

數字感的重要性與教學

張漢宜

高雄縣燕巢國小教師

近幾年來，美國中小學的數學教育逐漸重視「數字感」(number sense)的教學。例如，美國國家數學標準之教師學會(the National Council of Teachers of Mathematic's standards, NCTM)的學校數學標準委員會(Commission on Standards for School Mathematics, 1987)已確認數字感是有效的數學教學計畫的成份之一(引自Dougherty & Cretes, 1989)，並開始將數字感的發展納入課程之中，由此可以看出數字感的重要性。由於數字感是一種重要的認知性能力，因此它同時受到數學教師與認知心理學家的關切。以下本文將就數字感的基本性質、數字感的意義、數字感的重要性，數字感的教學與評量等幾個部份來討論。

一、數字感的基本性質

認知心理學家認為數學知識一如其它學科的知識，如閱讀、寫作、與科學，可以分為描述性知識與程序性知識；描述性知識涵蓋了一些事實、理論、物件(objects)、與事件(events)的知識，程序性知識是知道如何完成事情的知識(Gagne, Yekovich, C. W. & Yekovich, F. R., 1993)。數學學得好的學生在這兩類知識上通常要比一般的學生較佳。近年來的研究也發現，數學概念的理解(描述性知識)在使用解題策略(程序性知識)的過程中扮演了重要性的角色，因此，數學概念的理解一直是一些學者研究的焦點之一。而在研究數學概念理解的過程，很多學者發現了數字感的重要性。

從認知心理學家對知識的分類來看，數字感在性質上是一種概念理解的知識(描述性知識)。數字感本身除了是一種重要的數學概念，另一方面，一些學者也發現它會影響到數學解題策略(程序性知識)的使用，例如，心算(Gagce' et al., 1993)。因此，數字感會受到重視自是不言而喻的了。

二、數字感的意義

在談到數字感的意義之前，我們先來看一個簡單的例子。例如， $1/2 + 2/3 = ?$ ，就國外的報告或國內一些教師的教學經驗而言，都會發現有一些學生可能會「堅持」認為答案是 $3/5$ ，這種堅持有時與迷信一樣難以理喻。但是對一些對數字有敏察能力的學生而言，即使他尚未開始進行計算，他也會知道 $1/2$ 表示1的一半， $2/3$ 大於 $1/2$ ，所以最後算出來的答案不可能小於1。這個例子可以讓我們發現，數字感不是計算本身，但它對計算的過程與結果的合理性(reasonableness)具有監控的作用，某種程度上，它似乎同時具有後設認知的成份在內。

很多學者與數學教師對數字感的重要性都具有共識，但是目前仍無一個定義可以被廣為接受（Thompson & Rathmell, 1989）。Hope（1989）認為數字感只能做廣義的定義，他認為數字感可以是一種對數字及其使用與解釋的「感覺」，計算時對正確程度的「了解」，以及使用數字支持論證的「常識」；數字感也可以是產生合理估計、偵測算術錯誤、選擇最有效的計算程序、與辨識數字組型的「能力」。Kastner（1989）則以三個命題來說明數字感，(一)有數字感的人會有能力與信心來決定答案的合理性，(二)一個人越能將數學與感官經驗的世界聯結起來，他越能做決策，(三)當一個人可以將抽象視為是由具體而有意義的經驗類化而來的，他就能順利的掌握數學的抽象特徵。

Thompson與Rathmell（1989）將數字感分為四種成份：

- (一)數字意義與關係：這涵蓋了基本的正整數、小數與分數的瞭解；同時，對於數字的分解與結合也能瞭解，例如，瞭解12可以是由6加6或是8加4結合而成的，而523夠可以分解成由5個100，2個10，3個1。
- (二)數字的相對數量：可以瞭解35大於25小於55，696較接近700而離735較遠，0.4987653很接近 $1/2$ ，9.987653已經很接近10。
- (三)數字運算的相對效果：例如，知道一個正數乘以另一個小於1的正數必然小於該正數，如7乘以0.5會小於7；而一個正數乘以另一個大於1的正數時必然大於該正數，如7乘以1.5會大於7。再者，將(二)數字的相對數量與(三)數字運算的相對效果，這兩種知識結合起來時，學生可以瞭解3.95乘29的結果約為4乘30。
- (四)生活環境中，各種事物的數量參照標準：這與日常生活中相關數字的合理性與適切性有關。例如，知道一個小孩的身高不可能會有5公尺高，一間普通的學校教室不可能容納1000人等。

從上述的幾種說法中，我們可以理解數字感的基本涵義。也許，Gagne'等人（1993）對數字感的看法可以幫我們做一個精簡的小結，他們認為數字感是指，使數字與數字系統產生意義的觀念（idea）。

三、數字感的重要性

- (一)引發學習數學的興趣：興趣原則是教學原理中的一項重要法則。傳統數學教學似乎較偏重基本事實的記憶與計算的精熟，而較少教學生去發現數字間的關係，結果學生無法享受學習數學的樂趣（Howden, 1989）。數字感的教學則有助學生去探索數字的關係而避免枯燥的記憶，例如教將九九乘法的內容以實物或圖形的方式加以表徵，學生很快就能發現 $3 \times 9 = (3 \times 8) + (3 \times 1)$ 。誠如有些學者所說的，我們不應該使學生認為數學是很機械式的（Markovits, Hershkowitz, & Bruckheimer, 1989）。
- (二)協助發展心算技巧：心算是一種策略性的知識，從現有的研究中可以發現，有些心算活動涉及到分配律（distribution law）的使用。分配律的使用則與數字感有關（Gagne et al., 1993）。例如，一個有良好數字感的學生會很快的發現 $15 \times 48 = (10 \times 48) + (5 \times 48)$ 。
- (三)增進解題過程中的後設認知能力：一個有良好數字感的解題者在解題過程中，一開始他會根據題意而預設合理答案的可能類型與可能數目，並能據以拒絕不合理的答案（Dougherty & Crites, 1989）。由於這是一種設定目標，檢驗

目標符合的情況，並修正答案的後設認知歷程，因此，從認知心理學的觀點來看，數字感似乎與後設認知能力有關。

四、數字感的教學與評量

(一)教學原則

Howden (1989) 曾提出下列兩個教學原則。

- 1.對數字友善：在發展數字感之前須先對數字產生友善的感覺。這可從認識週遭的具體事物所具有的數字開始。
- 2.有技巧的教師與鼓勵好奇與探索的環境：教師本身對數字的敏察，並營造出鼓勵學生探索數字意義的環境，是協助學生發展數字感的關鍵因素，這兩種因素是無可替代的。

(二)教學方法

以下列舉一些教師與學者提出的教學方法，做為教師教學時的參考。

- 1.經由「有意義」與「有目的」的計算、測量、與估計活動發展數字感 (Hope, 1989; Kastner, 1989)。

以小學生在數學課中最主要的學習活動「計算」為例，雖然讓學生學會計算程序是很重要的學習目標，但是，也需要使學生發展出下面的一些「領悟」：

- (1)計算是有目的的。如果學生瞭解計算與日常生活的工作有關，他們會比較有動機去學習計算。例如，讓學生實際看看傳統市場中商販們的買賣計算活動，可以使學生瞭解他們現在所學的計算是有意義的。
- (2)計算程序的選擇需視情境脈絡而定。學生需瞭解實際的情境會影響計算程序的選擇。例如，計算 $100/4$ 時，如果將100想像成100元，4是4個人，則計算本身代表了將100元平均分給4人，每人可得25元；這種題意也可使學生推論到乘除的互逆運算關係，也就是說， $100/4$ 可以被想做是 $100/2 = 50$ ， $50/2 = 25$ 。
- (3)計算經常是可以簡化。簡化計算是從發現數字間的關係而來的，教師需鼓勵學生在計算前找出簡化計算的方法，例如， $24 \times 25 = (6 \times 4) \times 25 = 6 \times (4 \times 25) = 600$ ，這是一個使用分配律的例子，運用分配律也是發展心算所需要的能力。
- (4)情境可以用來評估計算所得的合理性。例如，有些學生會認為 $0.5 + 0.6 = 0.11$ ，但是，如果他將0.5想成是0.5元或是1元的一半，0.6是0.6元且比0.5元多一點，0.5元+0.6元不可能會少於1元，所以0.11是不合理的答案。
- (5)計算出來的答案必需加以解釋。學生也應該學習決定如何解釋計算的結果，例如，100除以6等於16.666....，對於要宴請賓客的主人而言，答案代表著是最好準備17桌；對於某些須將公尺轉換為公分的建築師而言，答案代表著約1667公分。由於學校較少使用文字脈絡的題目教導計算，而且小數點的取舍是由教師或教科書來決定，因此，學生較少學到如何解釋計算結果。

- 2.鼓勵學生問「為什麼」

Whitin (1989) 認為當學生問為什麼時，他們同時也正在形成數字感。例如，

一個已知道 $6+7=5+8$ 的學生發現 6×7 不等於 5×8 ，他可能會問為什麼，此時教師可以順著學生的想法，引導學生發現正確的答案。為了讓學生願意問問題，教師需要營造出適當的教室氣氛，以激發學生的好奇心。

3. 解釋法

解釋法 (explanation) 是用來協助學生洞察答案是否合理。Glatzer與Glatzer (1989) 認為傳統教學過度重視計算程序與答案，而不管答案的合理性。因此，他們提出一種稱為「No Answer Please」的活動，這個活動主要是要幫助學生注意問題與答案的「性質」。教師可以設計一些含有錯誤答案的題目，學生不需要計算這些題目，他們只需根據題目說出或寫下他們對答案的瞭解，例如，就 $0.3 + 0.7 + 0.5 = 0.15$ 這個題目而言，學生可以做以下的解釋，

- (1) 0.5是1的一半，0.7大於0.5，所以答案應該大於1。
- (2) 三個題目的小數點後面都只到十分位數，所以答案不可能出現百分位數。
- (3) 任何正數加0.5不可能小於0.5。
- (4) $0.3 + 0.7$ 大於1，所以答案不可能小於1。

除了上述的方法外，問問題以引導學生思考 (Dougherty & Crites, 1989)，提供機會使學生不同的問題類型 (如數字題與文字題) 中使用數字感 (Markovits et al., 1989)，與使用實物與圖形 (Howden, 1989) 都有助數字感的發展。當然，可能還有更多的方法等待教師去設計與運用。

(三) 數字感的評量

根據美國的學校數學課程與評量標準 (Curriculum and Evaluation for School Mathematics) 的說法，「數字感的評量不能只限於使用測驗，而必需是連續的，動態的，非正式的歷程，這是一種觀察、推測與不斷判斷學生理解改變情形的歷程」 (Commission on standards for Schools Mathematics of the NCTM 1987, 209; 引自Howden, 1989)。觀察、傾聽、讓學生敘述他們的想法、與問學生問題都是可以用來評量學生數字感的方法。

五、小結

數字感是對數字與數字關係的敏銳覺察。它是一種數學概念，也會影響解題策略的使用，又由於它能預設並監控答案的合理性，它似乎也是一種後設認知的能力。經由有意義有目的的學習活動，學生可以發展出良好的數字感；經由非正式的評量過程，教師可以瞭解學生數字感發展的情形。

最近，教育改革審議委員會主任委員李遠哲先生在教改會第三次研討會的開幕致詞中，提出九點教育目標，其中第六點是幫助學生有效使用語言與數字 (見中國時報，八十五年四月十三日)。不論是在日常生活與工作中或是從事學術研究，有效使用數字經常都是必備的一種能力。為了幫助學生有效使用數字，引導學生發展良好的數字感應該是很好的方式之一。

參考書目

- Dougherty, B. j. & Crites, T. (1989). Applying number sense to problem solving. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 22-25.

- Gagne', E. D., Yekovich, C. W., & Yekovich, F. R.(1993). *The cognitive psychology of school learning* (2nd ed.). New York, NY: Harper Collins College Publisher.
- Glatzer, D. j. & Glatzer, J.(1989). No answer please. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 38-39.
- Hope, J.(1989). Prompting number sense in school. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 12-16.
- Howden, H.(1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*,36(6), 6-11.
- Kastner, B.(1989). Number sense: The role of measurement applications. *Arithmetic Teacher*,36(6), 40-46.
- Markovits, Z., Hershkowitz, R., & Bruckheimer, M.(1989). Research into practice. *Arithmetic Teacher*,36(6), 53-55.
- Thompson, C. S. & Rathmell, E. C.(1989). By way of introduction. *Arithmetic Teacher*,36(6), 2-3.
- Whitin, D.(1989). Number sense and the importance of asking "why" . *Arithmetic Teacher*,36(6), 26-29.

現代化

胡適

我個人近平常常想過，我們這幾十年的革新工作，無論是緩和的改良運動，或是急進的革命工作，都犯了一個大毛病，就是太偏重主義而忽略了用主義來幫助解決的問題。主義起於問題，而迷信主義的人往往只記得主義而忘了問題。「現代化」也只是一個問題，這個問題的明白說法應該是這樣的：「怎樣解決中國的種種困難，使她在這個現代世界裡可以立腳，可以安穩過日子了。」中國的現代化只是怎樣建設起一個站得住的中國，使她在這個現代世界裡可以佔一個安全平等的地位。問題在於建立中國，不在於建立某種主義。一切主義都只是一些湯頭歌訣，他們的用處只在於供醫生的參考採擇，可以在某種症候之下醫治病人的某種苦痛，醫生不可只記得湯頭歌訣，而忘了病人的苦痛；我們也不可只記得主義，而忘了我們要用主義來救治建立的祖國。