先後出現「分數乘以整數」、「分數乘以分數」之概念，並無「整數乘以分數」，下溯四年級亦無此概念出現，僅只出現「分數乘以整數」；康軒數學先後出現「分數乘以整數」、「分數乘以分數」、「整數乘以分數」、「帶分數乘以帶分數」之概念。可見各版本對於分數教材的處理，有其不同的見解。

### 參、研究方法

本研究採內容分析法，以單元為分析單位，針對敘述形式類目與策略類目進行分類，並邀請兩位評分員進行信度檢驗，以達本研究之目的。

#### 一、研究對象

本研究以美國《情境數學》分數概念相關之教材，五年級有四個單元，分別為「部分與整體」、「測量」、「百分率」及「生活中的比例問題」；六年級有三個單元，分別為「分數乘法」、「多多少、少多少」及「比和比值」。

新加坡教材採用《大家一起學數學》五年級分數概念相關之教材六個單元，分別為「分數一」、「分數二」、「比」、「比值」、「百分率一」及「百分率二」；《基礎數學》六年級分數相關教材有三個單元，分別為「比」、「百分率」及「文字挑戰題」。

臺灣《康軒數學》分數概念相關之教材五年級有兩個單元，分別為「分數」和「等值分數」；六年級有6個單元，分別為「分數的加減」、「分數的乘法」、「比與比值」、「分數除法」、「比率、百分率及成正比」及「分數四則應用」。

## 二、內容分析之單位與類目

### (一) 分析單位：

本研究以「題」為分析單位，以該版本之課本為主，而單元結束後的練習教材則不列入編碼，如《情境數學》每一活動結束後有「summary question」、《大家一起學數學》每一單元結束後有「Let's wrap it up」和「Put on your thinking caps」皆不列入題目之編碼。

### (二) 分析類目：

本研究之類目分為「敘述形式類目」與「策略類目」。各類目說明如下：

#### 1. 敘述形式類目：

敘述形式根據 Lesh 和 Lamon (1992) 對真實情境的定義，將敘述形式類目分為情境與無情境二類來分析。情境是指將數學問題以真實生活情境來呈現，且為兒童生活中（包含學校、家庭、社會等）可經驗到的事情。如下列題目皆屬於情境類：

(1) 《康軒數學》六下「分數四則運用」——媽媽買  $\frac{5}{6}$  公斤葡萄花了 45 元，1 公斤葡萄賣多少元？（如圖1）

媽媽買  $\frac{5}{6}$  公斤葡萄花了 45 元，1 公斤葡萄賣多少元？  
把算法記下來。

1公斤(?)元

$\frac{5}{6}$ 公斤(45元)

( )  $\times \frac{5}{6} = 45 \leftarrow$  ( ) 表示1公斤的單價

$45 \div \frac{5}{6} =$

$45 \div \frac{5}{6} =$

如果媽媽買3公斤柳丁花了90元，1公斤柳丁的價錢就是  $90 \div 3 = 30$  (元)；買  $\frac{5}{6}$  公斤葡萄花了45元，1公斤葡萄要……

圖1 《康軒數學》——情境

註：採自《康軒數學》第十一冊（2004，頁75）。

## Recycled Fractions

Enrique Caston is working on an article about recycling bins in Welcome Woods, a nearby park. So far, he has written the following:

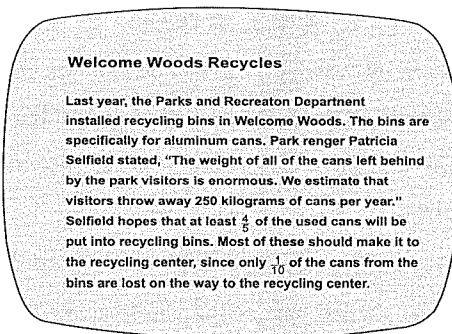


圖2 《情境數學》——情境

註：採自 Mathematics in Context—Fractions Times (pp.36), Holt, Rinehart and Winston, 2003. Illinois: Encyclopædia Britannica.

### (3) 《大家一起學數學》5B「百分率二」——

On Sunday morning, 800 people visited a zoo. 75% of the visitors were children. How many children visited the zoo on Sunday morning? (如圖3)

On Sunday morning, 800 people visited a zoo. 75% of the visitors were children. How many children visited the zoo on Sunday morning?

Total number of visitors = 800

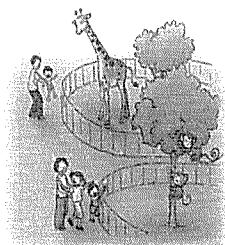
75% of the visitors = 75% of

$$= 75\% \times 800$$

$$= \frac{75}{100} \times 800$$

$$= 75 \times 8$$

$$= 600$$



600 children visited the zoo on Sunday.

圖3 《大家一起學數學》——情境

註一：採自 Fong, H. K., Ramakrishnan, C., & Gan, K. S. (2005: 73).

(2) 《情境數學》五年級「分數乘法」——  
Enrique Caston is working on an article about recycling bins in Welcome Woods, a nearby park. So far, he has written the following: (如圖2)

無情境則指問題呈現沒有任何情境，如題目陳述為「使用附件中的方格條做做看」；或出現方格圖形，判斷部分占整體的比例；或者呈現出長方形，求出面積和周長的比，皆屬此類。如下列題目皆屬於無情境類：

(1)《康軒數學》六下「比率、百分率及成正比」——把小數化為百分率(1) 0.98 (2) 0.59 (3) 0.235 (4) 0.004。

(2)《情境數學》六年級「多多少、少多少」——Show how you can use benchmark fractions to calculate each of the following percent problems:

a. 25% of 364 b. 75% of 364 c. 10% of 364 d. 5% of 364

(3)《大家一起學數學》5B「百分率」——Express the shaded part of the whole as a percentage。(如圖4)

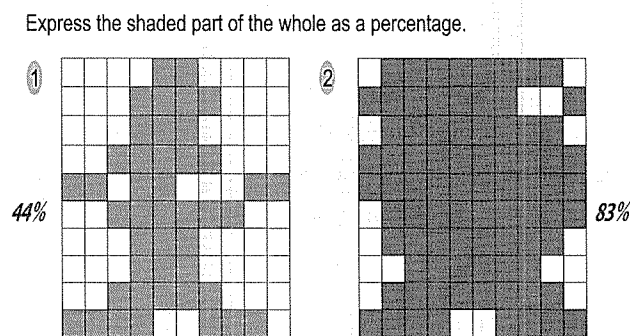


圖4 《大家一起學數學》——無情境

註一：採自Fong, H. K., Ramakrishnan, C., & Gan, K. S. (2005: 64).

## 2.策略類目：

在教育領域中，策略類目是指教材內容使用何種方式引導學生學習數學知識。故本研究之策略類目是指教材呈現之數學內容，傾向何種形式呈現。類目之分類主要參考 Hiebert 等人（2003）在 1999 對七個國家的數學課程內容中提出數學問題描述分為三種：使用程序（Using procedures）、描述概念（Stating concepts）和進行連結（Making connections），本研究依此參考，將數學問題分為程序性知識問題（procedural knowledge）與概念性知識問題（conceptual knowledge）。而進行連結此向度若主要目的為概念認識，則歸類於概念性知識問題；若主要目的為進行程序解題，則歸類為程序性

知識問題。

概念性知識問題的定義為「問題陳述目的在於讓學生能透過操作、表徵等方式，獲得某一概念者，屬概念性知識」，在教材講解中，透過圖示講解，讓學生獲得概念知識，亦屬此類。如下列題目皆屬於概念性知識問題：

(1)《康軒數學》五上「分數」——美吟做一朵花需要 15 公尺長的彩帶，做 4 朵花需要多長的彩帶？說說看，你是怎麼知道的（如圖 5）？

活動二/真分數乘以整數

1 美吟做 1 朵花需要  $\frac{1}{5}$  公尺長的彩帶，  
做 4 朵花需要多長的彩帶？  
說說看，你是怎麼知道的？

1 朵花要  $\frac{1}{5}$  公尺，4 朵花就要 4 個  $\frac{1}{5}$  公尺……

0  $\frac{1}{5}$   $\frac{2}{5}$   $\frac{3}{5}$   $\frac{4}{5}$  1 (公尺)

1 朵 1 朵 1 朵 1 朵

圖5 《康軒數學》——概念性知識問題

註：採自康軒數學第九冊（2003: 29）。

(2)《情境數學》五年級「生活中的比例問題」，利用半具體物進行概念認識，故屬概念性問題（如圖6）。

Ms. Humphrey  
Small and Tall

1. Look at the photograph of Ms. Humphrey as a baby and the photograph of her as an adult. Cut two strips of paper. Make one the length of Ms. Humphrey in her baby picture and the other the height of Ms. Humphrey in her adult picture. Mark and shade the length of the head on each strip of paper.

a. What fraction of the baby's length is the head?

b. What fraction of the adult's height is the head?

c. As Ms. Humphrey grew up, what happened to her head in relation to her height?

圖6 《情境數學》——概念性知識問題

註：採自 *Mathematics in context-Grasping Sizes* (pp.7) , Holt, Rinehart and Winston, 2003.Illinois: Encyclopadia Britannica.

(3) 《大家一起學數學》5A「分數二」，教材透過圖示講解，讓學生獲得異分母加法的概念（如圖7）。

### Adding Unlike Fractions

$\frac{1}{2}$  of a stick is painted red.  $\frac{1}{3}$  of the stick is painted green. What fraction of the stick is painted red and green?  
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = ?$

Add  $\frac{1}{2}$  and  $\frac{1}{3}$ .  
 To add, convert  $\frac{1}{2}$  and  $\frac{1}{3}$  to like fractions.

List the multiples of the denominators, 2 and 3.  
 Multiples of 2: 2, 4, 6, 8, ...  
 Multiples of 3: 3, 6, 9, 12, ...  
 6 is the first common multiple of 2 and 3.

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$        $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$   
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$   
 $\frac{5}{6}$  of the stick is painted red and green.

圖7 《大家一起學數學》——概念性知識類目

註：採自 *My Pals are Here! Mathes.5A* (pp.82) ; Fong Ho Kheong, Chelvi Ramakrishnan & Gan Kee Soon, 2005 ; Singapore: Federal-Marshall Cavendish Education.

程序性知識問題的定義為「問題陳述目的在於讓學生透過程序性教學、計算，獲得概念知識；或利用概念進程序計算、解題」。如下列題目皆屬於概念性知識問題：

(1) 《康軒數學》五上「分數」——算算看， $\frac{3}{4} \times 12 = ( )$ 。

(2) 《情境數學》五年級「部分與整體」——As you can see on the city map, a teacher lives on the far west side of Cedarbeg. Her home is  $3\frac{1}{2}$  miles from school. How many city blocks does she live from school.該題的用意是利用分數乘法的概念來進行解題，已非概念的認識，而是利用已習得的概念進行

解題，故屬程序性問題。

(3) 《大家一起學數學》5B「百分率二」——Eng Soon bought a television set which cost \$1500. He had to pay 5% GST on the television set. How much was the GST? How much did Eng Soon pay for the television set?該題置於概念的學習之後，用意在於讓學童運用習得的概念進行解題，且強調以運算式子呈現，故屬程序性問題。

### 三、內容分析資料處理

本研究之資料處理，一方面計算各國小學五、六年級分數教材「敘述形式類目」之問題呈現，採情境或無情境出現之題數與百分比、「策略類目」之問題為程序性知識問題與概念性知識問題出現之題數與百分比。另一方面針對計算結果，進行質性分析。

### 四、本研究之信、效度

本研究採用評分者一致性作為信度的檢驗方式，邀請兩位現職國小教師，同時亦是數學教育研究所研究生，共計三位評分員進行信度檢定，如表4。採用王石蕃（1993）信度簡易公式計算，得到本研究之相互同意度為  $P = 0.766$ ，信度 = 0.908。王石蕃（1993）指出：依格伯那之文化指標設立 0.80 為信度係數標準，本研究之信度為 0.908，已超過 080，故本研究具有良好之信度。

表4 評分員相互同意度一覽表

| 評分員                            | A     | B     |
|--------------------------------|-------|-------|
| B                              | 0.700 |       |
| 研究者                            | 0.780 | 0.818 |
| 三者相互同意值 $P = 0.766$ 信度 = 0.908 |       |       |

●相互同意值（Pi）：內容分析的平均相互同意度達0.8以上，即表示分類具一定的可信度。

$$P_i = \frac{2M}{N_1 + N_2}$$
  
M：表兩人共同同意的項目數  
N<sub>1</sub> + N<sub>2</sub>：每位評分員同意的項目數

●平均相互同意值（P）

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{N}$$
  
N：評分員總人數

●信度（R）

$$R = \frac{nP}{1 + [(n-1)P]}$$
  
n：評分員總人數

表5 三版本問題情境與數學知識屬性分析

| 版本<br>題數<br>(百分率)<br>內容 | 情境數學                           |                                 | 大家一起學數學                         |                                 | 康軒數學                            |                                 |
|-------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
|                         | 情境                             | 知識屬性                            | 情境                              | 知識屬性                            | 情境                              | 知識屬性                            |
| 分數                      | 244 (92.4)<br>20 ( 7.6)<br>264 | 41 (15.5)<br>223 (84.5)<br>264  | 73 (35.3)<br>134 (64.7)<br>207  | 164 (79.2)<br>43 (20.8)<br>207  | 116 (52.7)<br>104 (47.3)<br>220 | 140 (63.6)<br>80 (36.4)<br>220  |
| 比和比值                    | 229 (100)<br>0 ( 0)<br>229     | 69 (30.1)<br>160 (69.9)<br>229  | 124 (79.5)<br>32 (20.5)<br>156  | 81 (51.9)<br>75 (48.1)<br>156   | 32 (72.7)<br>12 (27.3)<br>44    | 20 (45.5)<br>24 (54.5)<br>44    |
| 百分率                     | 146 (97.3)<br>4 ( 2.7)<br>150  | 42 (28.0)<br>108 (72.0)<br>150  | 70 (36.6)<br>121 (63.3)<br>191  | 141 (73.8)<br>50 (26.2)<br>191  | 16 (47.1)<br>8 (52.9)<br>34     | 24 (70.6)<br>10 (29.4)<br>34    |
| 總計                      | 619 (96.3)<br>24 ( 3.7)<br>643 | 152 (23.6)<br>491 (76.4)<br>643 | 267 (48.2)<br>287 (51.8)<br>554 | 386 (69.7)<br>168 (30.3)<br>554 | 164 (55.0)<br>134 (45.0)<br>298 | 184 (61.7)<br>114 (38.3)<br>298 |

註一：情境下的數字依序代表情境題數、無情境題數與總題數。（）內的數字代表該項目在該向度總題數中所占之百分率。  
註二：知識屬性下的數字依序代表程序性知識問題數、概念性知識問題數與總題數。（）內的數字代表該項目在該向度總題數中所占之百分率。

本研究採用之分析類目表，參考Hiebert 等人(2003) 分析七個國家的數學課程時所使用之研究工具，作為內容分析之架構，故本研究工具本身已具內容效度。此外，在編制過程中，兩位小學教師、數學教育專家以及研究者本人，進行討論、修訂類目表，以達共識，故本研究亦具專家效度。

#### 肆、研究結果與討論

本研究之主要目的是探究三版本之敘述形式類目與策略類目的應用情形，「敘述形式類目」分為情境與無情境二類；「策略類目」分為程序性知識問題與概念性知識問題二類。進行題目計數時，為使分析更加完整，每個問題都計數在內，以避免某些問題被忽略。

本研究只針對三版本五、六年級之分數教材進行研究，因此本研究結果亦只針對該版本在該階段之分數教材進行探討，結論並不做過度推論至其他概念。研究結果如下表 5：

綜合表 5 之資料分析與比較，可得到下列幾點發現：

##### 一、《情境數學》之情境安排優於《康軒數學》和《大家一起學數學》

在情境安排上，總體以《情境數學》最高，高達96.3%，《康軒數學》次之（55.0%），而以《大家一起學數學》較低（48.2%）。《康軒數學》和《大家一起學數學》在數學知識的情境安排，仍有相當高的比例（分別為 45.0%、51.8%）是無情境的。

以目前數學教育趨勢強調真實情境學習數學來說，《康軒數學》與《大家一起學數學》在情境的比例分別為48.2%、55.0%。而研究(Lesh & Lamon 1992; Mullis, Martin, Beaton, Gonzalez, Kelly & Smith, 1997; Romberg & de Lange, 1998; Hiebert et al., 2003; Freiman & Volkav, 2004)指出透過真實情境呈現數學知識，有助於學童學習數學。可見情境的設計有助於學生對於數學知識的理解。因此，在情境的安排

上，《康軒數學》和《大家一起學數學》是否應加強情境的安排，值得課程設計者與教育者進一步思考。

##### 二、《情境數學》重視概念理解，《康軒數學》與《大家一起學數學》重視程序性知識

從分析結果可知三版本在五、六年級階段對於分數教材的處理，《情境數學》著重於概念的理解，概念性問題占 76.4%，而《康軒數學》（38.3%）和《大家一起學數學》（30.3%）則為30% 左右，僅為《情境數學》的一半，可見《康軒數學》和《大家一起學數學》強調計算技巧的學習與應用，對於概念性的理解則較少著墨。以分數除法為例，《情境數學》之教學目標「使用非正式的解題策略來進行分數乘、除運算」，教材處理「分數除以分數」問題，採用乘法概念進行分數除法概念的學習。如  $3\frac{1}{2} \div \frac{1}{8}$ ，透過概念的理解，知道 1 是由 8 個  $\frac{1}{8}$  所組成，因此，3 共有  $3 \times 8$  個  $\frac{1}{8}$ ，而  $\frac{1}{2}$  是 1 的一半，是由 4 個  $\frac{1}{8}$  所組成，因此，共有  $24 + 4 = 28$  個  $\frac{1}{8}$ 。《大家一起學數學》之教學目標「透過兩分數相乘的方式，進行真分數除以整數的運算」，強調透過教授兩分數相乘的方式，進行真分數除以整數的運算。《康軒數學》之教學目標「能解決整數除以真分數問題」也採用顛倒相乘的算法，解決分數除以分數的問題。《康軒數學》和《大家一起學數學》在分數除法，皆引入正式的成人算則；《情境數學》則採用乘法概念來進行分數除法概念的學習。造成此原因，亦有可能為《康軒數學》和《大家一起學數學》在分數概念的理解，在五年級前已學習完畢。因此，五、六年級著重在程序性計算，以致研究結果顯示《情境數學》重視概念理解，而《康軒數學》與《大家一起學數學》重視程序性知識。有趣的是，這和 Hiebert 等人（2003）針對八年級的數學課室中所進行的研究結果：各國在課室中使用程序性進行數學知識認識的比例以美國最高，則依據本研究之結果，《情境數學》有推翻此現象之跡象。但不可忽略的是 Hiebert

等人（2003）所進行之研究乃是實際課堂教學之研究。因此，教材設計與實際執行層面所產生的差異，在資料解釋時，仍須小心詮釋。故實際上學生所獲得的數學概念知識，有待進一步研究探討。

從國際上對於數學教育的趨勢以及國際性評量TIMSS（2003）與PISA（2003）來看，可發現各國越來越重視數學概念的理解與程序性技能的熟練。然而，研究結果則發現，不管是《情境數學》、《大家一起學數學》和《康軒數學》在程序性問題與概念性問題的分配上，在此階段都偏重某一類知識，為使符合國際數學教育趨勢及培養出優秀的未來人才，進行教材調整應是教育改革與課程設計者所需考量面向之一。

### 三、將「比和比值」置於真實情境之比例高於「分數」與「百分率」

從研究結果發現，三版本在安排「比和比值」教材時，置於真實情境的比例都比其他兩個向度來得大，由此可知三版本一致最能將比和比值與生活經驗連結；但是，分數與百分率教材與生活經驗的連結則較為不易，因此《康軒數學》與《大家一起學數學》仍有相當大比例的教材安排是無情境的。

值得一提的是《康軒數學》和《大家一起學數學》將比和比值置於真實情境的百分率分別為59.1%、54.5%，而其問題屬性屬於概念性問題則分別為54.5%、48.1%，此兩版本在三個向度中，真實情境與概念性問題比例皆屬最高。因此，從問題情境與知識屬性的結果來看，可發現若將問題置於真實情境中，有助於概念性的理解，至於其確切相關性，則需進一步探究。

### 四、數學知識內容以《大家一起學數學》最深，其次分別為《康軒數學》、《情境數學》

從三版本與分數相關之教材整體來看，《康軒數學》著重在「分數」向度，比例明顯高於「比和比值」、「百分率」兩者；《情境數學》則以「分數」和「比和比值」較多；《大家一起學數學》三

個向度則相差不多，其在「百分率」部分明顯多於其他兩個版本。值得注意的是，《大家一起學數學》在五年級已將分數四則運算教授完畢，分數內容在六年級則未出現，此原因造成其六年級教授的重點以百分率為主，亦使得其百分率教材所占比例明顯高出其他版本。《康軒數學》對於分數四則應用則在六年級教授，因此百分率、比和比值的比率則明顯少於《大家一起學數學》。由此可推論，《大家一起學數學》對於數學知識的安排，約早於《康軒數學》一個年級。以分數乘以分數問題為例，《大家一起學數學》在五年級初即安排此教學內容。《康軒數學》在五上則只出現分數乘以整數問題，至於分數乘以分數的問題，安排在六上學習。而《情境數學》在五年級亦有分數乘以整數及整數乘以分數問題，至於分數乘以分數問題，則亦是安排在六年級學習。

分數是學童學習比和比值與百分率的基礎。《康軒數學》五年級在分數的基本定義著墨最多；相對的，比和比值、百分率則略微較少。由此可知《康軒數學》的教材安排，數學知識略淺於另外兩個版本。但是，若細看教材內容，則發現另一個需考量的因素，《情境數學》雖在比和比值（35.6%）和百分率（23.3%）著墨許多，但對於各種數學知識都著重在概念的理解，教材內容多圍繞在概念的認識，而在深度上則無明顯加深。從上述分析，可發現在數學知識的安排上，以《大家一起學數學》深度最深，而《康軒數學》則略淺些，此亦可做為我國教材改進方向之一。

陳宜良、單維章、洪萬生與袁媛（2005）於中小學數學科課程綱要評估與發展研究報告中指出「新加坡之課程深於美國加州與臺灣」，大體而言，教材之編排內容與順序乃依循課程綱要而設計，因此，綱要深於另外兩者，其所設計之教材內容一般而言亦會深於另兩者。因此，本研究與陳宜良等人（2005）研究結果一致，新加坡《大家一起學數學》略深於臺灣《康軒數學》。而數學教材概念淺化，也是目前教育現場所遭遇之問題，緣於此

故，教育部亦於九十二年提出九年一貫數學課程綱要，以加深數學課程。

## 伍、結論與建議

依本研究結果，研究之結論與建議如下：

### 一、結論

（一）《大家一起學數學》五、六年級之分數教材略深於《康軒數學》：

數學問題情境與知識屬性為現今數學教育改革的重要理念，研究結果顯示在數學知識深度與陳宜良、單維章、洪萬生與袁媛（2005）相一致，咸認為在分數概念上，新加坡教材略早於臺灣一個年級。

（二）《情境數學》的情境安排多於《大家一起學數學》和《康軒數學》；《情境數學》著重概念理解；《大家一起學數學》和《康軒數學》則著重在程序性運算：

三版本五、六年級之分數教材在情境安排上，《情境數學》的情境安排多於《大家一起學數學》和《康軒數學》，在講究情境學習數學的教育趨勢下，《大家一起學數學》和《康軒數學》在此向度上，仍有探討、改進的空間。在數學知識屬性上，該階段五、六年級之分數教材《情境數學》著重概念理解；《大家一起學數學》和《康軒數學》則著重在程序性運算，從講究概念與計算並重的數學教育潮流中，三版本在此部分皆須稍做調整。

### 二、建議

（一）教材深度的加強

研究顯示，《康軒數學》略淺於《大家一起學數學》一個年級。數學能力一直是國際共同關注的焦點，學生的數學學習成就也成為國際間認為人才是否具有競爭力的指標之一。有鑑於此，加深數學教材應是課程改革者考量面向之一，以便培養出適應未來競爭的人才。

（二）情境與問題知識屬性的定義

情境與非情境、概念性知識與程序性知識的定

義為本研究過程中，較為複雜的一個環節。目前甚少研究明確定義出情境與非情境，然透過情境學習數學又是未來學習數學的重要趨勢，因此，若能針對情境與非情境發展一套分類工具，必能對未來的數學教育有所貢獻，希冀本研究可提供未來研究者欲探討情境與非情境的參考方向。另在知識屬性分類上，因知識學習的過程中，必同時含有兩種知識屬性的存在，因此，在研究過程中，僅以研究者定義將其進行分類，然並不代表屬於程序性知識問題不含有概念性理解，故未來研究者在參考之餘，仍需注意此觀點詮釋。

（三）情境與知識屬性關連性的探討

從比和比值的向度來看，可發現真實情境與概念性知識間有所關連，若能針對兩者間的關連進一步探討，必能更加理解真實情境與知識屬性間的相關性。從《情境數學》的教材編排來看，可發現問題多屬概念性知識問題。然而，教師在實際執行層面，是否能確實執行，此乃為學生學習數學知識的關鍵。因此，若能針對教材與實際課程間的相關性進行探究，必能對數學教育改革有所幫助。

（四）全面性整套教材的探討

因研究者能力、時間之不足，本研究僅針對五、六年級之分數教材進行探討分析，結論也僅只針對該階段之分數教材。未來研究若能針對整套教材的所有數學知識進行分析，必能對於數學課程改革給予更多的協助。

## 參考文獻

- 王石蕃（1993）。內容傳播分析法—理論與實證（二版三刷）。臺北：幼獅。
- 康軒文教編輯部（2003）。數學五上。臺北：康軒。
- 康軒文教編輯部（2003）。數學五下。臺北：康軒。
- 康軒文教編輯部（2004）。數學六上。臺北：康軒。
- 康軒文教編輯部（2004）。數學六下。臺北：康軒。
- 康軒文教編輯部（2005）。關於康軒經營成果。2005年4月3日，取自[http://www.knsh.com.tw/about/about.asp?go\\_Sub\\_Topic=08](http://www.knsh.com.tw/about/about.asp?go_Sub_Topic=08)
- 陳宜良、單維章、洪萬生、袁媛（2005）。中小學數學科

課程綱要評估與發展研究。臺北：教育部。

劉秋木（2002）。國小數學科教學研究。臺北：五南。

Curriculum Planning & Development division, Ministry of Education. (2004). *Primary Mathematics 6A*. Singapore, Times Media.

Curriculum Planning & Development division, Ministry of Education. (2004). *Primary Mathematics 6B*. Singapore, Times Media.

Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth-and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (2), 111-144.

Fong, H. K., Ramakrishnan, C., & Gan, K. S. (2005). *Maths 5A*. Singapore, Federal - Marshall Cavendish Education.

Fong, H. K., Ramakrishnan, C., & Gan, K. S. (2005). *Maths 5B*. Singapore, Federal - Marshall Cavendish Education.

Freiman, V., & Volkov, A. (2004). *Fractions and fractions again?! A comparative analysis of the presentation of common fractions in the textbooks belonging to different didactical traditions*. ICME-10, Discussion Group 14 Copenhagen, Demark.

Haggarty, L., Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classroom: Who gets an opportunity to learn what ? *British Educational Research Journal*, 28(4), 567-590.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., & Jacobs, J., et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 video study*. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics.

Holt, Reinhart, & Winston (2003). *Mathematics in context*. Encyclopaedia: Britannica.

Lesh, R., & Lamon, S. J. (Eds.). (1992). *Assessment of authentic performance in school mathematics*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Ministry of Education in Singapore. (2001). *Primary mathematics syllabus*. Singapore: Curriculum Planning and Development Division Ministry of Education. Retrieved January 20, 2006, from [http://www.moe.gov.sg/cpdd/doc/Maths\\_LowSec.pdf](http://www.moe.gov.sg/cpdd/doc/Maths_LowSec.pdf)

Mullis, I., Martin, M., Beaton, A., Gonzalez, E., Kelly, D.,

Smith, T. (1997). *Mathematics achievement in the primary school years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2000). *TIMSS 1999 international mathematics report: Findings from IEA's Repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the eighth grades*. Chestnut Hill, MA: Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 international mathematics report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Neidorf, T. S., Binkley, M., Gattis, K., & Nohara, D. (2004). *A content comparison of the National Assessment of Education Progress (NAEP), the Third International Mathematics and Science Study Report (TIMSS), and the Programme for International Student Assessment (PISA)*. Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center of Education Statistics.

Organization for Economic Co-operation and Development. (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. Paris, France: Organization for Economic Co-operation and Development.

Patrick, G., Juan, C. G., Lisette, P., Erin, P., Leslie, J., David, K., & Trevor, W. (2004). *Highlights From the Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) 2003(NCES2005-005)*. U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office.

Post, T. R., Cramer, K., Behr, M. J., & Lesh, R., Harel, G. (1992). Curricula implications of research on the teaching and learning of rational numbers concepts. In T. Carpenter, T., E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Research on the teaching, learning, and assessing of rational number concepts* (pp. 327-362). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Reys, B. J., Reys, R. E., Papick, I., Tarr, J., & Arbaugh, F. (2006). Show-Me Project (renewal). <http://showmecenter.missouri.edu>
- Reys, R. E., & Yang, D. C. (1998). Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth- and Eighth-Grade Students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 225-237.
- Romberg, T. A., & de Lange, J. (Eds.). (1998). *Mathematics in Context*. Chicago: EBEC.
- Romberg, T., & Shafer, M. (2003). Mathematics in Context (MiC): Preliminary evidence about student outcomes. In S. Senk & D. Thompson (Eds.), *Standards-based school mathematics curricula: What are they? What do students Learn?* (pp. 225-250). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Singaporemath.com Inc. (2005). *FAQ-Primary Math*. Singapore: Singaporemath.com Inc. Retrieved December 29, 2005, from [http://www.singaporemath.com/FAQ\\_Primary\\_Math\\_s/15.htm#NewSeries](http://www.singaporemath.com/FAQ_Primary_Math_s/15.htm#NewSeries)
- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., & Houang, R. T., Wang, H., Wiley, D. E., Cogan, L. S., et al. (2001). *Why schools matter: A cross-national comparison of curriculum and learning*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Steen, L. A. (1990). *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy*. Washington, D.C.: National Academy Press.
- Stigler, J. W., Hiebert, J. (2004). Improving mathematics teaching. *Educational Leadership*, 61(5), 12-17.
- Tornroos, J. (2004). *Mathematics textbooks, opportunity to learn and achievement*. ICME-10M, Discussion Group 14 Copenhagen, Denmark.

初稿收件：民國 95 年 6 月 15 日

完成修正：民國 95 年 11 月 24 日

正式接受：民國 96 年 1 月 3 日

# The Study of Differences on Fractions in the Textbooks Among Taiwan, Singapore, and U.S.A.

Li-Ling Wu    Der-Ching Yang

National Chiayi University

The purposes of this study were going to investigate the differences of fraction among the KH textbooks in Taiwan, the MIC in the U.S.A., and MPHM in Singapore for 5th and 6th grade. This study applied the method of content analysis to examine the difference of presenting style of mathematical problems (context or non-context) and the difference of attributes of mathematical contents.

Results indicate that the MIC textbooks in the U.S.A. highly focus on situated problems than the KH in Taiwan and MPHM in Singapore. At the same time, the mathematical contents in MIC put more emphasis on conceptual knowledge than KH and MPHM. Moreover, the depth of MPHM on fraction for 5th and 6th grade are more difficult than MIC and KH textbooks.

Keywords: Content analysis, fraction, situation, procedural knowledge, conceptual knowledge